PROPRIETATEA LUI DARBOUX

#

6. Proprietatea lui Darboux

6.1. Funcţii cu proprietatea lui Darboux. Generalităţi

6.1.1. Definiţie

Fie $I \subseteq R$ un interval şi $f : I \to R$ o funcţie. Spunem că f are Proprietatea lui Darboux (prescurtat P.D.) dacă

$\forall\, a,b \in I$, $a < b$ şi oricare ar fi γ cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$ există $c \in (a,b)$ astfel încât $f(c) = \gamma$.

6.1.2. Observaţii

a) Funcţia $f : I \to R$ are P.D. $\Leftrightarrow$ $\forall\, a,b \in I, a < b$ şi $\forall\, \lambda \in (0,1)\ \exists\ c \in (a,b)$ astfel încât $f(c) = (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b)$

b) Funcţia $f : I \to R$ are P.D. $\Leftrightarrow$ $\forall\, a,b \in I$, $a < b$ şi $\forall\, \gamma$ cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$, paralela la axa Ox care trece prin punctul $(0,\gamma)$ intersectează graficul lui f în cel puţin un punct $(x, f(x))$ cu $x \in (a,b)$

c) Punctul c din definiţie nu este întotdeauna unic determinat. Pot exista o infinitate de puncte $c \in (a,b)$ astfel încât $f(c) = \gamma$

d) Fie $f : I \to R$ o funcţie cu proprietatea:

$\forall\, a,b \in I$, $a < b$ şi oricare ar fi γ cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$ există $c \in I$ astfel încât $f(c) = \gamma$.

De aici nu rezultă numaidecât că f are P.D., ci doar faptul că $f(I)$ este un interval.

De multe ori definiţia P.D. este destul de greu de utilizat. De aceea vom enunţa următoarea propoziţie:

6.1.3. Propoziţie

Fie $I \subseteq R$ un interval şi $f : I \to R$ o funcţie. Funcţia f are P.D. dacă şi numai dacă $\forall\, J \subseteq I$ un interval $\Rightarrow$ $f(J)$ este interval

Demonstraţie

$(\Rightarrow)$

Fie $J \subseteq I$ un interval. Fixăm $y_1, y_2 \in f(J)$, $y_1 < y_2$ şi $y_1 < \lambda < y_2$. Evident există $x_1, x_2 \in J$ astfel încât $f(x_1) = y_1$ şi $f(x_2) = y_2$. Conform definiţiei P.D. există x_0 între x_1 şi x_2 astfel încât $f(x_0) = \lambda \in f(J)$. Deci $\forall\, y_1, y_2 \in f(J)$ rezultă că $[y_1, y_2] \subseteq f(J)$. De aici rezultă că $f(J)$ este un interval.

($\Leftarrow$)

Fie $a,b \in I$, $a < b$ şi γ cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$. Întrucât $f([a,b])$ este un interval şi $f(a), f(b) \in f([a,b])$, rezultă că $\gamma \in f([a,b])$, deci există $c \in [a,b]$ astfel încât $f(c) = \gamma$.

6.1.4. Exemple

Care dintre funcţiile următoare au P.D. ?

a) $f : R \to R$, $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$

b) $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x, x \le 0 \\ 1 - x, x > 0 \end{cases}$

c) $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} 0, x \in Q \\ 1, x \in R \setminus Q \end{cases}$

d) $f : [0,1] \to R$, $f(x) = \begin{cases} x, x \in Q \\ x^3, x \notin Q \end{cases}$

Soluţii

a) $f([-1,1]) = \{-1,0,1\}$ care nu este interval, deci *f* nu are P.D.

b) $f\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right) = f\left(\left[-\frac{1}{2},0\right]\right) \cup f\left(\left(0,\frac{1}{2}\right]\right) = \left[-\frac{1}{2},0\right] \cup \left[\frac{1}{2},1\right)$ care nu este interval, deci *f* nu are P.D.

c) $f([0,1]) = \{0,1\}$ care nu este interval, deci *f* nu are P.D.

d) Fie $J = \left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$. Arătăm că $f(J)$ nu este interval. Într-adevăr:

$$f(J \cap Q) = X \subseteq \left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$$

$$f(J \setminus Q) = Y \subseteq \left[\frac{1}{27},\frac{1}{8}\right]$$

Deci $f(J) = X \cup Y$ şi $X \cap Y = \varnothing$, de unde rezultă că $f(J)$ nu este interval. Deci *f* nu are P.D.

6.1.5. Observații

a)Din exemplul 6.1.4 b) se observă că există funcții surjective care nu au P.D.
b) S-a arătat la exemplele 6.1.4 c) și d) că cele două funcții de tip Dirichlet nu au P.D. Se poate da un rezultat mai general (vezi 6.4. Probleme rezolvate e)).

6.1.6. Propoziție

Fie $I \subseteq R$ un interval și $f: I \to R$ o funcție injectivă cu P.D. Atunci f este monotonă

Demonstrație

Fie $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ fixați. Atunci $J_1 := f([x_1, x_2])$ și $J_2 = f([x_2, x_3])$ sunt intervale. Cum $f(x_2) \in J_1 \cap J_2$ și *f* este injectivă rezultă că $J_1 \cap J_2 = \{f(x_2)\}$.

Așadar $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ sau $f(x_3) < f(x_2) < f(x_1)$, prin urmare *f* este strict monotonă.

6.1.7. Corolar

Fie $I \subseteq R$ un interval și $f: I \to R$ o funcție cu P.D. Atunci *f* este strict monotonă $\Leftrightarrow$ *f* este injectivă

6.1.8. Propoziție

Fie $I \subseteq R$ un interval și $f: I \to R$ o funcție cu P.D.. Dacă mulțimea $f(I)$ este cel mult numărabilă, atunci *f* este constantă.

Demonstrație

Deoarece *f* are P.D. rezultă că $f(I)$ este un interval. Cum $f(I)$ este cel mult numărabilă și un interval care nu se reduce la un punct este echipotent cu R, deci nenumărabil, rezultă că $f(I)$ se reduce la un punct.

Așadar, există $c \in R$ astfel încât $f(I) = \{c\}$, deci *f* este constantă

6.1.9. Corolar

Fie $I \subseteq R$ un interval și $f: I \to R$ o funcție cu P.D. care se anulează cel puțin într-un punct. Dacă mulțimea $f(I)$ este cel mult numărabilă, atunci $f = 0$.

6.1.10. Propoziție

Fie $I \subseteq R$ un interval și $f: I \to R$ o funcție cu P.D. care nu se anulează în nici un punct. Atunci $f > 0$ sau $f < 0$.

Demonstrație

Presupunem că există $a,b\in I$ cu $f(a)<0$ și $f(b)>0$. Atunci $\gamma=0\in\left(f(a),f(b)\right)$, deci există *c* cuprins între *a* și *b* astfel încât $f(c)=0$ contradicție. Rămâne că $f>0$ sau $f<0$

6.1.11. Corolar

Fie $I\subseteq R$ un interval și $f:I\to R$ o funcție cu P.D. Dacă $a,b\in I$, $a<b$ și $f(a)\cdot f(b)<0$, atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât $f(c)=0$.

Back

#

6.2. Clase de funcții cu proprietatea lui Darboux

6.2.1. Teoremă (Bolzano)

Fie $I\subseteq R$ un interval și $f:I\to R$ o funcție continuă. Atunci $f(I)$ este un interval.

Demonstrație

Fie $y_1,y_2\in J:=f(I)$, $y_1<y_2$ și $y_1<\lambda<y_2$, fixați. Evident există $a,b\in I$ cu $f(a)=y_1$ și $f(b)=y_2$. Presupunem $a<b$. Considerăm mulțimea $A:=\{x\in[a,b]:f(x)\le\lambda\}$ și fie $c=\sup A$. Din definiția marginii superioare rezultă că există $(x_n)_{n\ge1}\subseteq A$ cu $x_n\to c$, deci $f(x_n)\le\lambda$, $(\forall)\,n\ge1$. Cum *f* este continuă, avem $f(c)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\le\lambda$. Deoarece $\lambda<f(b)$, avem $c<b$.

Evident $f(x)>\lambda$, $(\forall)\,c\in(c,b]$. Fie $(y_n)_{n_1}\subseteq(c,b)$, $y_n\to c$. Atunci $f(y_n)>\lambda$, $(\forall)\ n\ge1$, deci $f(c)=\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)\ge\lambda$. Din $f(c)\le\lambda$ și $f(c)\ge\lambda$, deducem că $f(c)=\lambda$, deci $\lambda\in J$. Așadar $[y_1,y_2]\subseteq J$, $(\forall)\ y_1,y_2\in J$. Deci *J* este un interval.

6.2.2. Corolar

Fie $I\subseteq R$ un interval și $f:I\to R$ o funcție continuă. Atunci *f* are P.D.

Demonstrație

Fie $J\subseteq I$ un interval. Atunci conform Teoremei 6.2.1 $f(J)$ este un interval, deci conform Propoziției 6.1.3, *f* are P.D.

6.2.3. Corolar

Fie $I\subseteq R$ un interval și $f:I\to R$ o funcție continuă. Atunci:

i) dacă $f(I)\subseteq R^*\Rightarrow f>0$ sau $f<0$

ii) dacă există $a,b \in I$, $a<b$ astfel încât $f(a)\cdot f(b)<0 \Rightarrow$ există $c\in (a,b)$ astfel încât $f(c)=0$

iii) f strict monotonă $\Leftrightarrow f$ injectivă

Demonstrație i) și ii) rezultă din P 6.1.10 și C 6.1.11, iii) rezultă din C 6.1.7

6.2.4. Exemple

Funcțiile polinomiale, sin, cos, 1_R, $|\cdot|$, exp, ln au toate P.D.

În continuare vom da caracterizări ale punctelor de discontinuitate pentru funcții cu P.D.

6.2.5. Teoremă

Fie $I\subseteq R$ un interval, $a=\inf I$, $b=\sup I$ și $f:I\to R$ o funcție cu P.D. Atunci $(\forall)x_0\in I\setminus\{a\}$ (respectiv $I\setminus\{b\}$), $(\exists)x_n\in I$, $x_n \nearrow x_0$ (respectiv $x_n\searrow x_0$) astfel încât $f(x_n)\to f(x_0)$

Demonstrație

Fie $x_0\in I\setminus\{a\}$ fixat și $r_n\searrow 0$ cu proprietatea că $I_n:=(x_0-r_n,x_0)\subseteq I$, $(\forall)n\geq 1$. Deoarece f are P.D. rezultă (P 6.1.3) că $f(I_n)$ și $f(I_n\cup\{x_0\})$ sunt intervale, evident care diferă între ele cel mult prin punctul $y_0:=f(x_0)$. Atunci $\forall n\geq 1$, avem că $y_0\in f(I_n)$ sau y_0 este un capăt al lui $f(I_n)$, deci $(\exists)y_n\in f(I_n)$ cu $|y_n-y_0|<\frac{1}{n}$ și fie $x_n\in I_n$ cu $f(x_n)=y_n$. Cum avem $x_0-r_n<x_n$ și $|f(x_n)-f(x_0)|<\frac{1}{n}$ deducem că $x_n\to x_0$ și $f(x_n)\to f(x_0)$. Extragem mai departe un subșir strict crescător al șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ și evident acesta are proprietatea din enunț.

În continuare vom nota cu $\overset{0}{I}=\operatorname{int} I=\{x_0\in I/\exists V\in V(x_0):V\subseteq I\}$ interiorul lui I

6.2.6. Corolar

Fie $I\subseteq R$ un interval și $f:I\to R$ o funcție cu P.D. Atunci $(\forall)x_0\in \overset{0}{I}$ $(\exists)x_n,y_n\in I\setminus\{x_0\}$, $x_n\nearrow x_0$ și $y_n\searrow x_0$ astfel încât:
$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} f(y_n)=f(x_0)$

6.2.7. Corolar

Fie $I \subseteq R$ un interval, $a = \inf I$, $b = \sup I$ şi $f : I \to R$ o funcţie cu P.D. Dacă $x_0 \in I \setminus \{a\}$ (respectiv $I \setminus \{b\}$) şi $f(x_0^-)$ (respectiv $f(x_0^+)$) există, atunci $f(x_0) = f(x_0^-)$ (respectiv $f(x_0) = f(x_0^+)$) deci *f* nu are discontinuităţi de speţa I

Demonstraţie

Din P 6.2.5 rezultă că $(\exists) x_n \in I \setminus \{x_0\}$, $x_n \nearrow x_0$ cu $f(x_n) \to f(x_0)$. Deoarece $f(x_0^-)$ există, avem $f(x_n) \to f(x_0^-)$ şi cum limita unui şir din *R* este unică, deducem că $f(x_0) = f(x_0^-)$.

6.2.8. Corolar

Fie $I \subseteq R$ un interval şi $f : I \to R$ o funcţie monotonă, cu P.D. Atunci *f* este continuă pe *I*.

Demonstraţie

Din Corolarul 6.2.7 rezultă că *f* nu are discontinuităţi de speţa I, iar întrucât o funcţie monotonă nu are discontinuităţi de speţa a doua ([1] pag. 169, T 5.5.18, Cor 2), rezultă că F este continuă pe I.

Pentru Teorema 6.2.5 se poate formula o reciprocă:

6.2.9. Teoremă

Fie $I \subseteq R$ un interval, $x_0 \in \overset{0}{I}$ şi $f : I \to R$ o funcţie continuă pe $I \setminus \{x_0\}$. Dacă

i) $(\exists)$ $x_n \in I$, $x_n \nearrow x_0$ astfel încât $f(x_n) \to f(x_0)$

ii) $(\exists)$ $y_n \in I$, $y_n \searrow x_0$ astfel încât $f(y_n) \to f(x_0)$

atunci *f* are P.D.

Demonstraţie:

Fie $\varepsilon > 0$ astfel încât $J_\varepsilon = [x_0, x_0 + \varepsilon] \subseteq I$

$f(J_\varepsilon) = \{f(x_0)\} \cup f((x_0, x_0 + \varepsilon])$

Din (ii) rezultă că $(\exists) N_\varepsilon \in N$ astfel încât $y_n \in (x_0, x_0 + \varepsilon]$, $(\forall) n \geq N_\varepsilon$ şi deci $f(y_n) \in f((x_0, x_0 + \varepsilon])$, $(\forall) n \geq N_\varepsilon$

Întrucât *f* este continuă pe $(x_0, x_0 + \varepsilon]$ avem că $f((x_0, x_0 + \varepsilon]) = I_\varepsilon$ este un interval care conţine şirul convergent $(f(y_n))_{n \geq N_\varepsilon}$.

Avem aşadar $\lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) = f(x_0) \in \overline{I_\varepsilon}$ şi deci $f(J_\varepsilon) = \{f(x_0)\} \cup I_\varepsilon$ este tot un interval.

Analog se demonstrează că pentru $(\forall)\delta>0$, $f([x_0-\delta,x_0]\cap I)$ este un interval.
Deci $(\forall)J\subseteq I$ un interval avem:
- dacă $x_0\notin J\Rightarrow f(J)$ este un interval (întrucât f este continuă pe $I\setminus\{x_0\}$)
- dacă $x_0\in J\Rightarrow\exists\,\varepsilon,\delta>0$ astfel încât $J=[x_0-\delta,x_0+\varepsilon]$ şi $f(J)=f([x_0-\delta,x_0])\cup f([x_0,x_0+\varepsilon])$ este o reuniune de două intervale care au un punct comun, pe $f(x_0)$, deci şi reuniunea lor va fi un interval.

6.2.10. Corolar

Fie $I\subseteq R$ un interval, $x_0\in\overset{0}{I}$ şi $f:I\to R$ o funcţie continuă pe $I\setminus\{x_0\}$.
Atunci f are P.D. dacă şi numai dacă:
(i) $(\exists)x_n\in I$, $x_n\nearrow x_0$ astfel încât $f(x_n)\to f(x_0)$
(ii) $(\exists)y_n\in I$, $y_n\searrow x_0$ astfel încât $f(y_n)\to f(x_0)$
Demonstraţie
$(\Rightarrow)$ se aplică T. 6.2.5
$(\Leftarrow)$ se aplică T. 6.2.9

6.2.11. Corolar
Fie $f:[a,b]\to R$ continuă pe $(a,b]$ (respectiv $[a,b)$). Atunci f are P.D. dacă şi numai dacă:
$(\exists)x_n\in(a,b]$, $x_n\searrow a$ astfel încât $f(x_n)\to f(a)$
$(\exists)y_n\in[a,b)$, $x_n\nearrow b$ astfel încât $f(y_n)\to f(b)$)

6.2.12. Observaţii
a) Teorema 6.2.9 dă o caracterizare a punctelor de discontinuitate de speţa a II-a pentru funcţii cu P.D.
b) Teorema 6.2.9 se poate extinde pentru o funcţie $f:I\to R$ discontinuă pe o mulţime finită de puncte cu proprietăţile (i) şi (ii)
c) Lebesgue a demonstrat că există funcţii $f:R\to R$ discontinue pe R şi care au P.D. (demonstraţia depăşeşte cadrul acestui manual)

Back
#

6.2.13. Probleme rezolvate

a) Funcţia $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ \alpha, & x=0\end{cases}$,$\alpha\in R$ are P.D. $\Leftrightarrow|\alpha|\le 1$

b) Funcția $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, $\alpha \in R$, unde (t) este distanța de la t la cel mai apropiat întreg are P.D. $\Leftrightarrow \alpha \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$

Soluții

a) f este continuă pe $R \setminus \{0\}$. Atunci conform Corolarului 6.2.10, f are P.D. dacă și numai dacă $(\exists) x_n \in R$, $x_n \nearrow 0$ astfel încât $f(x_n) \to \alpha$ și $(\exists) y_n \in R$, $y_n \searrow 0$ astfel încât $f(y_n) \to \alpha$. Întrucât $\sin\dfrac{1}{x} \in [-1,1]$, $(\forall)$ $x \in R^*$, rezultă că dacă $|\alpha| > 1$ atunci $(\forall)\, x_n \nearrow 0$, $f(x_n) \not\to \alpha$ și $(\forall)\, y_n \searrow 0$, $f(y_n) \not\to \alpha$, deci f nu are P.D.

Dacă $|\alpha| \leq 1$, considerăm șirurile $x_n = \dfrac{1}{\arcsin\alpha - 2n\pi} \nearrow 0$ și $f(x_n) \to \alpha$, respectiv $y_n = \dfrac{1}{\arcsin\alpha + 2n\pi} \searrow 0$ și $f(y_n) \to \alpha$. Conform T. 6.2.9, f are P.D.

b) Funcția $g : R \to R$, $g(x) = (x) = \begin{cases} x - k, & x \in \left[k, k + \dfrac{1}{2}\right] \\ (k+1) - x, & x \in \left(k + \dfrac{1}{2}, k+1\right) \end{cases}$ este continuă pe R, deci f este continuă pe R^*.

Atunci conform Corolarului 6.2.10 f are P.D. $\Leftrightarrow$ $(\exists)$ $x_n \in R$, $x_n \nearrow 0$ astfel încât $f(x_n) \to \alpha$ și $(\exists)$ $y_n \in R$, $y_n \searrow 0$ astfel încât $f(y_n) \to \alpha$

Întrucât $\left(\dfrac{1}{x}\right) \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $\forall x \in R^*$, rezultă că dacă $\alpha \notin \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ atunci $(\forall)\, x_n \nearrow 0$, $f(x_n) \not\to \alpha$ și $(\forall)\, y_n \searrow 0$, $f(y_n) \not\to \alpha$.

Dacă $\alpha \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, considerăm șirurile $x_n = \dfrac{1}{\alpha - n} \nearrow 0$ și $f(x_n) = (\alpha - n) = \alpha \to \alpha$, respectiv $y_n = \dfrac{1}{\alpha + n} \searrow 0$ și $f(y_n) = (\alpha + n) = \alpha \to \alpha$. Conform T. 6.2.9, f are P.D.

6.2.14. Teoremă

Fie $I \subseteq R$ un interval şi $f: I \to R$ o funcţie derivabilă. Atunci funcţia f' are P.D.

Demonstraţie

Fie $a, b \in I$, $a < b$ şi λ cuprins între $f'(a)$ şi $f'(b)$ fixaţi. Presupunem $f'(a) < f'(b)$, deci $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Considerăm funcţia $\varphi: I \to R$, $\varphi(x) = f(x) - \lambda x$. Evident φ este derivabilă şi avem $\varphi'(x) = f'(x) - \lambda$, $x \in I$. Deci $\varphi'(a) = f'(a) - \lambda < 0$ şi $\varphi'(b) = f'(b) - \lambda > 0$. Deoarece

$\lim\limits_{x \searrow a} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \varphi'(a) < 0$, $\lim\limits_{x \nearrow b} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(b)}{x - b} = \varphi'(b) > 0$, rezultă că $(\exists)$ $c, d \in (a, b)$, $c < d$ cu proprietăţile: $\dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} < 0$, $(\forall) x \in (a, c)$ şi

$\dfrac{\varphi(x) - \varphi(b)}{x - b} > 0$, $(\forall)$ $x \in (d, b)$, deci $\varphi(x) < \varphi(a)$, $(\forall) x \in (a, c)$ şi $\varphi(x) < \varphi(b)$, $(\forall)$ $x \in (d, b)$ (1)

Funcţia φ fiind continuă şi $[a, b]$ un interval compact, rezultă că φ îşi atinge minimul într-un punct $x_0 \in [a, b]$. Din (1) rezultă că $x_0 \neq a$ şi $x_0 \neq b$, deci $x_0 \in (a, b)$ şi deci $x_0 \in \overset{0}{I}$. Aşadar x_0 este un punct de minim local pentru φ, deci conform teoremei lui Fermat avem $\varphi'(x_0) = 0$, deci $f'(x_0) = \lambda$. Prin urmare f' are P.D.

6.2.15. Corolar

Fie $I \subseteq R$ un interval şi $f: I \to R$ o funcţie derivabilă cu proprietatea că $f'(x) \neq 0$, $(\forall) x \in I$. Atunci f este strict monotonă.

Demonstraţie

Din Teorema 6.2.14 avem că f' are P.D., deci (Prop. 6.1.10) $f' > 0$ sau $f' < 0$ şi deci f este strict monotonă.

6.2.16. Observaţie

Rezultatul Teoremei 6.2.14 este deosebit de util în studiul primitivabilităţii funcţiilor (care se va trata în clasa a XII-a)

Back
#

6.3. Păstrarea P.D. asupra funcției sumă, produs, cât, compunere a două funcții cu P.D.

6.3.1. Observație

Există funcții $f, g : R \to R$ care au P.D., pentru care funcția sumă $f+g$, produs $f \cdot g$, respectiv cât f/g ($g(x) \neq 0$, $\forall x \in R$) nu au P.D.

Demonstrație

a) Sumă

Într-adevăr, fie $f, g : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -\sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}$

f și g au P.D., dar $f+g : R \to R$, $(f+g)(x) = \begin{cases} 0, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$ are o discontinuitate de speța I, deci nu are P.D.

b) Produs

Fie $f, g : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}$.

f și g au P.D., dar $f \cdot g : R \to R$, $(f \cdot g)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin\frac{2}{x}, x \neq 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}$ nu are PD întrucât

$f \cdot g$ este continuă pe R^*, $\frac{1}{2}\sin\frac{2}{x} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ și $(\forall)\, x_n \nearrow 0$, $(f \cdot g)(x_n) \to 1$ și $(\forall)\, y_n \searrow 0$, $(f \cdot g)(y_n) \to 1$

c) Cât

Fie $f, g : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} + 2, x \neq 0 \\ 2, \quad x = 0 \end{cases}$

f are P.D., g este continuă pe R^*, și considerând șirurile $x_n = \frac{-1}{n\pi} \nearrow 0$, $g(x_n) = 2 \to 2$ și $y_n = \frac{1}{n\pi} \searrow 0$, $g(y_n) = 2 \to 2$ obținem (conform Corolarului 6.2.10) că g are P.D. Se observă că $g(x) \neq 0$, $(\forall)\, x \in R$

$$\frac{f}{g}: R \to R,\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}+2}, & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$ nu are P.D. întrucât $\frac{f}{g}$ este continuă pe

R^*, $\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}+1} = 1 - \dfrac{2}{\sin\frac{1}{x}+2} \in \left[-1, \frac{1}{3}\right]$ şi $(\forall)\, x_n \nearrow 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) \not\to \frac{1}{2} \notin \left[-1, \frac{1}{3}\right]$ şi

$(\forall)\, y_n \searrow 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)(y_n) \not\to \frac{1}{2}$.

Este de asemenea cunoscut următorul rezultat pe care îl vom prezenta aici fără demonstraţie :

Back

#

6.3.2. Teoremă (Sierpinski)

Fie $f: R \to R$ o funcţie arbitrară. Atunci există $f_1, f_2 : R \to R$ două funcţii discontinue pe R şi care au P.D. astfel încât $f = f_1 + f_2$

6.3.3. Teoremă

Fie A şi $B \subseteq [a,b]$ două mulţimi finite disjuncte şi $f, g : [a,b] \to R$ două funcţii cu următoarele proprietăţi :

a) f este continuă pe $[a,b] \setminus A$ şi discontinuă pe A cu P.D.

b) g este continuă pe $[a,b] \setminus B$ şi discontinuă pe B cu P.D.

Atunci $f+g$ şi $f \cdot g$ au P.D.

Demonstraţie

$f+g$ şi $f \cdot g$ sunt continue pe $[a,b] \setminus (A \cup B)$. Fie $x_0 \in A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$.

Atunci $x_0 \in A \setminus B$ sau $x_0 \in B \setminus A$. Să presupunem că $x_0 \in A \setminus B$ şi $x_0 \in (a,b)$.

Atunci conform Corolarului 6.2.10 :

(i) $(\exists)$ $x_n \in [a,b]$, $x_n \nearrow x_0$ astfel încât $f(x_n) \to f(x_0)$

(ii) $(\exists)$ $y_n \in [a,b]$, $y_n \searrow y_0$ astfel încât $f(y_n) \to f(x_0)$

Avem: $(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0)$ întrucât $f(x_n) \to f(x_0)$ şi g continuă în x_0, deci şi $g(x_n) \to g(x_0)$

Analog $(f+g)(y_n) \to (f+g)(x_0)$

Conform Corolarului 6.2.10 avem $(f+g)$ are P.D.

Analog se arată că $(f \cdot g)$ are P.D.

6.3.4. Corolar

Fie $A \subseteq [a,b]$ o mulţime finită şi $f, g : [a,b] \to R$ două funcţii cu următoarele proprietăţi:
a) f continuă pe $[a,b]$
b) g continuă pe $[a,b] \setminus A$ şi discontinuă pe A.
Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:
1) g are P.D.
2) $f+g$ are P.D.
De asemenea 1) $\Rightarrow$ 3) şi dacă în plus $f(x) \neq 0$, $(\forall)$ $x \in A$ atunci 1) este echivalentă cu 3)
3) $f \cdot g$ are P.D.
Demonstraţie
1) $\Rightarrow$ 2) conform T 6.3.3
2) $\Rightarrow$ 1) f continuă pe $[a,b]$ atunci $(-f)$ este continuă pe $[a,b]$ şi $f+g$ continuă pe $[a,b] \setminus A$ şi are P.D., atunci $(-f)+(f+g)=g$ are P.D. (conform T 6.3.3)
1) $\Rightarrow$ 3) conform T 6.3.3
3) $\Rightarrow$ 1) f continuă pe $[a,b]$, $f(x) \neq 0$, $\forall$ $x \in A$, $f \cdot g$ continuă pe $[a,b] \setminus A$ şi are P.D.
Fie $x_0 \in A$. Putem presupune că $x_0 \in (a,b)$. Atunci, conform Corolarului 6.2.10:
$(\exists) x_n \in [a,b]$, $x_n \nearrow x_0$ astfel încât $(f \cdot g)(x_n) \to (f \cdot g)(x_0)$
$(\exists) y_n \in [a,b]$, $y_n \searrow x_0$ astfel încât $(f \cdot g)(y_n) \to (f \cdot g)(x_0)$
Întrucât $f(x_0) \neq 0$ şi f continuă în x_0 rezultă că $(\exists)$ $V \in V(x_0)$ astfel încât $f(x) \neq 0$, $(\forall) x \in V$ şi deci $(\exists)$N$\in N$ astfel încât $(\forall)$ $n \geq$ N: $x_n \in V$, de unde $f(x_n) \neq 0$, $\forall n \geq$ N

Avem $g(x_n) = \dfrac{(f \cdot g)(x_n)}{f(x_n)} \to \dfrac{(f \cdot g)(x_0)}{f(x_0)} = g(x_0)$

Analog se demonstrează că $g(y_n) \to g(x_0)$ şi conform Corolarului 6.2.10 avem că g are P.D.

6.3.5. Propoziţie

Fie $I, J \subseteq R$ două intervale şi $f : I \to J$, $g : J \to R$ două funcţii care au P.D. Atunci $g \circ f$ are P.D.
Demonstraţie
Fie $J \subseteq I$ un interval, $(g \circ f)(I) = g(f(I)) = g(I') = I''$ unde I' şi I'' sunt intervale întrucât f, respectiv g au P.D. Deci $g \circ f$ are P.D.

6.3.6. Corolar

Fie $I \subseteq R$ un interval şi $f : I \to R$ o funcţie cu P.D. Atunci $|f|$ are P.D.

6.3.7. Corolar

Fie $I, J \subseteq R$ două intervale şi $f : I \to J$, $g : J \to R$ două funcţii, una continuă şi cealaltă având P.D. Atunci $g \circ f$ are P.D.

Bibliografie

1. Gh. Sireţchi, *Calcul diferenţial şi integral*, vol. I şi II, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985
2. Gh. Sireţchi, *Funcţii cu Proprietatea lui Darboux*, Materiale pentru perfecţionarea profesorilor de liceu, vol. IV (partea a II-a), Univ. Bucureşti, Fac. de Matematică, 1993
3. W.W. Breckner, *Funcţii cu Proprietatea lui Darboux*, Did. Matem. 1986-1987, 34-37
4. Z. Finta, *Din nou despre Proprietatea lui Darboux*, Did. Matem. vol. 51/2000, 39-50
5. I. Magdaş, *O condiţie suficientă pentru ca suma (produsul) a două funcţii să aibă Proprietatea lui Darboux*, Did. Matematicii, vol. 14/2000, 181-186
6. O. Konnerth, *Greşeli tipice în învăţarea analizei matematice*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1982

Back