PRINCIPII DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE MATEMATICA

- *Principiul lui Dirichlet*
- *Principiul inductiei matematice*
- *Principiul includerii si al excluderii*

#

CÂTEVA PRINCIPII DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE MATEMATICĂ

6.1. Principiul lui Dirichlet

Teorema 6.1.1. (***Principiul lui Dirichlet***) **Fie A o mulţime nevidă iar $A_1, A_2, ..., A_n$ o partiţie a lui A (adică $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ iar $A_i \cap A_j = \emptyset$, pentru $i \neq j$).**

Dacă avem n+1 elemente $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ din A, atunci există o submulţime A_i a partiţiei care să conţină cel puţin două elemente ale mulţimii $\{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}\}$.

Aplicaţii.

1. Fie $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ un şir de n+1 numere întregi diferite două câte două. Atunci există doi indici i, j $\in\{1, 2, ..., n+1\}$ astfel încât $a_i \equiv a_j \pmod{n}$.

Soluţie. Împărţim mulţimea $\mathbb{Z}$ în cele n clase de resturi modulo n. Cum acestea formează o partiţie a lui $\mathbb{Z}$, totul rezultă din principiul lui Dirichlet.

2. Fie M o mulţime formată din n numere întregi (nu neapărat distincte). Să se demonstreze că M are cel puţin o parte nevidă cu proprietatea că suma elementelor sale se divide cu n.

(Gh. Szölösy)

Soluţie. Fie $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ cu $a_i \in \mathbb{Z}$, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Să considerăm submulţimile lui M: $M_1 = \{a_1\}$, $M_2 = \{a_1, a_2\}$, ..., $M_n = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ şi să formăm sumele: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Dacă unul din numerele $S_1, S_2, ..., S_n$ se divide cu n, problema este rezolvată. Dacă $S_1, S_2, ..., S_n$ nu se divid la n, atunci conform aplicaţiei anterioare există p, k $\in \mathbb{N}$, $k<p\leq n$, astfel încât $S_p \equiv S_k \pmod{n}$. Atunci mulţimea căutată va fi $\{a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_p\}$.

3. Se dă un cub cu latura 1. Să se arate că oricum am alege 28 de puncte interioare, cel puţin două dintre ele au distanţa mai mică sau egală cu $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Soluţie. Să împărţim fiecare muchie a cubului în câte trei părţi egale şi ducând prin ele paralele la muchii obţinem pe fiecare faţă a cubului 9 pătrate egale. Ducând plane paralele cu feţele cubului prin punctele de diviziune, cubul este astfel împărţit în 27 de cubuleţe, fiecare având latura $\frac{1}{3}$. Cum sunt 28 de puncte interioare, conform pricipiului lui Dirichlet, cel puţin două se vor afla în interiorul aceluiaşi cubuleţ de latură $\frac{1}{3}$. Distanţa maximă dintre cele două puncte nu poate depăşi diagonala unui astfel de cubuleţ, care este de $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. Fiind date 9 puncte în interiorul pătratului unitate, să se demonstreze că există printre ele trei puncte, care să fie vârfurile unui triunghi, de arie mai mică sau egală cu $\frac{1}{8}$.

Soluție. Unind două câte două mijloacele laturilor opuse în pătratul dat obținem o împărțire a acestuia în patru pătrate de arie $\frac{1}{4}$. Conform principiului lui Dirichlet cel puțin unul dintre acestea va conține trei sau mai multe puncte din cele 9 considerate în enunț. Notăm EFGH acest pătrat și fie A, B, C trei dintre aceste puncte conținute în pătratul EFGH de latură $\frac{1}{2}$ obținut ca mai înainte (vezi Fig. 1); va fi suficient să probăm că $S_{ABC} \le \frac{1}{2} \cdot S_{EFGH}$. Ducând prin A, B, C paralele la EH, una din ele se va afla între celelalte două, deci va tăia în interior latura opusă prin care aceasta trece. Fie AA′ aceasta, cu A′∈BC; construim BB′ ⊥ AA′ cu B′∈AA′ și CC′ ⊥ AA′ cu C′∈AA′.

Avem $S_{ABC} = S_{ABA'} + S_{ACA'} = \frac{1}{2} \cdot AA' \cdot BB' + \frac{1}{2} \cdot AA' \cdot CC' =$

$$= \frac{1}{2} \cdot AA' \cdot (BB' + CC') \le \frac{1}{2} \cdot EH \cdot HG = \frac{1}{8}.$$

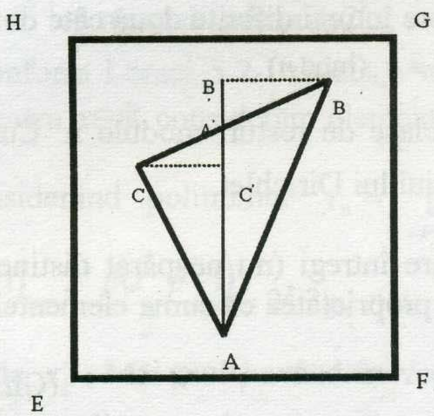

Fig. 1

Observație. În cazul în care punctele A, B, C sunt coliniare, demonstrația nu poate fi făcută în acest mod, însă atunci $S_{ABC} = 0$.

Back

#

6.2. Principiul inducţiei matematice

În multe exerciţii şi probleme se cere să se demonstreze anumite proprietăţi ce depind de un număr natural n.

Asemenea probleme se soluţionează în majoritatea cazurilor cu ajutorul *principiului inducţiei matematice complete* care are la bază următoarea teoremă:

Teorema 6.2.1. Dacă o proprietate P(n) (depinzând de un număr natural n) este adevărată pentru n=0 şi pentru orice n este adevărată implicaţia logică: „ P(n) adevărată ⇒ P(n+1) adevărată”, atunci P(n) este adevărată pentru orice n.

Principiul inducţiei matematice se mai enunţă şi sub următoarele forme generalizate:

Teorema 6.2.2. Dacă o proprietate P(n) (depinzând de un număr natural n) este adevărată pentru o valoare particulară k a lui n (deci P(k) adevărată) şi dacă pentru orice număr arbitrar n $\geq$ k este adevărată implicaţia logică: „P(n) ⇒ P(n+1)”, atunci P(n) este adevărată pentru orice n $\geq$ k (pentru k=0 obţinem Teorema 6.2.1).

Teorema 6.2.3. Dacă P(n) este o proprietate ce depinde de numărul natural n iar P(n) este adevărată pentru o valoare particulară k a lui n şi dacă pentru orice număr natural n $\geq$ k este adevărată implicaţia logică: „P(m) adevărată, pentru orice m = k, k+1, …, n-1 ⇒ P(n) adevărată”, atunci P(n) este adevărată pentru orice n $\geq$ k.

Teorema 6.2.4. Dacă o proprietate P(n) este adevărată pentru p valori consecutive particulare ale lui n: n = k, k+1, …, k+p-1, (k, p $\in \mathbb{N}$) şi dacă pentru orice număr arbitrar n $\geq$ k este adevărată implicaţia logică: „P(n) ⇒P(n+p)”, atunci P(n) este adevărată pentru orice n $\geq$ k.

Demonstraţia Teoremei 6.2.1 (ca şi a celorlalte variante de mai sus) ţine de însăşi construţia mulţimii numerelor naturale prezentată în paragraful 1.1 de la Capitolul 1.

Aplicaţii.

1. Să se demonstreze că dacă m şi n sunt numere naturale nenule (m $\geq$ n), atunci numărul soluţiilor naturale de componente nenule ale ecuaţiei $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$ este C_{m-1}^{n-1}.

Soluţie. Vom demonstra prin inducţie matematică relativ la n.

Fie $N_n(m)$ numărul căutat. Evident $N_1(m) = 1 = C_{m-1}^{1-1}$.

Să presupunem că $N_k(m) = C_{m-1}^{k-1}$, pentru k = 1, 2, …, n-1 şi să demonstrăm că $N_n(m) = C_{m-1}^{n-1}$. Evident $N_n(m) = N_{n-1}(m-1) + N_{n-1}(m-2) + \ldots + N_{n-1}(n-1) = C_{m-2}^{n-2} + C_{m-3}^{n-2} + \ldots + C_{n-2}^{n-2} = C_{m-1}^{n-1}$. Conform principiului inducţiei matematice, $N_n(m) = C_{m-1}^{n-1}$, pentru orice n $\in \mathbb{N}$.

2. Să se demonstreze că orice orice număr natural n se poate scrie sub forma $n = m+3q$ cu $m, q \in \mathbb{N}$.

Soluţie. Pentru n natural să notăm cu P(n) proprietatea din enunţ.

Vom proba că P(4), P(5) şi P(6) sunt adevărate.

Într–adevăr, $4 = 1 + 3 \cdot 1$ ($m = 1, q = 1$); $5 = 2 + 3 \cdot 1$ ($m = 2, q = 1$); $6 = 0 + 3 \cdot 2$ ($m = 0, q = 2$) . Să arătăm acum că este adevărată implicaţia logică: „$P(n) \Rightarrow P(n+3)$”, şi atunci P(n) va fi adevărată pentru orice $n \geq 4$, ţinând cont de varianta generalizată a inducţiei matematice.

Într-adevăr, din $n = m+3q$ rezultă $n+3 = m+3(q+1)$.

Observaţie. Problema se mai poate soluţiona şi ţinând cont de teorema împărţirii cu rest.

3. Să se demonstreze că orice număr natural $n \geq 1$ admite o reprezentare de forma $n = a_1 \cdot 1^2 + a_2 \cdot 2^2 + ... + a_{n_1} \cdot n_1^{\,2}$, unde $a_i \in \{-1, +1\}$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n_1$ ($n_1 \in \mathbb{N}$, nu depinde de n).

Soluţie. Să demonstrăm la început că dacă notăm prin P(n) proprietatea cerută de enunţul problemei, atunci P(1), P(2), P(3) şi P(4) sunt adevărate.

Într-adevăr, pentru $n = 1$ avem $1=1 \cdot 1^2$, cu $a_1 = 1$;

pentru $n = 2$ avem $2 = (-1) \cdot 1^2 +(-1) \cdot 2^2 +(-1) \cdot 3^2 +1 \cdot 4^2$ cu $a_1 = -1, a_2 = -1, a_3 = -1, a_4 = 1$;

pentru $n = 3$ avem $3 = (-1) \cdot 1^2 +1 \cdot 2^2$ cu $a_1 = -1, a_2 = 1$;

pentru $n = 4$ avem $4 = (-1) \cdot 1^2 +(-1) \cdot 2^2 +1 \cdot 3^2$ cu $a_1 = -1, a_2 = -1, a_3 = 1$.

Să presupunem acum că P(n) este adevărată pentru o valoare oarecare a lui n şi să demonstrăm că este adevărată şi P(n+4).

Pentru aceasta vom ţine cont de identitatea:

$$(n+1)^2-(n+2)^2-(n+3)^2+(n+4)^2 = 4.$$

Astfel, dacă $n = \sum\limits_{i=1}^{n_1} a_i \cdot i^2$, cu $a_i \in \{-1, +1\}$, atunci

$$n+4 = \sum_{i=1}^{n_1} a_i \cdot i^2 + (n_1+1)^2 - (n_1+2)^2 - (n_1+3)^2 + (n_1+4)^2 = \sum_{i=1}^{n_1+4} a_i \cdot i^2 ,$$

cu $a_{n_1+1} = 1, a_{n_1+2} = -1, a_{n_1+3} = -1, a_{n_1+4} = 1$.

Conform principiului inducţiei matematice generalizate, P(n) va fi adevărată pentru orice număr natural $n \geq 1$.

4. Să se arate că pentru orice număr natural n, numărul $E_n = (n+1)(n+2)\ldots(n+n)$ se divide prin 2^n dar nu se divide prin 2^{n+1}

Soluţie. Fie P(n) proprietatea din enunţul exerciţiului.

Vom demonstra că P(1) şi P(2) sunt adevărate şi că pentru orice număr natural n este adevărată implicaţia logică: „$P(n) \Rightarrow P(n+2)$”.

Avem $E_1=2$ şi evident $2 | E_1$ dar $2^2 = 4 \nmid E_1$; $E_2=12$ şi evident $2^2 = 4 | E_2$ dar $2^3 = 8 \nmid E_2$. Să presupunem acum că pentru un număr natural n, P(n) este adevărată, adică $2^n | E_n$ dar

$2^{n+1} \nmid E_n$. Deci $E_n = 2^n \cdot p$, cu p impar. Atunci

$$E_{n+2}=(n+3)(n+4)\ldots(2n)(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)=$$
$$=4(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(2n)(2n+1)(2n+3)=$$
$$=2^2E_n(2n+1)(2n+3)=2^2\cdot 2^n\cdot p\cdot(2n+1)(2n+3)=2^{n+2}p(2n+1)(2n+3)=2^{n+2}\cdot p',$$

unde $p' = p(2n+1)(2n+3)$. Cum p' este impar rezultă că $2^{n+2} \mid E_{n+2}$ şi $2^{n+3} \nmid E_{n+2}$, adică P(n+2) este adevărată.

Conform principiului inducţiei matematice, P(n) este adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

5. Să se demonstreze că dacă $a_1,\ldots,a_n$ sunt numere reale pozitive, atunci :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$ (cu egalitate când numerele sunt egale).

Se cunosc mai multe soluţii pentru această inegalitate cunoscută sub numele de *inegalitatea mediilor*.

În cele ce urmează vom preznta două soluţii folosind principiul inducţiei matematice.

Soluţia 1. Pentru n = 1, 2 inegalitatea se verifică.

Presupunem că inegalitatea este adevărată pentru n-i numere pozitive (i = 1, 2, …, n-1) şi să demonstrăm că ea rămâne adevărată şi pentru n numere pozitive $a_1,\ldots,a_n$.

Conform ipotezei de inducţie putem scrie $\sum_{i=1}^{n-1} a_i \geq (n-1)\sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{n-1}}$

şi $a_n + \underbrace{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}+\ldots\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}_{de\ (n-2)\ ori} \geq (n-1)\sqrt[n-1]{a_n(\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n})^{n-2}}$.

Adunând cele două inegalităţi membru cu membru obţinem:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + (n-2)\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \geq (n-1)[\sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{n-1}} + \sqrt[n-1]{a_n(\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n})^{n-2}}\,].$$

Însă

$$\sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{n-1}} + \sqrt[n-1]{a_n(\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n})^{n-2}} \geq 2\sqrt{\sqrt[n-1]{a_1a_2\ldots a_{n-1}}\cdot\sqrt[n-1]{a_n(\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n})^{n-2}}} = 2\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n},$$

astfel că $\sum_{i=1}^{n} a_i + (n-2)\cdot\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \geq 2\cdot(n-1)\cdot\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \geq n\cdot\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$.

Soluţia 2. Se demonstrează destul de uşor că inegalitatea este adevărată pentru un număr n de forma 2^k ($k\in\mathbb{N}$), folosind inducţia matematică după k .

Fie acum $n\in\mathbb{N}$ iar k cel mai mic număr natural pentru care $n \leq 2^k$.

Numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $\underbrace{g,\ldots,g}_{de\ 2^k-n\ ori}$, unde $g = \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$ sunt pozitive şi în număr de 2^k.

Putem scrie deci $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+(2^k-n)g}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1a_2\ldots a_n g^{2^k-n}}$.

Însă $a_1a_2\ldots a_n g^{2^k-n} = g^n\cdot g^{2^k-n} = g^{2^k}$.

Obţinem deci inegalitatea $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+(2^k-n)g}{2^k} \geq g$, care este echivalentă în final cu $a_1+a_2+\ldots+a_n \geq n\cdot g = n\cdot\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$

Back

6.3. Principiul includerii şi excuderii

Vom prezenta în continuare un rezultat cunoscut sub numele de *principiul includerii şi excluderii*:

Teorema 6.3.1. Fie M o mulţime finită iar $M_1, M_2, ..., M_n$ submulţimi ale lui M. Dacă pentru o mulţime M notăm prin $|M|$ cardinalul său, atunci :

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right| = \sum_{1\le i\le n}|M_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|M_i\cap M_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|M_i\cap M_j\cap M_k| - .... + (-1)^{n-1}|M_1\cap ...\cap M_n| .$$

Demonstraţie. Facem inducţie matematică după n. Pentru $n=1$ egalitatea din enunţ se reduce la $|M_1|=|M_1|$, ceea ce este evident. Pentru $n=2$ trebuie demonstrată egalitatea :

$$(1)\qquad |M_1\cup M_2| = |M_1|+|M_2|-|M_1\cap M_2|$$

care de asemenea este adevărată, deoarece elementele din $M_1\cap M_2$ apar atât la M_1 cât şi la M_2.

Presupunem egalitatea din enunţ adevărată pentru oricare m submulţimi ale lui M cu $m<n$ şi o să o demonstrăm pentru n submulţimi $M_1, M_2, ..., M_n$.

Dacă notăm $N = \bigcup_{i=1}^{n-1} M_i$, atunci conform relaţiei (1) putem scrie:

$$(2)\qquad \left|\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right| = |N\cup M_n| = |N|+|M_n|-|N\cap M_n|.$$

Însă $N\cap M_n = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} M_i\right)\cap M_n = \bigcup_{i=1}^{n-1}(M_i\cap M_n)$, deci aplicând ipoteza de inducţie pentru $\bigcup_{i=1}^{n-1}(M_i\cap M_n)$ şi ţinând seama de faptul că $(M_i\cap M_n)\cap(M_j\cap M_n) = (M_i\cap M_j)\cap M_n$, $(M_i\cap M_n)\cap(M_j\cap M_n)\cap(M_k\cap M_n) = (M_i\cap M_j\cap M_k)\cap M_n$, etc, obţinem:

$$(3)\qquad \begin{aligned} |N\cap M_n| &= \left|\bigcup_{i=1}^{n-1}(M_i\cap M_n)\right| = \sum_{i=1}^{n-1}|M_i\cap M_n| - \sum_{1\le i<j\le n-1}|M_i\cap M_j\cap M_n| + \\ &+ \sum_{1\le i<j<k\le n-1}|M_i\cap M_j\cap M_k\cap M_n| - .... + (-1)^{n-2}\left|\bigcap_{i=1}^{n} M_i\right|. \end{aligned}$$

Aplicând ipoteza de inducţie şi pentru $|N|$ obţinem:

$$(4)\qquad |N| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} M_i\right| = \sum_{i=1}^{n-1}|M_i| - \sum_{1\le i<j\le n-1}|M_i\cap M_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n-1}|M_i\cap M_j\cap M_k| - .... + (-1)^{n-2}\left|\bigcap_{i=1}^{n-1} M_i\right|,$$

astfel că ţinând cont de (3) şi (4) relaţia (2) devine:

$$\begin{aligned} \left|\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right| &= |N| + |M_n| - |N\cap M_n| = \left(\sum_{i=1}^{n-1}|M_i| + |M_n|\right) - \left(\sum_{1\le i<j\le n-1}|M_i\cap M_j| + \sum_{i=1}^{n-1}|M_i\cap M_n|\right) + \\ &+ \left(\sum_{1\le i<j<k\le n-1}|M_i\cap M_j\cap M_k| + \sum_{1\le i<j\le n-1}|M_i\cap M_j\cap M_n|\right) - ... + \\ &+ \left[(-1)^{n-2}\left|\bigcap_{i=1}^{n-1} M_i\right|\right] - (-1)^{n-3}\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_{n-2}\le n-1}|M_{i_1}\cap M_{i_2}\cap ....\cap M_{i_{n-2}}\cap M_n| - \end{aligned}$$

$$-(-1)^{n-2}\left|\bigcap_{i=1}^{n} M_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|M_i| - \sum_{1\le i<j\le n}\left|M_i \cap M_j\right| + \sum_{1\le i<j<k\le n}\left|M_i \cap M_j \cap M_k\right| - \ldots + (-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} M_i\right|.$$

Conform principiului inducţiei matematice, egalitatea din enunţ este adevărată pentru orice număr natural n nenul. ■

Aplicaţie.

Câte numere naturale nenule mai mici sau egale cu 1000 sunt divizibile sau cu 2 sau cu 3 sau cu 5?

Soluţie. Fie $A = \{2n : n\in\mathbb{N}, 2n \le 1000\}$, $B = \{3n : n\in\mathbb{N}, 3n \le 1000\}$ şi $C = \{5n : n\in\mathbb{N}, 5n \le 1000\}$.

Se observă că $A\cap B = \{6n : n\in\mathbb{N}, 6n \le 1000\}$,

$A\cap C = \{10n : n\in\mathbb{N}, 10n \le 1000\}$,

$B\cap C = \{15n : n\in\mathbb{N}, 15n \le 1000\}$,

$A\cap B\cap C = \{30n : n\in\mathbb{N}, 30n \le 1000\}$.

Evident numărul căutat este $|A \cup B \cup C|$. Aplicând principiul includerii şi excluderii pentru $n = 3$, avem $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$

$$= \left[\frac{1000}{2}\right] + \left[\frac{1000}{3}\right] + \left[\frac{1000}{5}\right] - \left[\frac{1000}{6}\right] - \left[\frac{1000}{10}\right] - \left[\frac{1000}{15}\right] + \left[\frac{1000}{30}\right] =$$

$=500+333+200-166-100-66+33=734$.

Mai multe aplicaţii se găsesc la capitolul de probleme propuse.

Back