Suceava
Teleorman
Vaslui
Vrancea

Concursuri interjudetene

Al. Myller, Iasi
Centre de excelenta, Suceava
Cezar Ivanescu, Targoviste
Constantin Nastasescu-et finala
Cristian Calude, Galati
Gheorghe Lazar, Sibiu
Gheorghe Mihoc, Slobozia
Grigore Moisil, Cluj Napoca
Modus Vivendi, Valcea
Nicolae Paun
Traian Lalescu, Deva
Unirea, Focsani
Papiu Ilarian, Tg-Mures.

#

8.1.21 Suceava

1.Avem din prima relaţie că $a^nb^{n+1}a = b^na^{n+1}$ şi folosind a doua relaţie avem că $a^nb^{n+1}a = a^nb^n$.De aici $ba = e$ şi mai departe $ab = ba = e$ şi este imediat folosind din nou relaţiile că $a = b = e$.

2.Fie $m = p^a$ unde p număr prim şi $a \in \mathbb{N}^*$.Luăm G grupul rădăcinilor unităţii de ordin m.Evident grupul este ciclic.Să vedem câte subgrupuri are.Dacă H este subgrup evident avem $ord(H)|m$ de unde $ord(H) = p^b$.
Elementele lui H se pot scrie ω^s unde ω este rădăcina primitivă .Trebuie să avem $\omega^{sp^b} = e$ deoarece H este subgrup.De aici $p^{b-a}|s$.Deducem uşor de aici că subgrupul este unic şi anume grupul rădăcinilor unităţii de ordin p^b.Aşadar avem $a+1$ subgrupuri ale lui G.Alegem $a = 2^n - 1$ şi p prim variabil şi obţinem cerinţa problemei.

3.Facem schimbarea de variabilă $x = \dfrac{\pi}{4} - y$ de unde $dx = -dy$.Integrala devine $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4} - y}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right)}\, dy = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos 2y}\, dy - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{y}{1+\cos 2y}\, dy =$
$\displaystyle\frac{\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 y}\, dy - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{y}{\cos^2 y}\, dy = \frac{\pi}{8}\,(tgy)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} y(tg\, y)'\, dy =$
$\displaystyle\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(y \cdot tg\, y)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin y}{\cos y}\, dy = -\ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\ln 2}{4}$

4.Să presupunem fără a restrânge generalitatea că funcţia f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.Cum $x_n \geq 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem că $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n} + x_n\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.Observăm că $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\, dx$ fiind o sumă Rienmann deci $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n} + x_n\right) \geq \int_0^1 f(x)\, dx$.
Acum din $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ pentru orice $n \geq n_0$ avem $0 \leq x_n < \varepsilon$.Avem că
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n} + x_n\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n} + x_n\right) - \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n} + \varepsilon\right)\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n} + \varepsilon\right).$$
Din faptul că funcţia este continuă şi crescătoare avem $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n} + x_n\right) \leq$

$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}+\varepsilon\right)$ şi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}+x_n\right) - \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}+\varepsilon\right)\right) = 0.$

Acum $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}+\varepsilon\right)$ este suma Rienmann asociată funţiei $f(x+\varepsilon)$.Cum f este continuă ,f admite primitive.Fie F o primitivă a sa.Avem că $F(x+\varepsilon)$ este o primitivă pentru $f(x+\varepsilon)$.Avem aşadar $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}+\varepsilon\right) = \int_0^1 f(x+\varepsilon)\,dx = F(1+\varepsilon) - F(\varepsilon)$.Făcând $\varepsilon \to 0$ şi folosind continuitatea lui F avem $\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}+\varepsilon\right) = F(1) - F(0) = \int_0^1 f(x)\,dx.$

Aşadar $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}+x_n\right) \le \int_0^1 f(x)\,dx$, şi combinând cu prima obţinem cerinţa.

Back

#

8.1.22 Teleorman

1.Consideram funcţia $g(x)=\frac{F(x)}{e^{ax}}$.Funţia g este derivabilă şi avem $g'(x)=\frac{f'(x)-aF(x)}{e^{ax}}$.Conform ipotezei rezultă $g'(x)=0$ de unde există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $g(x)=c$ de unde $F(x)=ce^{ax}$.Aşadar $f'(x)=cae^{ax}$ şia acum folosind ipoteza $f(0)=1$ rezultă $ca=1$ de unde $f(x)=e^{ax}$.

2.(a)Asociativitatea este indusă de pe mulţimea $M_2(\mathbb{R})$.Să vedem acum că G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$.Avem că

$$A(x)\cdot A(y)=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}\begin{pmatrix}1+xy & 0 & x+y\\ 0 & \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} & 0\\ x+y & 0 & 1+xy\end{pmatrix}$$

$=A\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$. Este uşor de văzut că pentru $x,y\in(-1;1)$ avem $-1<\frac{x+y}{1+xy}<1$ aşadar demonstraţia acestei este încheiată.Cum $I_3\in G$ el rămâne element neutru.Pentru a afla inversa lui $A(x)$ fie ea $A(x')$ trebuie să avem $A(x)\cdot A(x')=I_3$ de unde $A\left(\frac{x+x'}{1+xx'}\right)=A(0)$ de unde alegem $x'=-x$.Comutativitatea se verifică şi ea uşor de unde $(G,\cdot)$ grup abelian.

(b)Definim $f:G\to\mathbb{R}$ $f[A(x)]=\ln\frac{1+x}{1-x}$.Se verifică uşor că funcţia f este injectivă şi cum ea este continuă şi $\lim_{y\to 1} f(y)=+\infty$,iar $\lim_{y\to -1} f(y)=-\infty$ rezultă că f este bijectivă. Avem că $f[A(x)\cdot A(y)]=f\left[A\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\right]=f[A(x)]+f[A(y)]$ relaţiile verificânduse uşor.Aşadar f este izomorfism.

3.Trebuie să arătăm că $-1\le(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})\le 1$ pentru orice $x,y\in[-1;1]$.Este suficient ca $\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)^2\le 1$.Conform inegalităţii CBS avem $\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)^2\le(x^2+y^2)(2-x^2-y^2)$ şi acum aplicând inegalitatea mediilor avem $(x^2+y^2)(2-x^2-y^2)\le 1$.

4.Fie $I=\int_0^1\frac{x+\sin(\pi x)}{1+2\sin(\pi x)}dx$.Facem schimbarea de variabilă $x=1-y$ de unde $dx=-dy$.Integrala devine $I=\int_0^1\frac{1-y+\sin(\pi-\pi y)}{1+2sin(\pi-\pi y)}dy=\int_0^1\frac{1-y+\sin(\pi y)}{1+2\sin(\pi y)}dy$.Adunând cele două forme ale lui I avem $2I=\int_0^1 1\,dy$ de unde $I=\frac{1}{2}$.

Back

#

8.1.23 Vaslui

1.Facem $x \to 1-x$ de unde $f(x)F(1-x) = 1-x$.Fie acum $g(x) = F(x)F(1-x)$.Se observă uşor că g este derivabilă şi $g'(x) = f(x)F(1-x) - F(x)f(1-x) = 1-2x$ de unde $g(x) = x - x^2 + c$ unde c este o constantă.Avem aşadar $F(x)F(1-x) = x - x^2 + c$,relaţia (1).Să determinăm c. Avem că $f\left(\frac{1}{2}\right)F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ de unde $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.Punem $x = \frac{1}{2}$ de unde $c = \frac{3}{4}$.Acum ne uităm la $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1-x}{x-x^2+\frac{3}{4}}$.Integrând în ambele părţi avem $\ln F(x) = \int \frac{1-x}{x-x^2+\frac{3}{4}}\,dx$.Avem că $\int \frac{4-4x}{4x-4x^2+3}\,dx = \int \frac{4-4x}{(3-2x)(2x+1)}\,dx = \int \frac{1-x}{3-2x}\,dx + \int \frac{1-x}{2x+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{2x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{3-2x}\,dx = \frac{3}{4}\ln\left(x+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{2}-x\right) + a$.De aici se obţine $F(x) = e^a\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{3}{2}-x\right)^{\frac{1}{4}}$.Din $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ obţinem $a = 0$.Derivând avem $f(x) = \frac{1-x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{2}-x\right)^{\frac{3}{4}}}$

2.(a)Asociativitatea este indusă. Se demonstrează uşor $A(a)\cdot A(b) = A(a+b)$.De aici se obţine că M este parte stabilă.Acum elementul neutru este $A(0) = I_2$ şi inversul lui $A(a)$ este $A(-a)$.Astfel $(M,\cdot)$ este grup.
(b) Definim $f(A(a)) = \widehat{a}$.Din observaţia de la (a) reiese uşor că f este izomorfism.
(c) Cătăm izomorfismele lui $(\mathbb{Z}_6,+)$.Trebuie să avem $f(\widehat{x}+\widehat{y}) = f(\widehat{x}) + f(\widehat{y})$ $\forall x,y \in \mathbb{Z}_6$ şi f bijectivă.Acum există a astfel încât $f(\widehat{a}) = 1$ şi este unic.Se deduce uşor că din faptul că f este morfism că $\widehat{a}$ este inversabil aşadar $\widehat{a} \in \{\widehat{1};\widehat{5}\}$.Dacă $f(\widehat{1}) = \widehat{1}$ rezultă $f(\widehat{x}) = \widehat{x}$ de unde transferând la M avem $f(A(a)) = A(a)$.Dacă $f(\widehat{1}) = \widehat{5}$ atunci $f(\widehat{x}) = -\widehat{x}$ de unde transferând la M avem $f(A(a)) = -A(a)$.

3.$I = \int_0^1 \frac{x^2}{x^4+x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{x^2-x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{x^2+x+1}\,dx.$

Avem că $\int_0^1 \frac{x}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{1}{2}\left(\ln(x^2-x+1)\Big|_0^1 + \frac{4}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^1\right) = \frac{2\pi}{9}$

Acum $\int_0^1 \frac{x}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx =$
$\frac{1}{2}\left(\ln(x^2+x+1)\Big|_0^1 - \frac{4}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^1\right) = \frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi}{9}$
Din acestea $I = \frac{\pi}{6} - \frac{\ln 3}{4}$.

4.(a) Să luăm $a \in G - H$.Ne uităm la inversul lui a'.Acesta are proprietatea $aa' = a'a = e$.Evident a' nu poate fi în H şi folosind ipoteza avem necesar $a' = a$ de unde $a^2 = e$

(b)Fie $x \in H$ arbitrar şi $a \in G - H$ fixat.Avem că $xa \in G - H$ de unde conform (a) $(xa)^2 = e$ aşadar $xaxa = e$ ceea ce nă dă $xax = a$.Acum luăm $p, q \in H$.Avem că $pap = qaq = a$ de unde $qpapq = q^2aq^2$.Acum evident $q^2 \in H$ de unde $qpapq = a = (pq)a(pq)$ folosind de asemenea că H este subgrup.Din aceasta $pq = qp$ şi am terminat.

(c) Un exemplu este $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ grupul cuaternionilor.Luăm $H = \{\pm 1, \pm i\}$.

Back

#

8.1.24 Vrancea

1.(a) Se observă că $x \circ y = (x-2008)(y-2008)+2008$ de unde $x \circ x = (x-2008)^2+2008 \geq 2008$

(b) Se demonstrează uşor prin inducţie că $x_1 \circ x_2 ... \circ x_k = (x_1-2008)(x_2-2008)...(x_k-2008)+2008$ de unde rezultatul cerut este $c=0$.

(c) Fie A mulţimea căutată.Ne vom uita la mulţimea $B = A - 2008 = \{a_1, .., a_n\}$, mulţimea formată din elementele lui A din care am scăzut 2008.

Condiţia se rescrie $xy \in A$ pentru orice $x, y \in A$.Putem să excludem 0 din mulţime pentru ca el poate fi adăugat în mod trivial la orice mulţime soluţie pentru a obţine o alta.Considerăm $a \in A$ fixat şi fie mulţimea $C = \{aa_1, .., aa_n\}$.Ea este formată în mod trivial din n numere distincte şi este inclusă în B din ipoteză care are tot n elemente,de unde rezultă că este aceeaşi mulţime ca şi B.Aşadar $\prod_{x\in C} x = \prod_{x \in B} x$ de unde $a^n \prod_{x\in B} x = \prod_{x\in B} x$;cum avem numere nenule rezultă $a^n = 1$ de unde $a=1$.Aşadar soluţiile căutate sunt $\{2008\}$,$\{2009\}$,$\{2008, 2009\}$.

2.Pentru ca $(M, \star)$ să fie grup trebuie să existe $e \in M$ astfel încât $e \star x = x$ de unde $xe - ax - ae = x$.Aceasta se rescrie $x(e-a-1) = ae$.Cum aceasta are loc pentru o infinitate de x trebuie să avem $e = a+1$ şi $ae = 0$ de unde obţinem $a=0$ sau $a=-1$.Se verifică uşor că ambele valori creează structură de grup.

3.Fie $g(x) = \{ \begin{array}{c} x^2 \cos\frac{2}{x}, x \neq 0 \\ 0, x=0 \end{array}$ .Funcţia g este derivabilă şi

$g'(x) = \{ \begin{array}{c} 2x\cos\frac{2}{x} + 2\sin\frac{2}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{array}$ .Se observă că funcţia $h(x) = \{ \begin{array}{c} 2x\cos\frac{2}{x}, x \neq 0 \\ 0, x=0 \end{array}$ este continuă pe $\mathbb{R}$ deci admite primitive.Cum diferenţa a două funcţii care admit primtive este o funţie care admite primitive luând $g' - h$ problema este rezolvată.

4.(a) Fie $f(x) = e^x + x^2 + x + 1$.Avem că $f'(x) = e^x + 2x + 1$ de unde $f(x) - f'(x) = x^2 - x$.Avem aşadar de calculat $\int \frac{f(x) - f'(x)}{f(x)} dx = \int 1\, dx - \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = x - \ln f(x) + c = x - \ln(e^x + x^2 + x + 1) + c$

(b) Se observă că $(x-1)x(x+1)(x+2) = (x^2+x-2)(x^2+x) = (x^2+x-1)^2 - 1$.Vom face schimbare de variabilă $y = x^2+x-1$ de unde $dy = (2x+1)dx$.Avem aşadar de calculat $\int \frac{1}{y^2+a-1}\, dy$.Avem trei cazuri:

I. $a < 1$. Atunci $\dfrac{1}{y^2+a-1} = \dfrac{1}{2\sqrt{1-a}}\left(\dfrac{1}{y-\sqrt{1-a}} - \dfrac{1}{y+\sqrt{1-a}}\right)$ de unde

$$\int \frac{1}{y^2+a-1}\,dy = \frac{\ln\left(y-\sqrt{1-a}\right) - \ln\left(y+\sqrt{1-a}\right)}{2\sqrt{1-a}} + c.$$

II. $a = 1$. Atunci avem $\displaystyle\int \frac{1}{y^2}\,dy = -\frac{1}{y} + c$

III. $a > 1$. Atunci avem $\displaystyle\int \frac{1}{y^2+a-1}\,dy = \frac{1}{a-1}\int \frac{1}{\frac{y^2}{a-1}+1} = \frac{\arctan \frac{y}{\sqrt{a-1}}}{a-1} + c.$

Back

#

8.2.1 Concursul "Al. Myller", Iaşi

1.Vom folosi inegalitatea $\frac{2x}{(x^2+1)^{n+1}} \leq \frac{1}{(x^2+1)^n} \leq \frac{x}{(x^2+1)^n}$ pentru $x \geq 1$.Prin integrare avem $\frac{-1}{n}\left(\frac{1}{(n^2+1)^n} - \frac{1}{2^n}\right) \leq a_n \leq \frac{-1}{2(n-1)}\left(\frac{1}{(n^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ de unde $1 - \frac{2^n}{(n^2+1)^n} \leq n2^n a_n \leq \frac{n}{n-1} - \frac{n2^n}{(n-1)(n^2+1)^{n-1}}$.Aşadar $\lim_{n\to\infty} n2^n a_n = 1$.

2.Fie $f = X^n + aX - 1$ şi $g = X^2 + \alpha X + \beta$.Să aplicăm terorema împărţirii cu rest pentru polinoamele $f - aX$ şi g peste $\mathbb{Z}[X]$.Avem că $f - aX = g \cdot h + r$ unde $h, r \in \mathbb{Z}[X]$ şi $grad(r) < grad(g)$ de unde $grad(r) \leq 1$ .Aşadar $f - aX = g \cdot h + pX + s$ echivalent cu $f = g \cdot h + (p+a)X + s$.Cum $g|f$ rezultă $(p+a)X + s = 0$ de unde $a = -p$.Aşadar $f = g \cdot h$ cu $h \in \mathbb{Z}[X]$.De aici $\beta| - 1$.Avem două cazuri:

1)$\beta = 1$.Rezultă că rădacinile polinomului g sunt de forma $x_1, \frac{1}{x_1}$. Cum $g|f$ avem $f(x_1) = 0$ şi $f\left(\frac{1}{x_1}\right) = 0$.Din prima avem $x_1^n = 1 - ax_1$ iar din a doua $x_1^n = ax_1^{n-1} + 1$.De aici $ax_1(x_1^{n-2} + 1) = 0$.Acum dacă $a = 0$, $f(x) = x^n - 1$ de unde pentru g avem două rădăcini conjugate aşadar $\alpha = -2\cos\frac{2k\pi}{n}$ şi cum f nu are rădăcini duble avem $\cos\frac{2k\pi}{n} = 0$ sau $\cos\frac{2k\pi}{n} = \pm\frac{1}{2}$ .De aici $\frac{2k\pi}{n} = \frac{(2j+1)\pi}{2}$ de unde $n = \frac{4k}{2j+1}$.Celalalt caz in mod analog ne da $12|n$.Este suficient $4|n$.

Pentru $a \neq 0$ avem necesar $x_1^{n-2} = -1$ de unde $x_1 = \cos\frac{(2l+1)\pi}{n-2} + i\cos\frac{(2l+1)\pi}{n-2}$.Pentru polinomul g folosind relaţiile lui Viete rezultă $\alpha = -2\cos\frac{(2l+1)\pi}{n-2}$.De aici $\cos\frac{(2l+1)\pi}{n-2} \in \{0, \pm1, \pm\frac{1}{2}\}$.Analizând singurele cazuri posibile sunt $\cos\frac{(2l+1)\pi}{n-2} \in \{\pm\frac{1}{2}\}$.Vom trata unul singur celălalt este analoag. $\cos\frac{(2l+1)\pi}{n-2} = \frac{1}{2}$ rezultă $\frac{(2l+1)\pi}{n-2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ de unde $n - 2 = \frac{6(2l+1)}{(12k \pm 1)}$.Soluţia este $n \equiv 2(mod\ 6)$.

2) $\beta = -1$. Rezultă că rădacinile polinomului g sunt de forma $x_1, -\frac{1}{x_1}$. Acum vom împărţi pe două subcazuri după paritatea lui n. Dacă $n = 2r$ avem că $x_1^{2r} = 1 - ax_1$

şi $x_1^{2r} = 1 - ax_1^{2r-1}$.Aşadar $ax_1(x_1^{2r-2} - 1) = 0$.Dacă $a = 0$ se verifică uşor că este suficient $n = 2r$.Pentru $a \neq 0$ rezultă $x_1 = \cos\frac{j\pi}{r-1} + i\sin\frac{j\pi}{r-1}$.Pentru polinomul g avem $\alpha = -2i\sin\frac{j\pi}{r-1}$ şi cum $\alpha \in \mathbb{Z}$ rezultă $\sin\frac{j\pi}{r-1} = 0$ de unde rădăcinile sunt 1 şi -1.

Pentru $n = 2r + 1$ avem $x_1^{2r+1} = 1 - ax_1$ şi $x_1^{2r+1} = -1 - ax_1^{2r}$.De aici $2 + ax_1^{2r} - ax_1 = 0$ echivalent cu $2x_1 + ax_1^{2r+1} - ax_1^2 = 0$.Aşadar $ax_1^2 + (a^2 - 2)x_1 - a = 0$.Cum $x_1^2 + \alpha x_1 - 1 = 0$ rezultă $a|a^2 - 2$ de unde $a \in \{\pm 2, \pm 1\}$.Pentru $a = 2$ sau $a = -1$ rezultă $\alpha = 1$ de unde $x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.Acum avem $x_1^3 = 2x_1 - 1$ şi pentru $n \geq 4$ avem $x_1^n < x_1^3 = 2x_1 - 1$.Aşadar $n = 3$.Raţionamentul este analog pentru $\alpha = -1$.

3.Dacă există $x_0 \in (0;1)$ cu $f(x_0) > 0$ atunci $\int_0^1 f(x)e^{nx}\,dx = \int_0^{x_0} f(x)e^{nx}\,dx + \int_{x_0}^1 f(x)e^{nx} \geq f(x_0)\int_{x_0}^1 e^{nx}\,dx + f(0)\int_0^{x_0} e^{nx}\,dx = f(x_0)\left(\frac{e^n}{n} - \frac{e^{nx_0}}{n}\right) + f(0)\left(\frac{e^{nx_0}}{n} - \frac{1}{n}\right)$.Prin trecere la limită $n \to \infty$ obţinem $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)e^{nx}\,dx = \infty$ contradicţie.Aşadar $f(x) \leq 0$ pentru orice $x \in (0;1)$.Notăm $g = -f$ de unde g este descrescătoare.Dacă $g(0+0) = 0$ atunci $g = 0$ şi $f = 0$ pe $(0;1)$.Dacă $g(0+0) = l$ există $a \in (0;1)$ cu $g(x) \geq \frac{l}{2}$ pentru $x \in [0;a]$.Avem că $\int_0^1 g(x)e^{nx}\,dx \geq \int_0^a g(x)e^{nx}\,dx \geq \frac{l}{2}\int_0^a e^{nx}\,dx = \frac{l}{2}\left(\frac{e^{na}}{n} - \frac{1}{n}\right)$ de unde prin trecere la limită obţinem $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g(x)e^{nx}\,dx = \infty$ iarăşi contradicţie.Deci $f = 0$ pentru $x \in (0;1)$,$f(0) = \alpha$ cu $\alpha < 0$ şi $f(1) = \beta$ cu $\beta > 0$.

4.Se ştie că dacă x este nilpotent atunci $1 - x$ este inversabil.Avem astfel o funţie injectivă de la elementele nilpotente la elementele inversabile şi cum mulţimile au acelaşi cardinal, funcţia este bijectivă.Evident inversa ei este tot $1 - x$ de unde dacă y este inversabil $1 - y$ este nilpotent.Cum -1 inversabil rezultă 2 este nilpotent adică $2^k = 0$.Mai departe orice element din grupul $(A, +)$ are ordinul de forma 2^m de unde conform teoremei lui Cauchy avem că numărul de elemente al lui A este de forma 2^p.

Back

#

8.2.2 Concursul centrelor de excelenţă din Suceava

1.În cazul $\alpha \in \mathbb{Z}_p \setminus \{\widehat{1},\widehat{2}\}$,punem $x_2 = x_3 = ... = x_{p-1} = -\widehat{1}$, $x_1 = \alpha - \widehat{1}$.Deoarece $p \geq 5$ rezultă $x_i \notin \{\widehat{0},\widehat{1}\}$,$\forall i \in \{1,...,p-1\}$ şi $x_1 + (x_2)^2 + ... + (x_{p-1})^{p-1} = \alpha - \widehat{1} + [\widehat{1} + (-\widehat{1}) + ... + \widehat{1}] = \alpha$
Pentru $\alpha = \widehat{1}$ alegem $a \in \mathbb{Z}_p$ astfel încât $a \notin \{-\widehat{1},\widehat{0},\widehat{1}\}$,ceea se poate datorită $p \geq 5$.Dacă punem $x_2 = x_3 = ... = x_{p-1} = a$ şi $x_1 = \widehat{1} + a$ atunci $x_i \notin \{\widehat{0},\widehat{1}\}$,$\forall i \in \{1,...,p-1\}$ şi $x_1 + (x_2)^2 + ... + (x_{p-1})^{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} a^k = \widehat{1}$ relaţie care este valabilă în $\mathbb{Z}_p$,pentru $a \neq \widehat{1}$.
In mod similar pentru $\alpha = \widehat{2}$ alegem $a \in \mathbb{Z}_p$ astfel încât $a \notin \{-\widehat{2},-\widehat{1},\widehat{0},\widehat{1}\}$ şi punem $x_2 = x_3 = ... = x_{p-1} = a$, $x_1 = \widehat{2} + a$,care verifică toate condiţiile cerute.

2.Pentru $r = 2$ avem $x^2 + y^2 = (x+y)^2 \Leftrightarrow xy + yx = 0$.Pentru $r = 3$ obţinem $x^3 + y^3 = (x+y)^3$ de unde $x^3 + y^3 = (x+y)^2(x+y) = (x^2+y^2)(x+y)$ aşadar $x^2y + y^2x = 0$.Pentru $r = 5$ avem $x^5 + y^5 = (x+y)^5 = (x^2+y^2)(x^3+y^3)$ de unde $x^2y^3 + y^2x^3 = 0$.
Avem că $x^2y = x(xy) = x(-yx) = (-xy)x = yx^2$ şi analog $y^2x = xy^2$.Mai mult $x^2y^3 = (x^2y)y^2 = y(x^2y)y = y(yx^2)y = (y^2x)xy = -(x^2y)xy = x^2yyx = y(x^2y)x = y(yx^2)x = y^2x^3$ de unde $x^2y^3 = y^2x^3 = 0$.
Acum să demonstrăm prin induţie afirmaţia.$P(1)$ şi $P(2)$ sunt adevărate şi să demonstrăm $P(k) \rightarrow P(k+1)$.Avem $(x+y)^{2k+3} = (x+y)^2(x+y)^{2k+1} = (x^2+y^2)(x^{2k+1}+y^{2k+1}) = x^{2k+3} + y^{2k+3} + x^2y^{2k+1} + y^2x^{2k+1}$.Conform ceea ce am demonstrat mai sus avem $x^2y^{2k+1} = y^2x^{2k+1} = 0$ pentru $k \geq 1$ şi demonstraţia este încheiată.

3.(a)Din inegalitatea $tg\,\alpha \geq \alpha$ avem că $\frac{\sin\alpha}{\alpha} \geq \cos\alpha$ pentru orice $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.Acum pentru orice $x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ avem $0 \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\pi}{2}$ de unde aplicând inegalitatea avem $\cos(\sin x) \leq \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$ de unde cerinţa.
(b)Putem scrie $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(\sin x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\,dx =$
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \cdot (\sin x \cdot \cos(\sin x) - \sin(\sin x))}{\cos x \cdot \sin x}\,dx$. Acum pentru orice $x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ avem $\cos x \geq \sin x$ de unde $\frac{1}{\sin^2 x} \geq \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$ şi deoarece $\cos x \cdot (\sin x \cdot \cos(\sin x) - \sin(\sin x)) \leq 0$ avem că

$$\frac{\cos x \cdot (\sin x \cdot \cos(\sin x) - \sin(\sin x))}{\sin^2 x} \le \frac{\cos x \cdot (\sin x \cdot \cos(\sin x) - \sin(\sin x))}{\sin x \cdot \sin x},$$

ceea ce rescrie $\left(\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\right)' \le \frac{\cos x \cdot (\sin x \cdot \cos(\sin x) - \sin(\sin x))}{\sin x \cdot \sin x}$.

Acum pentru $\varepsilon > 0$ avem $\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \cos(\sin x)\, dx - \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\, dx \ge \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\right)' dx$

echivalent cu $\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \cos(\sin x)\, dx - \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\, dx \ge \sqrt{2} \sin \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sin(\sin \varepsilon)}{\sin \varepsilon}$.
Prin trecere la limită $\varepsilon \to 0$ obţinem inegalitatea cerută.

4.Facem schimbarea de variabilă $\frac{x}{a} = \frac{b}{t}$ de unde $t = \frac{ab}{x}$.Aşadar $dx = -\frac{ab}{t^2} dt$
.Integrala devine

$I = \int_b^a \frac{e^{\frac{b}{t}} - e^{\frac{t}{a}}}{\sqrt{\frac{ab}{t}}\sqrt{ab + \frac{a^2b^2}{t^2}}} \left(\frac{-ab}{t^2}\right) dt = -\int_a^b \frac{e^{\frac{t}{a}} - e^{\frac{b}{t}}}{\sqrt{t}\sqrt{ab + t^2}} dt = -I$ de unde $I = 0$.

[Back](#)

#

8.2.3 Cezar Ivănescu, Târgovişte

1.a)Fie $g \in G$ şi fie $B = \{ga_2^{-1} | a_2 \in A\}$.Se observă uşor că $card(A) = card(B)$.Din ipoteză $card(A) + card(A) > card(G)$ de unde $card(A) + card(B) > card(G)$ aşadar $A \cap B \neq \varnothing$.De aici există $a_1 \in A$ care se scrie ca ga_2^{-1} cu $a_2 \in A$ care este echivalent cu $g = a_1 a_2,\ a_1, a_2 \in A$.

b) Fie $C = \{x^2 | x \in K\}$.Acum $x^2 = y^2$ cu $x, y \in K$ este echivalent cu $x^2 - y^2 = 0$.De aici $(x-y)(x+y) = 0$,deoarece orice corp finit este comutativ.Din ultima relaţie rezultă $x - y = 0$ sau $x + y = 0$.Astfel C conţine câte un număr din perechile $(x, -x)$,cu $x \in K^*$ şi pe 0. Aşadar $card(C) > \frac{1}{2} card(G)$.Aplicăm lema de la $a)$ şi am terminat.

2.Facem schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{y}$.De aici $dx = -\frac{1}{y^2}\, dy$.

$$I(a) = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\arctan \frac{1}{y}}{\frac{1}{y}} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) dy = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\arctan \frac{1}{y}}{y}\, dy.$$

Deci $2I(a) = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\arctan \frac{1}{x} + \arctan x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \left(\ln x |_{\frac{1}{a}}^{a} \right) = \pi \ln a$.Aşadar $I(a) = \frac{\pi \ln a}{2}$

.Fie F o primitivă pentru f şi G o primitivă pentru f^3.Fie $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \left(\int_0^x f(t)\, dt \right)^2 - \int_0^x f^3(t)\, dt$.Deci $g(x) = (F(x) - F(0))^2 - (G(x) - G(0))$.Vrem să arătăm că $g' \geq 0$.

Avem $g'(x) = 2f(x)(F(x) - F(0)) - G'(x) = 2f(x)(F(x) - F(0)) - f^3(x) = f(x)[2(F(x) - F(0)) - f^2(x)]$.

Din $f' \geq 0$ avem că f este crescătoare.Cum $f(0) = 0$ rezultă $f(x) \geq f(0) = 0$, $\forall x \in [0;1]$.Aşadar pentru a arăta că $g' \geq 0$ este suficient şi necesar să arătăm că $2(F(x) - F(0)) - f^2(x) \geq 0$.

Fie $h : [0;1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = 2(F(x) - F(0)) - f^2(x)$.Avem că $h'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) = 2f(x)(1 - f'(x))$.Din cele de mai sus avem $f(x) \geq 0$

şi din ipoteză $1 - f'(x) \geq 0$.Aşadar $h' \geq 0$ de unde h este crescătoare.Mai departe $h(x) \geq h(0)$, $\forall x \in [0;1]$.Acum $h(0) = 0$ şi obţinem $h \geq 0$ ceea ce doream.
Aşadar $g' \geq 0$ de unde g este crescătoare ceea ce implică $g(1) \geq g(0) = 0$ echivalent cu $\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)^2 - \int_0^1 f^3(t)\,dt \geq 0$.

Back

8.2.4 Concursul "Constantin Năstăsecu", etapa finală

1.Folosind inegalitatea lui Cauchy avem $\left(\int_a^b \frac{f_i^2(x)}{f_{\sigma(i)(x)}}\,dx\right)\left(\int_a^b f_{\sigma(i)}(x)\,dx\right) \geq \left(\int_a^b f_i(x)\,dx\right)^2$ pentru orice $i \in \{1,2,...,n\}$.Făcând produsul tuturor acestor inegalităţi şi ţinând cont de faptul că $\prod_{i=1}^{n}\left(\int_a^b f_{\sigma(i)}(x)\,dx\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(\int_a^b f_{\sigma(i)}(x)\,dx\right)$ obţinem inegalitatea cerută.

2.a)Să presupunem că $f = (X-a_1)(X-a_2)...(X-a_p) \in \mathbb{Q}[X]$ cu $a_1,...,a_p \in \mathbb{Q}$ şi $f(A) = O_n$.Dacă $X \in I(A)$ este soluţie a ecuaţiei $X^n = O_n$, atunci $X = g(A)$, $g \in \mathbb{Q}[X]$ şi de aici rezultă $g^n(A) = O_n$.
Fie d cel mai mare divizor comun al polinoamelor f şi g^n.Cum el se scrie sub forma $fu + g^n v$ cu $u, v \in \mathbb{Q}[X]$ rezultă $d(A) = O_n$ şi cum $d|f$ rezultă că d are numai rădăcini simple.Atunci din $d|g^n$ rezultă $d|g$ şi deci $g = dh$.De aici $X = g(A) = d(A)\cdot h(A) = O_n$.Deci $X = O_n$ este singura soluţie.
Reciproc să presupunem că $f = (X-a_1)^t p(X)$,unde $a_1 \in \mathbb{Q}$ şi $t \geq 2$.Atunci este foarte simplu să observăm că $Y = (A-a_1)^{t-1}p(A)$ verifică $Y^n = O_n$.Avem $Y \neq O_n$ contradicţie.
b)Se observă uşor $(I(A), +, \cdot)$ este inel.Acum dacă este corp să presupunem prin absurd că $f = g\cdot h$ cu $g, h \in \mathbb{Q}[X]$ netriviale.Avem că $g(A)\cdot h(A) = O_n$ şi ele sunt în $I(A)$ contradicţie.Aşadar f este ireductibil.
Reciproc să presupunem că f este ireductibil.Acum fie $X \in I(A)$, $X \neq O_n$.Avem că există $g \in \mathbb{Q}[X]$ astfel încât $X = g(A)$.Acum $(g, f) = 1$ de unde avem că există $u, v \in \mathbb{Q}[X]$ astfel încât $fu + gv = 1$ de unde $f(A)u(A) + g(A)v(A) = I_n$ aşadar $g(A)v(A) = I_n$.În concluzie $(I(A), +, \cdot)$ este corp.

3.a)Singura problemă asupra continuităţii este în 0.Avem $\lim_{x\searrow 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\searrow 0}\frac{1}{1+x} = 1$ folosind regula lui L'Hopital.Aşadar funcţia este continuă.
b) Pornim de la identitatea $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ pentru $x \in [-1;1]$ de unde $\sum_{k=0}^{\infty} x^k(-1)^k = \frac{1}{1+x}$.Prin integrare avem $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x)$.Aşadar

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k+1}.$$

Prin integrare $\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)^2} - \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i)^2} =$
$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} - 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i)^2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{12}$

4.Arătăm că $(M,+)$ este grup comutativ.Întradevăr dacă $x, y \in M$, atunci $(x+y)^p = x^p + \binom{p}{1}x^{p-1}y + \ldots + \binom{p}{p-1}xy^{p-1} + y^p$.Este binecunoscut că $p|\binom{p}{k}$ pentru orice $k \in \{1,\ldots,p-1\}$ de unde $(x+y)^p = x^p + y^p = x+y$.Aşadar $x+y \in M$. Acum $x \in M$ rezultă $(-x)^p = -x^p = -x$ de unde $-x \in M$(pentru $p=2$ avem $x=-x$).

Cum $(M,+)$ este grup comutativ în care orice element (diferit de cel neutru) are ordinul p,dintr-o consecinţa teoremei lui Cauchy,grupul va avea un număr de elemente care este o putere a lui p.

[Back](#)

#

8.2.5 Concursul "Cristian Calude", Galaţi

1.a)Se demonstrează simplu prin inducţie după n;

b)Pentru $x \in \mathbb{R}$,$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$ şi
$f'(x_i) = a_0 \cdot (x_i - x_1) \cdot (x_i - x_2) \cdot ... \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot ... \cdot (x_i - x_n)$ de unde
$f'(x_i) = a_0 \cdot (-1)^{n-i}(x_i - x_1) \cdot ... \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i) \cdot ... \cdot (x_n - x_i) = a_0 \cdot$

$$(-1)^{n-i} \cdot \frac{\prod\limits_{1\le j<k\le n} (x_k - x_j)}{\prod\limits_{\substack{1\le j<k\le n \\ j\ne i,k\ne i}} (x_k - x_j)} = a_0(-1)^{n-i} \frac{V_n(x_1, x_2, ..., x_n)}{V_{n-1}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)}.$$

Suma devine

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{1}{x_i - 1} \cdot V_{n-1}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)}{a_0 \cdot (-1)^{n-i} \cdot V_n(x_1, x_2, ..., x_n)} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1}{x_i - 1} \cdot V_{n-1}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)}{a_0 \cdot (-1)^{n+1} \cdot V_n(x_1, x_2, ..., x_n)}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{a_0 \cdot V_n(x_1, x_2, ..., x_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 - 1} & \frac{1}{x_2 - 1} & ... & \frac{1}{x_n - 1} \\ 1 & 1 & ... & 1 \\ x_1 & x_2 & ... & x_n \\ ... & ... & ... & ... \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & ... & x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{(-1)^{n+1}}{a_0 \cdot V_n(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot (x_1 - 1) \cdot ... \cdot (x_n - 1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ x_1 - 1 & x_2 - 1 & ... & x_n - 1 \\ x_1^2 - x_1 & x_2^2 - x_2 & ... & x_n^2 - x_n \\ ... & ... & ... & ... \\ x_1^{n-1} - x_1^{n-2} & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} & ... & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{V_n(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot (-1)^n \cdot f(1)} \cdot V_n(x_1, x_2, ..., x_n) = -\frac{1}{f(1)}$$

2.Pentru parametrul $x > 2$ definim funţia $g_x : (1; +\infty) \to (0; +\infty)$ $g_x(y) = y^x - 1$.Se observă uşor că g este bijectivă.Inversa ei este $g_x^{-1}(y) = (y+1)^{\frac{1}{x}}$.Ecuaţia noastră are forma $g_x(y) = g_x^{-1}(y)$.Dacă $y < g_x(y)$ cum $g_x^{-1}(y)$ este strict crescătoare rezultă $g_x(y) = g_x^{-1}(y) < y$ fals.Analog cealaltă posibilitate de unde $g_x(y) = y$. Aşadar soluţiile verifică $y^x - y - 1 = 0$.Definim $h_x(y) : 1; +\infty) \to \mathbb{R}$,$h_x(y) = y^x - y - 1$.Avem că $h'_x(y) = xy^{x-1} - 1 > 2y - 1 > 0$ de unde $h_x(y)$ este strict crescătoare.Acum $\lim\limits_{y \searrow 1} h_x(y) = -1$ şi $\lim\limits_{y \to +\infty} h_x(y) = +\infty$

şi cum este continuă ea este bijectivă există un unic $y_x \in (1;+\infty)$ cu $h_x(y_x) = 0$.

Evident $\varphi(x) = y_x$ şi $x = \dfrac{\ln(\varphi(x)+1)}{\ln\varphi(x)}$.Aşadar $\varphi(x)$ este inversa funţiei $u(t) = \dfrac{\ln(t+1)}{\ln t}$,$u : (1;+\infty) \to (1;+\infty)$.Să vedem întradevăr că u este bijectivă.Avem că u este derivabilă şi $u'(t) = \dfrac{t\ln t - (t+1)\ln(t+1)}{t(t+1)\ln(t+1)}$ de unde $u'(t) < 0$ deci u este strict descrescătoare.Acum $\lim\limits_{t\searrow 1} u(t) = +\infty$ şi $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = 1$.De aici se deduce imediat bijectivitatea.Aşadar φ este derivabilă şi strict descrescătoare.

Presupunând că ar exista astfel de funcţii f cu $f \circ f = \varphi$ ar rezulta că f este injectivă şi f admite primitive de unde f monotonă.Dar rezultă că $f \circ f$ strict crescătoare,iar φ strict descrescătoare contradicţie.

4.**Lemă**:Fie G un grup finit şi A o submulţime a lui G astfel încât $card(A) > \frac{1}{2}card(G)$.Atunci pentru orice $g \in G$ există $a_1, a_2 \in A$ astfel încât $g = a_1a_2$.

DemonstraţieFie $g \in G$ şi fie $B = \{ga_2^{-1} | a_2 \in A\}$.Se observă uşor că $card(A) = card(B)$.Din ipoteză $card(A) + card(A) > card(G)$ de unde $card(A) + card(B) > card(G)$ aşadar $A \cap B \neq \varnothing$.De aici există $a_1 \in A$ care se scrie ca ga_2^{-1} cu $a_2 \in A$ care este echivalent cu $g = a_1a_2,\ a_1, a_2 \in A$.

Aplicăm lema şi am obţine că S_n este comutativ pentru $n \geq 3$ fals.

Back

#

8.2.6 Concursul "Gheorghe Lazăr", Sibiu

1.a)Un exemplu este $f(x) = (1+x)^{p-1}$.

b)Avem că $f\left(\frac{a_n}{a_1}\right) + f\left(\frac{a_n}{a_2}\right) + ... + f\left(\frac{a_n}{a_n}\right) = \frac{a_n^{p-1}}{a_1^{p-1}} f\left(\frac{a_1}{a_n}\right) + \frac{a_n^{p-1}}{a_2^{p-1}}\left(\frac{a_2}{a_n}\right) + ... + \frac{a_n^{p-1}}{a_{n-1}^{p-1}} f\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right) + f(1) = a_n^{p-1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i^{p-1}} f\left(\frac{a_i}{a_n}\right) = a_n^p \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{a_{i+1}}{a_n} - \frac{a_i}{a_n}\right) f\left(\frac{a_i}{a_n}\right)$.

Acum dacă notăm cu $x_i = \frac{a_i}{a_n}, i = 1, .., n$ avem diviziunea $D_n : 0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = 1$.Acum avem $x_{i+1} - x_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{a_n} = \frac{1}{a_n a_i^{p-1}}$.Din enunţ avem că şirul a_n este strict crescător şi presupunând care ar fi mărginit,ar rezulta că este convergent.Trecând la limită în relaţia de recurenţa am avea $l = l + \frac{1}{l^{p-1}}$ contradicţie.Aşadar $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.De aici norma divizunii D_n tinde la 0.

Aşadar $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{a_{i+1}}{a_n} - \frac{a_i}{a_n}\right) f\left(\frac{a_i}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_i) f(x_i) = \int_0^1 f(x)\,dx$

Rămânem cu $g(p) = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^p}{n}$.Cu lema lui Stolz Cezaro avem $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^p}{n} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^p - a_n^p = \lim_{n\to\infty}\left(a_n + \frac{1}{a_n^{p-1}}\right)^p - a_n^p = \lim_{x\searrow 0}\left(\frac{1}{x} + x^{p-1}\right) - \frac{1}{x^p} = \lim_{x\searrow 0}\frac{(x^p+1)^p - 1}{x^p} = \lim_{x\searrow 0}\frac{(t+1)^p - 1}{t} = \lim_{x\searrow 0}\frac{p(t+1)^{p-1}}{1} = p$, deoarece $\lim_{n\to\infty} a_n^c = 0$ unde $c < 0$.În final $g(p) = p$.

2.a)Calculăm în general $\lim_{n\to\infty} b_{k,n}$ unde $b_{k,n} = \int_0^1 \frac{x^k}{\alpha + x^n}\,dx$.Avem că $0 < \int_0^1 \frac{x^k}{\alpha}\,dx - \int_0^1 \frac{x^k}{\alpha + x^n}\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \frac{x^{n+k}}{\alpha + x^n}\,dx < \frac{1}{\alpha^2}\int_0^1 x^{n+k}\,dx = \frac{1}{\alpha^2(n+k+1)}$ de unde prin trecere la limită obţinem $\lim_{n\to\infty} b_{k,n} = \frac{1}{\alpha(k+1)}$.

Aşadar $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{p+1}\right)$

b) Vom calcula de asemenea $\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{\alpha(k+1)} - b_{k,n}\right]$.Avem că

$n\left[\frac{1}{\alpha(k+1)} - b_{k,n}\right] = \frac{n}{\alpha}\int_0^1 \frac{x^{n+k}}{\alpha + x^n}\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 x^{k+1}(\ln(\alpha + x^n))'\,dx =$

$\frac{1}{\alpha}\left[x^{k+1}\ln(\alpha + x^n)\Big|_0^1 - (k+1)\int_0^1 x^k \ln(\alpha + x^n)\,dx\right] = \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} -$

$\frac{k+1}{\alpha}\int_0^1 x^k \ln(\alpha + x^n)\,dx.$

Folosind inegalitatea $\ln(1+y) < y$ rezultă $\ln(\alpha + x^n) < \ln(1+x^n) < x^n$ de unde $0 < \int_0^1 x^k \ln(\alpha+x^n)\,dx < \int_0^1 x^{n+k+1}\,dx = \frac{1}{n+k+1}$.Aşadar $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^k \ln(\alpha+x^n)\,dx = 0$ de unde $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{\alpha(k+1)} - b_{k,n}\right] = \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}$.

În concluzie $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p+1}\right) - a_n\right] = \frac{(p+1)\ln(1+\alpha)}{\alpha}$

3.Dacă (P) este adevărată implicatţiile i),ii) şi iii) rezultăimediat.Presupunem că i) este adecărată.Avem $(ab)a = (a^2b)a = a(ab)a$ pentru orice $a, b \in M$.În i) fie $b = ab$ rezultă $ba = (ab)a = a(ab) = ab\ \forall a, b \in M$ adică proprietatea (P).

Dacă ii) este adevărată pentru $a = ab$ şi $b = a$ avem $ab = (ab)a(ab) = (ab)(a^2b) = (ab)(ab) = (ab^2) = ab$.Deci $ab = aba\ \forall a, b \in M$ de unde proprietatea (P).

Dacă iii) este adevărată,pentru $b = ab$ se obţine $ab = a(ab) = a^2b = ab$ rezultă $ab = a(ab)a = a^2ba = aba\ \forall a, b \in M$ de unde proprietatea (P).

4.a) $f^{-1}(x) = -f(x)$,$\forall x \in G$ de unde pentru $x \to f(y)$ rezultă $y = -f(f(y))$, $\forall y \in G$ echivalent cu $(f\circ f)(y) = -y$.

b) Avem că $\forall x, y \in G$ $-(x+y) = (-y) + (-x) = f(f(y)) + f(f(x)) = f(f(y) + f(x)) = f(f(y+x)) = -(y+x)$ de unde $\forall x, y \in G$ $x + y = y + x$

c)Se ştie că dacă $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ este un automorfism al grupului $(\mathbb{Z}_p, +)$ atunci $f(x) = ax$ cu $a \in \mathbb{Z}_p^*$

Cum f are proprietatea cerută avem $(f\circ f)(x) = -x$ deci $a^2x = -x, \forall x \in \mathbb{Z}_p$ de unde $a^2 = -1$.De aici $a^{p-1} = (-\widehat{1})^{\frac{p-1}{2}}$ şi din mica teoremă a lui Fermat rezultă $\widehat{1} = (-\widehat{1})^{\frac{p-1}{2}}$ de unde $p = 4k+1$.

Back

#

8.2.7 Concursul "Gheorghe Mihoc", Slobozia

1.a)Este suficient şi necesar să avem $20|x$ cu $0 \leq x < 100$.Aşadar $A = \{\widehat{0}, \widehat{20}, \widehat{40}, \widehat{60}, \widehat{80}\}$.

b).Fie $a = da'$,$b = db'$ unde $(a', n) = (b', n) = 1$.Avem că $\widehat{d}(\widehat{a'} \cdot \widehat{x} - \widehat{b'}) = \widehat{0}$.Acum există $\widehat{c} \in \mathbb{Z}_n$ astfel încât $\widehat{a'} \cdot \widehat{c} = \widehat{b'}$,deoarece $\widehat{a'}$ este inversabil în $\mathbb{Z}_n$.De aici $\widehat{c} \in B$.

c)Vom păstra notaţiile de la punctul anterior.După cum se observă este suficient ca să existe $\widehat{y}$ astfel încât dacă $\widehat{d}(\widehat{a'} \cdot \widehat{x} - \widehat{b'}) = \widehat{0}$ atunci $\widehat{a'} \cdot \widehat{x} - \widehat{b'} = \widehat{a'}\widehat{y}$.Acum $\widehat{a'}$ este inversabil în $\mathbb{Z}_n$ şi fie α inversul său.Astfel avem corespondenta bijectivă $f : B \to A,\ f(\widehat{x}) = \widehat{x} - \widehat{b'} \cdot \widehat{\alpha}$ de unde $|B| = |A|$.

2.Mai întâi să obţinem o relaţie de recurenţa pentru I_n.Avem că $I_n = \int_0^1 x^n (e^x)'\, dx = x^n e^x\big|_0^1 - \int_0^1 (x^n)' e^x\, dx = e - \int_0^1 nx^{n-1}e^x\, dx = e - nI_{n-1}$.Aşadar $I_n + nI_{n-1} = e$.De aici $I_{n+1} + nI_n = I_n + nI_{n-1}$ de unde $I_{n+1} = n(I_{n-1} - I_n)$.

Astfel $\sum_{k=1}^{n} \frac{I_{k+1}}{k} = \sum_{k=2}^{n} (I_{k-1} - I_k) + \frac{I_2}{2} = I_1 + \frac{I_2}{2} - I_n$.

Acum se observă uşor că $0 \leq \int_0^1 x^n e^x\, dx \leq e \int_0^1 x^n\, dx$ de unde $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.De aici $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

Cum din relaţi de recurenţa avem $I_2 + 2I_1 = e$ obţinem $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{I_{k+1}}{k} = \frac{e}{2}$

3.Prima dată să punem $y = 0$ în $ii)$.Avem că $g(x) \cdot g(0) = f(0)$.Acum dacă $g(0) \neq 0$ rezultă că $g(0)$ este inversabil de unde g este constantă.Mai departe folosind $i)$ rezultă că f este constantă.Astfel contrazicem preuspunerea $iii)$.Aşadar $g(0) = 0$ şi $f(0) = 0$.Dacă punem $y = 0$ în $i)$ obţinem $f(x) = g(x)$.Condititiile $i)$ şi $iii)$ ne spun că f este morfism.

Se ştie că orice morfism de corpuri este injectiv şi cum condiţia $iii)$ ne asigură şi surjectivitatea rezultă că L şi K sunt izomorfe.

Back

#

8.2.8 Concursul "Grigore Moisil", Cluj Napoca

1.Relaţia se rescrie $1 - f(x+y) = (1 - f(x))(1 - f(y))$.Notând $h(x) = 1 - f(x)$ avem că $h : \mathbb{R} \to (0;\infty)$,$h$ este derivabilă, $h(1) = 2$ şi verifică $h(x+y) = h(x)h(y)$.Acum cum h este pozitivă relaţia se rescrie $\ln h(x+y) = \ln h(x) + \ln h(y)$.Acum funcţia $g(x) = \ln h(x)$ este continuă şi verifică $g(x+y) = g(x) + g(y)$ de unde $g(x) = cx$ unde c este o constantă.Aşadar $h(x) = e^{cx}$ şi cum $h(1) = 2$ rezultă $h(x) = 2^x$.De aici $f(x) = 1 - 2^x$.

2.Considerăm $g(x) = k - x^n$,unde k este o constantă şi care verifică $\int_0^1 (1 - x^n) g(x)\, dx = 0$.Avem aşadar $\int_0^1 (1 - x^n)(k - x^n)\, dx = 0$ de unde $k - \frac{k}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}. = 0$.De aici $k = \frac{1}{2n+1}$.

Acum din inegalitatea Cauchy avem $\left(\int_0^1 f^2(x)\, dx\right)\left(\int_0^1 (k - x^n)^2\, dx\right) \geq \left(\int_0^1 (k - x^n) f(x)\, dx\right)^2$.Acum $\int_0^1 (k - x^n) f(x)\, dx = k\int_0^1 f(x)\, dx - \int_0^1 x^n f(x)\, dx = (k - 1)\int_0^1 f(x)\, dx$.De asemenea $\int_0^1 (k - x^n)^2\, dx = k^2 - \frac{2k}{n+1} + \frac{1}{2n+1}$.

Aşadar avem $\int_0^1 f^2(x)\, dx \geq \frac{(k-1)^2}{k^2 - \frac{2k}{n+1} + \frac{1}{2n+1}} \left(\int_0^1 f(x)\, dx\right)^2$.După calcule ne iese chiar inegalitatea $\int_0^1 f^2(x)\, dx \geq 2(n+1)\left(\int_0^1 f(x)\, dx\right)^2$

3.a)Demonstraţia se bazează pe următoarele două leme:f' este crescătoare pe $[0;\infty)$ şi $f(t) \leq t f'(t)$,pentru orice $t \in [0;\infty)$.

Pentru prima să considerăm $x_1, x_2 \in [0;\infty)$ cu $x_1 < x_2$ fixaţi şi $x, y \in [0;\infty)$ cu $x < x_1 < y < x_2$.Funcţia f este convexă de unde avem $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y}$.

Acum trecând la limită $x \to x_1$ şi $y \to x_2$ obţinem $f'(x_1) \leq f'(x_2)$.

Pentru a doua afirmaţie să considerăm $x, x_0 \in [0;\infty)$ fixaţi,presupunem $x < x_0$.Atunci din convexitatea lui f avem $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$,

$\forall t \in (x; x_0)$.Trecând la limită avem $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \lim\limits_{t\to x_0} \dfrac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0} = f'(x_0)$ de unde $f(x) \geq f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0)$.Alegem $x = 0$ de unde $x_0 f'(x_0) \geq f(x_0)$ Pentru a încheia avem $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \leq \int_0^x tf'(t)\,dt \leq f'(x)\int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}f'(x)$

b)Egalitatea are loc dacă f' este constantă şi $f(t) = tf'(t)$ de unde $f(x) = cx$,cu c constantă.

4.Să presupunem prin absurd că mulţimea aceasta este finită.Fie ea $A = \{p_1, ..., p_k\}$.Este uşor de observat că $a_n \neq 0$.Ne uităm la $P(a_n p_1..p_k) = (a_n p_1..p_k)^n + ... + a_1(a_n p_1...p_k) + a_n = a_n(1 + cp_1p_2...p_k)$.De aici există un prim care divide $1 + cp_1p_2...p_k$ şi care nu este din A în mod evident,ceea ce este contradicţie.

[Back]

#

8.2.9 Concursul "Mathematica Modus Vivendi", Vâlcea

1.Fie $I = \int \frac{1}{x^4+2008x^2+1}\,dx$ şi $I = \int \frac{x^2}{x^4+2008x^2+1}\,dx$.Avem că $J+I = \int \frac{x^2+1}{x^4+2008x^2+1}\,dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}+2008}\,dx$.Facem schimbarea de variabilă $x-\frac{1}{x}=y$ de unde $dy = 1+\frac{1}{x^2}\,dx$ şi $x^2+\frac{1}{x^2}-2=y^2$.Aşadar $I+J = \int \frac{1}{y^2+2010}\,dy = \frac{1}{2010}\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{2010}}\right)+c = \frac{1}{2010}\arctan\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2010}}\right)+c.$
Pentru $J-I$ se face schimbarea de variabilă $y = x+\frac{1}{x}$.Obţinem astfel $J-I = \frac{1}{2006}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt{2006}}\right)+c.$

2.Să vedem că este suficient să considerăm că $x_0 \geq 0$.Dacă nu punem $y_n = -x_n$ şi se verifică aceleaşi relaţii.Acum pentru $x \geq 0$ avem $0 \leq \int_0^x e^{-t^2}\,dt \leq \int_0^x 1\,dt = x$ (1) de unde $0 \leq f(x) \leq x$.Aşadar şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este descrescător şi nenegativ.De aici conform Weierstrass şirul are limită.Trecând la limită şi ţinând cont de faptul că f este continuă avem $f(l) = l$.Acum din (1) rezultă $l = 0$.

3.Să considerăm $H = \{x^p = 1 | x \in G\}$.Să arătăm că H este subgrup al lui G.Avem pentru $x, y \in H$ că $(xy)^p = x^p y^p = 1\cdot 1 = 1$ din faptul că G este abelian de unde $xy \in H$.In mod similar $x^{-1} \in H$.Conform teoremei lui Lagrange trebuie să avem $|H|\,|n$.Dar $|H| \geq m+1$ şi cum m este divizorul maximal necesar avem $|H| = n$ şi problema este încheiată.

4.Să presupunem fără a restrânge generalitatea că $p \geq q$.Avem că
$(-a^{1+p-q}+a)^q = \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}(-1)^k a^{k+pk-qk}a^{q-k} = \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}(-1)^k a^{pk-q(k-1)}.$
Acum să demonstrăm că $a^{pi-q(i-1)} = a^q$.Aceasta este echivalentă cu $a^q(a^{(p-q)i}-1) = 0$ de unde $a^q(a^{p-q}-1)(a^{(p-q)(i-1)}+\ldots+1) = 0$ şi am terminat.Aşadar $(-a^{1+p-q}+a)^q = a^q\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}(-1)^k = a^q(-1+1)^q = 0$. De aici $1-(-a^{1+p-q}+a)^q = 1$ echivalent cu $(1+a^{p-q+1}-a)u = 1$ de unde concluzia problemei.

Back

#

8.2.10 Concursul "Nicolae Păun"

1.Fie $A_n(a) \neq \varnothing$ şi $x_0 \in A_n(a)$.Definim $f : A_n(a) \to A_n(e)$, $f(x) = xx_0^{-1}$ şi $g : A_n(e) \to A_n(a)$,$g(x) = xx_0$.Avem că $(f(x))^n = \left(xx_0^{-1}\right)^n = x^n\left(x_0^n\right)^{-1} = aa^{-1} = e$,deci f este bine definită şi cum f este injectivă avem $|A_n(a)| \leq |A_n(e)|$.
În mod similar g este bine definită şi este injectivă de unde $|A_n(e)| \leq |A_n(a)|$.Din cele două inegalităţi rezultă $|A_n(e)| = |A_n(a)|$.
b)Fie $G = Q$ grupul cuaternionilor.Pentru $n = 2$ şi $a = -1$ avem $|A_2(-1)| = 6$ şi $|A_2(1)| = 2$.

2.a)Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă şi $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$g_n(x) = \dfrac{F(x+a_n) - F(x)}{a_n}$.Cum $g'(x) = \dfrac{f(x+a_n) - f(x)}{a_n} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$,rezultă că funcţia g_n este monoton crescătoare.Avem că $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = F'(x) = f(x)$ de funcţia f este monton crescătoare.Acum f admite primtive şi cum este monotonă rezultă că f este continuă.
b)Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă şi $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei F.Definim $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$g_n(x) = \dfrac{G(x+2a_n) - 2G(x+a_n) + G(x)}{a_n^2}$.Avem că $g_n''(x) = \dfrac{f(x+2a_n) - 2f(x+a_n) + f(x)}{a_n^2} \geq 0$ de unde funcţia g_n este convexă. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = G''(x) = f(x)$ rezultă că f este convexă.

3.Să considerăm funcţia $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2}\cos\dfrac{1}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

Avem că $g(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases} - \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+1}\cos\dfrac{1}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

Este binecunoscut că $h(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ admite primitive.De asemenea se observă uşor că $l(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+1}\cos\dfrac{1}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ este continuă,de unde admite primitive.Aşadar g admite primitive.Evident $|g(x)| \leq 1$ de unde g este mărginită.Avem că $\lim\limits_{n\to\infty} g\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right) = 1$ de unde $\sup\limits_{x\in[0;1]} g(x) = 1$.Se verifică uşor că $g(y) = 1$ nu are soluţie şi am terminat.

4.a)Fie $x \in aH \cap bH$ de unde $c = ah_1 = bh_2$ cu $h_1, h_2 \in H$.Acum dacă $x \in aH$ avem $x = ah = bh_2h_1^{-1}h$ de unde $x \in bH$.Aşadar $aH \subset bH$.În mod similar $bH \subset aH$ de unde $aH = bH$.

b)Este suficient să vedem pentru $x \in G - H$,pentru $x \in H$ alegem $k = 1$.Acum ne uităm la mulţimile $xH, x^2H, ..., x^{n+1}H$.Cum aceste mulţimi sunt printre $a_1H, ..., a_nH$ cu principiul cutiei există i, j cu $x^iH = x^jH$ de unde $x^{i-j} \in H$, iar $i - j \in \{1, 2, ..., n\}$.Atunci $x^{n!} \in H$ pentru orice $x \in G$.

c)Presupunând contrariul am avea $G = H \cup (a_1H) \cup ... \cup (a_nH)$ cu $a_1, ..., a_n \in G - H$.De la b) avem că există k astfel încât $x^k \in H$ pentru orice $x \in G$.Atunci $x^k = a_1$ nu are soluţie în G,contradicţie.

Back

#

8.2.11 Concursul "Traian Lalescu", Deva

1.a) Avem în mod trivial $a(b+-b)=0$ pentru orice $a,b\in A$.Aşadar $ab+a(-b)=0$ de unde $a(-b)=-ab$.De aici $(-a)(-b)=-[(-a)b]=-(-ab)=ab$.
b)Avem două cazuri $0\le x$ de unde $0\cdot x\le x\cdot x$ echivalent cu $0\le x^2$.Altfel $x\le 0$ de unde $0\le -x$ iar prin înmulţire cu $(-x)$ avem $0\le(-x)(-x)$ echivalent cu $0\le x^2$.
c) Presupunem că inelul $\mathbb{Z}_n$ este ordonat .Avem că $\hat{0}\le\hat{1}$.Mai departe $\hat{1}\le\hat{1}+\hat{1}\le ..\le\underbrace{\hat{1}+...+\hat{1}}_{n-1}$ de unde $\hat{1}\le\widehat{n-1}$ de unde $\hat{1}\le\hat{0}$.Aceasta combinată cu prima inegalitate ne dă $\hat{0}=\hat{1}$ de unde $n=2$.

2.a)Avem că $\left(\frac{1}{n!}\right)*\left(\frac{1}{n!}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\frac{2^n}{n!}$.Se demonstrează uşor inegalitatea $2^n\le(n-1)!$ pentru $n\ge 6$ prin inducţie de unde $0\le\frac{2^n}{n!}\le\frac{1}{n}$ şi prin trecere la limită avem $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.
b)Să arătăm că M_0 nu este parte stabilă.Să luăm $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)*\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}\ge\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}=1$ deci nu poate fi în M_0.

3.Inegalitatea este echivalentă cu $\int_0^1 f(x)(f(x)-f(0))\,dx\ge 0$.Din teorema de medie avem că $\int_0^1 f(x)(f(x)-f(0))\,dx=f(c)(f(c)-f(0))$ cu $c\in(0;1)$.Acum $f(c)>0$ şi $f(c)\ge f(0)$ f fiind crescătoare,de unde inegalitatea reiese imediat.

4.Considerăm funcţia $g(t)=\frac{\int_0^t f(t)g(t)\,dt}{t}$.Dacă g nu se anulează peste tot fie c astfel încât $g(c)>0$ şi.Avem că pentru $t>1$ şi $t>c+1$ $\int_0^t f(t)g(t)\,dt\ge\int_{t-1}^t f(t)g(t)\,dt\ge g(c)\int_{t-1}^t f(t)\,dt=g(c)f(a_t)$ cu $a_t\in(t-1;t)$.Prin trecere la limită $t\to\infty$ avem $a_t\to\infty$ şi cum $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ de unde $\lim_{t\to\infty}\int_0^t f(t)g(t)\,dt=\infty$.Putem aplica astfel L'Hopital pentru a calcula $\lim_{t\to\infty}g(t)=\lim_{t\to\infty}f(t)g(t)$.Evident din faptul că g este crescătoare există $\lim_{x\to\infty}g(x)$ şi cum am presupus că există c cu $g(c)>0$ limita e nenulă.De aici folosind $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ avem $\lim_{t\to\infty}g(t)=\infty$ contradicţie.Aşadar $g\equiv 0$.

Back

#

8.2.12 Concursul "Unirea", Focşani

1.Se verifică uşor că $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$,grupul G fiind abelian.Este suficient şi necesar să demonstrăm că f este injectivă ca f să fie automorfism.Deoarece m şi n sunt primele între ele există $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $ma = nb + 1$.Să presupunem că $f(x) = f(y)$.De aici $x^m = y^m$ de unde $x^{ma} = y^{ma}$ adică $x^{nb+1} = y^{nb+1}$.Este binecunoscut că $x^n = e, \ \forall x \in G$ şi obţinem astfel $x = y$.

2.a)Fie $a \in G$ şi $m = ord(a)$.Considerăm $H_a = \{e, a, ..., a^{m-1}\}$.Se verifică imediat că este subgrup.Fie acum $b \in G$.Condiţia din enunţ se rescrie $H_b \subseteq H_a$ sau $H_a \subseteq H_b$.Să presupunem că suntem în primul caz.Avem că există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^k = b$ de unde imediat $ab - ba$.Analog al doilea caz.De aici $(G, \cdot)$ este abelian.
b)Fie $a \in G$ de ordinul maxim m din G.Pentru orice element $b \in G$ avem $ord(b) \leq m$ de unde $H_b \leq H_a$.De aici rezultă $b \in H_a, \quad \forall b \in G$ de unde $G = H_a$.
c)Să presupunem că există două numere prime distincte p şi q care divid n.Avem că există două elemente $a, b \in G$ astfel încât $ord(a) = p$ şi $ord(b) = q$.Este uşor de văzut că nu putem avea $H_b \subseteq H_a$ sau $H_a \subseteq H_b$,contradicţie.Aşadar $n = p^m$.

3. $F'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{9 - e^{2x}}, & x < \ln 2 \\ \dfrac{1}{5}, & x = \ln 2 \\ \dfrac{1}{e^{2x} + 1}, & x > \ln 2 \end{cases}$

Pentru $x < \ln 2$ avem $F(x) = \displaystyle\int \frac{1}{9 - e^{2x}}\, dx = \int \frac{1}{9}\, dx + \int \frac{e^{2x}}{9(9 - e^{2x})}\, dx = \frac{x}{9} - \frac{\ln(9 - e^{2x})}{18} + c_1$

Pentru $x > \ln 2$ avem $F(x) = \displaystyle\int \frac{1}{1 + e^{2x}}\, dx = \int 1\, dx - \int \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}\, dx = x - \frac{\ln(1 + e^{2x})}{2} + c_2$. Singura condiţie pentru a afla $F(\ln 2)$ este continuitatea lui F în punctul $\ln 2$.Avem că $F(\ln 2) = \displaystyle\lim_{\substack{x \to \ln 2 \\ x < \ln 2}} F(x) = \lim_{\substack{x \to \ln 2 \\ x > \ln 2}} F(x)$ de unde

$F(\ln 2) = \dfrac{\ln 2}{9} - \dfrac{\ln 5}{18} + c_1 = \ln 2 - \dfrac{\ln 5}{2} + c_2$.

4.Cum f este monotonă avem $\left(f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right)\left(f\left(x+\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right)\leq 0$,$\forall x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$.De aici $f(x)f\left(x+\frac{1}{2}\right)\leq f\left(\frac{1}{2}\right)f(x)+f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(x+\frac{1}{2}\right)-f^2\left(\frac{1}{2}\right)$.De aici prin integrare avem $2\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)f\left(x+\frac{1}{2}\right)\,dx\leq 2f\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\,dx+2f\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{1}{2}}f\left(x+\frac{1}{2}\right)\,dx-f^2\left(\frac{1}{2}\right)$.

Se obţine uşor prin schimbare de variabilă că $\int_0^{\frac{1}{2}}f\left(x+\frac{1}{2}\right)\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx$.

De aici $2\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)f\left(x+\frac{1}{2}\right)\,dx\leq 2f\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 f(x)\,dx-f^2\left(\frac{1}{2}\right)$.Inegalitatea revine la $2f\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 f(x)\,dx-f^2\left(\frac{1}{2}\right)\leq\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2$. ceea ce este echivalent cu $\left(\int_0^1 f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2\geq 0$.

(b)Considerăm $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x_k$ dacă $x\in\left[\frac{k}{2n},\frac{k+1}{2n}\right)$ şi $f(1)=x_{2n-1}$.Inegalitatea (a) devine $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}x_jx_{j+n}\leq\left(\frac{x_0+x_1+..+x_{2n-1}}{2n}\right)^2$.

[Back](#)

#

8.2.13 Concursul "Papiu Ilarian", Târgu Mureş

1. a) Inductiv se arată că $f(q) = 0, \forall q \in \mathbb{Q}$. Fie un şir $q_n \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \frac{l}{f(c)}$, unde $c \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, ceea ce implică $f(c) \neq 0$. De aici avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(c)q_n = l$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ există un q_n' astfel încât $q_n' + q_n \cdot c \in [a, b]$. Astfel avem: $f(q_n' + q_n \cdot c) = f(q_n') + q_n f(c) \to l$.

   b) Există un şir de numere raţionale r_n astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} (r_n + a) = l$.Luând $a_n = a + r_n$ rezultă că $f(a_n) = f(a) + f(r_n) = f(a)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

2. Deoarece $x^2 f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x) = (x^2 f(x))''$ avem din regula lui L'Hospital că:

   a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x^2 f(x))''}{(x^2)''} = \frac{1}{2}$.

   b) $\lim\limits_{x\to\infty} xf'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4 f'(x)}{x^3} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^3 f'(x) + x^4 f''(x)}{3x^2} =$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 f''(x) + 4xf'(x)}{3} \overset{(P)}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1 - 2f(x)}{3} = 0$.

   c) $f_\alpha(x) = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{x}$

3. Deoarece $\det(M + cI_2) = c^2 + tr(M)c + \det(M)$, relaţia din enunţ este echivalentă cu:

   $$c(tr(aAB + bBA) - tr(bAB + aBA)) + \det(aAB + bBA) - \det(bAB + aBA) = 0$$

   Dar $tr(aAB + bBA) - tr(bAB + aBA) = (a - b)(tr(AB - BA)) = 0$.Aşadar rămâne de arătat că:

   $\det(aAB + bBA) = \det(bAB + aBA)$ $(*)$.

   Dar $\det(X + tY) = \det Y \cdot t^2 + tr(XY^*)t + \det X$.De aici deducem că:

   $\det(aX + bY) = \det a\left(X + \frac{b}{a}Y\right) = a^2 \det X + tr(XY^*)ab + b^2 \det Y$.

4. a) Fie $f(t) =$ distanţa parcursă de automobil în intervalul de timp $[t, t + 1]$. $f(0) + f(1) + \cdots f(T - 1) = D = 100T km \Rightarrow$ există $i, j \in \{0, 1, 2..., T - 1\}$ astfel încât $f(i) < 100km$ şi $f(j) > 100$. Deoarece f este continuă rezultă că există un t între i şi j astfel încât $f(t) = 100km$.

   b) Dacă $T = n + \epsilon$, cu $n \in \mathbb{N}$ şi $\epsilon \in (0, 1)$.Împărţim intervaulul de timp $[0, n + \epsilon]$ în $2n + 1$, $n + 1$ de lungime $\frac{\epsilon}{n+1}$ şi n de lungime 1, aşezate alternativ.

Pe intervalele de lungime $\frac{\epsilon}{n+1}$ automobilul stă, iar în intervalele de lungime 1 merge cu viteza medie $1 + \frac{\epsilon}{n+1} \cdot 100km/h$. Orice interval de timp de o oră conţine cel mult un interval pe care automobilul stă şi rămâne un interval de timp de $1 - \frac{\epsilon}{n+1}$ în care el parcurge $\left(1 - \frac{\epsilon}{n+1}\right)\left(1 + \frac{\epsilon}{n}\right) \cdot 100km/h > 100km/h$.

[Back](#)