Suceava
Teleorman
Vaslui
Vrancea

Concursuri interjudetene

Al. Myller, Iasi
Centre de excelenta, Suceava
Cezar Ivanescu, Targoviste
Constantin Nastasescu-et finala
Cristian Calude, Galati
Gheorghe Lazar, Sibiu
Gheorghe Mihoc, Slobozia
Grigore Moisil, Cluj Napoca
Modus Vivendi, Valcea
Nicolae Paun
Traian Lalescu, Deva
Unirea, Focsani
Papiu Ilarian, Tg-Mures.
#

4.1.20 Suceava

1. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $a, b \in G$, $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^n b^{n+1} = b^n a^n$,$b^n a^{n+1} = a^n b^n$.Arătaţi că $a = b = e$,unde e este elementul neutru al grupului G.

2. Să se demonstreze că,pentru orice număr $n \in \mathbb{N}^*$,există o infinitate de grupuri care au exact 2^n subgrupuri.

3. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\sin 2x}\,dx$.

4. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi monotonă.Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n} + x_n\right) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Back

#

4.1.21 Teleorman

1. Fie $a \in \mathbb{R}^*$.Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admit primitive astfel încât $f(0) = 1$ şi există o primtivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a lui f care verifică relaţia $f(x) = aF(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Fie G mulţimea matricelor de forma $A(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & \sqrt{1-x^2} & 0 \\ x & 0 & 1 \end{pmatrix}$,$x \in (-1;1)$.
   Să se arate că:
   (a)$(G,\cdot)$ este grup abelian.
   (b)$(G,\cdot) \cong (\mathbb{R},+)$.

3. Arătaţi că intervalul $[-1;1]$ este parte stabilă faţa de operaţia:
$$x \circ y = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

4. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+\sin(\pi x)}{1+2\sin(\pi x)}\,dx$.

Back

#

4.1.22 Vaslui

1. Să se determine $f : (0,1) \to (0,1)$ continuă şi $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$,care admite pe F ca primitvă şi $f(1-x)F(x) = x,\ \forall x \in (0;1)$.

2. Fie $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} \hat{1} & \widehat{2a} \\ \widehat{3a} & \hat{1} \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{Z}_6 \right\}$.
   (a) Să se arate că $(M,\cdot)$ este grup.

(b)Să se arate că $(M,\cdot) \cong (\mathbb{Z}_6,+)$.

(c)Să se determine automorfismele grupului $(M,\cdot)$.

3. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+x^2+1}\,dx$.

4. Fie G un grup şi H un grup al său, $card(G-H) \geq 2$,cu proprietatea că orice două elemente distincte din $G-H$ nu comută între ele.Să se arate că:

(a) $a^2 = e,\ \forall a \in G-H$;

(b)H este comutativ;

(c)Să se dea un exemplu.

Back

#

4.1.23 Vrancea

1. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = xy - 2008x - 2008y + 2008 \cdot 2009$

(a)Să se arate că $x \circ x \geq 2008$

(b)Să se calculeze valoarea numărului c,unde $c = (-3000) \circ (-2999) \circ \ldots \circ (-1) \circ 0 \ldots \circ 3000$

(c) Să se determine părţile stabile finite ale lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea compoziţie $\circ$

2. Fie mulţimea $M = (a, \infty)$ şi legea $x * y = xy - ax - ay$.Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel ca $(M, *)$ să aibă structură de grup.

3. Să se arate că funcţia $f; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{2}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ admite primitive.

4. Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int \frac{x^2 - x}{e^x + x^2 + x + 1}\,dx \quad ,x \in \mathbb{R}$.

b) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x-1)x(x+1)(x+2)+a}\,dx \quad ,x > \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad ,a \in \mathbb{R}$.

Back

#

4.2.1 Concursul "Al. Myller", Iaşi

1. Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ $a_n = \displaystyle\int_1^n \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$.Calculaţi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n2^n a_n$.

2. Determinaţi numerele $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ şi $a \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul $X^n + aX - 1$ are un divizor de forma $X^2 + \alpha X + \beta$ cu $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

3. Determinaţi funţiile strict crescătoare $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ pentru care $\left|\int_0^1 f(x)\, e^{nx}\ dx\right|\le 2008$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

4. Fie A un inel finit în care numărul elementelor inversabile este egal cu numărul elementelor nilpotente.Să se arate că numărul elementelor inelului este o putere a lui 2.

Back

#

4.2.2 Concursul centrelor de excelenţă din Suceava

1. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$ unde p este un număr prim mai mare decât 5.Să se arate că ,pentru orice $\alpha\in\mathbb{Z}_p$, ecuaţia $x_1+(x_2)^2+...+(x_{p-1})^{p-1}=\alpha$, în necunoscutele $x_1,...,x_{p-1}$,admite o soluţie $(a_1,...,a_{p-1})$ cu proprietatea că $a_i\notin\{\widehat{0},\widehat{1}\}$, $\forall i\in\{1,...,p-1\}$.

2. Arătaţi că dacă $x,y\in A$, unde $(A,+,\cdot)$ este un inel, şi $x^r+y^r=(x+y)^r$ pentru orice $r\in\{2,3,5\}$,atunci $x^n+y^n=(x+y)^n, \forall n\in 2\mathbb{N}+1$.

3. a)Folosind eventual inegalitatea $tg\ \alpha\ge\alpha$,valabilă pentru orice $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, să se demonstreze $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\,dx\ge\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(\sin x)\,dx$

   b)Să se demonstreze inegalitatea $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(\sin x)\,dx\ge\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\,dx+\sqrt{2}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}-1$ unde funcţia $\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$ este prelungită prin continuitate în $x=0$.

4. Calculaţi $\int_a^b\frac{e^{\frac{x}{a}}-e^{\frac{b}{x}}}{\sqrt{x}\sqrt{ab+x^2}}\,dx$,unde $0<a<b$.

Back

#

4.2.3 Concursul "Cezar Ivănescu", Târgovişte

1. a)Fie G un grup finit şi A o submulţime a lui G astfel încât $card(A)>\frac{1}{2}card(G)$.Demonstraţi că pentru orice $g\in G$ există $a_1,a_2\in A$ astfel încât $g=a_1a_2$.

   b)Fie K un corp finit.Demonstraţi că pentru orice $x\in K$,există $u,v\in K$ astfel încât $x=u^2+v^2$.

2. Fie $a>1$.Calculaţi integrala $I(a)=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{\arctan x}{x}\,dx$

3. Se consideră o funcţie derivabilă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ cu $f(0) = 0$ şi cu proprietatea că $0 \le f'(t) \le 1$, $\forall t \in [0;1]$.Demonstraţi că $\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)^2 \ge \int_0^1 f^3(t)\,dt$.

Back

#

4.2.4 Concursul "Constantin Năstăsescu", etapa finală

1. Se consideră $n \in \mathbb{N}, n \ge 3$ şi funcţiile $f_i : [a,b] \to [c,\infty)$, $i \in \{1,2,..,n\}$, $c > 0$,continue pe intervalul $[a,b]$.Să se arate că,pentru orice $\sigma \in S_n$ avem inegalitatea:

$$\left(\int_a^b f_1(x)\,dx\right)\left(\int_a^b f_2(x)\,dx\right)\ \ldots\ \left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$$
$$\le \left(\int_a^b \frac{f_1^2(x)}{f_{\sigma(1)}(x)}\,dx\right)\ldots\left(\int_a^b \frac{f_n^2(x)}{f_{\sigma(n)}(x)}\,dx\right).$$

2. .Se consideră o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$ şi un polinom nenul $f \in \mathbb{Q}[X]$, pentru care $f(A) = O_n$.Notăm $I(A) = \{u(A) | u \in \mathbb{Q}[X]\}$.
a)Să se arate că polinomul f are numai rădăcini simple în $\mathbb{Q}$ dacă şi numai dacă ecuaţia $X^n = O_n$ are numai soluţia $X = O_n$ în $I(A)$.
b)Să se arate că polinomul f este ireductibil peste $\mathbb{Q}[X]$ dacă şi numai dacă $(I(A), +, \cdot)$ este corp.

3. Se consideră funcţia $f : [0;1] \to \mathbb{R}$,definită prin $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $\forall x \in (0;1]$ şi $f(0) = 1$.
a)Să se arate că funţia f este continuă pe intervalul $[0,1]$.
b)Ştiind că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{\pi^2}{6}$,să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

4. Se consideră un inel comutativ $(A, +, \cdot)$ cu proprietatea că în grupul aditiv $(A, +)$ ordinul lui 1 (elementul neutru la înmulţire) este numărul prim p.Notăm $M = \{x \in A | x^p = x\}$.Să se arate că dacă mulţimea M este finită,atunci numărul său de elemente este o putere a lui p.

Back

#

4.2.5 Concursul "Cristian Calude", Galaţi

1. a)Notăm $V(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ x_1 & x_2 & ... & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & ... & x_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & ... & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$,unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ fixat şi $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}$ arbitrare.Să se demonstreze că

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j).$$

b)Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_{n-1}X + a_n$, $a_0 \neq 0$,$n \in \mathbb{N}^*$, $a_0 + a_1 + ... + a_n \neq 0$.Notăm $x_1 < x_2 < ... < x_n$ rădăcinile polinomului f.Dacă $x_i \in \mathbb{R}$ pentru orice $i \in \{1; 2; ...; n\}$ atunci

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_i - 1)f'(x_i)} = -\frac{1}{a_0 + a_1 + ... + a_n}.$$

2. a)Să se arate că pentru orice $x > 2$ există şi este unic $y \in (1; +\infty)$ astfel încât

$$y^x - 1 = (y + 1)^{\frac{1}{x}}.$$

b)Considerăm funcţia $\varphi : (2; +\infty) \rightarrow (1; +\infty)$, $\varphi(x) = y_x$ unde y_x este soluţia ecuaţiei $y^x - 1 = (y + 1)^{\frac{1}{x}}$.Să se cerceteze dacă:
i)φ este continuă,derivabilă pe $(2; +\infty)$;
ii)există funcţii $f : (2; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ care admit primitive şi $f \circ f = \varphi$.

3. Fie S_n mulţimea permutărilor de grad n ,$n \geq 3$.Să se arate că nu există o mulţime H a lui S_n ,cu cel puţin $\frac{n!}{2} + 1$ elemente,astfel încât $\sigma \cdot \varphi = \varphi \cdot \sigma$, $\forall \sigma, \varphi \in H$.

Back

#

4.2.6 Concursul "Gheorghe Lazăr", Sibiu

1. Pentru $p > 0$ notăm cu $\mathcal{F}_p$ mulţimea tuturor funcţiilor $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$,integrabile pe intervalul $[0,1]$,având proprietatea $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^{p-1}}$ pentru orice $x > 0$, şi cu $\mathcal{S}_p$ mulţimea tuturor şirurilor $(a_n)_{n\geq 1}$,având proprietăţile $a_1 > 0$ şi $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^{p-1}}, n \geq 1$.
   a)Arătaţi că $\mathcal{F}_p \neq \varnothing, \forall p > 0$.
   b)Arătaţi că există o funcţie $g : (0;\infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietatea :
   $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{a_n}{a_1}\right) + f\left(\frac{a_n}{a_2}\right) + ... + f\left(\frac{a_n}{a_n}\right)\right] = g(p)\int_0^1 f(x)\,dx$,$\forall p > 0, \forall f \in \mathcal{F}_p$, $\forall (a_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{S}_p$.

2. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_n = \int_0^1 \frac{1 + x + x^2 + ... + x^p}{\alpha + x^n}\,dx$, $\alpha > 0$,$p \in \mathbb{N}^*$, $n = 1, 2, ...$Calculaţi:
   i) $\lim_{n\to\infty} a_n$
   ii) $\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{p+1}\right) - a_n\right]$ pentru $\alpha \in (0;1)$.

3. Pe o mulţime nevidă M este definită o lege de compoziţie multiplicativă,asociativă şi cu $a^2 = a$ pentru orice $a \in M$.Să se arate că proprietatea $(P) ab = ba$ pentru orice $a, b \in M$ este echivalentă cu fiecare din implicaţiile următoare:
   i)dacă $ba = aba$ atunci $ab = ba$.
   ii)dacă $a = aba$ atunci $a = ab$.
   iii)dacă $b = ab$ atunci $b = aba$.

4. Fie un grup aditiv $(G, +)$ având un automorfism $f : G \to G$ care îndeplineşte condiţia $\forall x \in G$,$f^{-1}(x) = -f(x)$.Arătaţi că:
   a) $(f \circ f)(x) = -x, \forall x \in G$;
   b) grupul este comutativ;
   c) Dacă p este prim şi $(\mathbb{Z}_p, +)$ are proprietatea din enunţ atunci $p = 4k + 1$.

Back

#

4.2.7 Concursul "Gheorghe Mihoc", Slobozia

1. În inelul $\mathbb{Z}_n$,$n \geq 2$,considerăm $\widehat{a}, \widehat{b} \in \mathbb{Z}_n$ şi mulţimile $A = \{\widehat{x} \in \mathbb{Z}_n | \widehat{a} \cdot \widehat{x} = \widehat{0}\}$ şi $A = \{\widehat{x} \in \mathbb{Z}_n | \widehat{a} \cdot \widehat{x} = \widehat{b}\}$.Fie d cel mai mare divizor comun al numerelor a şi n.
   (a)Determinaţi mulţimea A în cazul $n = 100$,$a = 5$.
   (b)Dacă d divide b arătaţi că $B \neq \varnothing$.
   (c)Dacă d divide b,arătaţi că A şi B au acelaşi număr de elemente.

2. .Notăm $I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$,unde $n \in \mathbb{N}$.Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{I_{k+1}}{k}$.

3. Fie L,K două corpuri şi $f, g : L \to K$ două funcţii astfel încât:
   i)$f(x+y) = g(x) + g(y)$,pentru orice $x, y \in L$.
   ii)$f(x \cdot y) = g(x) \cdot g(y)$,pentru orice $x, y \in L$.
   iii)$\forall y \in K,\ \exists x \in L$ astfel încât $f(x) = y$ sau $g(x) = y$.
   Să se arate că L şi K sunt corpuri izomorfe.

Back

#

4.2.8 Concursul "Grigore Moisil", Cluj Napoca

1. Să se determine funţiile derivabile $f : \mathbb{R} \to (-\infty, 1)$ cu proprietatea $f(1) = -1$ şi $f(x+y) = f(x) + f(y) - f(x)f(y)$.

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea $\int_0^1 (1-x^n) f(x) \, dx = 0$.Să se arate că $\int_0^1 f^2(x) \, dx \geq 2(n+1) \left(\int_0^1 f(x) \, dx \right)^2$.

3. Fie $f : [0;\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă,convexă cu $f(0) = 0$.
   a)Să se arate că $\int_0^x f(t) \, dt \leq \frac{x^2}{2} f'(x),\ \forall x \in [0;\infty)$
   b)Să se determine toate funţiile pentru care avem egalitate.

4. Fie $P = X^n + a_1 X^{n-1} + ... + a_n$ un polinom cu coeficienţi întregi de grad $n \geq 1$.Să se arate că mulţimea numerelor prime care divid cel puţin unul din numerele $P(1), P(2), ...$ este infinită.

Back

#

4.2.9 Concursul "Mathematica Modus Vivendi", Vâlcea

1. Să se calculeze $\int \frac{1}{x^4+2008x^2+1}\,dx$,$x \in (0;\infty)$.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Fie $x_0\in\mathbb{R}$ şi $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ şirul definit prin $x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2}f(x_n)$.Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent şi să se calculeze limita sa.

3. Fie $(G,\cdot)$ un grup abelian finit cu n elemente $(n\geq 2)$, m cel mai mare divizor al lui n ,$n\neq m$,iar p un număr prim.
Dacă cel puţin m elemente din G au ordinul p,atunci toate elementele din $G\setminus\{1\}$ au ordinul p.

4. Fie A un inel şi $a\in A$.Dacă există $p,q\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea $a^p=a^q$ atunci $1-a+a^{1+|p-q|}\in U(A)$.

Back

#

4.2.10 Concursul "Nicolae Păun"

1. Se consideră un grup finit $(G,\cdot)$, $a \in G$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi mulţimile $A_n(a) = \{x \in G|\ x^n = a\}$.

   a) Dacă G este grup comutativ, să se arate că $A_n(a) = \varnothing$ sau $|A_n(a) = A_n(e)|$,unde e este elementul neutru al grupului G.(Am notat prin $|X|$ numărul de elemente ale mulţimii X)

   b)Să se dea exemplu de un grup necomutativ pentru care există un element a al său şi un număr $n \in \mathbb{N}^*$,astfel încât $|A_n(a)| > |A_n(e)|$.

2. Se consideră un şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu $a_n > 0$,$\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admite primitive.

   a)Să se arate că dacă $f(x + a_n) \geq f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$,atunci funcţia f este montonă şi continuă.

   b) Să se arate că dacă $f(x+2a_n)-2f(x+a_n)+f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$,atunci funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

3. .Să se construiască o funcţie $f : [0;1] \to \mathbb{R}$,care admite primitive,este mărginită,dar nu îşi atinge marginile pe intervalul $[0;1]$.

4. Se consideră $(G,\cdot)$ şi H un sugrup al grupului G cu proprietatea că există $a_1, a_2, .., a_n \in G - H$ astfel încât $G = H \cup (a_1H) \cup ... \cup (a_nH)$,unde $aH = \{ah|\ h \in H\}$.

   a) Să se arate că,dacă $(aH) \cap (bH) \neq \varnothing$,atunci $(aH) = (bH)$.

   b)Să se arate că există $k \in \mathbb{N}^*$,astfel încât $x^k \in H, \forall x \in G$

   c)Să se arate că,dacă G este divizibil ,atunci pentru orice subgrup H al său, pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi pentru orice elemente $a_1, a_2, ..., a_n \in G - H$ avem $G \neq H \cup (a_1H) \cup ... \cup (a_nH)$. (Spunem că G este divizibil dacă $\forall a \in G$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\exists x \in G$, astfel încât $x^p = a$).

Back

#

4.2.11 Concursul "Traian Lalescu", Deva

1. i. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel şi $a,b \in A$.Arătaţi că $(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$.

   ii. Presupunem că inelul A este ordonat,adică este dotat cu o relaţie de ordine $(\leq)$ în raport cu care elementele din A sunt comparabile şi avem îndeplinite condiţiile :

$$a,b,c \in A\ ,\ a \leq b\ \Rightarrow a+c \leq b+c$$

$$a,b,c \in A\ ,\ a \leq b\ ,\ 0 \leq c\ \Rightarrow ac \leq bc$$

   Arătaţi că $0 \leq x^2$ pentru orice $x \in A$.

   iii. Arătaţi că $\mathbb{Z}_n$ nu este inel ordonat pentru $n \geq 2$.

2. Fie S mulţimea tuturor şirurilor de numere reale.Cu M_0 notăm submulţimea lui S formată din şirurile convergente la 0.Pe S definim operaţia :

$$(x_n) * (y_n) := (x_0y_n + x_1y_{n-1} + ... + x_ny_0)$$

   i)Arătaţi că; $\left(\frac{1}{n!}\right) * \left(\frac{1}{n!}\right) \in M_0$

   ii)Verificaţi dacă M_0 este parte stabilă a lui S în raport cu operaţia $*$.

3. Fie $f : [0;\infty) \to (0;\infty)$ o funcţie continuă şi crescătoare.Arătaţi că $f(0)\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 f^2(x)\,dx$

4. Fie $f,g : [0;\infty) \to [0;\infty)$ două funcţii cu proprietăţile :

   1. $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \infty$

   2. g este crescătoare

   3.Există $M > 0$ astfel încât : $\displaystyle\int_0^t f(x)g(x)\,dx \leq Mt$ pentru orice $t \geq 0$. Arătaţi că $g \equiv 0$.

Back

#

4.2.12 Concursul "Unirea", Focşani

1. Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian de ordin n şi m un număr natural relativ prinm cu n.
Să se arate că aplicaţia $f : G \to G, \quad f(x) = x^m$ este un automorfism al grupului G.

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit de ordin n,astfel încât oricare ar fi două subgrupuri H şi K ale sale,avem $H \subseteq K$ sau $K \subseteq H$.Să se arate că
a) G este grup abelian;
b)G are cel puţin un element de ordin n;
c)există p un număr prim şi m natural astfel încât $n = p^m$.

3. .Să se determine funcţiile derivabile $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât:
$F'(x) = \dfrac{1}{5 + |e^{2x} - 4|}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

4. Fie $f : [0, 1] \to [0, \infty)$ o funcţie monotonă.
a)Să se arate că $2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) f\left(x + \frac{1}{2}\right) dx \leq \left(\int_0^1 f(x)\, dx\right)^2$
b)Se consideră numerele reale $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_{2n-1}$.Folosind,eventual,

inegalitatea precedentă,arătaţi că:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j x_{j+n} \leq \left(\frac{x_0 + x_1 + .. + x_{2n-1}}{2n}\right)^2 .$$

[Back](#)

#

4.2.13 Concursul "Papiu Ilarian", Târgu Mureş

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie nenulă cu proprietatea că $f(1) = 0$ şi

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

şi a, b, l numere reale cu $a < b$.Să se arate că:

a)Există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel ca $x_n \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

b)Există un şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel ca $f(a_n) = f(a), \forall n \in \mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

2. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă cu proprietatea:

$$\text{(P):} \lim_{x\to\infty} (x^2 f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x)) = 1$$

Să se arate că:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} xf'(x) = 0$

c)Pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ există funcţii $f_\alpha : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietatea (P) pentru care $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 f''(x) = \alpha$.

3. Să se arate că pentru orice $a, b, c \in \mathbb{C}$ şi pentru orice matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ are loc relaţia:

$$\det(aAB + bBA + cI_2) = \det(bAB + aBA + cI_2)$$

4. Un automobil parcurge drumul între oraşele A şi B cu viteza medie de $100km/h$ în timpul de T ore.Să se arate că:

a)Dacă T este număr natural atunci există un interval de timp de o oră $[t, t+1]$, $t \in [0, T-1]$ în care automobilul a parcurs exact $100km$.

b)Dacă T nu este număr natural atunci există o modalitate de a parcurge drumul astfel ca în orice interval de o oră $[t, t+1]$ automobilul să parcurgă mai mult de $100km$.

Back