Bihor
Braila
Brasov
Bucuresti
Buzau
Caras-Severin
Cluj
Constanta
Covasna
Dolj
Galati
Gorj
Hunedoara
Mures
Neamt
Olt
Salaj
Satu Mare
Sibiu
#

4.1.1 Bihor

1. Calculaţi $\int x^n e^x \, dx$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Fie mulţimea $G = (1, \infty)$ şi legea de compoziţie $x * y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2}$
(a)Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian.
(b)Să determine numerele m şi n astfel încât funcţia $f : (0, \infty) \to (1, \infty)$, $f(x) = \sqrt{mx + n}$ să fie un izomorfism între $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ şi $(G, *)$.

3. Să se determine primitivele funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{x^5 + 10x^4 + 44x^3 + 104x^2 + 134x + 76}{(x^2 + 4x + 6)^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

4. Determinaţi limita şirului
$$a_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{7} \sqrt[n]{\left(n + \frac{1}{7}\right)\left(n + \frac{2}{7}\right) \dots \left(n + \frac{n}{7}\right)}.$$

Back

#

4.1.2 Brăila

1. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a^2 + b^2 \neq 0 \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$.Să se arate că:

   (a) $(G, \cdot)$ este grup abelian.

   (b)Grupurile $(G, \cdot)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ sunt izomorfe.

2. Să se calculeze $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x - \sin x - 1}{e^{\sin x} + \cos x} dx, \ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

3. (a)Arătaţi că $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$: $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.

   (b)Se consideră funcţia $f : \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{\cos x}{x}$ şi F o primitivă a sa. Să se arate că $F\left(\frac{e}{3}\right) + \ln 3 < F\left(\frac{e}{2}\right) + \frac{13}{8}$ unde e este numărul lui Euler.

4. Fie legea de compoziţie pe $\mathbb{R}$, $x \circ y = xy - ax - 2ay + 4a, \ a \in \mathbb{R}$.Aflaţi a astfel încât $(1; \infty)$ să fie parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea "$\circ$".

Back

#

4.1.3 Braşov

1. Se consideră grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

   a)Arătaţi că dacă cel mai mare divizor comun dintre a şi n este $(a,n) = d$ atunci $< \widehat{a} >=< \widehat{d} >$,unde $< \widehat{x} >$ este subgrupul ciclic generat de $\widehat{x} \in \mathbb{Z}_n$.

   b)Arătaţi că $< \widehat{a} >= \mathbb{Z}_n$ dacă şi numai dacă $(a,n) = 1$.

   c)Determinatţi numărul subgrupurilor lui $(\mathbb{Z}_{2008}, +)$.

2. a)Fie $G = (-1,1)$ şi legea $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$.Arătaţi că $(G,*)$ este un grup comutativ şi că $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ este izmorf cu $(G,*)$ printr-un izomorfism de forma $f(x) = \dfrac{mx+n}{1+x}$ cu m şi n convenabil alese.

   b)Fie $H = \left\{ M(a) = \dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}} \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-a^2} \end{pmatrix} \middle| a \in (-1;1) \right\}$.Arătaţi că $(H, \cdot)$ este grup abelian.

   c)Calculaţi $M\left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot M\left(\dfrac{1}{3}\right) \dots \cdot M\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$.

3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$,$a < b$ şi funcţiile continue $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile :

$$f(a+b-x) = f(x), \qquad g(a+b-x) = -g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

   Să se arate că $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{c^{g(x)}+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,dx$ unde $c > 1$ fixat.

4. a) Calculaţi : $\displaystyle\int \frac{2+\sin x^2}{1+\cos x^2} \cdot x e^{\frac{x^2}{2}}\,dx$.

   b)Să se determine funcţia $f : (0, \sqrt{\pi}) \to \mathbb{R}$ care admite primitive pe $(0, \sqrt{\pi})$ şi care verifică relaţia $\dfrac{1}{x} f(x) + F(x) = \dfrac{2+\sin x^2}{1+\cos x^2}$,pentru $\forall x \in (0, \sqrt{\pi})$,unde F este primitiva lui f iar $f\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Back

#

4.1.4 Bucureşti

1. Fie $n \in \mathbf{N}, n \geq 2, (S_n, \circ)$ grupul permutărilor de grad n şi $A_n = \{\sigma \in S_n | \varepsilon(\sigma) = 1\}$.
a)Să se arate că: $\forall x \in S_n, \forall \sigma \in A_n, \ x\sigma x^{-1} \in A_n$.
b)Să se studieze existenţa unui subgrup $(H, \circ)$ al grupului $(S_n, \circ)$ care să verifice următoarele condiţii:
$$i) H \setminus A_n \neq \emptyset; ii) |H \cap A_n| \neq |H \setminus A_n|$$
(am notat cu $|X|$ cardinalul mulţimii X).

2. Pentru un grup $(G, \cdot)$ considerăm mulţimea $Z(G) = \{x \in G | gx = xg, \forall g \in G\}$ şi elementul său neutru notat 1.
a)Să se arate că $Z(G)$ este subgrup al lui G.
b)Daţi două exemple de grupuri $(G_1, \cdot),(G_2, \cdot)$ pentru care $Z(G_1) = \{1\}, Z(G_2) = G_2$.
c)Să se arate că dacă p este un număr prim şi $(G, \cdot)$ este un grup finit cu $|G| = p^m, m \in \mathbf{N}^*$,atunci $Z(G) \neq \{1\}$.

3. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \ \sin x \cos x \sin 2x \cos 2x \, dx$.

4. Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(n^4 \cos t\right) dt$.

Back

#

4.1.5 Buzău

1. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin^8 x + \cos^2 x}{1 + \sin^8 x + \cos^8 x} \, dx$.

2. Fie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcţie derivabilă şi F o primitivă a sa astfel încât $F(x) = f^2(x) + f(x)$.Să se arate că f este strict crescătoare.

3. Fie $G = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| = 1\}$ şi fie $a \in G$ dat.Să se arate că operaţia $x * y = \dfrac{xy}{a}$ determină o structură de grup pe G.

Back

#

4.1.6 Caraş-Severin

1. Dacă $(G,+)$ este un grup finit ,să se determine morfismele $f:(\mathbb{Q},+)\to(G,+)$.

2. Fie G un grup cu 10 elemente în care există $a,b\in G\setminus\{e\}$ distincte astfel încât $a^2=b^2=e$.Să se arate că G nu este grup abelian.

3. Să se determine :
a) $\int \frac{x}{1+x+e^x}\,dx$,$x\in(0;\infty)$;
b) $\int \frac{1}{x^3+x^7}\,dx$,$x\in(0;\infty)$

4. Să se arate că nu există funcţii strict crescătoare $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care admit o primitivă F pentru care $F(1-x)\cdot F(x)=F(x^2)$,$\forall x\in\mathbb{R}$.

Back

#

4.1.7 Cluj

1. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte operaţia : $x*y=\left(\sqrt[2007]{x}+\sqrt[2007]{y}-\sqrt[2007]{m}\right)^{2007}$,$m\in\mathbb{R}$.
a) $(\mathbb{R},*)$ grup abelian;
b) $(\mathbb{R},*)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{R},+)$

2. În $\mathbb{Z}_6$ rezolvaţi sistemul $\begin{cases}\hat{4}x+\hat{3}y=\hat{2}\\ \hat{3}+\hat{m}y=\hat{1}\end{cases}$

3. a)Pentru $a\in\mathbb{R}$ dat,determinaţi primitivele funţiei :$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=(x^3+4a^2x^2+3ax+2a)\cdot e^{ax^2}$

b)Să se calculeze integrala $\int(2x^{10}+3x^5)\sqrt[5]{x^5+3}\,dx$

c)Să se determine funţia continuă $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ care satisface identitatea: $\int_0^1(2x^2-3f(x))f(x)\,dx=\frac{1}{15}$.

Back

#

4.1.8 Constanţa

1. Să se calculeze $\int \frac{x^2(\ln x - 1)}{x^4 - \ln^4 x}\, dx,\ x \in (1; +\infty).$

2. (a)Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie care admite o primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $F(x)\sin x \leq f(x)\cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.Să se arate că $f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

   (b) Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admit o primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu propietatea $f(x)\cos x \geq F(x)\sin x + \cos 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

3. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit,iar $(\mathbb{Q}, +)$ grupul aditiv al numerelor raţionale.Dacă $f : (\mathbb{Q}, +) \to (G, \cdot)$ este un morfism de grupuri atunci $f(x) = e,\ \forall x \in \mathbb{R}$,unde e este elementul neutru al grupului $(G, \cdot)$.

Back

#

4.1.9 Covasna

1. Fie $M = (0; \infty)$ şi $\varphi : M \to M \times M$, $\varphi(x, y) = x * y$,o lege de compoziţie definită pe M, care satisface simultan condiţiile:

$$i)(x+1) * x = 1, \ \forall x \in M$$

$$ii)(xy) * z = x(y * z), \ \forall x, y, z \in M$$

(a)Să se calculeze $\sqrt{2} * (\sqrt{2} + 1)$

(b) Să se studieze asociativitatea legii φ.

(c) Are legea φ element neutru pe mulţimea M?

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu n elemente.Să se deomonstreze că orice morfism $f : G \to G, \quad f(x) = x^m$,unde $(m, n) = 1$ este izmorfism.

3. Să se calculeze:
(a) $I = \int \frac{\sin x}{a \sin x + b \cos x} dx$ şi $J = \int \frac{\cos x}{a \sin x + b \cos x} dx$ pentru $a, b \in \mathbf{R}$ şi $x \in D$,unde $D = \{x \in \mathbf{R} | a \sin x + b \cos x \neq 0\}$.

(b) $\int \frac{(x-1)(e^x - 2x)}{e^{2x} + x^2} dx, \ x \in \mathbf{R}$.

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funţie continuă şi F o primitivă a sa.Ştiind că $f(x)F(2-x) = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$
(a) Să se demonstreze că $F(x)F(2-x) = c, \ \forall x \in \mathbb{R}$,unde c este o constantă strict pozitivă.
(b) Să se determine toate funcţiile care satisfac condiţiile din enunţ.

Back

#

4.1.10 Dolj

1. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $a, b \in G$ care verifică relaţiile: $a \cdot b = b \cdot a^2, b \cdot a = a \cdot b^2$. Să se arate că $a \cdot b^3 = b \cdot a^3 = e$.

2. Calculaţi:

   a) $\int \frac{\sin x}{2e^x + \cos x + \sin x} dx, x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

   b) $\int \left(x + 1 - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx$.

3. Fie $f : (-\infty; 0] \to \mathbb{R}$ şi F o primitivă a lui f cu proprietatea $F(x) - f(x) = \arcsin(e^x), \forall x \in (-\infty; 0]$. Determinaţi funcţia f ştiind că $F(0) = \frac{\pi}{2}$.

Back

#

4.1.11 Galaţi

1. Fie p un număr prim, $p \geq 3$, iar $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p - \{\widehat{0}\}$. Pe $\mathbb{Z}_p$ considerăm înmulţirea claselor de resturi.

   (a) Să se arate că dacă $\widehat{a} \in \mathbb{Z}_p^*$, atunci $\widehat{a}$ este simetrizabil.

   (b) Să se calculeze $\widehat{1}^{-1} + \widehat{2}^{-1} + \ldots + \widehat{p-1}^{-1}$ şi $\widehat{1} \cdot \widehat{2} + \widehat{2} \cdot \widehat{3} + \ldots + \widehat{p-2} \cdot \widehat{p-1}$.

2. Să se determine un subgrup cu exact 2008 elemente al grupului multiplicativ al matricilor pătratice inversabile de ordinul al doilea.

3. Determinaţi funcţia $f : \mathbb{R} \to (0; \infty)$ care verifică proprietăţile: f este funcţie continuă, $f(0) = 1$ şi $f(x) = (1 + x^2)\left[1 + \int_0^x \frac{f(t)}{1 + t^2} dt\right], \ \forall x \in \mathbb{R}$.

4. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admit primitive şi $f(x + y) = f(x) + f(y) + 3xy(x + y)$.

Back

#

4.1.12 Gorj

1. Se consideră mulţimea $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\}$, unde $i^2 = -1$.
   Să se arate că:
   (a) $(\mathbb{Z}[i], +)$ este grup abelian,unde "$+$" este adunarea numerelor complexe.
   (b) $(\mathbb{Z}[i], +)$ nu este izomorf cu grupul aditiv al numerelor intregi $(\mathbb{Z}, +)$.

2. (a) Se consideră un grup G şi H şi K două subgrupuri al lui G astfel încât $G = H \cup K$.Atunci $G = H$ sau $G = K$.
   (b)Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $a \in G$ astfel încât $(H, \cdot)$ este subgrup al lui G , unde $H = G - \{a, a^2\}$.Atunci $(G, \cdot)$ este izomorf cu $(\mathbb{Z}_3, +)$.

3. Să se calculeze
   a) $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} \right)$
   b) $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + ... + \frac{1}{4n-1} \right)$.

4. Fie şirul $I_n = \int_1^e \ln^n x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}^*$.
   (a)Să se arate că $(I_n)_{n \geq 1}$ este monton şi mărginit.
   (b)Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} I_n$.

Back

#

4.1.13 Hunedoara

1. Să se calculeze:

   (i) $\displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{3\sin x + 4\cos x}\,dx$

   (ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\,dx.$

2. Fie $U_6 = \{z \in \mathbb{C} | z^6 = 1\}$.

   (i) Să se arate că $(U_6, \cdot)$ este grup abelian unde " $\cdot$ " este înmulţirea în $\mathbb{C}$.

   (ii) Să se afle subgrupurile cu trei elemente ale grupurilor $(U_6, \cdot)$ şi $(\mathbb{Z}_6, +)$.

3. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie.Fie,de asemenea, funţiile sinus şi cosinus hiperbolic,definite prin:

   $sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ şi $ch : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

   Să se arate că f admite primitive dacă şi numai dacă funcţiile $g_1 : I \to \mathbb{R}$, $g_1 = f(x) \cdot sh(x)$ şi $g_2 : I \to \mathbb{R}$, $g_1 = f(x) \cdot ch(x)$ admit primitve.

4. Fie $(G, +)$ un grup abelian şi $f : G \to \mathbb{R}$ o funţie astfel încât $f(x + y) + f(x - y) = 2(f(x) + f(y)),\ \ \forall x, y \in G$.

   (i) Să se demonstreze că $f(0) = 0$ şi $f(x) = f(-x),\ \ \forall x \in G$

   (ii)Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1, x_2, .., x_n \in G$ există $a_1, a_2, ..., a_n \in \{-1, 1\}$ astfel încât $f(a_1x_1 + ... + a_nx_n) \leq f(x_1) + ... + f(x_n)$.

Back

#

4.1.14 Mureş

1. a)Să se calculeze: $\int \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+x}}}}_{n \text{ radicali}} dx$, $x \in (0,1)$.

   b)Să se calculeze $\int \frac{a^{2x}}{(a+a^x)^{2008}} dx$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Fie $k \in \mathbb{R}^*$ un număr fixat şi $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ o funcţie bijectivă.Definim legea de compoziţie $x * y = f(k \cdot f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y))$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$, unde f^{-1} este inversa lui f.

   a)Să se demonstreze că $(\mathbb{R}^*, *)$ este grup abelian.

   b)Dacă $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$ să se determine valorile n, k pentru care legea "*" se asociază cu înmulţirea numerelor reale.

3. Să se determine funcţia $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, care admite primitive şi $2F(x) = x\left(f(x) - \frac{x}{2}\right)$, $\forall x > 0$ respectiv $f(1) = 2008$, unde $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei.

4. Să se arate că dacă un grup $(G, \cdot)$ are proprietatea că există $a \in G$ astfel încât $ax^3 = xa^3$, $\forall x \in G$ atunci $(G, \cdot)$ este abelian.

Back

#

4.1.15 Neamţ

1. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $H \subset G$, $\varnothing \neq H \neq G$ o submulţime cu proprietatea $\forall x \in H$ şi $\forall y \in G - H$ avem $xy \in G - H$.Demonstraţi că H este subgrup al lui G.

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $x, y \in G$ cu $x^2 = e$.Să se arate că;
   a)Dacă $xyx = y^3$ atunci $y^8 = e$.
   b)Dacă $xy^3x^{-1} = y$ atunci $y^8 = e$.

3. Să se determine primitivele următoarelor funţii:
   a) $f(x) = \dfrac{\text{ctg } x}{1 + \sin^3 x}, x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$
   b) $f(x) = \dfrac{\cos^2 x + \sin 2x - x}{\sin^2 x + e^x + x}, x > 0$

4. Fie funcţia $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ derivabilă,cu derivata continuă,astfel încât $f(a) = 0$ şi $f'(x) \geq \sqrt{1 + f^2(x)}, \forall x \in [a; b]$.
   Să se arate că $f(b) + \sqrt{1 + f^2(b)} \geq e^{b-a}$.

Back

#

4.1.16 Olt

1. Fie $a > 0$ şi $f : \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)a | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică.
   (a) Să se arate că mulţimea $\mathcal{T}$ este subgrup al lui $(\mathbb{R}, +)$
   (b)Să se demonstreze că $(\mathcal{T}, +)$ este grup ciclic.

2. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \ln x$.Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ ecuaţia $f(t) = x$ are o soluţie unică $t = \varphi(x)$.Să se arate apoi că $\varphi : \mathbb{R} \to (0; \infty), \quad x \to \varphi(x)$ este derivabilă şi apoi să se calculeze $I = \displaystyle\int_1^{1+e} \frac{dx}{1 + \varphi(x)}$.

3. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $(a_n)_{n \geq 1}$ un şir cu limita λ.Să se arate că:
   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(a_n x)\, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\int_0^\lambda f(t)\, dt & \lambda \neq 0 \\ f(0) & \lambda = 0 \end{cases}.$$

4. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ şi $(b_n)_{n \geq 1}$ două şiruri de numere reale astfel încât $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător şi nemărginit.Să se arate că există o funcţie derivabilă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ să aibă loc relaţia :
   $$\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\ dx = b_n.$$

Back

#

4.1.17 Sălaj

1. Fie G un grup astfel încât $x^{-1}=x, \forall x \in G$ şi $a \in G \setminus \{e\}$.Arătaţi că oricare ar fi $f: G \to G$,funcţia $g: G \to G$,$g(x)=f(x)\cdot f(ax)$,$\forall x \in G$ nu este injectivă.

2. Fie $H=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} | a,b \in \mathbb{R}, a^2+b^2>0\right\}$.

   (a)Arătaţi că $(H,\cdot)$ este grup;

   (b)Arătaţi că grupurile $(H,\cdot)$ şi $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ sunt izomorfe;

   (c)Dacă $A \in H$,calculaţi A^n.

3. Să se calculeze $\int \frac{x^{2n}+x^{2n-2}}{(x^2+x-1)^{2n}}dx, , x \in (1;\infty), n \in \mathbb{N}$.

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$f(x)=x^2-x+1$,$g(x)=\begin{cases} f\left(\sin\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$.Să se determine a astfel încât funcţia g să admită primitive.

Back

#

4.1.18 Satu Mare

1. (a) Calculaţi: $e^{e^{x^2}+x+\ln x}dx,\ x\in(0;\infty)$.

   (b)Să se calculeze : $\int \frac{1}{\cos x(1-\sin 2x)(2-\sin 2x)}dx,\ x \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

2. Arătaţi că $I=0$ unde I este integrala:
   $I=\int_0^{2a}\frac{(a-x)+(a-x)^3+...+(a-x)^{2007}}{1+(a-x)^2+...+(a-x)^{2008}}dx$,unde $a\in\mathbb{R}^*$ este dat.

3. Fie $G=(-k;k)$,unde $k>0$ şi operaţia $x*y=\frac{k^2(x+y)}{k^2+xy},\ \forall x,y\in G$.

   (a)Arătaţi că $(G,*)$ este grup abelian;

   (b)Fie $f:\mathbb{R}\to G$,$f(x)=\frac{1}{2k}\ln\frac{x+k}{x-k}$.Arătaţi că f este izomorfism între grupurile $(\mathbb{R};+)$ şi $(G;*)$.

4. Fie $(R;+;\cdot)$ un inel şi $p\in\mathbb{N}$,$p>1$ astfel încât $\underbrace{1+1+...+1}_{p}=0$.Arătaţi că :

(a) $\forall x \in R, \quad p \cdot x = 0$ unde $p \cdot x = \underbrace{x + x + ... + x}_{p}$

(b)Dacă p este prim şi $a, b \in R$ cu $a \cdot b = b \cdot a$,atunci $(a+b)^p = a^p + b^p$.

(c) $A^p = I_p, \ \forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); \quad A = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{a} & \widehat{b} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{c} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$, p prim şi $p > 2$.

Back

#

4.1.19 Sibiu

1. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata nenulă.Calculaţi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f^2\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f^2\left(\frac{k+1}{n}\right) \right).$$

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup.Dacă există un număr natural nenul astfel încât funcţiile $f : G \to G, f(x) = x^n$ şi $g : G \to G, g(x) = x^{2n}$ sunt endomorfisme şi f este surjectivă,atunci grupul $(G, \cdot)$ este comutativ.

3. (a) Arătaţi că funcţia $f(x) = \begin{cases} x - \dfrac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R}* \\ 2008, x = 0 \end{cases}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.
(b)Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funţie care admite o primitivă neinjectivă.Demonstraţi că funţia f se anulează în cel puţin un punct.

4. Arataţi că, dacă $(G, \cdot)$ este un grup cu $|G| \geq 2$,ale cărui subgrupuri sunt cele improprii,atunci $(G, \cdot)$ este grup ciclic finit,având ordinul un număr prim.

Back