Locale

Bihor
Braila
Brasov
Bucuresti
Buzau
Caras-Severin
Cluj
Constanta
Covasna
Dolj
Galati
Gorj
Hunedoara
Mures
Neamt
Olt
Salaj
Satu Mare
Sibiu

#

8.1.1 Bihor

1.Notăm $I_n = \int x^n e^x\, dx$.Avem că $I_n = \int x^n \left(e^x\right)'\, dx = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x\, dx = x^n e^x - nI_{n-1}$.Rămâne să rezolvăm recurenţa $I_n = x^n e^x - nI_{n-1}$.Se obţine uşor $I_n = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{x^k}{k!} e^x$.

2.(a) Se observă că $x * y = \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)+1}$.Din aceasta se obţine asociativitatea legii $*$ şi faptul că G este parte stabilă.Comutativitatea reiese şi ea usor din faptul că înmulţirea peste $\mathbb{R}$ este comutativă.Fie e elementul neutru ipotetic.Trebuie sa avem $x * e = x$ de unde $x^2 = (e^2-1)(x^2-1)+1$ de unde $(x^2-1)(e^2-2) = 0$.De aici rezultă $e = \sqrt{2}$.Să vedem că orice element este simetrizabil.Fie x' simetricul ipotetic al lui x.Avem $x * x' = \sqrt{2}$ de unde $(x'^2-1)(x^2-1)+1 = 2$ şi obţinem $x' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ şi se verifică uşor $x' \in G$.

(b)Trebuie să avem $f(xy) = f(x) * f(y)$ aşadar $\sqrt{mxy+n} = \sqrt{(mx+n-1)(my+n-1)+1}$ de unde $mxy + n = m^2xy + m(n-1)(x+y) + (n-1)^2 + 1$ de unde rezultă $n = 1$ şi $m = 0$ sau $m = 1$.Cum numai $m = 1$ verifică faptul că f este bijectivă rezultă $n = m = 1$.

3.$f_n(x) = \frac{(x+2)(x^2+4x+6)^2 + 2x + 4}{(x^2+4x+6)^n} = \frac{x+2}{(x^2+4x+6)^{n-2}} + \frac{2(x+2)}{(x^2+4x+6)^n}$ Inainte de a diviza problema pe cazuri să reţinem rezultatul $\int \frac{2(x+2)}{(x^2+4x+6)^k}\, dx = -\frac{1}{(k-1)(x^2+4x+6)^{k-1}} + c$ unde $k \geq 2$.

I.$n = 1$ .Avem $\int f_1(x)\, dx = \int (x+2)(x^2+4x+6)\, dx + \int \frac{2(x+2)}{(x^2+4x+6)}\, dx = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + 7x^2 + 12x + \ln(x^2+4x+6) + c$

II.$n = 2$ .Avem $\int f_2(x)\, dx = \int (x+2)\, dx + \int \frac{2(x+2)}{(x^2+4x+6)^2}\, dx = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{x^2+2x+6} + c$

III. $n = 3$ .Avem $\int f_3(x)\, dx = \int \frac{x+2}{(x^2+4x+6)}\, dx + \int \frac{2(x+2)}{(x^2+4x+6)^3}\, dx = \frac{\ln(x^2+4x+6)}{2} - \frac{1}{2(x^2+4x+6)^2} + c$

IV. $n \geq 4$ .Avem $\int f_n(x)\, dx = -\frac{1}{(n-3)(x^2+4x+6)^{n-3}} -$

$$\frac{1}{(n-1)(x^2+4x+6)^{n-1}}+c.$$

4.$a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{7}}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{7n}\right)\left(1+\frac{2}{7n}\right)...\left(1+\frac{n}{7n}\right)}$.Aşadar $b_n = \ln(a_n) = \frac{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{7n}\right)-\ln 7}{n}$.

Fie funţia $f(x) = \ln\left(1+\frac{x}{7}\right)$.Din sumele Rienmann avem $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx$ de unde $\lim_{n\to\infty} b_n = \int_0^1 f(x)\,dx$.

$\int_0^1 \ln\left(1+\frac{x}{7}\right)dx = \int_0^1 (x)'\ln\left(1+\frac{x}{7}\right)dx = x\ln\left(1+\frac{x}{7}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1\frac{x}{x+7}\,dx = \ln 8-\ln 7-\int_0^1 1\,dx+7\int_0^1\frac{1}{x+7}\,dx = \ln 8-\ln 7-1+7\ln(x+7)\Big|_0^1 = 8\ln 8-8\ln 7-1.$

In concluzie $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{8^8}{7^8 e}$.

Back

#

8.1.2 Brăila

1.(a)Asociativitatea este indusă de pe mulţimea $M_2(\mathbb{R})$.Acum fie $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G$ şi $\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \in G$.Avem că $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -ad-bc & ac-bd \end{pmatrix}$.Acum condiţia iniţiala este ca $det(A) \neq 0$ cu $A \in G$.Cum determinantul este multiplicativ condiţia se păstrează aşadar $\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -ad-bc & ac-bd \end{pmatrix} \in G$.Am obţinut astfel că legea $\cdot$ este comutativă şi G este parte stabilă.Se observă uşor că $I_2 \in G$ de unde G are element neutru.Fiecare matrice $A \in G$ este inversabilă peste $M_2(\mathbb{R})$ având $det(A) \neq 0$.Inversa ei peste $M_2(\mathbb{R})$ este $\begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+b^2} & \dfrac{-b}{a^2+b^2} \\ \dfrac{b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$ şi se observă că inversa este şi ea în G.Aşadar $(G,\cdot)$ este grup abelian.

(b).Grupurile $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ şi $(G,\cdot)$ sunt izomorfe prin izomorfismul $f(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

2.Notam cu $f(x) = e^{\sin x} + \cos x$.Avem ca $f'(x) = \cos x \; e^{\sin x} - \sin x$ de unde avem ca $f'(x) - f(x)\cos x = -\cos^2 x - \sin x = -(1-\sin^2 x) - \sin x = \sin^2 x - \sin x - 1$.Asadar avem de calculat $\displaystyle\int \frac{f'(x) - f(x)\cos x}{f(x)} \; dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} \; dx - \int \cos x \;\; dx = \ln f(x) + \sin x + c = \ln\left(e^{\sin x} + \cos x\right) + \sin x + c$

3.(a) Fie $g(x) = \cos x + \dfrac{x^2}{2} - 1$.Avem ca $g'(x) = x - \sin x$.Folosind inegalitatea binecunoscută $\sin x < x$, $\forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ rezultă că $g'(x) > 0$ de unde conform corolarului Teormei lui Lagrange rezultă că g este strict crescătoare.Asadar $g(x) > \lim\limits_{x \to 0} g(x)$ şi cum $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ rezultă $g(x) > 0$ ceea ce se cerea.

(b)Avem ca $f(x) > 0$ pe $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ de unde conform corolarului Teormei lui Lagrange rezultă că F este strict crescătoare.Asadar $F\left(\dfrac{e}{3}\right) < F\left(\dfrac{e}{2}\right)$.Inegalitatea cerută revine la $\ln 3 < \dfrac{13}{8} \Leftrightarrow 3 < e^{\frac{13}{8}}$.Vom folosi inegalitatea cunoscută $e^x > x + 1, \forall x > 0$ pentru $x = \dfrac{5}{8}$ de unde $e^{\frac{13}{8}} > \dfrac{13e}{8}$.Acum se ştie că $e > 2$ de unde inegalitatea cerută este demonstrată.

4.Conditia ca să $(1;\infty)$ sa fie parte stabilă în raport cu legea $\circ$ se rescrie ca $x \circ y > 1, \forall x, y \in (1;\infty)$.Aşadar trebuie să avem $xy - ax - 2ay + 4a > 1$.Făcând $y \to 1$

avem că $x(1-a) \geq 1-2a$.Acum $a > 1$ rezultă că $x(a-1) \leq 2a-1 \Leftrightarrow x \leq \frac{2a-1}{a-1}$, $\forall x \in (1;\infty)$ ceea ce este contradicţie.Asadar $a \leq 1$.De asemenea din aceasta rezultă prin trecere la limită spre 1 în inegalitatea $x(1-a) \geq 1-2a$ că $1-a \geq 1-2a$ de unde $a \geq 0$.Aşadar avem iniţial $0 \leq a \leq 1$.(1)

Să rescriem $xy - ax - 2ay + 4a > 1$ ca $x(y-a) > 1-4a+2y$ şi acum ne folosim de (1) şi $y > 1$ pentru a rescrie ca $x > \frac{1-4a+2ay}{y-a}$.Considerăm funcţia $f:(1;\infty) \to \mathbf{R}$, $f(y) = \frac{1-4a+2ay}{y-a}$ şi să vedem când işi atinge maximul. Avem că $f'(y) = \frac{4a-1-2a^2}{(y-a)^2}$ de unde este necesar să analizăm două cazuri

I. $4a-1-2a^2 > 0$ de unde $a \in \left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}; \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right]$ şi intersectând cu (1) se obţine $a \in \left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.Acest caz ne dă $f'(y) > 0$ de unde conform corolarului teoremei lui Lagrange f este strict crescătoare.Din aceasta avem $f(y) \leq \lim_{y\to\infty} f(y)$ adică $f(y) \leq 2a$.Pentru ca inegalitatea $x > f(y)$ să aibă loc este suficient şi necesar ca $x > 2a$ de unde prin trecere la limită $x \to 1$ avem $a \leq \frac{1}{2}$.Conchidem acest caz cu soluţia $a \in \left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

I.$4a-1-2a^2 < 0$ de unde intersectând cu (1) avem $a \in \left[0; \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]$.Acest caz ne dă $f'(y) < 0$ de unde f este strict descrescătoare conform corolarului teoremei lui Lagrange.Aşadar maximul funcţiei f este $\lim_{y\to 1} f(y)$ de unde $f(y) \leq \frac{1-2a}{1-a}$.In mod similar este suficient şi necesar $x > \frac{1-2a}{1-a}$ de unde prin trecere la limită $x \to 1$ avem $1-a \geq 1-2a$ adică $a \geq 0$.In concluzie acest caz are soluţia $a \in \left[0; \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right]$.

Reunind cele două cazuri se obţine $a \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Back

#

8.1.3 Braşov

1.Pentru a) şi b) se foloseşte următoarea lemă:*Dacă* $m, n \in \mathbb{N}^*$ *cu* $(m, n) = d$ *atunci există* $a, b \in \mathbb{Z}$ *cu* $am + bn = d$.

Pentru punctul c) se observă uşor că subgrupurile sunt de fapt cele generate de D unde D este un divizor al lui n.Aşadar numărul de subgrupuri este numărul de divizori al lui 2008,care este 8.

2.(a)Se verifică uşor asociativitatea şi comutativitatea legii $*$.Acum să vedem elementul neutru.Fie el e.Avem $x * e = x$ de unde $\frac{x+e}{1+xe} = x$ de unde $ex^2 = e$ pentru orice $x \in (-1;1)$ de unde $e = 0$.Se observă uşor că $x * (-x) = 0$ de unde orice element este inversabil.Aşadar $(G, *)$ grup comutativ.Pentru izomorfism trebuie să avem $f(x) * f(y) = f(xy)$ de unde $\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} = \frac{mxy+n}{1+xy}$ echivalent cu $\frac{2mxy+(m+n)(x+y)+2n}{(m^2+1)xy+(mn+1)(x+y)+n^2+1} = \frac{mxy+n}{1+xy}$ de unde se obţine $m = 1$ şi $n = -1$.

(b)Asociativitatea este indusă de pe mulţimea $M_2(\mathbb{R})$.Să vedem acum că H este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$.Avem că

$$M(x) \cdot M(y) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} \begin{pmatrix} 1+xy & 0 & x+y \\ 0 & \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} & 0 \\ x+y & 0 & 1+xy \end{pmatrix}$$

$= M\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$. Este uşor de văzut că pentru $x, y \in (-1;1)$ avem $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$ aşadar demonstraţia acestei este încheiată.Cum $I_3 \in H$ el rămâne element neutru.Pentru a afla inversa lui $M(x)$ fie ea $M(x')$ trebuie să avem $M(x) \cdot M(x') = I_3$ de unde $M\left(\frac{x+x'}{1+xx'}\right) = M(0)$ de unde alegem $x' = -x$.Comutativitatea se verifică şi ea uşor de unde $(H, \cdot)$ grup abelian.

(c) De la punctul (b) ştim că $M(x) \cdot M(y) = M\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.Avem aşadar legea de compoziţie de la (a).Avem că rezultatul nostru $M(a_n)$ prin izomorfism este $f(a_n) = f(a_1) * f(a_2) * ... * f(a_n) = f(a_1 a_2 ... a_n)$ de unde $\frac{1-a_n}{a_n+1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{1-k}{1+k} = \frac{2(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$ de unde $a_n = \frac{-2(-1)^{n-1}}{2(-1)^{n-1}+n(n+1)}$.

3.Facem schimbarea de variabila $x = a + b - y$ de unde $dx = -dy$.De aici rezultă că $\int_a^b \frac{f(x)}{c^{g(x)}+1}\,dx = \int_a^b \frac{f(a+b-y)}{c^{g(a+b-y)}+1}\,dy = \int_a^b \frac{f(y)}{c^{-g(y)}+1}\,dy = \int_a^b \frac{f(y)c^{g(y)}}{c^{g(y)}+1}\,dy$.

Adunăm primul şi ultimul membru şi obţinem $2\int_a^b \frac{f(x)}{c^{g(x)}+1}\,dx = \int_a^b \frac{f(x)}{c^{g(x)}+1}\,dx + \int_a^b \frac{f(y)c^{g(y)}}{c^{g(y)}+1}\,dy = \int_a^b f(x)\,dx.$

4.(a) Facem schimbarea de variabilă $x^2 = 2y$ de unde $x = \sqrt{2y}$ de unde $dx = \frac{dy}{\sqrt{2y}}$.Avem aşadar de calculat $\int \frac{2+\sin 2y}{1+\cos 2y}\, e^y\, dy$.

$\int \frac{1+\sin 2y}{1+\cos 2y}\, e^y\, dy = \int \frac{2+2\sin y\cos y}{2\cos^2 y}\, e^y\, dy = \int \left(\frac{1}{\cos^2 y}+\tan y\right) e^y\, dy = e^y \tan y + c$

(b)Înmulţim în ambele părţi cu $xe^{\frac{x^2}{2}}$ de unde $\left(e^{\frac{x^2}{2}}F(x)\right)' = \frac{2+\sin x^2}{1+\cos x^2}\, xe^{\frac{x^2}{2}}$

de unde conform punctului a) avem $e^{\frac{x^2}{2}}F(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\tan\frac{x^2}{2} + c$.De aici $f(x) = \frac{x}{\cos^2\frac{x^2}{2}} - cxe^{-\frac{x^2}{2}}$.Folosind acum $f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ se obţine $c = e^{\frac{\pi}{4}}$.

Back

#

8.1.4 Bucureşti

1.(a)Vom folosi faptul că funcţia ε este multiplicativă.Aşadar $\varepsilon(x\sigma x^{-1}) = \varepsilon(x) \cdot \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(x^{-1}) = \varepsilon(xx^{-1}) \cdot \varepsilon(\sigma) = \varepsilon(e) \cdot \varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma) = 1$ de unde $x\sigma x^{-1} \in A_n$.

(b).Fixăm $a \in H\ A_n$ şi definim funcţia $f : H \setminus A_n \to H\ ,\ \ f(x) = ax$.Se observă uşor că funcţia f este injectivă.Acum $\varepsilon(ax) = \varepsilon(a) \cdot \varepsilon(x) = (-1) \cdot (-1) = 1$ de unde $ax \in A_n$.Evident $ax \in H$ de unde avem o funcţie injectivă din $H \setminus A_n$ în $H \cap A_n$.Acum definim $g : H \cap A_n \to H,\ \ g(x) = ax$.Evident g este injectivă.Avem că $\varepsilon(ax) = \varepsilon(a) \cdot \varepsilon(x) = (-1) \cdot 1 = -1$ de unde $ax \in H \setminus A_n$.Aşadar avem o funcţie injectivă din $H \cap A_n$ în $H \setminus A_n$.Din toate acestea rezultă că $|H \cap A_n| = |H \setminus A_n|$.

2.(a)Este suficent să demonstrăm că $xy^{-1} \in Z(G)$ pentru orice $x, y \in Z(G)$.Trebuie să vedem că $xy^{-1}g = gxy^{-1}$.Avem că $xy^{-1}g = xgy^{-1} = gxy^{-1}$ şi am terminat.

(b)Un exemplu pentru $Z(G) = \{1\}$ este S_4 grupul permutărilor de ordin 4 şi pentru $Z(G) = G$ un exemplu este $(\mathbb{Z}, \cdot)$.

(b)Din ecuaţia claselor avem $|G| = |Z(G)| + \sum\limits_{x \notin Z(G)} |G : C_G(x)|$.Acum cum $|G| = p^m$ ordinul fiecărui element este divizibil cu p.Cum $|G : C_G(x)|$ este subgrup avem că $p|\ |G : C_G(x)|$.Aşadar $p|\ |Z(G)|$ şi cum $e \in Z(G)$ rezultă $|Z(G)| \geq p$.

3.Mai întâi să vedem identitatea $\sin x \cos x \sin 2x \cos 2x = \dfrac{1}{2} \sin 2x \cos 2x \sin 2x = \dfrac{1}{4} \sin 4x \sin 2x = \dfrac{1}{8}(\cos 2x - \cos 6x)$.Să calculăm acum în general $\int_0^\pi e^x \ \cos ax\ dx$.

Avem că $\int e^x \ \cos ax\ dx = \int (e^x)' \ \cos ax\ dx = e^x \cos ax\big|_0^\pi + a \int_0^\pi e^x \ \sin ax = e^\pi \cos a\pi + 1 + e^x \sin ax\big|_0^\pi - a^2 \int_0^\pi e^x \ \cos ax\ dx = e^\pi \cos a\pi + 1 - a^2 \int_0^\pi e^x \ \cos ax\ dx$ de unde $\int_0^\pi e^x \ \cos ax\ dx = \dfrac{1 + e^\pi \cos a\pi}{a^2 + 1}$.

Acum rezultatul cerut este $\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{e^\pi + 1}{5} - \dfrac{e^\pi + 1}{37}\right) = \dfrac{4(e^\pi + 1)}{185}$.

4.Facem schimbarea de variabilă $\cos x = y$ de unde $x = \arccos y$ adică $dx = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy$.Integrala devine $\int_0^1 \dfrac{\sin(n^4 y)}{\sqrt{1 - y^2}}\ dy$.Vom sparge integrala în două bucăţi şi vom majora pe rând fiecare bucată.

Pentru prima parte avem $\int_0^a \frac{\sin(n^4y)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int_0^a \left(-\frac{\cos(n^4y)}{n^4}\right)' \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy =$ $-\frac{\cos(n^4y)}{n^4\sqrt{1-y^2}}\Big|_0^a + \frac{1}{n^4}\int_0^a \cos(n^4y)\left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right)' dy$. De aici obţinem $\left|\int_0^a \frac{\sin(n^4y)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\right| \le \left|\frac{\cos(n^4y)}{n^4\sqrt{1-y^2}}\Big|_0^a\right| + \frac{1}{n^4}\int_0^a |\cos(n^4y)|\left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right)' dy \le$ $\left|\frac{\cos(n^4y)}{n^4\sqrt{1-y^2}}\Big|_0^a\right| + \frac{1}{n^4}\int_0^a \left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right)' dy \le \frac{2}{n^4\sqrt{1-a^2}}$

Pentru a doua parte avem $\left|\int_a^1 \frac{\sin n^4y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\right| \le \int_a^1 \frac{|\sin(n^4y)|}{\sqrt{1-a^2}}\,dy \le \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} =$ $\arcsin 1 - \arcsin a = \frac{\pi}{2} - \arcsin a$.

Evident putem alege $a = 1 - \frac{1}{n}$ de unde prin adunare avem $\left|\int_0^1 \frac{\sin n^4y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\right| \le$ $\frac{2}{n^3\sqrt{2n-1}} + \frac{\pi}{2} - \arcsin(1-\frac{1}{n})$ de unde prin trecere la limită obţinem $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{\sin n^4y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = 0$.

Back

#

8.1.5 Buzău

1.Facem schimbarea de variabilă $x = \frac{3\pi}{2} - y$ de unde $dx = -dy$.Acum integrala devine $I = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos^8 y + \sin^2 y}{1 + \cos^8 y + \sin^8 y}\, dy$ folosind $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = \sin a$ şi $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) = \cos a$. Avem aşadar

$$2I = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos^8 y + \sin^2 y}{1 + \cos^8 y + \sin^8 y} + \frac{\sin^8 y + \cos^2 y}{1 + \cos^8 y + \sin^8 y}\, dy = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 1\, dy = \frac{3\pi}{2}$$

$\Rightarrow I = \frac{3\pi}{4}$.Am folosit relaţia $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

2.Derivăm în ambele părţi şi obţinem $f(x) = 2f(x)f'(x) + f'(x)$ de unde $f'(x) = \frac{f(x)}{2f(x)+1}$.Cum $f(x) > 0$ din definiţie avem că $f'(x) > 0$ de unde conform corolarului Teoremei lui Lagrange f este strict crescătoare.

3.Se verifică uşor că operaţia $*$ este asociativă.Acum pentru $x, y \in G$ avem $|x * y| = \left|\frac{xy}{a}\right| = \frac{|x| \cdot |y|}{|a|} = 1$ de unde $x * y \in G$ aşadar G este parte stabilă.Să vedem elementul neutru al operaţiei $*$ pe G.Fie el e.Avem $x * e = x$ de unde $\frac{xe}{a} = x$ de unde $xe = xa$.Punem $x = 1$ de unde rezultă că elementul neutru este a.Pentru a încheia trebuie să vedem că orice element este simetrizabil.Fie x' acel invers ipotetic al lui x.Avem $x * x' = a \Leftrightarrow \frac{xx'}{a} = a$ de unde $x' = \frac{a^2}{x}$ şi cum $|x'| = 1$ avem $x' \in G$.

Back

#

8.1.6 Caraş-Severin

1.Fie e elementul neutru al grupului $(G,+)$ şi n ordinul lui G.Avem că din faptul că f este morfism că pentru orice $x \in \mathbb{Q}$ $f(x) = \underbrace{f\left(\frac{x}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{x}{n}\right)}_{n\ ori}$.Din teorema lui Lagrange avem pentru orice $a \in G$ că $\underbrace{a + \dots + a}_{n\ ori} = e$.De aici $f(x) = e$,$\forall x \in \mathbb{Q}$

2.Să presupunem prin absurd că G este abelian.Atunci se verifică uşor că $H = \{e, a, b, ab\}$ este subgrup al lui G.Conform teoremei lui Lagrange ar trebui să avem $ord(H)|ord(G)$ de unde $4|10$ contradicţie.Aşadar G nu este abelian

3.a)Fie $f(x) = 1 + x + e^x$.Avem că $f'(x) = 1 + e^x$ de unde $x = f(x) - f'(x)$.Integrala devine $\int \frac{f(x) - f'(x)}{f(x)}\,dx = \int 1\,dx - \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = x - \ln f(x) + c$.Aşadar $\int \frac{x}{1+x+e^x}\,dx = x - \ln(1 + x + e^x) + c.$

b) $\int \frac{1}{x^3+x^7}\,dx = \int \frac{x}{x^4(x^4+1)}\,dx = \int \frac{1}{x^3}\,dx - \int \frac{x}{x^4+1}\,dx = -\frac{1}{2x^2} - \int \frac{x}{x^4+1}\,dx.$

Acum pentru calculul ultimei integrale vom face schimbarea de variabilă $x^2 = y$ de unde $dy = 2x\,dx$.Avem aşadar $\frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \frac{1}{2}\arctan y + c.$

Conchidem cu $\int \frac{1}{x^3+x^7}\,dx = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2}\arctan x^2 + c$

4.Presupunem prin absurd că ar exista o astfel de funţie.Facem $x \to 1 - x$ de unde $F(x) \cdot F(1-x) = F((1-x)^2)$ de unde $F(x^2) = F((1-x)^2)$,$\forall x \in \mathbb{R}$.Avem aşadar pentru $x = 0$ că $F(0) = F(1)$ de unde conform Rolle există $c_1 \in (0;1)$ cu $F'(c_1) = f(c_1) = 0$.De asemenea pentru $x = -1$ avem $F(1) = F(4)$ de unde conform Rolle există $c_2 \in (1;4)$ cu $F'(c_2) = f(c_2) = 0$.Obţinem astfel două puncte $c_1 \neq c_2$ cu $f(c_1) = f(c_2) = 0$ de unde f nu este injectivă, fals.

Back

#

8.1.7 Cluj

1.a)Evident pentru $x, y \in \mathbb{R}$ $x * y \in \mathbb{R}$.Se verifică uşor comutativitatea operaţiei $*$.Pentru asociativitate avem $(x * y) * z = x * (y * z) = (\sqrt[2007]{x} + \sqrt[2007]{y} + \sqrt[2007]{z} - 2\sqrt[2007]{m})^{2007}$.Pentru elementul neutru avem $e * e = e$ echivalent cu $(2\sqrt[2007]{e} - \sqrt[2007]{m})^{2007} = e$ de unde $e = m$.Inversul lui x este $(2\sqrt[2007]{m} - \sqrt[2007]{x})^{2007}$.Din toate acestea $(\mathbb{R}, *)$ este grup.
b)Izomorfismul $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, *)$ trebuie să verifice $f(x+y) = f(x) * f(y)$ de unde $\sqrt[2007]{f(x+y)} = \sqrt[2007]{f(x)} + \sqrt[2007]{f(y)} - \sqrt[2007]{m}$.Notând $g(x) = \sqrt[2007]{f(x)} - \sqrt[2007]{m}$ avem $g(x+y) = g(x) + g(y)$.Putem alege $g(x) = x$ de unde izomorfismul este $f(x) = (x + \sqrt[2007]{m})^{2007}$.

2. Pentru prima ecuaţie avem prin înmulţire cu $\widehat{3}$ că $\widehat{3}y = \widehat{0}$.Pentru a doua ecuaţie avem prin înmulţire cu $\widehat{2}$ că $\widehat{2} \cdot \widehat{m}y = \widehat{2}$.Din prima obţinem $y \in \{\widehat{0}, \widehat{2}, \widehat{4}\}$.Evident $y = \widehat{0}$ nu verifică.Pentru $y = \widehat{2}$ avem $\widehat{4} \cdot \widehat{m} = \widehat{2}$ de unde $m = \widehat{2}$ sau $m = \widehat{5}$ altfel sistemul nu are soluţii.Pentru $y = \widehat{4}$ avem $\widehat{2}\widehat{m} = \widehat{2}$ de unde $\widehat{m} = 1$ sau $\widehat{m} = 4$ altfel sistemul nu are soluţii.

3.a)Primtiva lui f este de forma $F(x) = (mx^2+nx+p)e^{ax^2}$ de unde $f(x) = F'(x) = (2amx^3+2anx^2+2apx)e^{ax^2} + (2mx+n)e^{ax^2} = (2amx^3+2anx^2+(2ap+2m)x+n)e^{ax^2}$ de unde $m = \frac{1}{2a}$,$n = 2a$ şi $p = \frac{3}{2} - \frac{1}{2a^2}$.

b)Primitiva are forma $H(x) = g(x)\left(x^5+3\right)^{\frac{6}{5}} + c$ unde g este un polinom.Avem că $H'(x) = g'(x)\left(x^5+3\right)^{\frac{6}{5}} + 6x^4 g(x)\sqrt[5]{x^5+3} = (g'(x)(x^5 + 3) + 6x^4 g(x))\sqrt[5]{x^5+3}$.Aşadar $g'(x)(x^5+3) + 6x^4 g(x) = 2x^{10} + 3x^5$.De aici se vede că $g(x) = \frac{x^6}{6}$.Avem astfel $\int (2x^{10}+3x^5)\sqrt[5]{x^5+3}\,dx = \frac{x^6}{6}(x^5+3)\sqrt[5]{x^5+3} + c$

c)Avem că $\int_0^1 g^2(x)\,dx \geq 0$ pentru orice $g : [0;1] \to \mathbb{R}$.
Pentru $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{3}$ avem $\int_0^1 f^2(x)\,dx - \frac{2}{3}\int_0^1 x^2 f(x)\,dx + \frac{1}{9}\int_0^1 x^4\,dx \geq 0$ echivalent cu $3\int_0^1 f^2(x)\,dx - 2\int_0^1 x^2 f(x)\,dx + \frac{1}{15} \geq 0$.Din ipoteză avem egalitate aşadar $f(x) - \frac{x^2}{3} = c$,unde c este o constantă de unde $f(x) = \frac{x^2}{3} + c$.

Back

#

8.1.8 Constanţa

1.Facem schimbarea de variabilă $\frac{x}{\ln x} = y$ de unde $dy = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx$.Integrala devine $\int \frac{y^2}{y^4 - 1} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{y^2+1}\,dy + \int \frac{1}{y^2-1}\,dy\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{2}\arctan y + c$.Aşadar $\int \frac{x^2(\ln x - 1)}{x^4 - \ln^4 x}\,dx = \frac{1}{4}\ln\frac{x - \ln x}{x + \ln x} + \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{\ln x} + c$

2.(a) Fie $G(x) = F(x)\cos x$.Funcţia G este derivabilă şi $G'(x) = f(x)\cos x - F(x)\sin x$.Din ipoteză $G'(x) \geq 0$.Conform corolarului Teoremei lui Lagrange rezultă G strict crescătoare.Cum $G\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 0$ pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ rezultă $G = 0$.Din această rezultă imediat că $F = 0$ pentru orice $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$ şi cum F este continuă rezultă $F = 0$ de unde $f = 0$.

(b)Fie $h(x) = F(x)\cos x - \frac{\sin 2x}{2} = F(x)\cos x - \sin x\cos x$.Avem că h este derivabilă şi $h'(x) = f(x)\cos x - F(x)\sin x - \cos 2x$.Din ipoteză $h'(x) \geq 0$.Conform corolarului Teoremei lui Lagrange rezultă h strict crescătoare.Cum $h\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 0$ pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ rezultă $h = 0$.De aici obţinem $F(x) = \sin x$ de unde $f(x) = \cos x$.

3.Fie $|G| = n$.Din teorema lui Lagrange avem $x^n = e$ pentru orice $x \in G$.Din aceasta observaţie se obţine uşor $f(x + ny) = f(x)f(ny) = f(x)f^n(y) = f(x)$ (1) din faptul că f este morfism, pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$.Să demonstrăm acum că f este constantă.Fie $a, b \in \mathbb{Q}$ arbitrare.Punem în (1) $x = a$ şi $y = \frac{b-a}{n}$ de unde obţinem $f(a) = f(b)$.Acum este imediat din faptul că f este constantă şi este morfism că $f(x) = e$ pentru orice $x \in \mathbb{Q}$.

Back

#

8.1.9 Covasna

1.(i)Fie $y = z + 1, x = \frac{1}{z+1}$.Conform (ii) şi i $1 * z = \frac{1}{z+1}$.Punând acum $y = 1$ rezultă $x * z = \frac{x}{z+1}$. Acum $\sqrt{2} * (\sqrt{2}+1) = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$

(ii) Se verifică uşor că legea nu este asociativă.

(iii)Presupunând că ar avea element neutru să zicem e ar trebui ca $x * e = x$ de unde $\frac{x}{e+1} = x$ aşadar $e = -1$ contradicţie cu $e > 0$.

2.Este suficient să demonstrăm că morfismul este injectiv,grupul G fiind finit.Vom folosi lema dacă $(m, n) = 1$ există $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $ma - bn = 1$.Acum presupunând că există $x, y \in G$ cu $x^m = y^m$ avem că $x^{am} = y^{am}$ aşadar $x^{bn+1} = y^{bn+1}$.Este binecunoscut că $x^n = y^n = e$ de unde $x = y$.Am obţinut astfel că f este injectivă şi demonstraţia se încheie.

3.a) Avem că $aI + bJ = \int 1\, dx = x + c$.Acum ne uităm la $aJ - bI = \int \frac{a\cos x - b\sin x}{a\sin x + b\cos x}\, dx = \int \frac{(a\sin x + b\cos x)'}{a\sin x + b\cos x}\, dx = \ln(a\sin x + b\cos x) + c$.Aşadar $I = \frac{ax - b\ln(a\sin x + b\cos x)}{a^2+b^2} + c$ şi $J = \frac{ax + b\ln(a\sin x + b\cos x)}{a^2+b^2} + c$.

(b)Vom calcula pe rând integralele $\int \frac{e^x(x-1)}{e^{2x}+x^2}$ şi $\int \frac{2x(x-1)}{e^{2x}+x^2}$.Pentru prima să notăm $\frac{e^x}{x} = y$ de unde $dy = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$.Integrala revine la $\int \frac{1}{y^2+1}\, dy = \arctan y + c$.Aşadar $\int \frac{e^x(x-1)}{e^{2x}+x^2} = \arctan \frac{e^x}{x} + c$.

Pentru a doua să notăm $f(x) = e^{2x} + x^2$.Avem $f'(x) = 2e^{2x} + 2x$ de unde $2f(x) - f'(x) = 2x(x-1)$.Integrala revine la $\int \frac{2f(x) - f'(x)}{f(x)}\, dx = 2x - \ln f(x) + c$.

Rezultatul cerut este $\arctan \frac{e^x}{x} - 2x + \ln(e^{2x} + x^2) + c$

4.(a)Substituim $x \to 2 - x$ şi obţinem $f(2-x)F(x) = 1$ de unde $F(2-x)f(x) - F(x)f(2-x) = 0$ echivalent cu $(F(x)F(2-x))' = 0$.Funcţia $g(x) = F(x)F(2-x)$ este derivabilă şi avem $g'(x) = 0$ de unde rezultă că există $c \in \mathbb{R}$ cu $g(x) = c$.Acum tot din relaţia iniţială se observă că F nu se anulează şi cum ea este continuă rezultă că are semn constant.Aşadar $c > 0$.

(b) Obţinem de la (a) şi ipoteza $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{1}{c}$ de unde $\ln F(x) = \frac{x}{c} + a$.Din aceasta $F(x) = pe^{qx}$ cu $q > 0$ .Se obţine $f(x) = pqe^{qx}$ şi ca să verifice condiţia iniţială trebuie să avem $p^2qe^{2q} = 1$.

Back

#

8.1.11 Dolj

1. Din cele două relaţii avem $a \cdot b = a^2 \cdot b^3 \Rightarrow e = a \cdot b^3$. Analog pentru cealaltă relaţie.

2. a) Dacă notăm cu

$f(x) = 2e^x + \cos x + \sin x \Rightarrow f'(x) = 2e^x + \cos x - \sin x \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}\left(f(x) - f'(x)\right)$.

Avem $I = \frac{1}{2}\int \frac{f(x)-f'(x)}{f(x)}dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln f(x) + C$.

b) Dacă notăm cu

$\phi(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow \phi'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$ şi $x + 1 - \frac{1}{x} = 1 + x\phi'(x)$, $\left(xe^{\phi(x)}\right)' = \left(1 + x\phi'(x)\right)e^{\phi(x)}$.

Obţinem astfel $I = \int \left(xe^{\phi(x)}\right)' dx = xe^{\phi(x)} + C$.

3. Cum $F'(x) = f(x) \Rightarrow \frac{e^x F'(x) - (e^x)F(x)}{e^{2x}} = -\frac{\arcsin(e^x)}{e^x}$.

Cu substituţia $e^x = t \Rightarrow -\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx = \frac{1}{t}\arcsin t + \ln\left(\frac{1}{t} + \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}\right) + C$.

Obţinem astfel $F(x) = \arcsin e^x + e^x \ln\left(\frac{1}{e^x} + \sqrt{\frac{1}{e^{2x}} - 1}\right) + ce^x$. Din $F(0) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = F(x) - \arcsin e^x \Rightarrow f(x) = e^x \ln\left(\frac{1}{e^x} + \sqrt{\frac{1}{e^{2x}} - 1}\right) + \frac{\pi}{2}e^x$.

[Back](#)

#

8.1.12 Galaţi

1.(a)Fie $\widehat{a} \in \mathbb{Z}_p^*$.Vom considera $f : \{1, ..., p-1\} \to \{1, ..., p-1\}$ $f(x) = ax(mod\ p)$.Se observă uşor că f este injectivă,de unde se deduce că f este bijectivă aşadar există j astfel încât $aj = 1(mod\ p)$ de unde $\widehat{a}\widehat{j} = \widehat{1}$.

(b)Cum fiecare element este inversabil şi inversul este unic avem $\widehat{1}^{-1} + ... + \widehat{p-1}^{-1} = \widehat{1} + ... + \widehat{p-1} = \widehat{1 + ... + p-1} = \widehat{\frac{p(p-1)}{2}} = \widehat{0}$.

Acum $\widehat{1} \cdot \widehat{2} + ... + \widehat{p-2} \cdot \widehat{p-1} = \widehat{\sum_{k=2}^{p-1} k(k-1)} = \widehat{\sum_{k=1}^{p-1} k^2} - \widehat{\sum_{k=1}^{p-1} k} = \widehat{\frac{(p-1)p(2p-1)}{3}} - \widehat{\frac{p(p-1)}{2}}$.Dacă $p = 3$ suma este $\widehat{2}$,în rest ea este $\widehat{0}$.

2.Este suficient să găsim o matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^{2008} = I_2$ şi $A^i \neq I_2$ cu $i = \overline{1, 2007}$ pentru că vom considera subgrupul nostru ca $\{A^i | i = 0, ..., 2007\}$.Dacă ne uităm la valorile proprii ale matrici A ele sunt complexe conjugate şi $\lambda^{2008} = 1$ de unde putem alege $\lambda = \cos\frac{\pi}{1004} + i\sin\frac{\pi}{1004}$.De aici alegem $A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{1004} & \sin\frac{\pi}{1004} \\ -\sin\frac{\pi}{1004} & \cos\frac{\pi}{1004} \end{pmatrix}$.

3.Fie $f(x) = (x^2 + 1)g(x)$.De aici $g(0) = 1$ şi $g(x) = 1 + \int_0^x g(t)\,dt$.De asemenea g este continuă de unde g admite primitive.Fie G primitiva lui g.Avem $G'(x) = G(x) + 1 - G(0)$ de unde $\frac{G'(x) - G(x)}{e^x} = \frac{1 - G(0)}{e^x}$.Aceasta se rescrie $\left(\frac{G(x)}{e^x}\right)' = \left((G(0) - 1)e^{-x}\right)'$ aşadar $\frac{G(x)}{e^x} = (G(0) - 1)e^{-x} + c$ de unde $G(x) = G(0) - 1 + ce^x$.Aceasta ne dă $g(x) = ce^x$.Din $g(0) = 1$ obţinem $c = 1$.În final $f(x) = (x^2 + 1)e^x$.

4.Definim $f(x) = g(x) + x^3$.Din aceasta g admite primitive şi $g(x + y) = g(x) + g(y)$.Fixăm y şi fie G primitiva lui g.Avem că $(G(x + y) - G(x))' = g(y)$ de unde $G(x + y) = G(x) + xg(y) + c(y)$ unde $c(y)$ este o constantă.Punem $x = 0$ şi obţinem $c(y) + G(0) = G(y)$ de unde $G(x + y) = G(x) + G(y) + G(0) + xg(y)$.Pentru $x = 1$ şi y variabil avem $g(y) = G(1 + y) - G(y) - G(0)$ de unde g este derivabilă,aşadar continuă şi cum verifică $g(x + y) = g(x) + g(y)$ rezultă că $g(x) = kx$ unde k este o constantă.Soluţia este astfel $f(x) = x^3 + kx$.

Back

#

8.1.13 Gorj

1.(a)Se verifică în mod trivial toate proprietăţile:asociativitate, comutativitatea,faptul că este parte stabilă,elementul neutru care este 0 şi faptul că fiecare element este inversabil,inversul lui x fiind $-x$

(b) Să presupunem prin absurd că există un izomorfism între $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Z}[i]$.Avem că $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$.Din aceasta avem $f(x) = xf(1)$.Acum fie $f(1) = m + ni$.Se observă uşor că $m, n \neq 0$ altfel f nu ar mai fi bijectivă.Din faptul că f este surjectivă există $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(a) = m + (n+1)i$.De aici $a(m+ni) = m+(n+1)i$ de unde $am = a$ şi $an = (n+1)$ ceea ce este o contradicţie.

2.(a)Să presupunem că ambele sunt subgrupuri netriviale.Fie $a \neq e \in H$ şi $b \neq e \in K$.Dacă luăm ab el nu poate fi nici în H nici în K deci nu poate fi în G contradicţie.

(b)Fie $c \in H$.Elementul ca nu poate fi în H dar este în G de unde este a sau a^2.Se observă imediat că poate fi doar a deoarece $ca = a^2$ rezultă $c = a$ contradicţie cu a nu este în H.Din aceasta $c = e$.Aşadar $c = e$ de unde $G = \{e, a, a^2\}$ cu $a^3 = e$.Izomorfismul este dat în mod trivial de $f(a^p) = \widehat{p}$.

3.Pentru ambele limite vom folosi următorul rezultat.Dacă f este integrabilă Rienmann atunci $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx.$

Prima limită este dată de funcţia $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ şi respectiv diviziunea $\left(\dfrac{k}{n}\right)_{k=\overline{1,n}}$.

Limita cerută este astfel $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$

(b) Pentru a obţine rezultatul vom folosi aceeaşi funcţie şi divizunea $\left(\dfrac{k}{2n}\right)_{k=\overline{1,2n-1}}$.De aici $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + ... + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n}\right) = \ln 2.$

Acum avem că $\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+3} + .. + \dfrac{1}{4n-1} = \left(\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} + ... + \dfrac{1}{4n-1} + \dfrac{1}{4n}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n}\right)$ de unde limita cerută este $\dfrac{\ln 2}{2}$.

4.(a)Evident $\ln x \geq 0$ pentru $x \in [1; e]$ de unde $I_n \geq 0$.De asemenea $\ln x \leq 1$ de unde $\int_1^e \ln^n x(\ln x - 1)\, dx \geq 0$ de unde $I_n \geq I_{n+1}$. Aşadar şirul este pozitiv şi descrescător.
(b)$I_n = \int_1^e \ln^n x\, dx = \int_1^e (x)' \ln^n x\, dx = (x \ln^n x)\Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{n \ln^{n-1} x}{x}\, dx = e - nI_{n-1}$.Acum din $I_{n-1} \geq I_n$ rezultă $I_n \leq e - nI_n$ de unde $I_n \leq \frac{e}{n+1}$.Aşadar $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

Back

#

8.1.14 Hunedoara

1.(a)Fie $I = \int \frac{\sin x}{3\sin x + 4\cos x}dx$ şi $J = \int \frac{\cos x}{3\sin x + 4\cos x}dx$.Avem $3I + 4J = \int 1\,dx = x + c$.Acum să calculăm $3J - 4I = \int \frac{3\cos x - 4\sin x}{3\sin x + 4\cos x}dx = \int \frac{(3\sin x + 4\cos x)'}{3\sin x + 4\cos x}dx = \ln(3\sin x + 4\cos x) + c$

De aici $I + J = \frac{x + 7\ln(3\sin x + 4\cos x)}{25} + c$.

(b) Facem schimbarea de variabilă $x = \frac{\pi}{2} - y$ de unde $dx = -dy$.Integrala devine $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n y}{\sin^n y + \cos^n y}dy$ de unde prin adunare avem $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$.Aşadar $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx = \frac{\pi}{4}$.

2.(a)Este uşor de văzut că $U = \{\omega^k | k = 0, ..., 5\}$ unde $\omega = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.De aici se obţine imediat faptul că $(U, \cdot)$ este grup abelian.

(b)Din teorema lui Lagrange pentru un subgrup H cu $|H| = 3$ trebuie să avem $x^3 = e$ pentru orice $x \in H$.De la structura de la (a) pentru U se deduce uşor că $H = \{1, \omega^2, \omega^4\}$.Pentru $(\mathbb{Z}_6, +)$ trebuie să avem $3x = 0$ pentru orice subgrup.De aici singurul care verifică este $\{0, 2, 4\}$.

3.Vom folosi următoarea teoremă:*Dacă $h, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu h admite primitive şi g derivabilă cu derivata continuă atunci fg admite primitive.*

Dacă f admite primitive atunci cum funţiile $sh(x)$ şi $ch(x)$ sunt derivabile cu derivata continuă rezultă că g_1,g_2 admit primitive.Pentru reciprocă să observăm că $f^2 = g_2^2 - g_1^2$ de unde f admite primitive.

4.(a) Punem $y = 0$ de unde $2f(x) = 2f(x) + 2f(0)$ aşadar $f(0) = 0$.Punem $y = x$ de unde $f(2x) = 4f(x)$.În final punem $y = -x$ de unde $f(2x) = 2f(x) + 2f(-x)$.Se obţine astfel şi ultima relaţie $f(x) = f(-x)$.

(b)Vom demonstra prin inducţie.Pentru $k = 2$ se observă uşor că unul din numerele $f(x + y)$ sau $f(x - y)$ este mai mic decât $f(x) + f(y)$ folosind ipoteza.Acum să presupunem că este adevărată pentru k şi să demonstrăm pentru $k + 1$.Avem $f(a_1x_1 + ... + a_kx_k - x_{k+1}) + f(a_1x_1 + ... + a_kx_k + x_{k+1}) = 2(f(x_{k+1}) + f(a_1x_1 + ... + a_kx_k))$ de unde în mod analog unul din $f(a_1x_1 + ... + a_kx_k - x_{k+1})$ sau $f(a_1x_1 + ... + a_kx_k + x_{k+1})$ este mai mic ca $f(x_{k+1}) + f(a_1x_1 + ... + a_kx_k)$,de unde folosind inducţia mai mic ca $f(x_1) + ... + f(x_{k+1})$ şi am terminat.

Back

#

8.1.15 Mureş

1. Fie $x = 2\cos t$, $t \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$. Fie $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, cu $a_1 = 2\cos t$.Prin inducţie se arată că $a_n = 2\cos\frac{t}{2^{n-1}}$ $x = 2\cos t \Rightarrow dx = -2\sin t dt$. Astfel avem:

2. a)Parte stabilă, asociativitate, comutativitate evident.$e = f\left(\frac{1}{k}\right) \in \mathbb{R}^*$, iar $x' = f\left(\frac{1}{k^2 \cdot f^{-1}(x)}\right) \in \mathbb{R}^*$ simetricul lui x.

   b)$x * y = x \cdot y$

$$\left.\begin{array}{r} x * y = f\left(kf^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y)\right) \\ f(x) = x^n \end{array}\right\} \Rightarrow k^n \cdot x \cdot y = x \cdot y, \forall x, y \in \mathbb{R}^* \Rightarrow k^n = 1$$

$\Rightarrow k = \pm 1$ în funcţie de paritatea lui n.

3. $2F(x) = x\left(f(x) - \frac{x}{2}\right) \Rightarrow f(x) = \frac{2F(x)}{x} + \frac{x}{2}$, f derivabilă $\Rightarrow$ $f'(x) = \frac{2xf(x) - 2F(x)}{x^2} + \frac{1}{2} \Rightarrow$, folosind relaţia din enunţ $\Rightarrow$ $x^2 f'(x) = xf(x) + x^2$, de unde $\frac{xf'(x)}{x^2} - \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow f(x) = x\ln x + kx$, $k \in \mathbb{R}$.Cum $f(1) = 2008 \Rightarrow f(x) = x\ln x + 2008x$.

4. Fie $x = e \Rightarrow a = a^3 \Rightarrow a^2 = e \Rightarrow a = a^{-1}$

   Relaţia devine: $ax^3 = xa \Rightarrow x^3 = axa, \forall x \in G$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Fie } x \leftarrow ax \Rightarrow (ax)(ax)(ax) = a(ax)a \\ ''\cdot'' \text{ asociativă} \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot x \cdot (a \cdot x \cdot a) \cdot x = x \cdot a$$

$\Rightarrow ax^5 = xa \Rightarrow ax^5 = axa = x^3 \Rightarrow x^5 = x^3\ \forall x \in G\ x^2 = e\ \forall x \in G$

Fie $x = xy$ $(xy)^2 = e \Rightarrow xyxy = e$.Dar $x^2 = e; y^2 = e \Rightarrow x^2y^2 = e \Rightarrow xyxy = x^2y^2 \Rightarrow yx = xy\ \forall x, y \in G$.

Back

#

8.1.16 Neamţ

1.Fie $x \in H$.Dacă $e \in G-H$ conform ipotezei $x \cdot e \in G-H$ de unde $x \in G-H$ contradicţie.Aşadar $e \in H$.Mai departe $x^{-1} \in H$, altfel $x^{-1} \in G-H$ de unde $x \cdot x^{-1} \in G-H$ echivalent cu $e \in G-H$ fals.Acum pentru $x, y \in H$ presupunând că $xy \in G-H$ rezultă că $x^{-1} \cdot (xy) \in G-H$ deoarece $x^{-1} \in H$.De aici ar rezulta $y \in G-H$ fals.Aşadar $xy \in H$.Din toate acestea rezultă H subgrup.

2.a)Avem că $xyx = y^3$ de unde $xy(xyx) = xy^4$ echivalent cu $(xyx)yx = xy^4$ aşadar $y^4x = xy^4$.Mai departe $y^{12} = (xyx)^4 = xy^4x = y^4x^2 = y^4$ de unde $y^8 = e$.
b)Avem că $y^3 = (xy^3x^{-1})^3 = xy^9x$ folosind $x = x^{-1}$.Mai departe $xy^3x = x^2y^9x^2$ de unde $y = y^9$ echivalent cu $y^8 = e$.

3.a) $\displaystyle\int \frac{ctg\, x}{1+\sin^3 x}\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x(1+\sin^3 x)}\, dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{\sin^3 x(1+\sin^3 x)}\, dx$.Facem schimbarea de variabilă $t = \sin^3 x$ de unde $dt = 3\sin^2 x \cdot \cos x\, dx$.Integrala devine $\displaystyle\int \frac{1}{t(t+1)}\, dt = \int \frac{1}{t}\, dt - \int \frac{1}{t+1}\, dt = \ln\left(\frac{t}{t+1}\right) + c$.De aici primitiva lui f este $\ln\left(\dfrac{\sin^3 x}{\sin^3 x + 1}\right) + c$.

b) Fie $g(x) = \sin^2 x + e^x + x$.Avem că $g'(x) = 2\sin x \cdot \cos x + e^x + 1$.De aici $g'(x) - g(x) = 2\sin x \cos x + 1 - \sin^2 x - x = \sin 2x + \cos^2 x - x$.Avem aşadar $\displaystyle\int \frac{g'(x) - g(x)}{g(x)} = \int \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx - \int 1\, dx = \ln g(x) - x + c$. De aici primtiva lui f este $\ln(\sin^2 x + e^x + x) - x + c$.

4.Inegalitatea se rescrie $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} \geq 1$ de unde prin integrare avem $\displaystyle\int_a^b \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}\, dx \geq \int_a^b 1\, dx$.Aceasta este echivalentă cu $\ln\left(f(x) + \sqrt{1+f^2(x)}\right)\Big|_b^a \geq b - a$.
De aici $f(b) + \sqrt{1+f^2(b)} \geq e^{b-a}$.

Back

#

8.1.17 Olt

1.a)Se observă uşor că $0 \in \mathcal{T}$.Acum dacă $t_1, t_2 \in \mathcal{T}$ avem că pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)a | k \in \mathbb{Z}\}$ că $f(x+t_1+t_2) = f(x+t_1) = f(x)$ de unde $t_1 + t_2 \in \mathcal{T}$.De asemenea $f(x-t_1) = f(x-t_1+t_1) = f(x)$ de unde $-t_1 \in \mathcal{T}$.Din toate acestea $\mathcal{T}$ este subgrup al lui $(\mathbb{R}, +)$.

b) Fie a cea mai mică perioada pozitivă şi presupunem că există b astfel încât $b \neq ka$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.Fie $m = \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor$.Avem astfel $m < \frac{b}{a} < m+1$ de unde $ma < b < ma + a$ echivalent cu $0 < b - ma < a$.Din cele demonstrate la a) avem că $b - ma$ este şi ea perioadă a funcţiei dar contrazice alegerea lui a.Deci nu există un astfel de unde $\mathcal{T} = \{ka | k \in \mathbb{Z}\}$,aşadar este ciclic.

2.Să arătăm mai întâi că f este bijectivă.Avem că f este continuă şi derivabilă. De asemenea $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ de unde f este strict crescătoare.Pentru a termina avem $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Aşadar $f(t) = x$ are soluţie unică.Mai mult $\varphi(x)$ este inversa funţiei f de unde este şi ea derivabilă .
Pentru a calcula integrala facem schimbarea de variabilă $x = f(y)$ de unde $dx = f'(y)\,dy$.Capetele se schimbă în 1 respectiv e.Avem astfel

$$\int_1^e \frac{f'(y)}{1+y}\,dy = \int_1^e \frac{1+\frac{1}{y}}{y+1}\,dy = \int_1^e \frac{1}{y}\,dy = (\ln y)\Big|_1^e = 1.$$

3.Facem schimbarea de variabilă $a_n x = y$ de unde $a_n\,dx = dy$.Integrala devine $\frac{1}{a_n}\int_0^{a_n} f(y)\,dy$.Cum funţia f este continuă ea admite primitive.Fie F o primitivă.Avem mai departe $\int_0^1 f(a_n x)\,dx = \frac{F(a_n) - F(0)}{a_n}$.
Acum dacă $\lambda \neq 0$ avem că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(a_n x)\,dx = \frac{F(\lambda) - F(0)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(x)\,dx.$
Dacă $\lambda = 0$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F(a_n) - F(0)}{a_n} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{F(y) - F(0)}{y} = F'(0) = f(0)$ de unde rezultatul cerut.

4.Mai întâi să demonstrăm că există o infinitate de funcţii $h : [a;b] \to \mathbb{R}$ derivabile cu $h(a) = h'(a) = h(b) = h'(b) = 0$ şi $\int_a^b h(x)\,dx \neq 0$.
Este suficient să demonstrăm pentru $h = (x-a)^2(x-b)^2(x^2+1)$ după aceea

o vom înmulţi cu o constantă.Evident prima condiţie este verificată iar pentru ultima avem din teorema de medie $\int_a^b h(x)\,dx = (b-a)(c-a)^2(c-b)^2(c^2+1)$ cu $c \in (a;b)$.Evident niciunul din aceşti termeni nu poate fi nul şi am terminat.

Acum pentru problema noastră considerăm $g_n : [a_n; a_{n+1}] \to \mathbb{R}$

$g_n = c_n(x-a_n)^2(x-a_{n+1})^2(x^2+1)$ unde c_n este ales astfel încât

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} g_n = b_n.$$

Considerăm $f = g_n$ pe intervalul $[a_n; a_{n+1}]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $f = 0$ pe intervalul $(-\infty; a_1]$.Toate condiţiile sunt verificate şi am terminat.

Back

#

8.1.18 Sălaj

1.Vom demonstra mai întâi că grupul G este comutativ.Fie $x, y \in G$.Cum $xy \in G$ avem că $xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$ şi am terminat.Acum pentru funţia g punem $x \to ax$ de unde $g(ax) = f(ax)f(a^2x) = f(ax)f(x) = f(x)f(ax)$ din faptul că grupul G este abelian aşadar $g(ax) = g(x)$ pentru orice $x \in G$ de unde funcţia nu este injectivă.

2..(a)Asociativitatea este indusă de pe mulţimea $M_2(\mathbb{R})$.Acum fie $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in H$ şi $\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \in H$.Avem că $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -ad - bc & ac - bd \end{pmatrix}$.Acum condiţia iniţiala este ca $det(A) \neq 0$ cu $A \in H$.Cum determinantul este multiplicativ condiţia se păstrează aşadar $\begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -ad - bc & ac - bd \end{pmatrix} \in H$.Am obţinut astfel că legea $\cdot$ este comutativă şi H este parte stabilă.Se observă uşor că $I_2 \in H$ de unde H are element neutru.Fiecare matrice $A \in H$ este inversabilă peste $M_2(\mathbb{R})$ având $det(A) \neq 0$.Inversa ei peste $M_2(\mathbb{R})$ este $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$ şi se observă că inversa este şi ea în H.Aşadar $(H, \cdot)$ este grup abelian.

(b).Grupurile $(H, \cdot)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ sunt izomorfe prin izomorfismul $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) = a + bi$.

(c)Folosind izomorfismul $f(A^n) = f^n(A)$ de unde $f(A^n) = (a + bi)^n$ aşadar
$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{(a+bi)^n + (a-bi)^n}{2} & \frac{(a+bi)^n - (a-bi)^n}{2i} \\ -\frac{(a+bi)^n - (a-bi)^n}{2i} & \frac{(a+bi)^n + (a-bi)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

3.Vom calcula mai întâi $I_1 = \int \frac{x^2+1}{(x^2+x-1)^2}\,dx$.Avem că există un polinom g astfel încât $\left(\frac{g(x)}{x^2+x-1}\right)' = \frac{x^2+1}{(x^2+x-1)^2}$ de unde

$\dfrac{(x^2+x-1)g'(x)-(2x+1)g(x)}{(x^2+x-1)^2}=\dfrac{x^2+1}{(x^2+x-1)^2}$.Aşadar $(x^2+x-1)g'(x)-(2x+1)g(x)=x^2+1$.De aici se vede relativ uşor că $grad(g)=1$ şi notând $g(x)=ax+b$ după calcule avem $a=-1$ şi $b=0$.Conchidem cu $I_1=\dfrac{-x}{x^2+x-1}+c$.

Pentru cazul general facem schimarea de variabilă $y=\dfrac{-x}{x^2+x-1}$ de unde $dy=\dfrac{x^2+1}{(x^2+x-1)^2}\,dx$.Aşadar $I_n=\int y^{2n-2}\,dy=\dfrac{y^{2n-1}}{2n-1}+c$ de unde $I_n=\dfrac{-x^{2n-1}}{(2n-1)(x^2+x-1)^{2n-1}}+c$.

4.Vom folosi faptul că $\cos\dfrac{2}{x}=1-2\sin^2\dfrac{1}{x}$.Dacă $g(x)$ admite primitive şi $2g(x)$ admite primitive.Avem că $2g(x)=\begin{cases}3-\cos\dfrac{2}{x}-\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 2a, & x=0\end{cases}$.Este binecunoscut faptul că $\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ şi $\begin{cases}\cos\dfrac{2}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ admit primitve.Din acestea prin adunare ar rezulta că funcţia $\begin{cases}3, & x\neq 0\\ 2a, & x=0\end{cases}$ admite primitve de unde necesar $a=\dfrac{3}{2}$.

Back

#

8.1.19 Satu Mare

1.a)Avem prin schimbarea de variabilă $y = e^{e^{e^{x^2}}}$ că $dy = e^{e^{e^{x^2}}} \cdot e^{x^2} \cdot 2x$ de unde integrala noastră devine $\int \frac{1}{2}\, dy = \frac{y}{2} + c$ de unde $\int e^{e^{e^{x^2}}+x^2+\ln x}\, dx = \frac{e^{e^{e^{x^2}}}}{2} + c$

b)Avem că $\int \frac{1}{\cos x(1-\sin 2x)(2-\sin 2x)}\, dx = \int \frac{2\sin x}{\sin 2x(1-\sin 2x)(2-\sin 2x)} = \int \frac{\sin x}{\sin 2x}\, dx + \int \frac{2\sin x}{1-\sin 2x}\, dx - \int \frac{\sin x}{2-\sin 2x}\, dx = \int \frac{1}{2\cos x}\, dx + \int \frac{2\sin x}{1-\sin 2x}\, dx - \int \frac{\sin x}{2-\sin 2x}\, dx$

Vom rezolva fiecare din aceste integrale prin substituţia $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = y$ de unde $x = 2\arctan y$.Avem aşadar $dx = \frac{2}{y^2+1}\, dy$, $\sin x = \frac{2y}{y^2+1}$ şi $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$.

Prima integrală devine $\int \frac{1}{2\cos x}\, dx = \int \frac{2}{1-y^2}\, dy = \int \frac{1}{1-y}\, dy + \int \frac{1}{1+y}\, dy = \ln 1 + y - \ln 1 - y + c$.

A doua integrală devine $\int \frac{2\sin x}{1-\sin 2x}\, dx = 8\int \frac{y}{(y^2+2y-1)^2}\, dy$.Fie a şi b rădăcinile polinomului $X^2 + 2X - 1$.Avem că $8\int \frac{y}{(y^2+2y-1)^2}\, dy = 8\int \frac{y}{(y-a)^2}\, dy + 16\int \frac{y}{(y-a)(y-b)}\, dy + 8\int \frac{y}{(y-b)^2}\, dy = \left(8 + \frac{16a}{(b-a)}\right)\int \frac{1}{(y-a)}\, dy + \left(8 + \frac{16b}{(a-b)}\right)\int \frac{1}{y-b}\, dy + 8a\int \frac{1}{(y-a)^2}\, dy + 8b\int \frac{1}{(y-b)^2}\, dy = \left(8 + \frac{16a}{(b-a)}\right)\ln(y-a) + \left(8 + \frac{16b}{(a-b)}\right)\ln(y-b) - \frac{8a}{y-a} - \frac{8b}{y-b} + c$

Pentru ultima integrală avem $\int \frac{\sin x}{2-\sin 2x}\, dx = 4\int \frac{y}{(y^2+2y-1)^2+1}\, dy$.Se consideră descompunerea polinomului $(X^2 + 2X - 1)^2 + 1 = (X^2 + pX + q)(X^2 + rX + s)$(se determină p, q, r, s din aflarea rădăcinilor complexe ale ecuaţiei $(z^2 + 2z - 1)^2 + 1 = 0$).Vom determina A, B, C, D astfel încât $\frac{1}{(X^2+2X-1)^2+1} = \frac{AX+B}{X^2+pX+q} + \frac{CX+D}{X^2+rX+s}$.După calcule avem $A = \frac{p-r}{(ps-rq)(p-r)+(q-s)^2}$, $B = \frac{(q-s)-r(p-r)}{(ps-rq)(p-r)+(q-s)^2}$, $C = -A$ şi $D = \frac{p(p-r)-(q-s)}{(ps-rq)(p-r)+(q-s)^2}$.

Vom exemplifica doar pentru o parte,restul fiind analog $\int \frac{4y(Ay+B)}{y^2+py+q}\,dy =$ $\int 4A\,dy + \int \frac{y(4B-4Ap)-Aq}{y^2+py+q}\,dy = 4Ay + (2B-2Ap)\int \frac{2y+p}{y^2+py+q}\,dy -$ $(qA+2Bp-2Ap^2)\int \frac{1}{y^2+py+q}\,dy = 4Ay + (2b-2Ap)\ln(y^2+py+q) -$ $(qA+2Bp-2Ap^2)\int \frac{1}{(y+\frac{\sqrt{p}}{2})^2+q-\frac{p}{2}}\,dy = 4Ay+(2b-2Ap)\ln(y^2+py+q) -$ $\frac{qA+2Bp-2Ap^2}{\sqrt{q-\frac{p}{2}}}\arctan\frac{y+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p}{2}}}$

2. Facem schimbarea de variabilă $y = 2a - x$ de unde $dx = -dy$.
Integrala devine $I = -\int_{2a}^{0} \frac{(y-a)+(y-a)^3+...+(y-a)^{2007}}{1+(y-a)^2+...+(y-a)^{2008}}\,dy =$ $-\int_{0}^{2a} \frac{(a-y)+(a-y)^3+...+(a-y)^{2007}}{1+(a-y)^2+...+(a-y)^{2008}}\,dy = -I$ de unde $I = 0$.

3.a)Operaţia $*$ este evident asociativă şi comutativă.Acum din faptul că $x, y \in G$ avem $(x-k)(y-k) > 0$ şi $(x+k)(y+k) > 0$ de unde $k^2+xy > -k(x+y)$ şi $k^2+xy > k(+y)$ de unde $-k < \frac{k^2(x+y)}{k^2+xy} < k$ numărul k^2+xy fiind pozitiv.Aşadar $x * y \in G$.Elementul neutru este 0 şi inversul elementului a este $-a$.Din toate acestea $(G, *)$ este grup abelian.
b)Să demonstrăm mai întâi că funţia este bijectivă.Evident ea este continuă şi derivabilă pe $(-k; k)$ şi avem $f'(x) = \frac{1}{k^2-x^2}$ de unde $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (-k; k)$.Aşadar f este strict crescătoare.Acum $\lim_{x\to k} f(x) = +\infty$ şi $\lim_{x\to -k} = -\infty$.Din toate acestea f este bijectivă.
Pentru a fi morfism este necesar $f(x * y) = f(x) + f(y)$ pentru orice $x, y \in G$.Se verifică prin calcule şi concluzia rezultă.

4.a)Avem că $p \cdot x = \underbrace{x+x+...+x}_{p} = \underbrace{1\cdot x+..+1\cdot x}_{p} = \underbrace{(1+...1)}_{p}\cdot x = 0\cdot x = 0$.

b)Din comutativite este valabil binomul lui Newton $(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} a^k b^{p-k}\binom{p}{k}$.Cum $p \mid \binom{p}{k}$ pentru $k = \overline{1,..,p-1}$ şi $p\cdot x = 0$ pentru orice $x \in R$ rezultă $(a+b)^p = a^p + b^p$.

c) $A = I_3 + B$ unde $B = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{a} & \widehat{b} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{c} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$.Putem folosi relaţia de la $b)$ de unde $A^p = I_3 + B^p$.Se observă uşor că $B^3 = \mathcal{O}_3$ de unde $A^p = I_3$.

Back

#

8.1.20 Sibiu

1.Se observă uşor că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} f^2\left(\frac{k}{n}\right)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} f^2\left(\frac{k+1}{n}\right)}{n} = \int_0^1 f^2(x)\,dx$,acestea fiind sumele Rienmann.Vom demonstra că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)}{n} = 0$. Functia f este continuă şi este definită pe un compact deci conform Weierstrass îşi atinge marginile.Există aşadar M astfel încât $|f(x)| \leq M$.De asemenea conform teoremei lui Lagrange există $c_k \in \left(\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right)$ astfel încât $f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{f'(c_k)}{n}$.
Din acestea obţinem $\dfrac{\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right|}{n} \leq \dfrac{M\sum\limits_{k=0}^{n-1}|f'(c_k)|}{n^2}$.Să observăm că $\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}|f'(c_k)|}{n}$ este o sumă Rienmann asociată lui $|f'|$. Aşadar $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right|}{n} \leq \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{M\int_0^1 |f'(x)|\,dx}{n} = 0$. Rezultatul cerut de problemă este aşadar $3\int_0^1 f^2(x)\,dx$.

2.Din faptul că g este morfism avem că pentru $x,y \in G$ $(xy)^{2n} = x^{2n}y^{2n} \Leftrightarrow (xy)^n(xy)^n = x^{2n}y^{2n}$.Din faptul că f este morgism rezultă $x^ny^nx^ny^n = x^{2n}y^{2n}$ de unde $y^nx^n = x^ny^n$.Acum folosindune de faptul că f este surjectivă rezultă $(G,\cdot)$ grup comutativ.

3.a)Să presupunem că f admite primitive.Cum diferenţa a două funcţii care admit primitive este o funcţie care admite primitive avem că $-f+x$ admite primitive.Asadar $g(x) = \{ \begin{array}{c} \frac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 2008, x=0 \end{array}$ admite primitive.Acum funcţia $h(x) = \{ \begin{array}{c} \frac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 1, x=0 \end{array}$ admite primitive,fiind continuă de unde folosind acelaşi argument ca la început am obţine că $\begin{cases} 0, x \neq 0 \\ 2007, x = 0 \end{cases}$ admite primitive ceea ce este o contradicţie,această funţie neavând proprietatea lui Darboux.

(b).Fie F primitiva funcţiei f.Cum ea este neinjectivă există $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(x) = F(y)$.Aplicând teorema lui Rolle pe intervalul $[x; y]$ funcţiei F obţinem că există $c \in (x; y)$ cu $F'(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = 0$.

4.Fie p cel mai mic divizor prim al ordinului grupului.Conform teoremei lui Cayley există $x \in G$ cu $x^p = e$.Fie $H = \{x^i | i = 0, .., p-1\}$.Se verifică imediat că H este subgrup al lui G.Cum singurele subgrupuri ale lui G sunt cele improprii şi $|H| \geq 2$ rezultă $H = G$ şi problema este încheiată.

Back