

Partea II – a - Enunturi

- 0 [LOCALA GIURGIU](#)
- 0 [LOCALA HUNEDOARA](#)
- 0 [LOCALA IASI](#)
- 0 [LOCALA MARAMURES](#)
- 0 [LOCALA OLT](#)
- 0 [LOCALA SATU MARE](#)
- 0 [LOCALA SIBIU](#)
- 0 [LOCALA SUCEAVA](#)
- 0 [LOCALA TELEORMAN](#)
- 0 [LOCALA VASLUI](#)
- 0 [LOCALA VRANCEA](#)
- 0 [JUDETEANA](#)
- 0 [NATIONALA](#)
- 0 [BARAJE SI SELECTII](#)

CLASA A XII-A

1. Se consideră grupul $(G, *)$, unde $G = (0, 1)$ și $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$. Să se rezolve ecuația $x * x * \dots * x = e^{2007}$ de n ori x , unde $n \in \mathbb{N}^*$ și e este elementul neutru al grupului G .

Rozica Dumitru, Giurgiu

2. Fie grupul $(G, \cdot)$ cu proprietatea că există morfismul $f: G \rightarrow G$ astfel încât $f(xy) = \{x, y\}$, $(\forall) x, y \in G$. Determinați grupul G .

Șerban Olteanu, Giurgiu

3. Determinați primitivele funcției $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{(x^{2008} + x - 1)\cos x + e^x + \sin x}{(x^{2007} + 1)(xe^x + x\sin x - x\cos x)}.$$

Paul Băiatu, Giurgiu

4. Calculați $I = \int_1^e x^{2005} \ln(1 + 9^x + 223^x + 2007^x) dx$.

Ionel Tudor, Giurgiu

[Back](#)

CLASA A XII-A

MATEMATICĂ – INFORMATICĂ

1. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $H \subseteq G$ o submulțime nevidă și finită. Să se arate că H este subgrup al lui G dacă și numai dacă pentru orice $x, y \in H \Rightarrow x \cdot y \in H$.

2. Să se calculeze:

a) $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 3x^2 + 1} dx, x \in (0, \infty);$

b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{1 + 2006^{2x}} dx.$

3. Fie $(A, +, \cdot)$ inel și $a, b \in A$ două elemente fixate astfel încât $(b - a)$ este inversabil în A . Să se construiască o structură de inel pe A care să aibă elementele neutre a și b .

4. a) Să se calculeze $\int_0^1 \left(\int_0^1 |x - y| dx \right) dy.$

b) Să se determine funcțiile $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ care verifică simultan relațiile:

i) $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|, (\forall) x, y \in [0, 1];$

ii) $\int_0^1 \left(\int_0^1 |f(x) - f(y)| dx \right) dy = \frac{1}{3}.$

[Back](#)

CLASA A XII-A

1. Fie $f_n: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} \sin^n \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $n \in \mathbf{N}^*$. Demonstrați că f_2 nu are primitive, însă f_3 are primitive pe $\mathbf{R}$.
2. Fie $(G, \cdot)$ un grup de ordin 101, iar $g: G \rightarrow G$, $f(x) = x^7$. Demonstrați că f este automorfism al grupului G .
3. Determinați o primitivă a funcției $f: (0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})$.
4. Fie $(M, \cdot)$ un monoid. Demonstrați că $Z(M) = \{a \in M \mid ax = xa, (\forall) x \in M\}$ este submonoid al lui M . Determinați $Z(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$ și $Z(S_n)$.

Subiect elaborat de **Cristian Lazăr**

[Back](#)

CLASA A XII-A

Florian Dumitrel, Slatina

2. Se consideră $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R}^*, b, c \in \mathbf{R} \right\}$. Să se arate că :

a) Mulțimea M împreună cu operația de înmulțire a matricelor formează o structură de grup.

b) M conține un subgrup izomorf cu grupul $(\mathbf{R}^*, \cdot)$.

3. Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție derivabilă, cu derivate continuă.

a) Să se determine primitivele funcției $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

$$g(x) = \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}, \quad (\forall) x \in \mathbf{R}.$$

b) Să se calculeze $\int \frac{\sin^{20} x \cdot (21 \cos x - \sin x)}{e^x} dx, \quad x \in \mathbf{R}.$

Gheorghe Gherasin, Sighetu-Marmației

4. Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție strict descrescătoare. Să se arate că nu există nici o funcție $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ care să aibă primitive pe $\mathbf{R}$ astfel încât $g \circ g = f$.

[Back](#)

CLASA A XII-A M1

1. Să se calculeze:

$$\int \frac{12x+17}{(x+2)(2x+3)(3x+4)(5+6x)+2007} dx, \quad x \in (0, \infty).$$

Marius Perianu, Slatina

2. Pentru fiecare număr natural $n \geq 1$ notăm cu σ_n suma punctelor de discontinuitate ale funcției

$$f_n: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbf{R}, \quad f_n(x) = \left[n \sin^2 x \right].$$

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n}{n}$.

Florian Dumitrel, Slatina

3. Arătați că funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{(x^4 - x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}}$$

admite primitive pe $(0, \infty)$ și calculați aceste primitive.

Gabriela Boeriu, Făgăraș, G. M. 3/2006

4. Fie $a, c \in \mathbf{R}$, $b \in \overline{\mathbf{R}}$, $G_{a,b} = (a, b)$ și legea de compoziție definită pe G astfel:

$$x * y \stackrel{\text{def}}{=} (x-a)(y-a)+c, \quad (\forall) x, y \in G_{a,b}.$$

Să se arate că:

- a) Legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă dacă și numai dacă $a = c$.

- b) $(G_{a,b}, *)$ este grup dacă și numai dacă $b = +\infty$.

Ovidiu Pop, Datu Mare, G. M. 6/2006

CLASA A XII-A

1. Fie $f_\alpha : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f_\alpha(x) = \frac{\arctg x}{x^2 + \alpha}$, $\alpha \in [0, \infty)$. Calculați:

a) $\int f_0(x) dx$ și $\int f_1(x) dx$.

b) $\int \frac{f_1(x)}{x^2} dx$

Traian Tămâian

2. Fie $I_n = \int \frac{1 - \frac{2^n}{(2n-1)!!} \cdot x^{2n}}{e^{x^2}} dx$, $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^*$ și $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)$.

a) Să se calculeze I_1 .

b) Să se arate că $I_{n+1} = I_n + \frac{2^n}{(2n-1)!!} \cdot x^{2n-1} \cdot e^{-x^2}$.

Gigel Buth

3. Fie $I \subset \mathbf{R}$, interval. Să se determine funcția $f : I \rightarrow \mathbf{R}$, derivabilă și nenulă pe I , știind că $\begin{vmatrix} f'(x) & f(x) \\ f(x) & F(x) \end{vmatrix} = 0$, $(\forall) x \in I$, unde $F : I \rightarrow \mathbf{R}$ este o primitivă a funcției f .

Ovidiu Pop

4. Fie grupul comutativ $(A, *)$. Să se arate că $(A, *, *)$ este inel dacă și numai dacă $\text{card } A = 1$.

Ovidiu Pop

[Back](#)

CLASA A XII-A

1. a) Demonstrați inegalitățile: $1 < \frac{1}{e^2(e-1)} \int_e^{e^2} \frac{x}{\ln x} dx < \frac{e}{2}$.

b) Cu o schimbare convenabilă de variabilă calculați $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + \sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx$.

2. Calculați:

a) $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+2} + x^{2n+1} - x^n + 1}{x^{2n+2} + 1} dx$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(I_n - 1)$.

3. Fie $l \in \mathbb{N}^*$, fixat și $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, unde $f(n) = \begin{cases} 1 \cdot \frac{n+1}{2}, & n \text{ impar} \\ -1 \cdot \frac{n}{2}, & n \text{ par} \end{cases}$.

a) Arătați că $(\text{Im } f, +)$ este subgrup al lui $(\mathbb{Z}, +)$.

b) Găsiți subgrupul dacă $2l \in \text{Im } f$.

Liana Agnola

4. a) Fie $n \in \mathbb{Z}$ un număr care nu este divizibil cu 7. Demonstrați că n^6 dă restul 1 la împărțirea cu 7.

b) Fie $A = \{n_1, n_2, \dots, n_{2311}\}$ o mulțime formată din numere prime, pentru care notăm $S = n_1^{60} + n_2^{60} + \dots + n_{2311}^{60}$. Arătați că, dacă 4620 divide S , atunci în A se găsesc cel puțin cinci numere prime consecutive.

Vasile Berghea

CLASA A XII-A

1. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 2^k}$.

Gheorghe Marchitan

2. Fie $0 < a < b$ și $\lambda \in \mathbf{R}$. Să se arate că $a + b - \lambda x \in [a, b]$, $(\forall) x \in [a, b]$ dacă și numai dacă $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a + b - \lambda x) dx$, $(\forall) f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continuă.

Dumitru Crăciun

3. Fie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ funcție continuă cu proprietatea $f(x) \cdot f(-x) = 1$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$.

Să se demonstreze că $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{1 + f(x)} dx \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Livia Balaci

100

4. Să se determine toate grupurile multiplicative $(G, \cdot) \subseteq \mathcal{M}_3(\mathbf{N})$ cu proprietatea că $A^3 = I_3$, $(\forall) A \in G$.

Cătălin Țigăeru

[Back](#)

CLASA A XII-A

a) Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Să se calculeze determinantul: $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

b) Fie mulțimea $M = \{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$. Să se arate că M este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu înmulțirea numerelor întregi.

2. Fie $G = (-1, 1)$ și operația $x \circ y = \frac{ax + by}{1 + xy}$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $(G, \circ)$ să fie grup.

3. Să se demonstreze că nu există funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care admit primitive $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ că proprietatea că $f(F(x)) = x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

Marius Burtea

4. Fie $I_n = \int_1^e \ln^n x \, dx$.

Să se determine o relație de recurență pentru I_n .

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

Probleme propuse și selectate de Mihai Ionescu

[Back](#)

CLASA A XII-A

1. Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$ și $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Considerăm mulțimea:

$$G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & ax & abx^2 + cx \\ 0 & 1 & 2bx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{R} \right\}.$$

Demonstrați că $(G, \cdot)$ este grup izomorf cu $(\mathbf{R}, +)$.

G.M. 11/2006, Marin Chirciu, Pitești

2. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{-1}^0 \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 2}{(x+2)^{n+1}} dx$.
3. Determinați funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ astfel încât $f(x)F(n-x) = e^x$, $n \in \mathbf{N}$ și $f\left(\frac{n}{2}\right) = e^{\frac{n}{4}}$, unde F este o primitivă a lui f .
4. Fie elementele x și y ale inelului $(A, +, \cdot)$ astfel încât $x+y=1$ și $x^{2005} = x^{2006}$. Să se demonstreze că $1-x^{2004}y \in A$ este element inversabil.

CLASA A XII-A

1. Fie $I = \int \frac{1}{(x^3 + 1)^n} dx$, $x > -1$, $n \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Să se calculeze I_1 .
 - b) Să se determine o relație de recurență pentru calculul lui I_n .
2. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție bijectivă cu $f(1) = 0$. Definim legea de compoziție

$$*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x * y = f[f^{-1}(x) + f^{-1}(y) - 1], \quad (\forall) x, y \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că $(\mathbb{R}, *)$ este grup abelian.

3. Să se determine toate funcțiile $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ derivabile și bijective, știind că admit o primitivă $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât

$$F(x) + F(f(x)) = 0, \quad (\forall) x \in (0, \infty).$$

4. a) Fie $(G_1, \cdot)$ și $(G_2, \cdot)$ două grupuri cu 2006 și respectiv 2007 elemente. Să se arate că singurul morfism de la G_1 la G_2 este funcția $f: G_1 \rightarrow G_2$, $f(x) = e_2$, unde e_2 este elementul neutru al grupului $(G_2, \cdot)$.
- b) (Generalizare) Fie $(G_1, \cdot)$ și $(G_2, \cdot)$ două grupuri cu m și respectiv n elemente, m și n numere naturale prime între ele. Să se arate că singurul morfism de la G_1 la G_2 este funcția $f: G_1 \rightarrow G_2$, $f(x) = e_2$, unde e_2 este elementul neutru al grupului $(G_2, \cdot)$.

Probleme propuse și selectate de Cornelii Huzum, Focșani

CLASA A XII-A

1. Pentru un grup $(G, *)$ și A, B submulțimi nevide ale lui G , notăm $A * B = \{a * b \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$.

a) Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, atunci grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ se poate scrie sub forma $\mathbb{Z}_n = A + B$, unde A și B sunt două submulțimi nevide ale lui $\mathbb{Z}_n$ cu $A \neq \mathbb{Z}_n$, $B \neq \mathbb{Z}_n$ și $|A \cap B| = 1$.

b) Dacă $(G, *)$ este grup finit și A, B sunt două submulțimi ale lui G , iar $a \in G \setminus (A * B)$, să se arate că funcția $f: A \rightarrow G \setminus B$ dată de $f(x) = x^{-1} * a$ este bine definită și injectivă. Deduceți că dacă $|A| + |B| > |G|$, atunci $G = A * B$. (Cu $|M|$ s-a notat numărul elementelor mulțimii finite M)

2. Se consideră funcțiile continue $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$. Să se arate că dacă f este crescătoare, atunci:

$$\int_0^t f(x)g(x) dx \cdot \int_0^1 g(x) dx \leq \int_0^t g(x) dx \cdot \int_0^1 f(x)g(x) dx,$$

pentru orice $t \in [0, 1]$.

3. Determinați toate funcțiile continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică simultan condițiile:

a) există $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$;

b) $f(x) = \int_{x+1}^{x+2} f(t) dt$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

4. Fie K un corp cu 2^n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$ și polinomul $f = X^4 + X + 1$. Să se arate că:

a) dacă n este par, atunci f este reductibil în $K[X]$;

b) dacă n este impar, atunci f este ireductibil în $K[X]$;

CLASA A XII-A

1. a) Dacă $u, v: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ sunt două funcții continue, demonstrați inegalitatea Cauchy

$$\left(\int_0^1 u(x)v(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_0^1 (u(x))^2 dx \right) \left(\int_0^1 (v(x))^2 dx \right).$$

- b) Fie C mulțimea tuturor funcțiilor derivabile $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, cu derivata f' continuă pe $[0, 1]$ și $f(0) = 0, f(1) = 1$. Determinați:

$$\min_{f \in C} \int_0^1 (1+x^2)^{\frac{1}{2}} (f'(x))^2 dx$$

și toate funcțiile $f \in C$ pentru care este atins acest minimum.

2. Fie $f: [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ o funcție continuă pe $[0, 1]$.

- a) Arătați că pentru fiecare număr întreg $n \geq 1$ există o unică diviziune, $0 = a_0 < a_1 < \dots, a_n = 1$, a intervalului $[0, 1]$, astfel încât

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx = \frac{1}{n} \int_0^1 f(x) dx, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (*)$$

- b) Pentru fiecare număr întreg $n \geq 1$, fie

$$\overline{a_n} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n},$$

unde $0 = a_0 < a_1 < \dots, a_n = 1$ este diviziunea unică cu proprietatea (*). Arătați că șirul $(\overline{a_n})_{n \geq 1}$ este convergent și calculați limita sa.

3. Fie $n \in \mathbf{N}^*$. Determinați toate inecele $(A, +, \cdot)$ cu proprietatea: $x^{2^n+1} = 1$, oricare ar fi $x \in A \setminus \{0\}$.

4. Fie S_n grupul permutărilor mulțimii $\{1, \dots, n\}$, $n \geq 3$ și G un subgrup al său generat de $n-2$ transpoziții. Arătați că pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$ mulțimea $\{\sigma(i) : \sigma \in G\}$ are cel mult $n-1$ elemente.

BARAJE SI SELECTII

Primul baraj de selecție pentru OBM

13 aprilie 2007

1. Se consideră numerele întregi a și b . Să se arate că există și sunt unice numerele întregi x, y astfel încât:

$$(x + 2y - a)^2 + (2x - y - b)^2 \leq 1.$$

2. Un trapez $ABCD$ are bazele AB și CD , iar cercurile cu diametrele AD și BC se intersectează în punctele M și N . Să se arate că punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD aparține dreptei MN .
3. Un carton de formă dreptunghiulară se împarte în suprafețe poligonale astfel: la fiecare pas una din suprafețele existente se taie printr-o linie dreaptă, obținându-se două noi suprafețe. Care este numărul minim de tăieturi necesare pentru ca, printre suprafețele obținute, să existe cel puțin 251 poligoane cu 11 laturi?

Prima probă de selecție pentru OIM și OBM

13 aprilie 2007

1. Considerăm un punct P în interiorul unui poligon convex $A_1A_2\dots A_{2n}$, $n \geq 2$, nesituat pe niciuna din diagonalele acestuia. Arătați că există o latură a poligonului care nu este intersectată de niciuna dintre dreptele $PA_1, PA_2, \dots, PA_{2n}$.
2. Fie $\mathcal{C}(O_1)$ și $\mathcal{C}(O_2)$ două cercuri exterioare. Punctele A, B, C aparțin cercului $\mathcal{C}(O_1)$, iar punctele D, E, F aparțin cercului $\mathcal{C}(O_2)$, astfel încât AD și BE sunt tangente exterioare la cercuri, iar CF este o tangentă comună cu punctele C, F aflate în interiorul patrulaterului $ABED$. Dreptele CO_1 și FO_2 intersectează dreptele AB , respectiv DE în M , respectiv N . Arătați că dreapta MN trece prin mijlocul segmentului CF .
3. Fie $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$. Să se arate că f este constantă.
4. Determinați valoarea maximă a produsului $(1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n)$, $n \geq 2$, dacă $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ și $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$.

Al doilea baraj de selecție pentru OBMj

14 aprilie 2007

1. Să se determine numerele naturale $n \geq 4$ cu proprietatea că $\lceil \sqrt{n} \rceil + 1$ divide $n - 1$ și $\lceil \sqrt{n} \rceil - 1$ divide $n + 1$.
2. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Notăm M, N punctele de tangență ale cercului înscris în triunghiul ABD cu laturile AB, AD respectiv și P, Q punctele de tangență ale cercului înscris în triunghiul CBD cu laturile CD, CB respectiv. Dacă cercurile înscrise în triunghiurile ABD și CBD sunt tangente, să se arate că:
 - a) Patrulaterul $ABCD$ este circumscriptibil.
 - b) Patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.
 - c) Cercurile înscrise în triunghiurile ABC și ADC sunt tangente.

3. Fie ABC un triunghi isoscel în A . Pentru orice punct P interior triunghiului considerăm cercul de centru A și rază AP și notăm M și N intersecțiile laturilor AB , respectiv AC cu cercul. Să se determine poziția punctului P pentru care $MN + BP + CP$ este minimă.

A doua probă de selecție pentru OIM și OBM

14 aprilie 2007

1. Fie $f = X^n + a_{n-1}X_{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ un polinom cu coeficienți întregi de grad $n \geq 3$, cu $a_k + a_{n-k}$ număr par pentru orice $k=1, 2, \dots, n-1$ și a_0 număr par. Dacă $f = gh$, unde g și h sunt polinoame cu coeficienți întregi cu gradul lui g cel mult gradul lui h și toți coeficienții lui h sunt impari, arătați că f are o rădăcină întreagă.
2. Fie ABC un triunghi. Cercul înscris în triunghi este tangent la AB în E , iar cercul exînscris relativ la BC este tangent la dreapta AB în F . Fie D punctul de pe latura BC pentru care cercurile înscrise în triunghiurile ABD și ACD au. Dreptele DE și DB intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ADF în X și Y . Arătați că $XY \parallel AB$ dacă și numai dacă $AB = AC$.
3. Determinați mulțimile A de numere naturale nenule, cu $|A| \geq 2$ astfel încât pentru orice numere distincte $x, y \in A$ avem $\frac{x+y}{(x, y)} \in A$.
4. Fie S mulțimea n -uplurilor $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ cu $x_i \in \{0, 1\}$, $i=1, 2, \dots, n$, unde $n \geq 3$. Notăm cu $M(n)$ cel mai mic întreg cu proprietatea că orice submulțime a lui S cu cel puțin $M(n)$ elemente conține trei n -uplurilor $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_n)$, $(z_1, \dots, z_n)$ astfel încât

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2 = \sum_{i=1}^n (z_i - x_i)^2.$$

a) Arătați că $M(n) \leq \left\lceil \frac{2^{n+1}}{n} \right\rceil + 1$.

b) Calculați efectiv $M(3)$ și $M(4)$.