PARTEA I – 2007 - ENUNTURI

#CNL BRATIANU PITESTI

CLASA A XII-A

1. Pe mulţimea $\boldsymbol{N}^*$ se definesc legile de compoziţie $x\mathrm{T}y = c.m.m.d.c.(x,\ y)$ şi $x \perp y = c.m.m.m.c.(x,\ y),\ (\forall)x,\ y \in \boldsymbol{N}^*$. Să se demonstreze că:

$$x\mathrm{T}(y \perp z) = (x\mathrm{T}y) \perp (x\mathrm{T}z) \text{ şi } x \perp (y\mathrm{T}z) = (x \perp y)\mathrm{T}(x \perp z),\ (\forall)x,\ y \in \boldsymbol{N}^*.$$

2. Fie $(G,\ \cdot)$ un grup finit cu un număr impar de elemente. Să se determine toate morfismele de grupuri $f : S_n \to G$, unde S_n este grupul permutărilor de gradul $n,\ n \in \boldsymbol{N}^*$.

Marin Ionescu, Piteşti

3. Demonstraţi că funcţia $f:[0,\ \infty) \to \boldsymbol{R},\ f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \min\left(x^2,\ |\ln x|\right), & x > 0 \end{cases}$ admite primitive şi calculaţi $\int f(x)\,dx$.

4. Fie $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ şi $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^*$, astfel încât f nu are proprietatea lui Darboux şi g admite primitive. Să se demonstreze că fg nu admite primitive.

Back

CLASA A XII-A

1. Determinați primitivele funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{x(x-1)(x-2)}{\left(x^2-2x\right)^4+4}$.

Marin Chirciu, Pitești

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=(x+a)^{2n}-x^{2n}$, unde $a>0$ și $n\in\mathbf{N}^*$ sunt numere fixate.

a) Să se verifice că $f\left(\dfrac{a}{2}-x\right)+f\left(-\dfrac{a}{2}+x\right)=0,\ (\forall)x\in\mathbf{R}$.

b) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbf{R}$.

c) Să se arate că f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

d) Să se rezolve ecuația $f(x)=0,\ x\in\mathbf{R}$.

e) Să se calculeze $f''(x),\ x\in\mathbf{R}$.

f) Să se determine intervalele de convexitate și concavitate ale funcției f.

g) Să se determine primitivele funcției f.

h) Să se calculeze $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$.

3. Fie $(G,\ \cdot)$ un grup multiplicativ și $x,\ y\in G$. Dacă $x^2=e$ și $xyx=y^3$, atunci $y^8=e$, unde e este elementul neutru al grupului.

Marcel Chiriță, București

4. Fie $a,\ b,\ c\in\mathbf{R}$ și $a^2+b^2+c^2\neq 0$. Considerăm mulțimea:

$$G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1 & ax & abx^2+cx\\ 0 & 1 & 2bx\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\ \middle|\ x\in\mathbf{R}\right\}.$$

Demonstrați că $(G,\ \cdot)$ este un grup izomorf cu $(\mathbf{R},\ +)$.

Marin Chirciu, Pitești, G. M. 11/2006

Subiecte selectate de Ștefan Alexe și Octavian Stroe, Pitești

Back

#LOCALA ARGES

CLASA A XII-A

MATEMATICĂ – INFORMATICĂ

1. Fie $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ o funcție cu proprietățile:

a) f este injectivă;

b) $f(1) \neq 0$;

c) $f(-2x+3) = -f(3x-2), \quad (\forall) x \in \boldsymbol{R} \setminus \{1\}$.

Să se arate că f nu admite primitive.

Marian Ionescu, Pitești

2. Calculați:

$$I = \int \frac{x^8}{x^{12}+1}\, dx, \quad x \in (0, \infty).$$

Ștefan Tudosie, Câmpulung – Muscel

3. **a)** Există funcții $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^*$ care să admită primitive astfel încât pentru o primitivă F oarecare să existe egalitatea $F(x)F(1-x) = F(x^2), \quad (\forall) x \in \boldsymbol{R}$?

b) Să se determine funcțiile $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ care admit primitive, cu proprietatea că dacă F este o primitivă a sa pe $\boldsymbol{R}$, atunci:

$$F(x+y) = F(x) + f(y), \quad (\forall) x, \ y \in \boldsymbol{R}.$$

4. **a)** Pe mulțimea M se definește legea de compoziția „$*$" cu proprietățile:

1) $x * x = x, \quad (\forall) x \in M$;

2) $(x * y) * z = (y * z) * x, \quad (\forall) x, \ y, \ z \in M$.

Să se arate că legea este asociativă și comutativă.

b) Fie $(G, *)$ un grup și $f : G \to G$ o funcție injectivă astfel încât pentru orice $x, \ y \in G$ are loc relația $f\left(x^2 * f(y)\right) = x^{-1} * f(x * y)$. Demonstrați că grupul este comutativ.

Ilie Dinulescu, Pitești

Back

#LOCALA BACAU

CLASA A XII-A

1. Fie $I \subset \mathbf{R}$ un interval. Arătați că nu există funcții $f : I \to \mathbf{R}$, care admit primitive şi care îndeplinesc proprietatea $(f \circ f)(x) = -x,\ (\forall) x \in I$.

2. Găsiți funcțiile $f : (0,\ 2) \to \mathbf{R}$ astfel încât $f(1) = 1,\ f(x) \cdot F(2-x) = x$, $(\forall) x \in (0,\ 2)$.

3. Fie $(G,\ \cdot)$ un grup comutativ cu n elemente.

a) Arătați că produsul celor n elemente ale lui G este egal cu produsul tuturor elementelor de ordin cel mult 2.

b) Aplicând rezultatul de la punctul a) grupului multiplicativ $(\mathbf{Z}_p^*,\ \cdot)$ cu p prim, arătați că: $p \mid [(p-1)!+1]$.

c) Arătați că dacă $p \in \mathbf{N} \setminus \{0,\ 1\}$ satisface relația de la punctul b), atunci p este prim.

4. Pe $\mathbf{R}$ se defineşte legea „$*$": $x * y = xy + x + y + \int_{-1}^{1} x^{11} e^{x^2+1}\, dx$, $(\forall) x,\ y \in \mathbf{R}$.

Fie $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x = x^{-1}\}$, $B = \left\{ x \in \mathbf{R} \;\middle|\; \underbrace{x * x * \ldots * x}_{\text{de 12 ori } x} = 4095 \right\}$, unde x^{-1} este simetricul lui x în raport cu legea de compoziție dată. Să se afle:

a) $\sum_{a \in A} a^2$;

b) $\sum_{b \in B} |b|$.

Back

#LOCALA BIHOR

CLASA A XII–A

1. **a)** Fie $G=(0,\ \infty)\setminus\{1\}$. Arătați că următoarea corespondență: $(x,\ y)\to x*y=x^{\ln y}$ este o lege de compoziție pe G şi că $(G,\ *)$ este grup comutativ.

b) Fie $(G,\ \cdot)$ astfel încât $(x\cdot y)^2=x^2\cdot y^2$, $(\forall)x,\ y\in G$. Arătați că $(G,\ \cdot)$ este grup abelian.

2. Pentru orice $n\in \boldsymbol{N}$ se consideră mulțimea $H_n=\left\{\dfrac{k}{n!}\ |\ k\in \boldsymbol{Z}\right\}\subset \boldsymbol{Q}$. Arătați că:

a) dacă $x,\ y\in H_n$, atunci $x+y\in H_n$;

b) dacă $x\in H_n$ atunci $-x\in H_n$;

c) dacă $n<p\in N^*$ atunci $H_n\subset H_p$;

d) $(\forall)r$ rațional, există $n\in \boldsymbol{N}$ astfel încât $r\in H_n$;

e) dacă $(G,\ +)$ este subgrup al grupului $(\boldsymbol{Q},\ +)$ şi $\dfrac{1}{n!}\in G$, $n\in \boldsymbol{N}^*$ atunci $H_n\subset G$.

3. Considerăm funcțiile $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2+6x+9}$ şi $g:(0,\ 1)\to \boldsymbol{R}$, $g(x)=\dfrac{f(x)+x-1}{\sqrt{-4x^4+8x^3-8x^2+4x}}$. Să se calculeze: $\int f(x)dx$ şi $\int g(x)dx$.

Ioan Cuc, Oradea

4. Se consideră $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n\,dx$, $(\forall)x\in \boldsymbol{N}$. Se cer:

a) Calculați I_0 şi I_1;

b) Demonstrați că $I_n=\dfrac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}$, $(\forall)n\in \boldsymbol{N},\ n\geq 2$;

c) Demonstrați că $1\leq\dfrac{I_n}{I_{n+1}}\leq\dfrac{n+1}{n}$, $(\forall)n\in \boldsymbol{N}^*$;

d) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{I_n}{I_{n+1}}$.

Back

#LOCALA BOTOSANI

CLASA A XII-A

1. Determinați funcțiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ care admit primitive pe $\mathbf{R}$ și care satisfac condiția $f(x+y)=f(x)+f(y),\ (\forall)x,\ y\in\mathbf{R}$.

2. Se consideră șirul: $a_n(p)=1-\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2p+1}-\frac{1}{3p+1}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{np+1}$, $n\in\mathbf{N}^*$, $p\in(0,\ \infty)$.

a) Arătați că: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(p)=\int_0^1\frac{1}{1+x^p}dx$.

b) Arătați că: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$.

3. Arătați că nici un grup nu poate fi reuniunea a două subgrupuri proprii ale sale.

4. Fie $(G,\ \cdot)$ un grup cu proprietatea că există un endomorfism $f:G\to G$ astfel încât $f\left(x^n\cdot y^{n+1}\right)=x^{n+1}\cdot y^n,\ (\forall)x,\ y\in G$ și $n\in\mathbf{N}^*$, n fixat. Arătați că:

a) $x^{2n+1}=e,\ (\forall)x\in G$;

b) G este grup abelian.

Back

#LOCALA BRAILA

CLASA A XII-A

1. Pe mulţimea $M=(0,\ \infty)$ se defineşte o lege de compoziţie „$*$" astfel încât $x*\frac{1}{y}=y(x*y)$, $x*\frac{9}{y}=\frac{y}{3}(x*y)$ şi $(x*y)(x*81y)=\frac{(x+1)^2}{36xy}$, $(\forall)x,\ y\in M$.

   a) Să se studieze asociativitatea, comutativitatea şi existenţa elementului neutru pentru operaţia „$*$".

   b) Demonstraţi că nu există $x\in \boldsymbol{N}^*$ astfel încât $x*81\in \boldsymbol{N}^*$.

Gabriel Daniilescu

2. Determinaţi $a\in \boldsymbol{R}$ astfel încât funcţia $h:\boldsymbol{R}\to \boldsymbol{R}$,

$$h(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cos\frac{1}{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$$

să admită primitive pe $\boldsymbol{R}$.

Adela Dimov

3. Să se determine toate funcţiile $f:(a,\ b)\to \boldsymbol{R}$ continue, ce au proprietatea că, pentru orice primitivă F a lui f, funcţia $G:(a,\ b)\to \boldsymbol{R}$, $G(x)=|F(x)|$ este derivabilă pe $(a,\ b)$.

4. Să se afle funcţia $f:\boldsymbol{R}\to \boldsymbol{R}$ care admite primitive şi satisface relaţia: $f(x)=2007\cdot F(x)+\sin x$, $(\forall)x\in \boldsymbol{R}$, unde F este o primitivă a lui f.

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

Back

#LOCALA BRASOV

CLASA A XII-A

1. Fie $M=\left\{\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{a} & \hat{b}\\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c}\\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix} \middle| \hat{a},\ \hat{b},\ \hat{c}\in \mathbf{Z}_3\right\}$.

a) Arătați că M este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_3(\mathbf{Z}_3)$ în raport cu înmulțirea matricelor și că formează un grup abelian în raport cu operația indusă.

b) Determinați, în M, numărul soluțiilor ecuației $X^{2007}=I_3$.

c) Arătați că există $G_1,\ G_2,\ ...,\ G_{13}$ subgrupuri ale lui M astfel încât $G_1\cup G_2\cup ...\cup G_{13}=M$ și $G_i\cap G_j=\{I_3\}$ pentru orice $i,\ j\in\{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ 13\}$ și $i\neq j$.

Traian Duță

2. **a)** Arătați că dacă $(G,\ \cdot)$ este un subgrup cu n elemente ale lui $(\mathbf{C}^*,\ \cdot)$ atunci $G=U_n=\left\{z\in \mathbf{C}\ \middle|\ z^n=1\right\}$.

b) Determinați $a,\ b,\ c\in \mathbf{R}$ știind că mulțimea $\left\{x\in\mathbf{C}\ \middle|\ x^3+ax^2+bx+c=0\right\}$ formează un grup în raport cu înmulțirea numerelor complexe.

c) Fie polinomul $P=X^{2007}+a_1X^{2006}+...+a_{2005}X+a_{2006}\in \mathbf{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_{2007}$. Știind că mulțimea $\{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_{2007}\}$ formează un grup în raport cu înmulțirea numerelor complexe, determinați cea mai mare și cea mai mică valoare a lui a_1.

Cătălin Ciupală

3. Fie $m\in \mathbf{N}^*$ și $P\in \mathbf{R}[X]$ un polinom de grad m.

a) Arătați că există și sunt unice numerele reale $a_0,\ a_1,\ ...,\ a_m$ astfel încât

$$P=a_0+a_1(X+2)+a_2(X+2)^2+...+a_m(X+2)^m.$$

b) Calculați limita $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 \frac{P(x)}{(x+2)^n}\,dx$.

c) Calculați limita $\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 \frac{x^3+5x^2+7x+2}{(x+2)^n}\,dx$.

Ioana Maşca, Cătălin Ciupală

4. a) Calculați $\int_{-1}^{1} x^{2n}\operatorname{arctg}(e^x)\,dx$.

b) Dacă $f,\ g,\ h:[-a,\ a]\to \boldsymbol{R}$ sunt funcții continue astfel încât f este funcție pară, iar g și h sunt funcții impare, arătați că:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot \operatorname{arctg}\left(e^{g(x)}\right)dx = \int_{-a}^{a} f(x)\cdot \operatorname{arctg}\left(e^{h(x)}\right)dx.$$

c) Calculați $\int_{-1}^{1}(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2006})\operatorname{arctg}\left(e^{x+x^3+x^5+\ldots+x^{2007}}\right)dx$.

Traian Duță

Back

#LOCALA BUCURESTI

CLASA A XII-A

1. Fie funcția $f:(0,\ \infty)\to \boldsymbol{R},\ \ f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

a) Demonstrați că f este indefinit derivabilă și

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x t^n\cos\left(t+\frac{n\pi}{2}\right)dt,\quad (\forall)n\in \boldsymbol{N}^*,\ \ (\forall)x>0.$$

b) Demonstrați că $|f^n(x)|\le \dfrac{1}{n+1},\ \ (\forall)n\in \boldsymbol{N}^*,\ \ (\forall)x>0$.

2. Fie $f:[0,\ 1]\to \boldsymbol{R}$ o funcție continuă și, pentru $n\in \boldsymbol{N}^*$ funcțiile:

$$g_n:[0,\ 1]\to \boldsymbol{R},\ \ g_n(x)=\int_0^1 \min\{x,\ t^n\}f(t)\,dt.$$

a) Arătați că funcția g_1 este de două ori derivabilă pe intervalul $[0,\ 1]$ și $g_1''(x)=-f(x)$, $(\forall)x\in[0,\ 1]$.

b) Dați exemplu de funcție f pentru care g_2 nu este de două ori derivabilă în 0.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$, unde $x\in[0,\ 1]$.

Dorinel Anca, G. M.

3. Fie $(G,\ \cdot)$ un grup finit cu proprietatea: mulțimea ordinelor elementelor sale este formată din n numere consecutive, unde $n\in \boldsymbol{N},\ n\ge 2$.

a) Arătați că grupul este comutativ dacă și numai dacă $n=2$.

b) Arătați că dacă $n\ge 3$ atunci singurul element $a\in G$ care îndeplinește condiția: $ax=xa,\ \ (\forall)x\in G$ este elementul neutru.

Marian Andronache, București

4. Fie $n\in \boldsymbol{N},\ n\ge 6$ și $(A,\ +,\ \cdot)$ un inel comutativ cu n elemente, care nu este corp.

a) Demonstrați că funcția $u:A\to A,\ u(x)=0$ pentru $x\ne 0$ și $u(0)=1$ nu este polinomială.

b) Demonstrați că numărul P al funcțiilor polinomiale $f:A\to A$ verifică relația $n^2\le P\le n^{n-1}$.

Marian Andronache, București

Back

#LOCALA BUZAU

CLASA A XII-A

1. Fie funcția $f:[a, b] \to \boldsymbol{R}^*$ astfel încât $a \neq b$, $f(a)+f(b)=0$ și $g:\boldsymbol{R}^* \to \boldsymbol{R}$, $g(x)=x+x^{-1}$. Să se arate că $g \circ f$ nu are primitive.

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $H \subset G$ o submulțime nevidă, $H \neq G$. Să se arate că H este subgrup dacă și numai dacă $(\forall) x \in H$, $(\forall) y \in G \setminus H \Rightarrow xy \in G \setminus H$.

3. Se consideră funcția $f:[-1, 1] \to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\arcsin\sqrt{1-x^2}$. Să se determine primitivele funcției f pe $[-1, 1]$.

Back

#LOCALA CLUJ

CLASA A XII-A

1. a) Stabiliți condiția în care funcția

$$f:\left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)\to \mathbf{R},\quad f(x)=\left(a\,\mathrm{tg}^3 2x+b\,\mathrm{tg}^2 2x+c\,\mathrm{tg}\,2x+d\right)e^{3x}$$

admite o primitivă de forma $F(x)=\left(\alpha\,\mathrm{tg}^2 2x+\beta\,\mathrm{tg}\,2x+\gamma\right)e^{3x}$.

b) Determinați mulțimea primitivelor funcției

$$f:\left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)\to \mathbf{R},\quad f(x)=\left(4\,\mathrm{tg}^3 2x-5\,\mathrm{tg}^2 2x-8\,\mathrm{tg}\,2x-3\right)e^{3x}.$$

Simona Pop, Cluj-Napoca, Gheorghe Lobonț, Turda

2. Calculați:

a) $I=\displaystyle\int\frac{x^5+x}{x^8+1}\,dx,\ x\in(0,\ \infty)$.

b) $J=\displaystyle\int\frac{\sin 2x(\sin^4 x+\cos^4 x)}{\sin^8 x+\cos^8 x}\,dx,\ x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

I. Diaconu, Cluj-Napoca

3. Fie $(G,\ \cdot)$ un grup cu elementul neutru e și cu proprietatea: $x^2=e,\ (\forall)x\in G$.

a) Arătați că acest grup este comutativ.

b) Dacă H este subgrup în G și $a\in G\setminus H$ arătați că mulțimea $H'=H\cup aH$ este subgrup în G și $|H'|=2|H|$.

c) Dacă G are 2^n elemente, demonstrați că există în G subgrupurile $H_0,\ H_1,\ H_2,\ldots,\ H_n$ astfel încât $H_0\subset H_1\subset\ldots\subset H_n$ și $|H_k|=2^k,\ k=\overline{0,\ n}$.

d) Dacă G este finit arătați că există $n\in N$ astfel încât $|G|=2^n$.

V. Pop, Cluj-Napoca

Back

#LOCALA CONSTANTA

CLASA A XII-A M1

1. Calculați: $\int \frac{x^{6n+2}}{x^{8n+4}+1}\,dx,\ n \in \boldsymbol{N}$.

Gigel Buth, Satu Mare, **G. M. 4/2006**

2. Să se determine funcțiile $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, care admit primitive astfel încât

$$f(\operatorname{tg} x)+\sin x\cdot F(\operatorname{tg} x)=0,\ \text{pentru orice}\ \ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),$$

unde F este o primitivă a lui f.

Doru Constantin Caragea

3. Fie $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ o funcție continuă. Se presupune că există $F:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ primitivă a lui f, cu proprietățile:

a) $F(0)=1$;

b) $f\big((a,\ b)\big)\cap F\big((a,\ b)\big)\neq\varnothing,\ (\forall)a,\ b\in\boldsymbol{R},\ a<b$.

Arătați că $f(x)=e^x,\ (\forall)x\in\boldsymbol{R}$.

Gabriela Constantinescu

4. Fie $(G,\ \cdot)$ grup finit cu n elemente, cu proprietatea: $(\forall)a\in G$, ecuația $x^2=a$ are soluție în G.

a) Demonstrați că n este impar.

b) Pentru n impar oarecare, dați un exemplu de grup care verifică ipoteza problemei.

Back

#LOCALA DAMBOVITA

CLASA A XII-A

1. Funcția $f:(0,\ \infty)\to(0,\ \infty)$ admite o primitivă F cu

$$(x^2+1)F(x)=(x^4+1)f(x),\quad (\forall)\,x\in(0,\ \infty).$$

Determinați funcția *f*, știind că $f(1)=1$.

Călin Burdușel, Târgoviște

2. a) Demonstrați că elementele grupului $\left(\boldsymbol{Z}_{61}^{*},\ \cdot\right)$ sunt de forma $\left(\hat{2}\right)^{n}$, unde $n\in\{1,\ 2,\ \ldots,\ 59,\ 60\}$.

b) Demonstrați că grupurile $\left(\boldsymbol{Z}_{61}^{*},\ \cdot\right)$ și $\left(\boldsymbol{Z}_{6}\times\boldsymbol{Z}_{10},\ +\right)$ nu sunt izomorfe.

Călin Burdușel, Târgoviște

3. Fie $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ și $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=\begin{cases} f(x)\sin\dfrac{1}{x}, & \text{pentru } x\neq 0\\ 0, & \text{pentru } x=0\end{cases}$.

a) Demonstrați că dacă f este continuă, atunci g admite primitive.

b) Există funcții f care admit primitive astfel încât g să nu admită primitive?

4. a) Fie $f:\left(\boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{Z}_2,\ +\right)\to\left(S_3,\ \circ\right)$ morfism de grupuri. Arătați că, $(\forall)\,x\in\boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{Z}_2$, $f(x)$ este o transpoziție din S_3.

b) Câte morfisme de grup $f:\left(\boldsymbol{Z}_2\times\boldsymbol{Z}_2,\ +\right)\to\left(S_3,\ \circ\right)$ există?

Back
#LOCALA DOLJ

CLASA A XII-A

1. Fie G un subgrup cu cel puțin două elemente ale grupului $\left(\boldsymbol{R}_+^*, \cdot\right)$. Dacă $G \cap \left(b, \frac{1}{b}\right)$ este o mulțime finită, pentru orice $b \in \boldsymbol{R}$, $b > 1$, să se arate că $(G, \cdot)$ este izomorf cu grupul $(\boldsymbol{Z}, +)$.

2. Fie a, b două elemente ale unui grup cu proprietățile: $aba = ba^2b$, $a^3 = e$ şi $b^{2n-1} = e$, pentru orice număr natural nenul n. Să se arate că $b = e$.

3. Să se afle primitivele funcției $f(x) = x^n \operatorname{arctg} x$, $x \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

4. Fie $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dată prin $f(x) = \inf\limits_{x \le t \le x+1} (t^2 - 3t)$, $x \in \boldsymbol{R}$.

a) Să se arate că funcția f are primitive pe $\boldsymbol{R}$.

b) Să se determine primitivele lui f pe $\boldsymbol{R}$.

Back

#LOCALA GALATI

CLASA A XII-A

1. Fie a şi b două numere reale pozitive, $a < b$ şi $f:[a, b] \to \boldsymbol{R}$ o funcţie continuă. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} a_n$, unde $a_n = \int_a^b x^n f(x)\,dx$.

Constanţa Gusta

2. Să se arate că funcţia $f:(0, 1) \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \dfrac{\arcsin x - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{(x+\arcsin x)(x-\arcsin x)}$ este definită pe intervalul $(0, 1)$ şi admite primitive. Să se determine o primitivă a sa.

Constantin Ursu

3. Fie M o mulţime finită de funcţii $f:\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ cu proprietăţile:

   i) M este monoid în raport cu operaţia de compunere a funcţiilor;

   ii) Funcţiile parte întreagă şi parte fracţionară aparţin mulţimii M.

   a) Care este numărul minim de elemente pe care îl poate avea M?

   b) Să se dea un exemplu de astfel de monoid cu exact 2007 elemente.

Marian Baroni

4. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{Z}_3)$ astfel încât $G = \{I, A, A^2\}$ este un grup finit cu trei elemente în raport cu înmulţirea matricelor. Determinaţi toate grupurile G de acest fel.

Back