- [Ceviene de rang n]
- [Teorema 1 a lui Newton]
- [Teorema 2 a lui Newton]
- [Teorema lui Euler]
- [Teorema lui Ptolemeu generalizata]
- [Teorema lui Morley]
- [Teorema lui Carnot]

#

3. CEVIENE DE RANG n

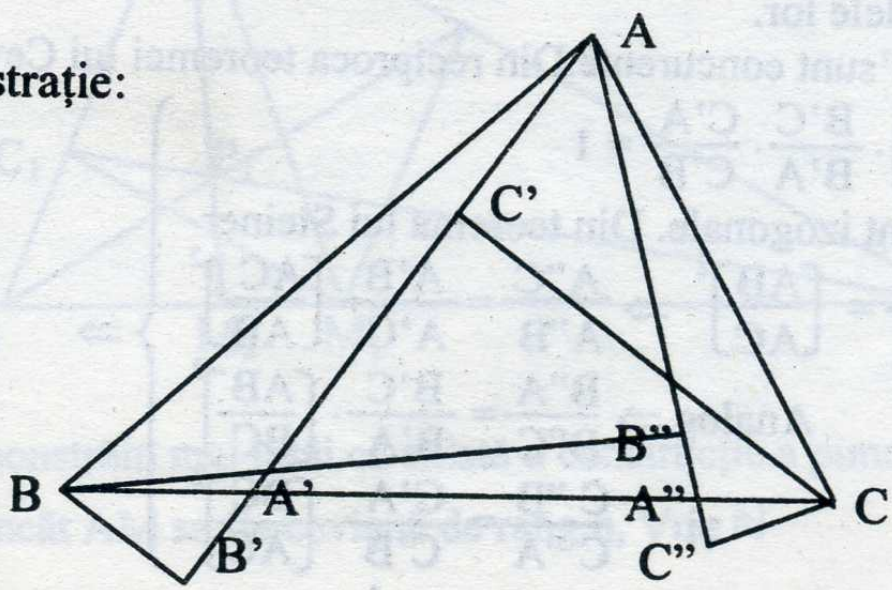
<u>Definiție:</u> 1. În triunghiul ΔABC o dreaptă AM, unde M∈ [BC], se numește ceviană.

2. Spunem că două ceviene AA' și AA" sunt ceviene izogonale dacă *m*(∢BAA') = *m*(∢CAA").

<u>Teorema lui Steiner:</u> Fie triunghiul ΔABC și punctele A', A"∈ BC, astfel încât AA' și AA" sunt izogonale. Atunci

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{A''B}{A''C}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

Demonstrație:



Construim $BB' \perp AA'$ şi $CC' \perp AA'$, astfel încât $B', C' \in AA'$

şi $BB'' \perp AA''$ şi $CC'' \perp AA''$, astfel încât $B'', C'' \in AA''$

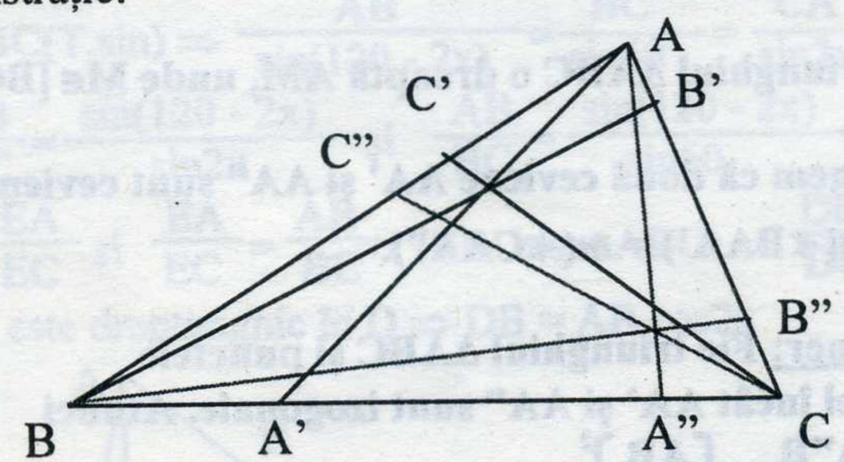
$$\left.\begin{array}{l}\Delta BB'A' \sim \Delta CC'A' \Rightarrow \dfrac{A'B}{A'C} = \dfrac{BB'}{CC'} \\ \Delta BB''A'' \sim \Delta CC''A'' \Rightarrow \dfrac{A''B}{A''C} = \dfrac{BB''}{CC''}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{A'B}{A'C} \cdot \dfrac{A''B}{A''C} = \dfrac{BB'}{CC'} \cdot \dfrac{BB''}{CC''}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta BB''A \sim \Delta CC'A \Rightarrow \dfrac{BB''}{CC'} = \dfrac{AB}{AC} \\ \Delta BB'A \sim \Delta CC''A \Rightarrow \dfrac{BB'}{CC''} = \dfrac{AB}{AC}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{BB'}{CC'} \cdot \dfrac{BB''}{CC''} = \left[\dfrac{AB}{AC}\right]^2$$

$$\Rightarrow \mathbf{\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{A''B}{A''C} = \left[\frac{AB}{AC}\right]^2}$$

<u>Teorema:</u> Izogonalele a trei ceviene concurente sunt concurente.

Demonstraţie:



Fie ΔABC, AA', BB' şi CC' cele trei ceviene concurente şi AA'', BB'' şi CC'' izogonalele lor.

AA', BB'şi CC'sunt concurente.Din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că $\dfrac{A'B}{A'C} \cdot \dfrac{B'C}{B'A} \cdot \dfrac{C'A}{C'B} = 1$

AA' şi AA'' sunt izogonale. Din teorema lui Steiner

$$\Rightarrow \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{A''B}{A''C} = \left[\frac{AB}{AC}\right]^2 \Rightarrow \frac{A''C}{A''B} = \frac{A'B}{A'C} \cdot \left[\frac{AC}{AB}\right]^2$$

$$\text{Analog} \Rightarrow \frac{B''A}{B''C} = \frac{B'C}{B'A} \cdot \left[\frac{AB}{BC}\right]^2$$

$$\text{şi} \quad \frac{C''B}{C''A} = \frac{C'A}{C'B} \cdot \left[\frac{BC}{AC}\right]^2 \quad \Bigg\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{A''C}{A''B} \cdot \frac{B''A}{B''C} \cdot \frac{C''B}{C''A} = 1$. Din reciproca teoremei lui Ceva

$\Rightarrow$ **AA", BB" şi CC" sunt concurente.**

<u>Definiţie:</u> În triunghiul ΔABC se numesc simediane simetricele medianelor faţă de bisectoare.

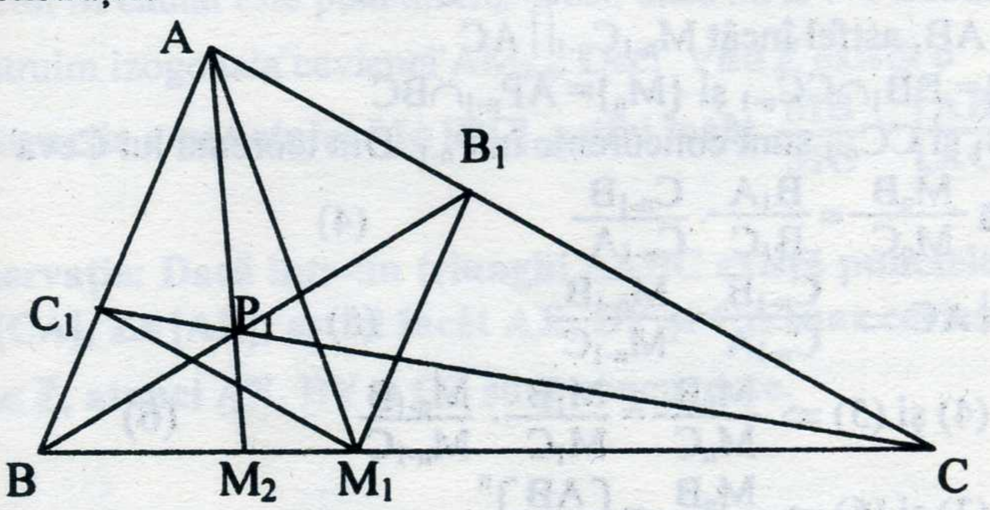
Observaţie: Deoarece într-un triunghi medianele sunt concurente, din teorema anterioară rezultă că şi simedianele unui triunghi sunt concurente(Punctul de concurenţă se numeşte punctul lui Lemoine al triunghiului)

<u>Definiţie:</u> În triunghiul ΔABC o dreaptă AM, unde M∈ [BC], se numeşte ceviană de rang n dacă $\frac{MB}{MC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^n$, **n∈ ℤ.**

Observaţii: 1.Mediana este o ceviană de rang 0.
2.Bisectoarea este o ceviană de rang 1.
3.Simediana este o ceviană de rang 2.

1*.Fie triunghiul ΔABC şi n∈ ℤ. Să se determine o construcţie a punctului M∈ [BC], astfel încât AM să fie ceviană de rang n.

Demonstraţie:



Să demonstrăm mai întâi că există o construcţie a punctului M∈ [BC], astfel încât AM sa fie ceviană de rang n, ∀n∈ ℕ

Dacă n=0, atunci AM este mediană.

Fie $M_1 \in [BC]$, astfel încât $[AM_1$ este bisectoarea $\sphericalangle BAC$. Deci AM_1 este ceviană de rang 1.

Fie $B_1 \in AC$ şi $C_1 \in AB$, astfel încât $M_1B_1 \| AB$ şi $M_1C_1 \| AC$.

Fie $\{P_1\} = BB_1 \cap CC_1$ şi $\{M_2\} = AP_1 \cap BC$

AM_2, BB_1 şi CC_1 sunt concurente în P_1. Din teorema lui Ceva

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{rezultă că } \dfrac{M_2B}{M_2C} = \dfrac{B_1A}{B_1C}\cdot\dfrac{C_1B}{C_1A} \\ M_1B_1 \| AB \Rightarrow \dfrac{B_1A}{B_1C} = \dfrac{M_1B}{M_1C} \quad (1) \\ M_1C_1 \| AC \Rightarrow \dfrac{C_1B}{C_1A} = \dfrac{M_1B}{M_1C}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{M_2B}{M_2C} = \left[\dfrac{M_1B}{M_1C}\right]^2 \\ [AM_1 \text{ este bisectoarea } \sphericalangle BAC \Rightarrow \dfrac{M_1B}{M_1C} = \dfrac{AB}{AC} \quad (2)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{M_2B}{M_2C} = \left[\frac{AB}{AC}\right]^2 \Rightarrow AM_2 \text{ este ceviană de rang 2,}$$

adică simediana.

Să presupunem că am determinat $M_{n-1} \in [BC]$, astfel încât $\dfrac{M_{n-1}B}{M_{n-1}C} = \left[\dfrac{AB}{AC}\right]^{n-1}$ (3) şi să determinăm, cu ajutorul lui, punctul $M_n \in [BC]$, astfel încât $\dfrac{M_nB}{M_nC} = \left[\dfrac{AB}{AC}\right]^n$

Fie $C_{n-1} \in AB$, astfel încât $M_{n-1}C_{n-1} \| AC$.

Fie $\{P_{n-1}\} = BB_1 \cap CC_{n-1}$ şi $\{M_n\} = AP_{n-1} \cap BC$

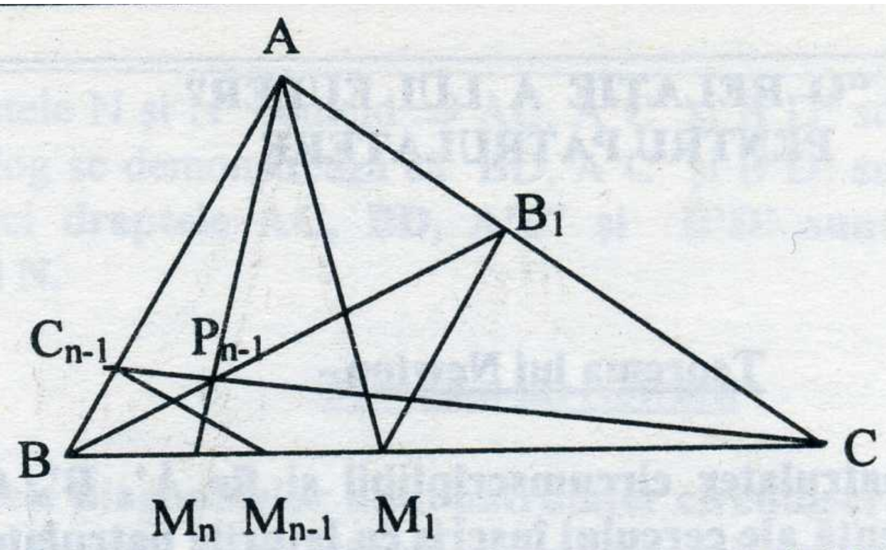
AM_n, BB_1 şi CC_{n-1} sunt concurente în P_{n-1}. Din teorema lui Ceva rezultă că $\dfrac{M_nB}{M_nC} = \dfrac{B_1A}{B_1C}\cdot\dfrac{C_{n-1}B}{C_{n-1}A}$ (4)

$M_{n-1}C_{n-1} \| AC \Rightarrow \dfrac{C_{n-1}B}{C_{n-1}A} = \dfrac{M_{n-1}B}{M_{n-1}C}$ (5)

Din (1), (4) şi (5) $\Rightarrow \dfrac{M_nB}{M_nC} = \dfrac{M_1B}{M_1C}\cdot\dfrac{M_{n-1}B}{M_{n-1}C}$ (6)

Din (2), (3) şi (6) $\Rightarrow \dfrac{M_nB}{M_nC} = \left[\dfrac{AB}{AC}\right]^n$

$\Rightarrow AM_n$ este ceviană de rang n $\Rightarrow$ punctul M căutat este M_n.



Să arătăm acum că există o construcție a punctului $M \in [BC]$, astfel încât AM să fie ceviană de rang n, $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

Fie $M_{2-n} \in [BC]$, astfel încât AM_{2-n} este ceviană de rang $2-n>0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{M_{2-n}B}{M_{2-n}C} = \left[\frac{AB}{AC}\right]^{2-n}$$

Fie AM_n izogonala cevienei AM_{2-n}. Din teorema lui Steiner $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{M_{2-n}B}{M_{2-n}C} \cdot \frac{M_nB}{M_nC} = \left[\frac{AB}{AC}\right]^2 \Rightarrow \frac{M_nB}{M_nC} = \left[\frac{AB}{AC}\right]^2 \cdot \frac{M_{2-n}C}{M_{2-n}B}$$

$$\Rightarrow \frac{M_nB}{M_nC} = \left[\frac{AB}{AC}\right]^2 \cdot \left[\frac{AB}{AC}\right]^{n-2} \Rightarrow \frac{M_nB}{M_nC} = \left[\frac{AB}{AC}\right]^n.$$

Punctul M căutat este punctul M_n. Deci, dacă $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ trebuie să construim izogonala cevienei AM_{2-n}. Deci **$\forall n \in \mathbb{Z}$ există o construcție a punctului $M \in [BC]$, astfel încât $\frac{MB}{MC} = \left[\frac{AB}{AC}\right]^n$.**

Observație: Dacă într-un triunghi ΔABC există punctele $X \in [BC]$, $Y \in [CA]$, $Z \in [AB]$, astfel încât AX, BY și CZ sunt ceviene de rang n, $n \in \mathbb{Z}$, atunci AX, BY și CZ sunt concurente.

Back

4. "O RELAȚIE A LUI EULER" PENTRU PATRULATERE

4.1. Teoreme

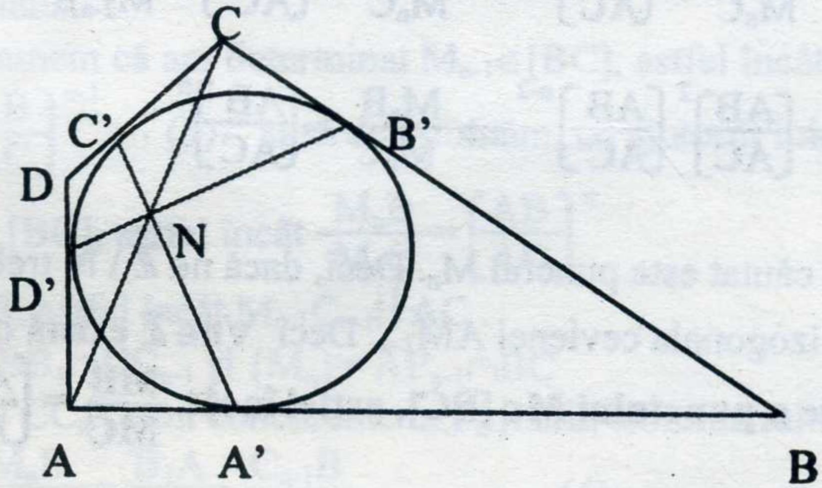
<u>Teorema lui Newton</u>

Fie ABCD un patrulater circumscriptibil și fie A', B', C', D' punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile patrulaterului. Atunci dreptele AC, BD, A'C' și B'D' sunt concurente într-un punct N (punctul lui Newton).

Demonstrație:

Fie $\{N\}=AC\cap B'D'$, $a=m(\sphericalangle AD'N)$ și $b=m(\sphericalangle AND')$

$\sphericalangle AD'N \equiv \sphericalangle BB'N \Rightarrow m(\sphericalangle AD'N)+m(\angle CB'N)=180$



$$\left.\begin{array}{l} \text{În } \Delta AD'N \text{ din teorema sinusurilor} \Rightarrow \dfrac{AN}{\sin a}=\dfrac{AD'}{\sin b} \\ \text{În } \Delta CB'N \text{ din teorema sinusurilor} \Rightarrow \dfrac{NC}{\sin a}=\dfrac{B'C}{\sin b} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{AN}{NC}=\dfrac{AD'}{B'C} \\ \text{Fie } \{N'\}=AC\cap A'C'. \text{ Analog} \Rightarrow \dfrac{AN'}{N'C}=\dfrac{AA'}{C'C} \\ AA'=AD' \text{ și } CC'=CB' \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{AN}{NC}=\dfrac{AN'}{N'C}$$

⇒ punctele N şi N' coincid ⇒ AC, A'C' şi B'D' sunt concurente în N. Analog se demonstrează că BD, A'C' şi B'D' sunt concurente în N . Deci **dreptele AC, BD, A'C' şi B'D' sunt concurente în punctul N.**

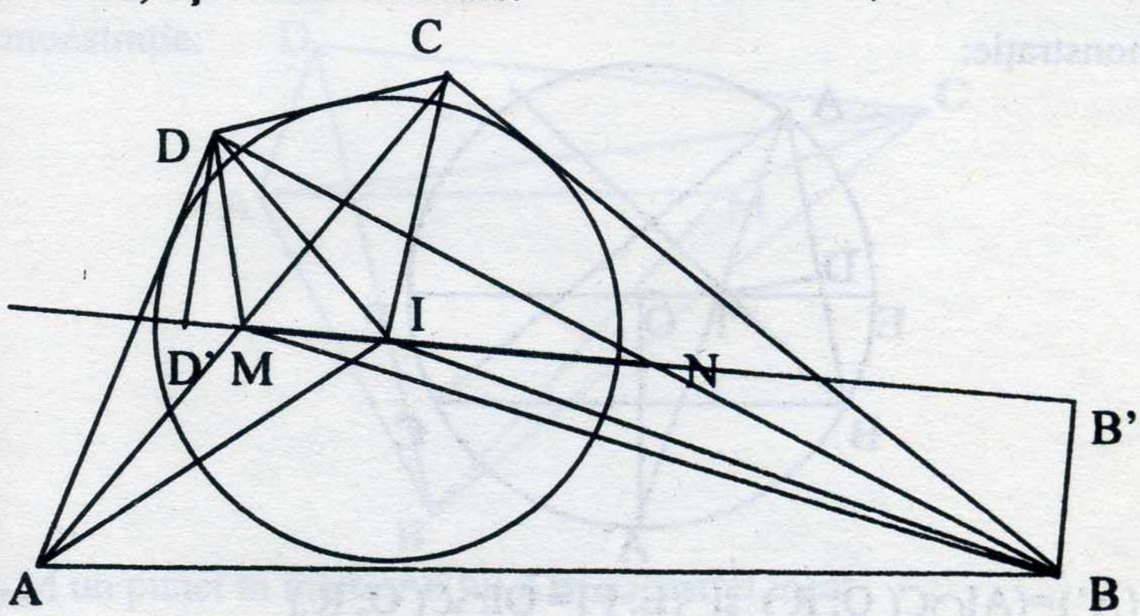
Back

#

Teorema lui Newton

Mijloacele diagonalelor unui patrulater circumscriptibil şi centrul cercului înscris sunt situate pe o aceeaşi dreaptă (dreapta lui Newton).

Demonstraţie: Fie patrulaterul ABCD circumscris cercului *C*(I; r) şi punctele M şi N mijloacele diagonalelor AC şi BD. Să arătăm că punctele M, I şi N sunt coliniare.



M este mijlocul lui AC ⇒ $S_{AMD} = \dfrac{S_{ADC}}{2}$ şi $S_{BMC} = \dfrac{S_{ABC}}{2}$ ⇒

$$\Rightarrow S_{AMD} + S_{BMC} = \frac{S_{ABCD}}{2} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{AID} = \dfrac{r\cdot AD}{2} \text{ şi } S_{BIC} = \dfrac{r\cdot BC}{2} \Rightarrow S_{AID} + S_{BIC} = \dfrac{r\cdot(AD+BC)}{2} \\ \text{Deoarece ABCD este circumscriptibil} \Rightarrow AD+BC=AB+CD \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{AID}+S_{BIC} = \frac{r\cdot(AB+BC+CD+DA)}{4} \Rightarrow S_{AID}+S_{BIC}= \frac{S_{ABCD}}{2} \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) $\Rightarrow S_{AMD} + S_{BMC} = S_{AID} + S_{BIC} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{BMC} - S_{BIC} = S_{AID} - S_{AMD} \Rightarrow S_{MIB} + S_{MIC} = S_{MIA} + S_{MID} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{MIC} - S_{MIA} = S_{MID} - S_{MIB}$

Deoarece IM este mediană în ΔAIC, deci $S_{MIC} = S_{MIA} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{MID} = S_{MIB}$ (3)

Fie $BB' \perp MI$ şi $DD' \perp MI$, astfel încât $B', D' \in MI$ şi $\{N'\} = MI \cap BD$

Din (3) rezultă că $BB' = DD'$ şi se demonstrează uşor că

$\Delta BB'N' \equiv \Delta DD'N' \Rightarrow BN' = DN' \Rightarrow N'$ este mijlocul lui BD, deci

punctele N' şi N coincid $\Rightarrow$ **punctele M, I şi N sunt coliniare.**

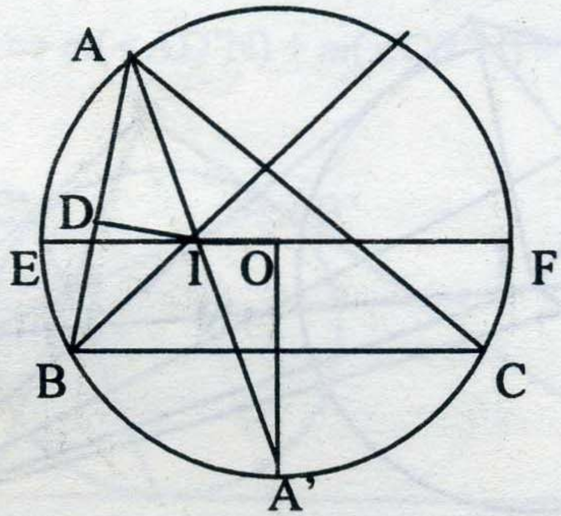
Back

#

Teorema lui Euler

Fie $\mathcal{C}(I; r)$ şi $\mathcal{C}(O; R)$ cercul înscris şi respectiv circumscris triunghiului ΔABC. Atunci are loc relaţia: $OI^2 = R^2 - 2rR$

Demonstraţie:



Fie $\{A'\}=(AI \cap \mathcal{C}(O; R)$ şi $\{E, F\}= OI \cap \mathcal{C}(O; R)$

Din puterea punctului I faţă de cercul $\mathcal{C}(O; R)$ rezultă că

$IE \cdot IF = AI \cdot A'I$ (1)

$IE \cdot IF = (R - OI) \cdot (R + OI) \Rightarrow IE \cdot IF = R^2 - OI^2$ (2)

Construim $ID \perp AB$, astfel încât $D \in AB$. În triunghiul ΔADI dreptunghic în D avem: $AI = \dfrac{r}{\sin(A/2)}$ (3)

$m(\sphericalangle A'BI) = m(\sphericalangle A'BC) + m(\sphericalangle CBI) = m(\sphericalangle A'AC) + m(\sphericalangle CBI)$

$\Rightarrow m(\sphericalangle A'BI) = \dfrac{m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B)}{2}$ (4)

$\sphericalangle A'IB$ este exterior $\Delta AIB \Rightarrow m(\sphericalangle A'IB) = m(\sphericalangle IAB) + m(\sphericalangle IBA)$

$\Rightarrow m(\sphericalangle A'IB) = \dfrac{m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B)}{2}$ (5)

Din (4) şi (5) $\Rightarrow m(\sphericalangle A'BI) = m(\sphericalangle A'IB) \Rightarrow \Delta A'BI$ este isoscel $\Rightarrow$

$\Rightarrow A'I = A'B$. Deoarece în $\Delta ABA'$ avem: $A'B = 2R \cdot \sin(A/2)$

rezultă că $A'I = 2R \cdot \sin(A/2)$ (6)

Din (3) şi (6) $\Rightarrow AI \cdot A'I = 2rR$ (7)

Din (1), (2) şi (7) rezultă că **$OI^2 = R^2 - 2rR$**

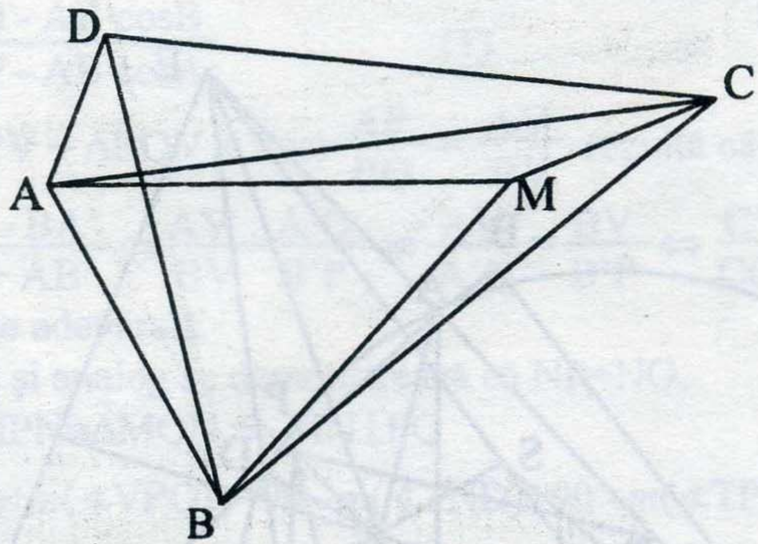
[Back](#)

#

Teorema lui Ptolemeu generalizată

Într-un patrulater convex ABCD are loc relația:
$(AC\cdot BD)^2 = (AB\cdot CD)^2 + (BC\cdot DA)^2 - 2AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA\cdot\cdot\cos(A+C)$

Demonstrație:



Fie M un punct în interiorul lui ABCD, astfel încât
$\Delta MBC \sim \Delta ABD \Rightarrow MB/AB = BC/BD = CM/DA \Rightarrow$
$\Rightarrow CM = (BC\cdot DA)/BD$ (1)

$\Delta MBC \sim \Delta ABD \Rightarrow \sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle ABD \Rightarrow \sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle ABM$ (2)

$MB/AB = BC/BD \Rightarrow DB/AB = CB/MB$ (3)

Din (2) și (3) $\Rightarrow \Delta DBC \sim \Delta ABM \Rightarrow AM = (AB\cdot CD)/BD$ (4)

$\sphericalangle BMC \equiv \sphericalangle BAD$ și $\sphericalangle BMA \equiv \sphericalangle BCD \Rightarrow m(\sphericalangle AMC) = 360 -$

$- [m(\sphericalangle BAD)+m(\sphericalangle BCD)] \Rightarrow \cos m(\sphericalangle AMC)=\cos(A + C)$ (5)

În ΔAMC scriem teorema lui Pitagora generalizată $\Rightarrow$

$AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2\cdot AM\cdot MC\cdot \cos m(\sphericalangle AMC)$. Din (1), (4) și (5)
$\Rightarrow(AC\cdot BD)^2=(AB\cdot CD)^2+(BC\cdot DA)^2-2AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA\cdot\cdot\cos(A+C)$

Observații:

1.În ΔAMC avem inegalitatea: $AC\leq AM + MC$. Din (1) și (4) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ **$AC\cdot BD \leq AB\cdot CD + BC\cdot DA$** (Inegalitatea lui Ptolemeu)

2.Dacă ABCD este inscriptibil $\Rightarrow$ **$AC\cdot BD = AB\cdot CD + BC\cdot DA$**

3.Dacă $m(\sphericalangle A)+m(\sphericalangle C)=90 \Rightarrow$ **$(AC\cdot BD)^2=(AB\cdot CD)^2+(BC\cdot DA)^2$**

Back

#

5. TEOREMA LUI MORLEY

5.1. Teorema

<u>Teorema lui Morley</u>

Trisectoarele unghiurilor unui triunghi oarecare se intersectează în trei puncte care sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

Soluția 1

În rezolvarea acestei teoreme se foloseşte următoarea lemă:

Lema. Fie ΔABC un triunghi echilateral şi fie A', B', C' puncte exterioare triunghiului ΔABC, astfel încât

$m(\sphericalangle A'BC) = m(\sphericalangle A'CB) = a$, $m(\sphericalangle B'CA) = m(\sphericalangle B'AC) = b$

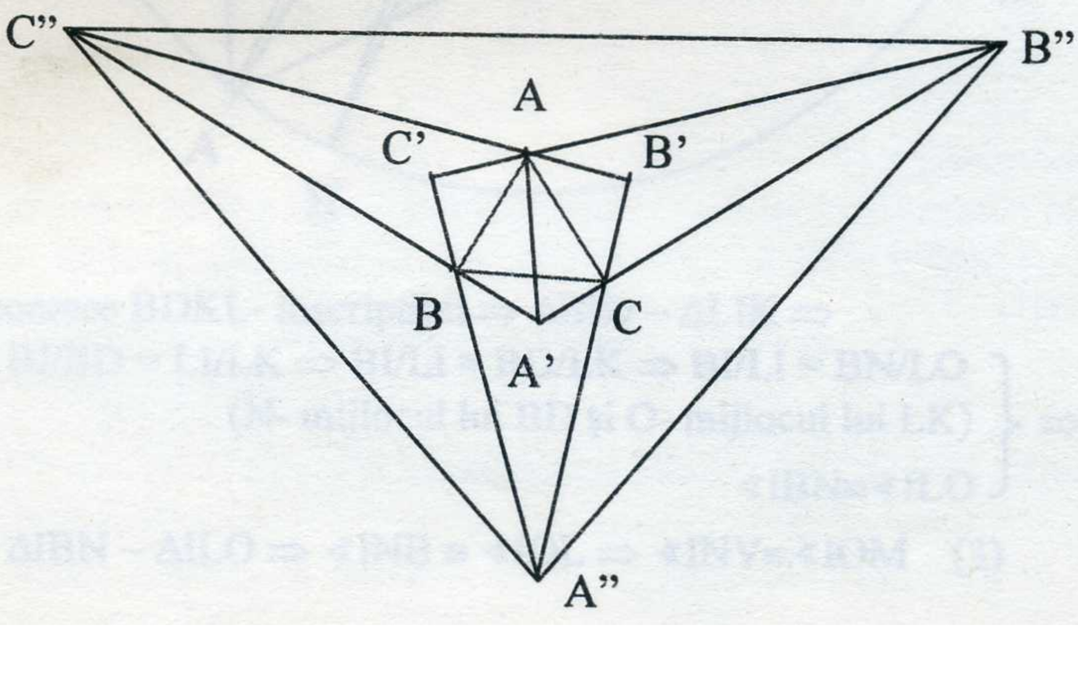
şi $m(\sphericalangle C'AB) = m(\sphericalangle C'BA) = c$, unde $a<60$, $b<60$, $c<60$ şi $a + b + c = 120$. Fie $\{A''\}=B'C\cap C'B$, $\{B''\}=C'A\cap A'C$ şi $\{C''\}=A'B\cap B'A$. Atunci:

1. **A"B şi A"C sunt trisectoarele unghiului $\sphericalangle B''A''C''$ în ΔA"B"C"**
2. **$m(\sphericalangle B''A''C'') = 180 - 3a$, $m(\sphericalangle A''B''C'') = 180 - 3b$ şi**

$$m(\sphericalangle A''C''B'') = 180 - 3c$$

Demonstrația lemei:

1.



Se demonstrează uşor că $\Delta ABA' \equiv \Delta ACA' \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\sphericalangle BA'A) = m(\sphericalangle CA'A) \Rightarrow$ [A'A este bisectoarea $\sphericalangle B''A'C''$ (1)

$m(\sphericalangle C''AC') = m(\sphericalangle B''AB') = 180 - b - 60 - c = a$

Analog $\Rightarrow m(\sphericalangle C''BC') = m(\sphericalangle A''BA') = b$

şi $m(\sphericalangle A''CA') = m(\sphericalangle B''CB') = c$

Deci $m(\sphericalangle C''AC') = a \Rightarrow m(\sphericalangle B''AC'') = 180 - a$ (2)

Locul geometric al punctelor P din interiorul $\Delta B''A'C''$ pentru care $m(\sphericalangle B''PC'') = 180 - a$ este un arc de cerc, extremităţile acestuia fiind punctele B" şi C". Din (2) rezultă că punctul A aparţine acestui arc de cerc. (3)

Fie I intersecţia bisectoarelor $\Delta B''A'C''$.

$m(\sphericalangle B''IC'') = 180 - [m(\sphericalangle IB''C'') + m(\sphericalangle IC''B'')] =$

$= 180 - [m(\sphericalangle A'B''C'') + m(\sphericalangle A'C''B'')]/2 =$

$= 180 - [180 - m(\sphericalangle B''A'C'')]/2 = 180 - [180 - (180 - 2a)]/2$

$= 180 - a \Rightarrow m(\sphericalangle B''IC'') = 180 - a$ (4)

Din (1), (3) şi (4) $\Rightarrow$ punctele A şi I coincid $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ A este intersecţia bisectoarelor $\Delta B''A'C''$

Analog $\Rightarrow$ B şi C sunt punctele de intersecţie ale bisectoarelor în $\Delta C''B'A''$ şi respectiv $\Delta A''C'B''$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ A"B şi A"C sunt trisectoarele unghiului $\sphericalangle B''A''C''$

2. În $\Delta BA''C$ avem $m(\sphericalangle BA''C) = 180 - (a+b) - (a+c) = 60 - a$

Analog $\Rightarrow m(\sphericalangle CB''A) = 60 - b$ şi $m(\sphericalangle AC''B) = 60 - c$

Deoarece [A"B şi [A"C sunt trisectoarele unghiului $\sphericalangle B''A''C''$ rezultă că **$m(\sphericalangle B''A''C'') = 180 - 3a$**

Analog $\Rightarrow$ **$m(\sphericalangle A''B''C'') = 180 - 3b$ şi $m(\sphericalangle A''C''B'') = 180 - 3c$**

Demonstraţia teoremei lui Morley:

Fie triunghiul $A_1B_1C_1$. Fie $a = [180 - m(\sphericalangle B_1A_1C_1)]/3$,

$b = [180 - m(\sphericalangle A_1B_1C_1)]/3$ şi $c = [180 - m(\sphericalangle A_1C_1B_1)]/3$

$\Rightarrow a<60,\ b<60$ şi $c<60$ şi $a + b + c = 120$.

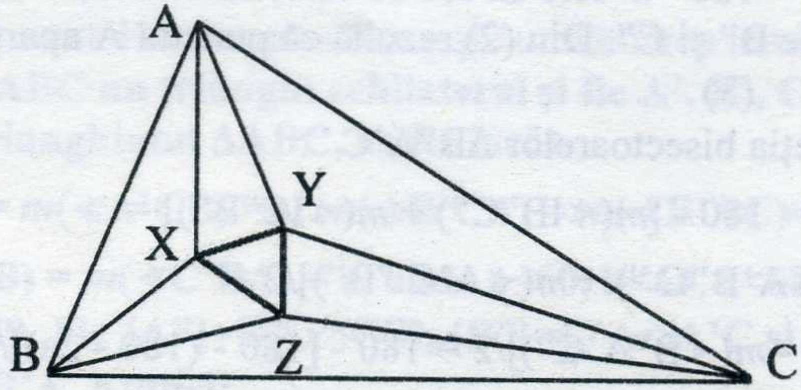
Repetând construcția din lemă obținem triunghiul $\Delta A''B''C''$ în care trisectoarele unghiurilor lui se intersectează în punctele A, B, C. Din lemă $\Rightarrow m(\sphericalangle B''A''C'') = 180 - 3a = m(\sphericalangle B_1A_1C_1)$

Analog $\Rightarrow m(\sphericalangle A''B''C'')=m(\sphericalangle A_1B_1C_1)$ și

$$m(\sphericalangle A''C''B'') = m(\sphericalangle A_1C_1B_1)$$

Deci $\Delta A''B''C'' \sim \Delta A_1B_1C_1$. Deoarece ΔABC este echilateral rezultă că și trisectoarele $\Delta A_1B_1C_1$ se intersectează în trei puncte care sunt vârfurile unui triunghi echilateral.

Soluția 2



Fie BC = a, CA = b și AB = c.

Fie $m(\sphericalangle CAY)=m(\sphericalangle YAX)=m(\sphericalangle XAB)=\alpha$

$m(\sphericalangle ABX)=m(\sphericalangle XBZ)=m(\sphericalangle ZBC)=\beta$

și $m(\sphericalangle BCZ)=m(\sphericalangle ZCY)=m(\sphericalangle YCA)=\gamma$

Aplicăm teorema sinusurilor în $\Delta BXA \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AX}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad (1)$$

În ΔBCA avem $c = 2R\cdot\sin(3\gamma)$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ΔABC (2)

Deoarece $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 60$ (3)

Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow AX = \frac{2R\cdot\sin(3\gamma)\cdot\sin\beta}{\sin(60-\gamma)} = \frac{2R\cdot\sin\beta\cdot(3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma)}{\sin(60-\gamma)} =$$

$$= \frac{2R\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot(3-4\sin^2\gamma)}{\sin(60-\gamma)} = \frac{8R\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot(\sqrt{3}/2+\sin\gamma)\cdot(\sqrt{3}/2-\sin\gamma)}{\sin(60-\gamma)}$$

$$= \frac{8R\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot(\sin 60 + \sin\gamma)\cdot(\sin 60 - \sin\gamma)}{\sin(60-\gamma)} =$$

$$= \frac{8R\sin\beta\sin\gamma\cdot 2\sin(30+\gamma/2)\cos(30-\gamma/2)\cdot 2\sin(30-\gamma/2)\cos(30+\gamma/2)}{2\sin(30-\gamma/2)\cos(30-\gamma/2)}$$

$$\Rightarrow AX = 8R\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\sin(60+\gamma) \qquad (4)$$

Analog $\Rightarrow AY = 8R\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\sin(60+\beta) \qquad (5)$

În ΔXYA aplicăm teorema cosinusului:

$\Rightarrow XY^2 = AX^2 + AY^2 - 2\cdot AX\cdot AY\cdot\cos\alpha$. Din (4) şi (5) $\Rightarrow$

$XY^2 = 64R^2\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma\cdot\sin^2(60+\gamma)+64R^2\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma\cdot\sin^2(60+\beta) -$

$- 128R^2\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma\cdot\sin(60+\gamma)\cdot\sin(60+\beta)\cdot\cos\alpha =$

$=64R^2\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma\cdot[\sin^2(60+\gamma) + \sin^2(60+\beta) - 2\sin(60+\gamma)\cdot\sin(60+\beta)\cdot$

$\cdot\cos\alpha] = 64R^2\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma$

Ultima egalitate se demonstrează astfel:

Facem notaţiile: $60 + \beta = x$; $60 + \gamma = y$ şi $\alpha = z$

Deoarece $\alpha + \beta + \gamma = 60 \Rightarrow x + y + z = 180 \Rightarrow$

$z = 180 - (x + y) \Rightarrow \cos\alpha = \cos z = \cos[180-(x+y)] = -\cos(x+y)$

$\Rightarrow \sin^2(60+\gamma) + \sin^2(60+\beta) - 2\sin(60+\gamma)\cdot\sin(60+\beta)\cdot\cos\alpha =$

$= \sin^2x + \sin^2y + 2\cdot\sin x\cdot\sin y\cdot\cos(x+y) =$

$= \sin^2x + \sin^2y + 2\cdot\sin x\cdot\sin y\cdot(\cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y) =$

$= \sin^2x\cdot(1 - \sin^2y) + \sin^2y\cdot(1 - \sin^2x) + 2\cdot\sin x\cdot\sin y\cdot\cos x\cdot\cos y =$

$= (\sin x\cdot\cos y)^2 + 2\cdot\sin x\cdot\sin y\cdot\cos x\cdot\cos y + (\cos x\cdot\sin y)^2 =$

$= (\sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y)^2 = \sin^2(x + y) = \sin^2z = \sin^2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin^2(60+\gamma) + \sin^2(60+\beta) - 2\sin(60+\gamma)\cdot\sin(60+\beta)\cdot\cos\alpha = \sin^2\alpha$

Deci $XY^2 = 64R^2\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma \Rightarrow XY = 8R\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$

Analog $\Rightarrow YZ = XZ = 8R\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow XY = YZ = XZ \Rightarrow$ **ΔXYZ este echilateral.**

Back

6. TEOREMA LUI CARNOT

6.1. Teorema

<u>Teorema lui Carnot</u>

Fie ABCDEF un hexagon şi punctele $\{X\}=EF\cap AB$, $\{Y\}=AB\cap CD$ şi $\{Z\}=CD\cap EF$. Să se demonstreze că dacă are loc relaţia

$$\frac{AX}{AY}\cdot\frac{BX}{BY}\cdot\frac{CY}{CZ}\cdot\frac{DY}{DZ}\cdot\frac{EZ}{EX}\cdot\frac{FZ}{FX}=1,$$

atunci ABCDEF este înscris într-o elipsă.

Demonstraţie:
Într-un plan α fie hexagonul A'B'C'D'E'F' înscris într-un cerc şi $\{X'\}=E'F'\cap A'B'$, $\{Y'\}=A'B'\cap C'D'$ şi $\{Z'\}=C'D'\cap E'F'$.
Deoarece $X'A'\cdot X'B'=X'F'\cdot X'E'$, $Y'C'\cdot Y'D'=Y'B'\cdot Y'A'$ şi $Z'E'\cdot Z'F'=Z'D'\cdot Z'C'$ rezultă relaţia

$$\frac{A'X'}{A'Y'}\cdot\frac{B'X'}{B'Y'}\cdot\frac{C'Y'}{C'Z'}\cdot\frac{D'Y'}{D'Z'}\cdot\frac{E'Z'}{E'X'}\cdot\frac{F'Z'}{F'X'}=1$$

Fie O un punct şi considerăm proiecţia de centru O. Proiectând figura din planul α pe un plan β, convenabil ales, obţinem relaţia

$$\frac{AX}{AY}\cdot\frac{BX}{BY}\cdot\frac{CY}{CZ}\cdot\frac{DY}{DZ}\cdot\frac{EZ}{EX}\cdot\frac{FZ}{FX}=\frac{OX\cdot\sin m(\sphericalangle AOX)}{OY\cdot\sin m(\sphericalangle AOY)}\cdot$$

$$\cdot\frac{OX\cdot\sin m(\sphericalangle BOX)}{OY\cdot\sin m(\sphericalangle BOY)}\cdot\frac{OY\cdot\sin m(\sphericalangle COY)}{OZ\cdot\sin m(\sphericalangle COZ)}\cdot\frac{OY\cdot\sin m(\sphericalangle DOY)}{OZ\cdot\sin m(\sphericalangle DOZ)}\cdot$$

$$\cdot\frac{OZ\cdot\sin m(\sphericalangle EOZ)}{OX\cdot\sin m(\sphericalangle EOX)}\cdot\frac{OZ\cdot\sin m(\sphericalangle FOZ)}{OX\cdot\sin m(\sphericalangle FOX)}=\frac{\sin m(\sphericalangle AOX)}{\sin m(\sphericalangle AOY)}\cdot\frac{\sin m(\sphericalangle BOX)}{\sin m(\sphericalangle BOY)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sin m(\sphericalangle COY)}{\sin m(\sphericalangle COZ)}\cdot\frac{\sin m(\sphericalangle DOY)}{\sin m(\sphericalangle DOZ)}\cdot\frac{\sin m(\sphericalangle EOZ)}{\sin m(\sphericalangle EOX)}\cdot\frac{\sin m(\sphericalangle FOZ)}{\sin m(\sphericalangle FOX)}=$$

$$=\frac{\sin m(\sphericalangle A'OX')}{\sin m(\sphericalangle A'OY')}\cdot\frac{\sin m(\sphericalangle B'OX')}{\sin m(\sphericalangle B'OY')}\cdot\frac{\sin m(\sphericalangle C'OY')}{\sin m(\sphericalangle C'OZ')}\cdot\frac{\sin m(\sphericalangle D'OY')}{\sin m(\sphericalangle D'OZ')}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sin m(\sphericalangle E'OZ')}{\sin m(\sphericalangle E'OX')}\cdot\frac{\sin m(\sphericalangle F'OZ')}{\sin m(\sphericalangle F'OX')}=\frac{OX'\cdot\sin m(\sphericalangle A'OX')}{OY'\cdot\sin m(\sphericalangle A'OY')}\cdot$$

$$\cdot\frac{OX'\cdot\sin m(\sphericalangle B'OX')}{OY'\cdot\sin m(\sphericalangle B'OY')}\cdot\frac{OY'\cdot\sin m(\sphericalangle C'OY')}{OZ'\cdot\sin m(\sphericalangle C'OZ')}\cdot\frac{OY'\cdot\sin m(\sphericalangle D'OY')}{OZ'\cdot\sin m(\sphericalangle D'OZ')}\cdot$$

$$\cdot\frac{OZ'\cdot\sin m(\sphericalangle E'OZ')}{OX'\cdot\sin m(\sphericalangle E'OX')}\cdot\frac{OZ'\cdot\sin m(\sphericalangle F'OZ')}{OX'\cdot\sin m(\sphericalangle F'OX')}=$$

$$=\frac{A'X'}{A'Y'}\cdot\frac{B'X'}{B'Y'}\cdot\frac{C'Y'}{C'Z'}\cdot\frac{D'Y'}{D'Z'}\cdot\frac{E'Z'}{E'X'}\cdot\frac{F'Z'}{F'X'}=1.$$ Deci

$$\frac{AX}{AY}\cdot\frac{BX}{BY}\cdot\frac{CY}{CZ}\cdot\frac{DY}{DZ}\cdot\frac{EZ}{EX}\cdot\frac{FZ}{FX}=1$$ şi proiecția cercului din planul α pe planul β este o elipsă.

Deci ABCDEF este înscris într-o elipsă.

[Back](#)