SOLUȚII ETAPA LOCALA, JUDETEANA, NATIONALA SI INTERJUDETENE

1. ARAD
2. BIHOR
3. BRASOV
4. BRAILA
5. BUCURESTI1
6. BUZAU
7. CALARASI
8. CONSTANTA
9. COVASNA
10. DOLJ
11. GALATI
12. GORJ
13. HUNEDOARA
14. IASI
15. MARAMURES
16. SALAJ
17. SATU MARE
18. TELEORMAN
19. TIMIS
20. VASLUI
21. VRANCEA
22. BUCURESTI (Judet)
23. NATIONALA
24. GH DUMITRESCU, CRAIOVA
25. NICOLAE COCULESCU, SLATINA I
26. NICOLAE COCULESCU, SLATINA II
27. UNIREA, FOCSANI
28. TREPTE IN MATEMATICA, CALIMANESTI
29. MODUS VIVENDI, VALCEA
30. CEZAR IVANESCU, TARGOVISTE
31. GHEORGHE LAZAR, SIBIU
32. SFERA, BAILESTI
33. TRAIAN LALESCU, DEVA
34. ALEXANDRU MYLLER, IASI
35. GH TITEICA, SEVERIN, INDIVIDUAL
36. GH TITEICA, SEVERIN, ECHIPE

*** back

5.1.1 Arad

1. i) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}<\frac{1}{abc} \Leftrightarrow c(a+b)<ab+1 \Leftrightarrow c(a+b)<\frac{(a+b)^2-a^2-b^2}{2}+1.$

   Notând $a+b=x$ trebuie să arătăm că $x^2-2xc+\frac{1}{3}+c^2>0$. Dar discrimnantul acestei funcţii de gradul 2 este negativ deci inegalitatea e demonstrată.

   ii) $a+c\le 2b+\sqrt{10} \Leftrightarrow a^2+c^2+2ac\le 4b^2+4b\sqrt{10}+10$. Dar $a^2+c^2+2ac\le 2\left(a^2+c^2\right)=\frac{10}{3}-2b^2\le 4b^2+4b\sqrt{10}+10 \Leftrightarrow \left(6b\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right)^2\ge 0$, adevărat.

2. A se vedea problema 1.a) de la Bucureşti.

3. Avem vectorii $\overrightarrow{AM}=p\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AN}=q\overrightarrow{AB}+(1-q)\overrightarrow{AC}$. A, M, N sunt coliniare dacă şi numai dacă $\frac{p}{q}=\frac{1}{1-q} \Leftrightarrow p-pq=q \Leftrightarrow \frac{1}{q}-\frac{1}{p}=1.$

4. Cu inegalitatea modulului

   $E(x)\ge |x-1+x-2+...+x-1004+1005-x+1006-x+...+2008-x| = 1004^2$ şi minimul se realizează pentru $x\in[1004,1005)$.

*** back

5.1.2 Bihor

1. a) $\overrightarrow{OM_i} = \frac{n-i}{n}\overrightarrow{OM_1} + \frac{i}{n}\overrightarrow{OM_n}$

b) $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \ldots + \overrightarrow{OM_n} = \frac{1}{n}\left(2\sum_{i=0}^{n-1} i + n\right)\left(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_n}\right) = n\left(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_n}\right)$

2. $E = \frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(a+c)} + \frac{1}{c^2(a+b)} = \frac{a^2b^2}{a+b} + \frac{a^2c^2}{a+c} + \frac{b^2c^2}{b+c}$

$\forall x, y, z, m, n, p > 0$ avem $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} + \frac{z^2}{p} \geq \frac{(x+y+z)^2}{m+n+p} \Leftrightarrow (m+n+p)\left(\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} + \frac{z^2}{p}\right) \geq (x+y+z)^2$ Cauchy- Buniakovski- Schwarz

$\Rightarrow E \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(a+b+c)} \geq \frac{3(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ab\cdot ca)}{2(a+b+c)} = \frac{3}{2}$

3. Avem : $(a^{10}+a^5+1) = a^{10}+a^5+1+a^7+a^4+a^2+a-a^7-a^4-a^2-a = (a^{10}-a^7)+(a^7-a^4)+(a^5-a^2)+(a^4-a)+(a^2+a+1) =$
$a^7(a^3-1) + a^4(a^3-1) + a^2(a^3-1)\,a(a^3-1) + (a^2+a+1) = (a^2+a+1)\left[a^7(a-1)+a^4(a-1)+a^2(a-1)+1\right]$

$\Rightarrow$ numărul $(a^{10}+a^5+1)$ este divizibil cu numărul (a^2+a+1), pentru orice $a \in \mathbb{N}$. Pentru $a = 2008$ se obţine afirmaţia din enunţ.

4. Facem $x \to x+a$ şi avem :

$f(x+a+a) = \frac{f(x+a)+\sqrt{3}}{1-f(x+a)\sqrt{3}} = \frac{\frac{f(x)+\sqrt{3}}{1-f(x)\sqrt{3}}+\sqrt{3}}{1-\frac{f(x)+\sqrt{3}}{1-f(x)\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}} = \frac{f(x)-\sqrt{3}}{1+f(x)\sqrt{3}} \Rightarrow f(x+2a) =$
$\frac{f(x+a)-\sqrt{3}}{1+f(x+a)\sqrt{3}} = \frac{\frac{f(x)+\sqrt{3}}{1-f(x)\sqrt{3}}-\sqrt{3}}{1+\frac{f(x)+\sqrt{3}}{1-f(x)\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}} = f(x) \Rightarrow f(x+3a) = f(x), \forall x \in R$ adica f este periodică $T = 3a$.

*** back

5.1.3 Braşov

1. Prin inducţie $f\left(2^k\right) = 2^k$.

   $2^k < f\left(2^k\right) < f\left(2^k + 1\right) < \ldots < f\left(2^k + t\right) < \ldots < f\left(2^{k+1}\right) = 2^{k+1}$, deci $f(n) = n, \forall n \in N$. Inductiv $f(-n) = -f(n)$ deci $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

2. a) Să pesupunem că $\max\left\{x_1^2 - x_2, \ldots, x_n^2 - x_1\right\} < -\frac{1}{4}$.

   Atunci $x_1^2 - x_2 < -\frac{1}{4}, \ldots, x_n^2 - x_1 < -\frac{1}{4}$. Prin însumare $\sum\left(x_1^2 - x_1 + \frac{1}{4}\right) < 0 \Leftrightarrow \sum\left(x_1 - \frac{1}{2}\right) < 0$ ceea ce este o contradicţie.

3. Folosind teorema transversalei şi teorema bisectoarei obţinem:

   $BD\frac{CN}{NA} + BC\frac{BM}{MA} = BC\frac{DI}{IA} \leftrightarrow \frac{ac}{b+c} \cdot n + \frac{ab}{b+c} \cdot m = a \cdot \frac{a}{b+c} \leftrightarrow cn + bm = a$

4. Vezi Vaslui, subiectul 4.

*** back

5.1.4 Brăila

1. a) Demonstrăm inegalitatea prin inducţie după n. Pentru $n = 1$ este clar. Acum dacă $(a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n+b^n)$ arătăm că $(a+b)^{n+1} \leq 2^n(a^{n+1}+b^n+1)$. $(a+b)^{n+1} \leq 2^{n-1}(a+b)(a^n+b^n) \leq 2^n(a^{n+1}+b^{n+1}) \Leftrightarrow$
$a^nb+ab^n \leq a^{n+1}+b^{n+1} \Leftrightarrow (a-b)^2(a^{n-1}b+...+ab^{n-1}) \geq 0$, adevărat.

   b) Folosind inegalitatea stabilită la a) reiese că $(a+b)^n(a^n+b^n) \leq 2^{n-1}(a^n+b^n)^2 \leq 2^n(a^{2n}+b^{2n}) \Leftrightarrow (a^n+b^n)^2 \leq 2(a^{2n}+b^{2n})$, care este inegalitatea *Cauchy-Schwarz*.

2. Presupunem prin absurd că există $m, n \in \mathbb{N}^*, (m,n) = 1$ aşa încât $\frac{a^2+2008^2}{3} = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow n^2a^2+2008^2n^2 = 3m^2$. Deci $n = 1$ sau $n = 3$. Dacă $n = 1 \Rightarrow a^2+2008^2 = 3m^2 \Rightarrow m = 2m_0, a = 2a_0 \Rightarrow a_0^2+1004^2 = 3m_0^2 \Rightarrow a_0 = 2a_1, m_0 = 2m_1 \Rightarrow a_1^2+502^2 = 3m_1^2 \Rightarrow a_1 = 2a_2, m_1 = 2m_2 \Rightarrow a_2^2+251^2 = 3m_2^2$, ecuaţie care ese imposibilă modulo 4. Dacă $n = 3 \Rightarrow m = 3m_0 \Rightarrow a^2+2008^2 = 3m_0^2$ şi soluţia se finalizează ca mai sus.

3. Inegalitatea are loc pentru orice numere reale a, b, c. Să privim trinomul de grad 2 în c : $17c^2 - 14c(a+b) + 9a^2 + 9b^2 - 6ab$. $\frac{\Delta_c}{4} = 49(a+b)^2 - 17(9a^2+9b^2-6ab) = 49a^2 + 98ab + 49b^2 - 153a^2 - 153b^2 + 102ab = 8(13a^2-25ab+13b^2) = -8b^2(13t^2-25t+13b^2;)$ unde $t = \frac{a}{b}$. Dar trinomul $13t^2-25t+13b^2$ are discriminantul $\Delta_t = 25^2-26^2 < 0$, deci $\Delta_c < 0$, ce trebuia demonstrat.

4. Notând $\frac{x+1}{2} = k \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 2k-1 \Rightarrow [\sqrt{k+3}] = k \leq \sqrt{k+3} < k+1 \Leftrightarrow k^2 \leq k+3 < (k+1)^2$ de unde $k = 2$ deci $x = 3$.

*** back

5.1.5 Bucureşti

1. a) $a+\frac{1}{a}=\lfloor a\rfloor+\left\lfloor\frac{1}{a}\right\rfloor+\{a\}+\left\{\frac{1}{a}\right\}=\lfloor a\rfloor+\left\lfloor\frac{1}{a}\right\rfloor+1\in\mathbb{Z}\Rightarrow a^2-ka+1=0$, k întreg. Obţinem $a=\frac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$, deci putem lua spre exemplu $a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

b) Dacă $\exists z\in A, z\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ avem $x+y, y+z, z+x\in\mathbb{Q}\Rightarrow x+y+z\in\mathbb{Q}\Rightarrow y\in\mathbb{Q}$, imposibil.

2. a) Totul rezultă din inegalitatea modului în forma $|x+k|+|x-k|=|x+k|+|x-k|\geq|2k|$.

b) $g(x)\geq n(n+1)+|2x-1|\geq n(n+1)$, cu egalitate pentru $x=\frac{1}{2}$.

3. $f(1)+f(2)+...+f(n-1)=\frac{f(n-1)}{n-1}\Rightarrow f(n)=\frac{f(n)}{n}-\frac{f(n-1)}{n-1}, \forall n\geq 2$. De aici $\frac{f(n)}{f(n-1)}=-\frac{n}{(n-1)^2}$ şi $f(n)=\frac{f(n)}{f(n-1)}\cdot\frac{f(n-1)}{f(n-2)}\cdot...\cdot\frac{f(2)}{f(1)}\cdot f(1)=\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2008n}{(n-1)!}, \forall n\geq 2$.

4. Din relaţia lui Sylvester $\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OH_2}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\Rightarrow\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{AD}$ şi analog $\overrightarrow{H_4H_3}=\overrightarrow{AD}$.

*** back

5.1.6 Buzău

1. Eliminand z între cele două ecuaţii obţinem:

$xy + (x+y)(4a - (x+y)) = 7a^2 - 4a^2 + a(x+y)$

$x^2 + y^2 + xy - 3ax - 3ay + 3a^2 = 0$. Privind-o ca pe o ecuatie in x , avem:

$\Delta = (y-3a)^2 - 4(y^2 - 3ay + 3a^2) = -3(y-a)^2 \leq 0$

Avem soluţii numai dacă $y = a$; rezultă $x = a$, $z = 2a$.

2. Presupunem $\frac{a}{b} > 0$, analog traducându-se cazul $\frac{a}{b} < 0$.

Prima inegalitate se scrie:

$f(x) \leq \frac{ax}{b} + \frac{b}{ax}$. Din prima inegalitate, înlocuim x cu $\frac{1}{x}$, obţinem:

$f(x) \geq \frac{ax}{b} + \frac{b}{ax}$ deci $f(x) = \frac{ax}{b} + \frac{b}{ax}$

3. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'} = 3\overrightarrow{GG'}$

Deoarece $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = 0$ şi $\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = 0$

*** back

5.1.7 Călăraşi

1. a) $\{x\}^{2008} = \lfloor x\rfloor^{2008} + x^{2008}$. Evident $|x| < 1$. Dacă $x \in (-1, 0]$ atunci $\lfloor x\rfloor^{2008} = (-1)^{2008} = 1 \Rightarrow \{x\}^{2008} = \lfloor x\rfloor^{2008} + x^{2008} = 1 + x^{2008} \geq 1$, absurd. Orice $x \in [0, 1)$ este soluţie a ecuaţiei.

   b) Este clar că $x \geq 0$. Dacă $x \geq 1 \Rightarrow ax + a\lfloor x\rfloor \geq a + 1 > a$ iar dacă $x \in [0, 1) \Rightarrow ax = a \Rightarrow x = 1$, imposibil. Deci ecuaţia nu admite soluţii.

2. a) Să căutăm elementele y comune celor 2 mulţimi care se pot scrie sub forma $y = x + x^2 = z + z^4, x, y, z \in \mathbb{Z}$. Atunci obţinem ecuaţia de gradul 2 în x : $x^2 + x - (z + z^4) = 0$, cu soluţiile $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4z + 4z^4}}{2} \in \mathbb{Z}$. Numărul $1 + 4z + 4z^4$ trebuie să fie pătrat perfect. Dar dacă $z \geq 0 \Rightarrow (2z^2)^2 < 1 + 4z + 4z^4 \leq (2z^2 + 1)^2 = 4z^4 + 4z^2 + 1 \Rightarrow 1 + 4z + 4z^4 = 4z^4 + 4z^2 + 1 \Leftrightarrow z \in \{0, 1\}$. Dacă $z \leq -1 \Rightarrow (2z^2)^2 \geq 1 + 4z + 4z^4 \geq (2z^2 - 1)^2 = 4z^4 - 4z^2 + 1 \Rightarrow z = -1$ şi în concluzie $A \cap B = \{0, 2\}$.

   b) Avem de rezolvat în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $x^2 + 5x + 4 = n^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 20x + 16 = 4n^2 \Leftrightarrow (2x + 5)^2 - 9 = 4n^2 \Leftrightarrow (2x + 5 - 2n)(2x + 5 + 2n) = 9$, iar x poate lua valorile $0, -1, -5$ deci afirmaţia este adevărată.

3. a) Fie r şi R raţiile celor 2 progresii. Din ipoteză $a_2 = b_2 \Leftrightarrow a_1 + r \Leftrightarrow a_1 \cdot R \Leftrightarrow 1 + \dfrac{r}{a_1} = R$. Avem de arătat că $a_1 + nr < a_1 \cdot R^n, \forall n \geq 2$. Inegalitatea este echivalentă cu $1 + n \cdot \dfrac{r}{a_1} < R^n = \left(1 + \dfrac{r}{a_1}\right)^n = \binom{n}{0}\left(\dfrac{r}{a_1}\right)^n + \binom{n}{1}\left(\dfrac{r}{a_1}\right)^{n-1} + \ldots + n\dfrac{r}{a_1} + 1$, evident.

   b) Repetând procedeul de 2008 ori aria haşurată este $\dfrac{1}{9} + \dfrac{8}{9^2} + \ldots + \dfrac{8^{2007}}{9^{2008}} = \dfrac{1}{9}\left(1 + \dfrac{8}{9} + \left(\dfrac{8}{9}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{8}{9}\right)^{2007}\right) = 1 - \left(\dfrac{8}{9}\right)^{2008}$.

   A se vedea problema asemănătoare propusă la al doilea test de selecţie pentru OBMJ 2002.

4. a) Inegalitatea revine la $(ab - 1)^2 \geq 0$.

   b) Folosind inegalitatea stabilită la a) avem $\sum \dfrac{2a}{ab + 1} \leq \sqrt{\dfrac{a}{b}} + \sqrt{\dfrac{b}{c}} + \sqrt{\dfrac{c}{a}}$. Dar $\sqrt{\dfrac{a}{b}} + \sqrt{\dfrac{b}{c}} + \sqrt{\dfrac{c}{a}} = \left(\sqrt{\dfrac{a}{b}} + \sqrt{\dfrac{b}{c}} + \sqrt{\dfrac{c}{a}}\right)\sqrt{abc} = a\sqrt{c} + b\sqrt{a} + c\sqrt{b}$.

   c) Pornind de la identităţile $(a + b + c)^3 = \sum a^3 + 3\sum ab(a + b) + 6abc$ şi $(a + b + c)^2 = \sum a^2 + 2\sum ab$ inegalitatea dată este echivalentă cu $1 - 3\sum ab(a + b) \leq 1 - 2\sum ab \Leftrightarrow 3\sum ab(a + b) \geq 2\sum ab \Leftrightarrow 3\sum ab(1 - c) \geq 2\sum ab \Leftrightarrow \sum ab \geq 9abc \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq 9$, inegalitate cunoscută.

*** back

5.1.8 Constanţa

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \{x\} + \{2x\} + \{3x\}$

(a) $f(x+1) = f(x)$ din proprietăţile părţii fracţionare ($\{x+z\} = \{x\}, z \in \mathbb{Z}$)

(b) $f(x) \leq 1$. Din (a) rămâne să lucrăm cu $x \in [0,1]$. Fie $x = \frac{t}{6}$.

$f(x) = \frac{t}{6} + \frac{t}{3} + \frac{t}{6}$.

Dacă $t < 2, f(x) = t$, deci $t \leq 1$ verifică.

Dacă $t \in [2,3), f(x) = \frac{t}{6} + \frac{t}{3} + \frac{t}{2} - 1 = t - 1$, deci t=2 verifică.

Dacă $t \in [3,4), f(x) = \frac{t}{6} + \frac{t}{3} - 1 + \frac{t}{2} - 1 = t - 2$, deci t=3 verifică.

Dacă $t \in [4,6), f(x) = t - 3 \to t = 4$ verifică.

$S = [0,1] \cup \{2,3,4\}$.

2. $a,b,c > -1 . ab + bc + ac + 2abc = 1$.

$\frac{1}{2+a+b} + \frac{1}{2+b+c} + \frac{1}{2+c+a} \leq \sum \frac{\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}}{4} = \frac{3+2\sum a + \sum ab}{2+2\sum a + 2\sum ab + 2abc} = 1$.

3. $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = \frac{2n+1}{3}(a_1 + a_2 + ... + a_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$a_1^2 = 1a_1 \Rightarrow a_1 = 1$. Prin inducţie $a_n = n$.

4. $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} (*)$.

Din ipoteză, $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{H_2H_1} + \overrightarrow{H_4H_3} = \overrightarrow{0}$, folosind (*) pentru H_1, H_2, H_3 şi H_4 obţinem $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \leftrightarrow ABCD$ paralelogram inscriptibil, adică dreptunghi.

*** back

5.1.9 Covasna

1. $a=\sqrt{x^2+y^2+4x+4}+\sqrt{x^2+y^2-8x-2y+17}$

$x-6y+2=0\Rightarrow y=\frac{x+2}{6}$

$\Rightarrow a=\sqrt{(x+2)^2+\left(\frac{x+2}{6}\right)^2}+\sqrt{(x-4)^2+\left(\frac{x+2}{6}-1\right)^2}$

$\Rightarrow a=\sqrt{(x+2)^2\,\frac{37}{36}}+\sqrt{(x-4)^2\,\frac{37}{36}}\Rightarrow a=|x+2|\,\frac{\sqrt{37}}{6}+|x-4|\,\frac{\sqrt{37}}{6}\Rightarrow a=\frac{\sqrt{37}}{6}\left(|x+2|+|x-4|\right)$

Dacă $x\in[-2,4]\Rightarrow x+2\in[0,6]\Rightarrow|x+2|=x+2$ şi $x-4\in[-6,0]\Rightarrow |x-4|=-x+4$, de unde $a=\sqrt{37}$ şi $[a]=[\sqrt{37}]=6$

2. Demonstrăm prin metoda inducţiei matematice că: $2^{3^n}+1\vdots 3^{n+1},\forall n\in\mathbb{N}$.

I. Pentru $n=0\Rightarrow 2^{3^0}+1\vdots 3^{0+1}\Rightarrow 3\vdots 3$ adevărat.

II. Presupunem adevărat pentru $n:=n$ şi demonstrăm pentru $n:=n+1$, $2^{3^{n+1}}+1\vdots 3^{n+2}$

$2^{3^{n+1}}+1=\left(2^{3^n}\right)^3+1=\left(2^{3^n}+1\right)\left[\left(2^{3^n}\right)^2-2^{3^n}+1\right]$ (1).

Din ipoteza inducţiei avem $2^{3^n}+1\vdots 3^{n+1}$ (2), deci este suficient să demonstrăm că $\left(2^{3^n}\right)^2-2^{3^n}+1\vdots 3$

Dar $\left(2^{3^n}\right)^2-2^{3^n}+1=\left(2^{3^n}\right)^2+2\cdot 2^{3^n}-3\cdot 2^{3^n}+1=\left(2^{3^n}+1\right)^2-3\cdot 2^{3^n}=A-B\vdots 3$ (3) deoarece

$A=2^{3^n}+1\vdots 3^{n+1}\Rightarrow 2^{3^n}+1\vdots 3$ şi $B=3\cdot 2^{3^n}\vdots 3$ deci $A-B\vdots 3$

Din (1), (2) şi (3) rezultă $2^{3^{n+1}}+1\vdots 3^{n+2}$.

Din I şi II rezultă $2^{3^n}+1\vdots 3^{n+1},\forall n\in\mathbb{N}$.

3. Determinăm termenul general al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, utilizând metoda inducţiei matematice.

I. Pentru $n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{a_2}{3} \Rightarrow a_2 = 3a_1 = (1+2)\,a_1$

Pentru $n = 2 \Rightarrow \frac{a_1+a_2}{2} = \frac{a_2}{3} \Rightarrow a_3 = 6a_1 = (1+2+3)\,a_1$

II. Presupunem adevărat pentru n : $a_n = (1+2+\ldots+n)\,a_1 \Leftrightarrow a_n = \frac{n(n+1)}{2}a_1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi demonstrăm pentru $n+1$: $a_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}a_1$

Din relaţia dată rezultă: $a_{n+1} = \frac{3}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n) = \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}a_1 = \frac{3a_1}{2n}\sum_{k+1}^{n}(k^2+k)$

Cum $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ şi $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, obţinem $a_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}a_1$

Din I şi II rezultă $a_n = \frac{n(n+1)}{2}a_1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ de unde rezultă că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică.

4. Aplicând teorema catenei, avem: $c^2 = BM \cdot a$ şi $b^2 = CM \cdot a$

Împărţim cele două relaţii: $\frac{BM}{MC} = \frac{c^2}{b^2}$

$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB}+\frac{c^2}{b^2}}{1+\frac{c^2}{b^2}} = \frac{b^2\overrightarrow{AB}+c^2\overrightarrow{AC}}{b^2+c^2}$

AN - mediana $\Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{b^2-c^2}{2(b^2+c^2)} \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{b^2-c^2}{2(b^2+c^2)} \cdot \overrightarrow{BC}$

Din relaţiile $4\overrightarrow{MN} = \frac{2(b^2-c^2)}{(b^2+c^2)}\overrightarrow{BC}$ şi $4\overrightarrow{MN} = \sqrt{3}\overrightarrow{BC}$ rezultă $\frac{2(b^2-c^2)}{b^2+c^2} = \sqrt{3}$, de unde prin ridicare la pătrat obţinem: $b^4 + c^4 - 14b^2c^2 = 0 \Leftrightarrow (b^2+c^2)^2 = 16b^2c^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 4bc$, dar $a^2 = b^2 + c^2$, ceea ce ne conduce la relaţia $a^2 = 4bc \Leftrightarrow BC^2 = 4AB \cdot AC$.

*** back

5.1.10 Dolj

1. Verificare $P(1): 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

   Presupunem $P(k)$ adevărată şi demonstrăm $P(k+1)$. În final obţinem

$$\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2k+2}+\frac{1}{2k+2}(A).$$

2. Dacă α este rădăcina comună a celor trei ecuaţii atunci, prin însumare obţinem

   $(a+b+c)(\alpha^2+\alpha+1)=0 \Rightarrow a+b+c=0 \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow A=\{1,\frac{c}{a}\}, B=\{1,\frac{a}{b}\}, C=\{1,\frac{b}{c}\}$.

   În continuare se demonstrează că nici o ecuaţie nu are rădăcini egale şi că nu avem două ecuaţii cu ambele rădăcini comune.

3. a) Vom folosi teorema bisectoarei:

   $\overrightarrow{OA_1}=\frac{c}{b}\overrightarrow{A_1C}; \overrightarrow{AA_1}=\frac{\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}}{1+k}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}; CA_1=\frac{ab}{b+c}$.

   Cu teorema bisectoarei în

   $\triangle CAA \Rightarrow \frac{AI}{IA_1}=\frac{b+c}{a} \Rightarrow AI=\frac{b+c}{a+b+c}AA_1 \Rightarrow \overrightarrow{AA_1}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}$.

   b) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=0 \Rightarrow \left(\frac{b}{b+c}-\frac{a}{a+c}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{c}{c+b}-\frac{a}{a+b}\right)\overrightarrow{AC}+\left(\frac{c}{c+a}-\frac{b}{b+a}\right)\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

   Cum $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB} \Rightarrow \left(\frac{b}{b+c}+\frac{b}{b+a}-1\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{c}{c+b}+\frac{c}{c+a}-1\right)\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

   Deoarece vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sunt necoliniari, rezultă că ambii coeficienţi sunt nuli, de unde $\begin{cases} b^2=ac \\ c^2=ab \end{cases} \Rightarrow a=b=c$.

4. $\{x\}-\{2x\}=\{x\}+[x] \Rightarrow \{2x\}=-[x]\in[0,1) \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow x\in[0,1)$ şi $\{2x\}=0 \Rightarrow 2x\in\mathbb{Z}$. De aici deducem că $x\in\{0,\frac{1}{2}\}$.

*** back

5.1.11 Galaţi

1. Cele 2^k+1 numere prime sunt toate impare, deci resturile impartirilor lor la 2^{k+1} vor fi doar numere impare din multimea $\{1,3,5,\ldots,2^{k+1}-1\}$. Aceasta multime are 2^k elemente.

   In total sunt 2^k+1 numere care dau 2^k posibile resturi, situatie in care cel putin doua dintre numere dau acelasi rest. Diferenta acestor numere este un numar divizibil cu 2^{k+1} .

2. Fie $x = card\,(A\cap B)$ şi $y = card\,(A\cup B)$. Atunci $1 < x \leq y \leq 2^y$ şi ecuatia devine $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{2^y}=\frac{19}{24}$.

   Cum $\frac{1}{2^y} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$, rezulta ca $\frac{19}{24} \leq \frac{3}{x}$, de unde $x \leq \frac{72}{19} < 4 \Rightarrow x \in \{2,3\}$.

   Dacă x=2, atuci $\frac{1}{y}+\frac{1}{2^y}=\frac{7}{24} \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{7}{24} < \frac{1}{3}$ şi $\frac{7}{24}=\frac{1}{y}+\frac{1}{2^y} \leq \frac{2}{y}$. Atunci $y \in \{4,5,6\}$. In toate aceste cazuri , avem $\frac{1}{y}+\frac{1}{2^y} \neq \frac{7}{24}$, deci $x \neq 2$.

   Dacă x=3, va rezulta ca $y \geq 3$ şi $\frac{1}{y}+\frac{1}{2^y}=\frac{11}{24}$, de unde $\frac{11}{24}=\frac{1}{y}+\frac{1}{2^y} \leq \frac{2}{y}$, deci $y \in \{3,4\}$.

   Pentru y=4, egalitatea nu se verifica.

   Rămâne y=3 care verifica egalitatea.

   Inseamna ca multimile $A\cup B, A\cap B$ au acelasi cardinal, deci A=B.

3. $\frac{ab}{ab+c(a+b+c)}=\frac{ab}{ab+ca+cb+c^2}=\frac{ab}{(a+c)(b+c)}$

   şi analoagele:

   $\frac{bc}{bc+a(a+b+c)}=\frac{bc}{(a+b)(a+c)}$

   $\frac{ca}{ca+a(a+b+c)}=\frac{ca}{(a+b)(b+c)}$

   Atunci şi din inegalitatea Cauchy-Buniakowschi-Schwartz, avem:

   $$\sqrt{\frac{ab}{ab+c(a+b+c)}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a(a+b+c)}}+\sqrt{\frac{ca}{ca+b(a+b+c)}}=$$
   $$\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}+\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}+\sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}}=$$
   $$=\sqrt{ab}\sqrt{\frac{1}{(a+c)(b+c)}}+\sqrt{bc}\sqrt{\frac{1}{(a+b)(a+c)}}+\sqrt{ca}\sqrt{\frac{1}{(a+b)(b+c)}} \leq$$
   $$\leq \sqrt{(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+c)(b+c)}+\frac{1}{(a+b)(a+c)}\right)+\frac{1}{(a+b)(b+c)}}=$$
   $$\sqrt{ab+bc+ca}\sqrt{\frac{2(a+b+c)}{(a+c)(b+c)(b+a)}}$$

   Este suficient sa demonstram ca:

   $$\sqrt{ab+bc+ca}\sqrt{\frac{2(a+b+c)}{(a+c)(b+c)(b+a)}} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 8(ab+bc+ca)(a+b+c) \leq 9(a+c)(b+c)(b+a)$$

$\Leftrightarrow 8a^2b + 8ab^2 + 8abc + 8bca + 8b^2 + 8bc^2 + 8ca^2 + 8cab + 8a^2c \leq 9ab^2 + 9a^2b + 9abc + 9ac^2 + 9b^2c + 9abc + 9bc^2 + 9ac^2$

$\Leftrightarrow a(ab + bc + ca) + b(ab + bc + ca) + c(ab + bc + ca) \geq 9abc \Leftrightarrow (ab + bc + ca)(a + b + c) \geq 9abc$

Ceea ce este adevarat, deoarece:

$ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} = 3\sqrt[3]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}$

$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$ Egalitate dacă şi numai dacă a = b = c= 1.

4. Fie $AI \cap BC = \{F\}$. In triunghiul ABF aplicam teorema bisectoarei:

$\frac{AI}{IF} = \frac{AB}{BF}$, dar $\frac{BF}{FC} = \frac{c}{b} \Rightarrow BF = \frac{ac}{b+c}$. va rezulta ca $\frac{AI}{AF} = \frac{b+c}{a+b+c} = k$ şi $\vec{r_I} = k\vec{r_F} + (1-k)\vec{r_A}$.

$\vec{r_I} = k\left(\frac{c}{b+c}\vec{r_c} + \frac{b}{b+c}\vec{r_B}\right) + (1-k)\vec{r_a}$.

b) Notam $\frac{AE}{AB} = k_1$ şi folosind punctul a) şi $\vec{r_D} = \frac{\vec{r_B}+\vec{r_C}}{2}$ obtinem $\overrightarrow{DE} = (1-k_1)\vec{r_A} + \left(k_1 - \frac{1}{2}\right)\vec{r_B} - \frac{1}{2}\vec{r_C}$

$\overrightarrow{DI} = \frac{a}{a+b+c}\vec{r_A} + \left(\frac{b}{a+b+c} - \frac{1}{2}\right)\vec{r_B} + \left(\frac{a}{a+b+c}\right)\vec{r_C}$.

Din coliniaritatea vectorilor $\overrightarrow{DI}$ şi $\overrightarrow{DE}$ obtinem $k_1 = \frac{b-c}{a+b-c}$. Folosind teorema lui Meneloas in triunghiul BEC cu transeversala $A - S - D$ obtinem $\frac{SC}{SE} = \frac{AB}{AE} = \frac{a+b-c}{b-c}$.

*** back

5.1.12 Gorj

1. a)$(x+y)^2 \geq 4xy \leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$

b) $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c} \geq \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{a+c}\right)=\sum \frac{1}{a+b}$, folosind

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}\left(\Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab\right)$.

2) $A=\{x \in \mathbb{N} | x \leq 2008, 11|x,\}$

$B=\{x \in \mathbb{N} | x \leq 2008, 11|x, 13|x\}$

$|A|=\left\lfloor \frac{2008}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2008}{143} \right\rfloor$

$|B|=\left\lfloor \frac{2008}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2008}{143} \right\rfloor$

$|A|-|B|>0.$

2. $(a_n)_{n\geq 1}, a_1=1$ astfel încât

$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}=\frac{n+1}{\sqrt{a_n}}2, (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$.

(a) $2\left(1+\sqrt{a_2}\right)=3\sqrt{a_2} \Rightarrow a_2=4$

$1+2+\sqrt{a_3}=2\sqrt{a_3} \Rightarrow a_3=9.$

(b) Prin inductie, $\frac{n(n+1)}{2}+\sqrt{a_n}=\frac{(n+1)\sqrt{a_n}2}{\leftrightarrow}\sqrt{a_n}=n+1$

3. a) Binecunoscut.

b) Fie X mijlocul lui AB. Atunci $\frac{XG_1}{XC}=\frac{1}{3}=XG_2XE \Rightarrow G_1G_2||CE$ şi $MN||CE$, deci$MN||G_1G|2$ şi folosind Thales obtinem $\frac{G_1G}{GM}=\frac{G_2G}{GN}$.

*** back

5.1.13 Hunedoara

1. (i) Trivial.

   (ii) Inegalitatea revine la a arăta că $(t-1)^2(b^2-ab) \geq 0$.

   (iii) Analog ca mai sus.

2. (i) Putem înscrie triunghiul ABC într-un dreptunghi cu vârfurile în puncte laticiale şi cu laturile paralele cu axele, cu un vârf al triunghiului situat într-un vârf al dreptunghiului şi cu celelalte 2 vârfuri pe laturile acestuia. Se formează alte 3 triunghiuri dreptunghice cu catetele de lungime naturală. Concluzia este acum evidentă.

   (ii) Vom demonstra că nu se poate înscrie un hexagon regulat cu vârfurile în puncte laticiale şi cu arie număr natural. Presupunem contrariul şi fie $ABCDEF$ un astfel de hexagon. $S_{ABCDEF} = S_{ABC} + S_{ACF} + S_{FCE} + S_{CED}$. Pe de o parte, folosind punctul (i) rezultă că aria hexagonului este un număr natural. Pe de altă parte aria lui este $\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2 \notin \mathbb{N}$, contradicţie.

3. Pentru ca toate ecuaţiile să aibă rădăcini întregi trebuie ca $\Delta_k = (a_k+1)^2 - 4a_{k+1}$ să fie pătrat perfect pentru orice $k = 1, 2, ..., n$. Dar $(a_k+1)^2 - 4a_{k+1} < (a_k+1)^2$. Cum $(a_k+1)^2$ şi $(a_k+1)^2 - 4a_{k+1}$ au aceeaşi paritate rezultă că $(a_k+1)^2 - 4a_{k+1} \leq (a_k-1)^2 \Leftrightarrow a_k \leq a_{k+1}$ adică $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq a_1$ adică $a_1 = a_2 = ... = a_n$ şi reciproc.

4. (i) $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{AO} \Leftrightarrow \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{0}$. Totul rezultă acum din relaţia lui Sylvester.

   (ii) Să observăm că A este ortocentrul lui $\triangle HBC$. Cu relaţia Sylvester $\overrightarrow{O_aA} = \overrightarrow{O_aH} + \overrightarrow{O_aB} + \overrightarrow{O_aC}$ şi analoagele.

   Avem $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MO_a} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{O_aB} + \overrightarrow{O_aC} \Leftrightarrow \overrightarrow{O_aA} = O_aH + O_aB + O_aC$, adevărat.

   (iii) Observăm ca $OO_a \perp BC$ şi analoagele. Dar $O_bO_c \perp AH \Rightarrow O_bO_c \| BC$ deci $OO_a \perp O_bO_c$ şi analoagele.

*** back

5.1.14 Iaşi

1. Demonstrăm intercalarea $\sum \frac{\sqrt{ab}}{1-c} \leq \frac{3}{2} \leq \frac{1}{8}\left(3+\sum \frac{1}{a}\right)$. Într-adevăr $\sum \frac{\sqrt{ab}}{1-c} \leq \frac{a+b}{2(1-c)} = \frac{3}{2}$ şi $\frac{1}{8}\left(3+\sum \frac{1}{a}\right) \geq \frac{1}{8}\left(3+\frac{9}{\sum a}\right) = \frac{3}{2}$.

2. Avem $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AG} = \frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c} - \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3} = \frac{2b-a-c}{3(a+b+c)}\overrightarrow{AB} + \frac{2c-a-b}{3(a+b+c)}\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. $GI \| BC \Leftrightarrow 2b-a-c = a+b-2c \Leftrightarrow b+c = 2a = 2\sqrt{b^2+c^2} \Leftrightarrow 2bc = 3\left(b^2+c^2\right)$, imposibil. Arătăm că este posibil ca $GI \| AC$. Obţinem $\overrightarrow{GI} = \frac{2a-b-c}{3(a+b+c)}\overrightarrow{BA} + \frac{2c-a-b}{3(a+b+c)}\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$ condiţia de paralelism este echivalentă cu $a+c = 2b = 2\sqrt{a^2-c^2} \Leftrightarrow a^2+2ac+c^2 = 4a^2-4c^2 \Leftrightarrow 5c^2-2ac-3a^2 = 0$. De aici găsim că pentru $c = \frac{3a}{5}$ şi $b = \frac{4a}{5}$ dreapta GI este paralelă cu cateta AC.

3. Fie $\frac{1}{m+1} \leq x < \frac{1}{m}$. Căutăm n astfel încât $\frac{1}{3} \leq \frac{n}{m+1}$ şi $\frac{n}{m} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3n \geq m+1$ şi $3n \leq 2m \Leftrightarrow \frac{2m}{3} \geq n \geq \frac{m+1}{3}$. Dacă $\frac{2m}{3} - \frac{m+1}{3} \geq 1$ reiese că un astfel de n există. $\frac{2m}{3} - \frac{m+1}{3} = \frac{m-1}{3}$. Pentru $m \geq 4 \Rightarrow \frac{m-1}{3} \geq 1$. Fie deci $\frac{1}{2} \leq x < 1$. Dacă $\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{3}$ luăm $n = 2$. Dacă $\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}$ sau $\frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}$ luăm $n = 1$. Am văzut că dacă $x \leq \frac{1}{3}$ găsim un n natural corespunzător. Pentru $\frac{2}{3} \leq x$ înmulţim cu $-n$.

4. Considerăm mulţimile $\{98,27\}, \{97,28\}, ..., \{63,62\}, \{61,3\}, \{60,4\}, ..., \{38,26\}$ care au proprietatea că suma elementelor din fiecare mulţime este cub perfect şi $\{1\}, \{2\}$. Sunt în total 50 de mulţimi. Presupunem concluzia falsă, deci putem alege 50 de elemente printre care să nu existe două cu suma cub perfect. Atunci trebuie să alegem mulţimile $\{1\}$şi $\{2\}$ şi câte un element din mulţimile de 2 elemente. Astfel cu necesitate trebuie să alegem numărul 62, altfel, $1+63 = 64$ este cub. Dar atunci $2+62 = 64$, contradicţie.

*** back

5.1.15 Maramureş

1. a) $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\geq\frac{(x+y)^2}{a+b}\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\right)(a+b)\geq(x+y)^2$, care reiese din inegalitatea *Cauchy-Schwarz*. Rezultatul se generalizează uşor.

b) Notăm $s=a+b+c, s>12$ şi conform inegalităţii de la a) avem $\frac{a^2}{b-4}+\frac{b^2}{c-4}+\frac{c^2}{a-4}\geq\frac{s^2}{s-12}\geq\alpha\Leftrightarrow s^2-s\alpha+12\alpha\geq 0, \forall s>12$. Impunem condiţia ca discriminantul acestei funcţii de gradul 2 în s să fie cel mult 0. Astfel $\triangle_s=\alpha^2-48a\leq 0\Leftrightarrow\alpha\leq 48$. Pentru $a=b=c=8$ se obţine egalitate. Dacă $\triangle_s>0$ atunci $\alpha>48$ şi obţinem soluţia $s'=\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-48a}}{2}>12$ şi în intervalul $(12,s')$ se găseşte o valoare s pentru care $s^2-s\alpha+12\alpha<0$. Deci cea mai bună constantă este $\alpha=48$.

2. Fie $\sqrt{a}=\lfloor\sqrt{a}\rfloor+\{\sqrt{a}\}=k+t$, unde $k=\lfloor\sqrt{a}\rfloor\in\mathbb{N}$ şi $t=\{\sqrt{a}\}\in[0,1)$. Atunci $t=\sqrt{a}-k$ şi $E(a)=t+t^2+t^3=(\sqrt{a}-k)+(\sqrt{a}-k)^2+(\sqrt{a}-k)^3=\sqrt{a}\left(1-2k+a+3k^2\right)-k+a+k^2-3ak-k^3\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{a}\left(1-2k+a+3k^2\right)\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{a}\in\mathbb{Q}, a\in\mathbb{N}$, adică a este pătrat perfect. Reciproc, dacă a este pătrat perfect, este clar că $E(a)=0\in\mathbb{Q}$.

3. a) Avem $\overrightarrow{TA}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$ şi $\overrightarrow{AS}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{TS}=\frac{9}{15}\overrightarrow{BA}+\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$. Ideea este să exprimăm şi vectorul $\overrightarrow{TM}$ în baza $\left\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right\}$, astfel vom arăta coliniaritatea punctelor T,M,S şi vom determina raportul $\frac{MT}{MS}=\frac{y}{x}$. $\overrightarrow{TM}=\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{36\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}}{34}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{41\overrightarrow{MT}+36\overrightarrow{TA}+36\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{TA}+5\overrightarrow{AC}}{34}$. Cum $\overrightarrow{TA}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$ putem de aici să exprimăm vectorul $\overrightarrow{TM}$ în baza $\left\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right\}$ şi să găsim x şi y.

b) Se procedează analog ca mai sus. Avem $\overrightarrow{CD}=\frac{17}{35}\overrightarrow{CA}+\frac{18}{35}\overrightarrow{CB}$ şi se exprimă vectorul $\overrightarrow{CM}=\frac{34\overrightarrow{MA}+36\overrightarrow{MB}}{5}=\frac{70\overrightarrow{MC}+34\overrightarrow{CA}+36\overrightarrow{CB}}{5}$ în baza $\left\{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right\}$ iar apoi verificăm coliniaritatea celor 3 puncte.

c) Avem $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{TM}, \overrightarrow{TM}=\frac{y}{x+y}\overrightarrow{TS}$ şi $\overrightarrow{TS}$ se poate exprima în baza $\left\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right\}$ şi găsim vectorul $\overrightarrow{AM}$ în baza $\left\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right\}$. Există $\lambda\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AM}$. Dar dacă $\frac{BQ}{QC}=\mu\Rightarrow\overrightarrow{BQ}=\frac{\mu}{\mu+1}\overrightarrow{BC}$ atunci scriem

$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}$ şi dintr-o bază convenabil aleasă determinăm valorile μ şi λ.

4. Fie $\Delta_n = (2\mathbb{Z}+1) \cup (2^2\mathbb{Z}+2) \cup ... \cup (2^n\mathbb{Z}+2^{n-1})$.

Vom demonstra că $(2\mathbb{Z}+1) \cup (2^2\mathbb{Z}+2) \cup ... \cup (2^n\mathbb{Z}+2^{n-1}) = \mathbb{Z}\backslash 2^n\mathbb{Z}$ prin inducţie după n.

Evident $2\mathbb{Z}+1 = \mathbb{Z}\backslash 2\mathbb{Z}$.

Presupunem afirmaţia adevărată pentru n şi o demonstrăm pentru $n+1$.

Avem $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup (2^{n+1}\mathbb{Z}+2^n)$.

Dacă arătăm că $2^{n+1}\mathbb{Z}+2^n = 2^n\mathbb{Z}\backslash 2^{n+1}\mathbb{Z}$ problema se încheie. Dar $2^n\mathbb{Z}\backslash 2^{n+1}\mathbb{Z} = 2^n(2\mathbb{Z}+1) = 2^{n+1}\mathbb{Z}+2^n$. Deci $a_n = 1$ şi $b_n = 2^n, \forall n \geq 1$.

*** back

5.1.17 Sălaj

1. a) $2 = a^n + b^n \geq 2\sqrt{a^n b^n} \Rightarrow ab \leq 1.$

b) $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 1 + 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2}} \geq 4.$

2. Ştim că $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$, adică seria armonică este divergentă. Să demonstrăm acest lucru. Avem $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... + \frac{2^{n-1}}{2^n} = n+1$, pentru n oricât de mare. A se vedea în acest sens şi problema 2 de la Olimpiada Naţională, clasa a IX-a. Dar cum $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ este clar că $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{mn+1} = \infty$ când $m \to \infty$. Să mai observăm că $\frac{1}{mn+2} + \frac{1}{mn+3} + ... + \frac{1}{(m+1)n+1} < \frac{n}{mn+2} < 1$ iar suma $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{mn+1}$ când $m \to \infty$ se obţine adunând succesiv sume de tipul $\frac{1}{kn+2} + \frac{1}{kn+3} + ... + \frac{1}{(k+1)n+1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Dar $\frac{1}{n+1} < 1$ şi şirul $s_m := \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{mn+1}$ creşte cu mai puţin de 1 dar ia valori din ce în ce mai mari ceea ce înseamnă că există o valoare m pentru care suma $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{mn+1}$ intră în intervalul $(1, 2)$.

3. Se scrie relaţia funcţională şi pentru $x - 2$ şi se rezolvă sistemul.

4. Fie $CP \leq PD$ şi $OQ \perp CD$, $Q \in [PD]$. Avem $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$, unde M este mijlocul coardei AB. Dar $QC = QD \Rightarrow PQ = PD - QD = \frac{PD - CD}{2} \Rightarrow 2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PC}$ iar $PQOM$ este dreptunghi deci $2\overrightarrow{PQ} + 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{0}$.

*** back

5.1.18 Satu Mare

1. a) $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$ b) $\sqrt{\frac{a}{b+1}} + \sqrt{\frac{b}{a+1}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b+1}+1+\frac{b}{a+1}+1\right) = \frac{(a+b+1)}{2}\left(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{a+1}\right) \leq \frac{a+b+1}{a+1}$.

   Egalitatea are loc dacă $\frac{a}{b+1} = \frac{b}{a+1} = 1$ şi a = b, adica dacă $1 = \frac{1}{2}$, imposibil, deci inegalitatea este stricta.

2. $(n+1) f(n+1) = \frac{(n+1)^2(n+2)f(n+1)-n^2(n+1)f(n)}{2} \Leftrightarrow nf(n) = f(n+1)(n+3) \Leftrightarrow \frac{f(n)}{f(n+1)} = \frac{n+3}{n}$

   Inductiv $\frac{f(n)}{f(m)} = \frac{(n+3)(n+4)\dots f(m+2)}{n(n+1)\dots(m-1)}$.

   $\frac{f(1)}{f(2008)} = \frac{3\cdot 4\cdot \dots 2010}{1\cdot 2\cdot \dots 2007} = \frac{2008\cdot 2009\cdot 2010}{2} \Rightarrow f(2008) = \frac{2}{2009\cdot 2010}$.

3. a) $xy + 2(x-y) = 2007 \Leftrightarrow (x-2)(y-2) = 2011$. Cum 2011 este prim, $x, y \geq 0 \left\{\begin{matrix} y+2=2011 \\ x-2=1 \end{matrix}\right\}$.

   b) $a_k \in \mathbb{R}, k = 1, \overline{2007}$.

*** back

5.1.19 Sibiu

1. Notam $S_n = a_1 + \ldots + a_n . S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$
   $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \frac{a_1+(n+1)\cdot a_{n+1} - n\cdot a_n}{2} \leftrightarrow n \cdot a_n - a_1 = (n-1)\cdot a_{n+1}$ şi de aici se poate verifica imediat prin inductie ambele etape.

2. $27 | 16 + (9n^2 - 24n + 11)\cdot 4^n, \forall n \in \mathbb{N}.$
   $\left[(3n-4)^2 - 5\right]\cdot 4^n \equiv 11 \pmod{27}$
   deoarece $3n - 4 \equiv 3(n+9) - 4 \pmod{27}$ şi $4^{n+9} \equiv 4^n \pmod{27}$, avem $P_{(n)} \Rightarrow P_{(n+9)}$. Rămâne doar verificarea cazurilor $n = \overline{1,9}$, prin calcul direct.

3. $a, b, c \in \mathbb{R}$
   $\sqrt{(1-a)^2 + (1+b)^2} + \sqrt{(1-b)^2 + (1+c)^2} + \sqrt{(1-c)^2 + (1+a)^2} \geq 3\sqrt{2}$
   $\sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{(x+y)}{\sqrt{2}} \leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0$
   $\sum \sqrt{(1-a)^2 + (1+b)^2} \geq \frac{1-a+1+b+1-b+1+c+1-c+1+a}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$

4. $OM \perp AB, ON \perp DC$, deci $ME \parallel ON, OM \parallel EN \Rightarrow OMEN$ e paralelogram, $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.
   Analog, dacă notam E' intersectia celorlalte doua perpendiculare duse din mijlocul unei laturi pe latura opusa , obtinem: $\overrightarrow{OE'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} \Rightarrow E' = E$ şi astfel am demonstrat şi punctul b) al problemei.

*** back

5.1.20 Teleorman

1. a) $4a, b > 0, \frac{2}{a+b} \geq \frac{a+b}{a^2+b^2} \Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2\right) \geq (b-b)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$

   b)$x, y, z > 0, xyz = 1$:

   $\frac{x+y}{x^2+y^2} + \frac{y+z}{y^2+z^2} + \frac{z+x}{z^2+x^2} \leq \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{x+z} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xz}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$

2. $aq + 6 - (a+1) = aq^2 + 6 - (aq+6) = aq^3 - 4 - \left(aq^2+6\right)$

   $a(q-1) + 5 = aq(q-1) = aq^2(q-1) - 10 \leftrightarrow a(q-1)^2 = 5$ şi $aq(q-1)^2 = 10$, deci $q = 2$ şi $a = 5$.

3. $\overrightarrow{MA} + a\overrightarrow{MB} = b\overrightarrow{MD}$

   a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}$. fie E mijlocul lui AB. Atunci $\frac{1}{2}\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MD} \Rightarrow M - E - D$ şi $ME = ED$. Cum $\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BC}$.

   b) $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow MD \parallel BC$, deci $M \in ED$ şi $MD = BC$.

   $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + (a-1)\overrightarrow{MB} = (b-1)\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MD} \Rightarrow (a-1)\overrightarrow{MB} = (b-1)\overrightarrow{MD}$.

   Dacă $a \neq 1$ atunci şi $b \neq 1$ şi $M - B - D$, imposibil, deci $a = b = 1$.

4. a) $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP}$ şi $\overrightarrow{Mp} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP}$,deci $2\overrightarrow{MP} = \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}\right) + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + \left(\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{DP}\right) = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$.

   Analog $\overrightarrow{QN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ABDC}\right)$.

   b) Fie X mijlocul lui BD. Atunci avem $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right) = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{AC}$.

*** back

5.1.21 Timiş

1. Căutăm perechile de numere întregi distincte (m,n) cuprinse în $[-2008,2008]$ cu proprietatea $\frac{m^2+3}{m^2+m+1}=\frac{n^2+3}{n^2+n+1} \Leftrightarrow (m-n)(2m+2n-mn+3)=0 \Leftrightarrow 2m+2n-mn+3=0 \Leftrightarrow (m-2)(n-2)=7 \Rightarrow (m,n)\in\{(-5,1),(1,-5),(3,9),(9,3)\}$. Deci $|A|=4015$.

2. Spargem suma în funcţie de paritatea lui k : $\sum_{p=1}^{1004}\frac{\left[\frac{4p^2}{4}\right]}{\left[\frac{2p}{2}\right]}+\sum_{p=1}^{1003}\frac{\left[\frac{4p^2+4p+1}{4}\right]}{\left[\frac{2p+1}{2}\right]}=\sum_{p=1}^{1004}p+\sum_{p=1}^{1003}p(p+1)$ care se calculează uşor.

3. Se găseşte $\overrightarrow{EF}=\frac{\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}}{4}+\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}}{4}\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\frac{3\alpha}{4}=3\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}\right)$. Din $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{0}\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

4. $\overrightarrow{GG_1}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)$ şi sumând împreună cu analoagele se găseşte $\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)=\overrightarrow{0}$.

*** back

5.1.22 Vaslui

1. A se vedea problema 1 de la Iaşi.

2. Din recurenţă găsim că $x_{n+1} - x_n = (a-1)(x_n - x_{n-1}) = (a-1)^2(x_{n-1} - x_{n-2}) = ... = (a-1)^n(x_1 - x_0)$ deci $x_{k+1} - x_k = (a-1)^k(x_1 - x_0)$ pentru orice k. Inegalitatea se obţine acum prin sumarea relaţiilor pentru toţi $k = 1, 2, ..., n-1$ şi ţinând cont că $x_1 - x_0 > 1$.

3. Relaţia din enunţ este echivalentă cu $(a+b+c)(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}) = 3a\overrightarrow{r_A} + 3b\overrightarrow{r_B} + 3c\overrightarrow{r_C} \Leftrightarrow \frac{a\overrightarrow{r_A} + b\overrightarrow{r_B} + c\overrightarrow{r_C}}{a+b+c} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}}{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{r_I} = \overrightarrow{r_G}$ deci $I \equiv G$ adică $\triangle ABC$ este echilateral.

4. Totul rezultă din relaţia lui Sylvester.

*** back

5.1.23 Vrancea

1. a) Se verifică prin calcul direct.

   b) Evident $0 \in A$ (luăm $x = y = 0$). Egalitatea $x^2 - 3y^2 = 2$ este imposibilă modulo 3.

   c) Pentru $n = 1$ luăm $x = 3, y = 1$, apoi procedăm prin inducţie după n. Presupunem că $6^n \in A$. Din a) reiese că dacă $\alpha, \beta \in A \Rightarrow \alpha\beta \in A$. Deci $6 \cdot 6^n = 6^{n+1} \in A$.

2. a) Inducţie.

   b) Se vede repede că $a_1 = 1, a_2 = 2$ şi prin inducţie se deduce $a_n = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

3. Se obţine $a\overrightarrow{AI} = \frac{ab}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{ac}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$ şi analoagele deci $a\overrightarrow{AI} + b\overrightarrow{BI} + c\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{0}$ şi reciproc.

4. a) Fie $\overrightarrow{BE} = k\overrightarrow{BD}, k \in (0,1)$. $\overrightarrow{BE} = k\overrightarrow{BA} + k\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{EC'} = k\overrightarrow{BA} + (k-1)\overrightarrow{BC}$. Dar $\overrightarrow{C'F} = l\overrightarrow{BC}, l \in \mathbb{R}$ şi obţinem $\overrightarrow{BF} = 2k\overrightarrow{BA} + (l + 2k - 1)\overrightarrow{BC}$. Cum $\overrightarrow{BF}$ şi $\overrightarrow{BA}$ sunt coliniari rezultă $l = 1 - 2k$ iar $\overrightarrow{FE} = k\overrightarrow{AC} \Rightarrow FE \| AC$.

   b) $\overrightarrow{FG} = (2k-1)\overrightarrow{AC}$ deci E, F, G sunt coliniare.

*** back

5.2 Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti

1. Avem

$|a_{n+1}-a_n| \le 1$, $|a_{n+1}-a_{n-1}| = |a_{n+1}-a_n+a_n-a_{n-1}| \le |a_{n+1}-a_n| + |a_n-a_{n-1}| \le 2, \ldots, |a_{n+1}-a_1| \le n.$

Atunci

$$|b_{n+1}-b_n| = \left|\frac{na_{n+1}-a_1-a_2-\ldots-a_n}{n(n+1)}\right| =$$

$$\left|\frac{(a_{n+1}-a_1)+(a_{n+1}-a_2)+\ldots+(a_{n+1}-a_n)}{n(n+1)}\right| \le \frac{n(n+1)}{2n(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

2. Implicaţia directă este trivială.

Să arătăm acum prin inducţie după n că dacă $3 \mid n$ atunci mulţimea A are proprietatea enunţată. Dacă $n = 6k$, pentru $k = 1$ gasim partiţia $B_1 = \{1,5,9\}, C_1 = \{2,6,7\}, D_1 = \{3,4,8\}$. Dacă pentru $n = 6k$ am găsit mulţimile disjuncte B_k, C_k, D_k astfel încât $B_k \cup C_k \cup D_k = A$ şi $|B_k| = |C_k| = |D_k|$, construim mulţimile $B_{k+1} = B_k \cup \{6k+1, 6k+6\}, C_{k+1} = C_k \cup \{6k+2, 6k+5\}, D_{k+1} = D_k \cup \{6k+3, 6k+4\}$ şi demonstraţia se încheie. Analog pentru $n = 6k+3$.

3. Fie $\left\lfloor \frac{2^n}{n} \right\rfloor = 2^k$. Atunci $2^k n \le 2^n < 2^k n + n \Leftrightarrow n \le 2^{n-k} < n + \frac{n}{2^k}.$ $\quad (*)$

Dacă $n \le 2^k$ atunci din $(*)$ rezultă ca $n = 2^{n-k}$. Să presupunem prin absurd că $n > 2^k$. Cum $\left\lfloor \frac{2^n}{n} \right\rfloor = 2^k \Rightarrow n > \left\lfloor \frac{2^n}{n} \right\rfloor \Rightarrow n > \frac{2^n}{n} \Rightarrow n^2 > 2^n$. Dar se verifică uşor prin inducţie după $n \ge 4$ ca $n^2 \le 2^n$ şi obţinem contradicţia dorită.

4. Din puterea punctului ştim că D, E, F, Q sunt conciclice dacă şi numai dacă

$$CE \cdot CF = CD \cdot CQ \tag{1}$$

Să exploatăm faptul că $ABCE$ este paralelogram. Avem $CE = AB$ şi $CF \| AB \Rightarrow \dfrac{QB}{CF} = \dfrac{PB}{PC} \Rightarrow CF = \dfrac{QB \cdot PC}{PB}$. Aşadar relaţia (1) se rescrie ca

$$AB \cdot QB \cdot PC = CD \cdot PB \cdot CQ \tag{1'}$$

Dar $\triangle PCD \sim \triangle PAB$ şi $\triangle QBC \sim \triangle QDA$ deci

$$\frac{AB}{CD} = \frac{PB}{PD} \tag{2}$$

şi

$$\frac{QB}{QC} = \frac{QD}{QA} \tag{2'}$$

Acum, din (2) şi (2′) relaţia (1′) este echivalentă cu $\dfrac{QA}{QD} = \dfrac{PC}{PD}$. Această ultimă relaţie rezultă din Teorema Sinusurilor aplicată în triunghiurile QAD şi PCD.

*** back

5.3 Etapa naţională

1. Pentru $x = 0$ găsim $f(f(y)) = y$, $\forall y \in \mathbb{N}$. De aici reiese şi bijectivitatea funcţiei f. Există deci $x_0 \in \mathbb{N}$ aşa încât $f(x_0) = 0$. Pentru $x = x_0$ obţinem $f\left(x_0^2 + f(y)\right) = y$. Din bijectivitate reiese că $f(y) = x_0^2 + f(y)$ de unde $x_0 = 0$. Deci $f(0) = 0$. Pentru $y = 0$ obţinem $f(x^2) = xf(x) \Rightarrow f(xf(x)) = f(f(x^2)) = x^2$. În această relaţie înlocuim x cu $f(x)$ şi găsim $f(x(fx)) = f^2(x)$. În concluzie $f(x) = x\ \forall x \in \mathbb{N}$.

Remarcă. Observăm că soluţia de mai sus funcţionează şi când f ar fi definită pe numere pozitive cu valori în numere pozitive.

O altă soluţie foloseşte faptul că, pentru $x = 1$, $f(1 + f(y)) = f(1) + y$ iar pentru $y = f(x)$ se obţine $f(x+1) = f(x) + f(1)$. Prin inducţie se obţine imediat $f(n) = nf(1)$ etc.

2. a) $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + ... + \left(\frac{1}{2^{2n-1}+1} + \frac{1}{2^{2n-1}+2} + ... + \frac{1}{2^{2n}}\right) > \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + ... + \frac{2^{2n-1}}{2^{2n}} = n$, pentru orice n natural nenul.

b) Este clar că mulţimea $\left\{k \in \mathbb{N}, k \geq 2 : \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{k} > n\right\}$ admite un minim (conform a). Este suficient să arătăm că

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^n} \leq n \qquad (*)$$

Evident $\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{2^k}{2^k+1} < 1$ şi sumând aceste inegalităţi pentru $k = 0, 1, 2, ..., n-1$ obţinem tocmai $(*)$.

3. Fără pierderea generalităţii putem să considerăm $a_0 = -1 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq a_{n+1} = 1$. Există indicii k şi $k+1$ astfel încât $a_k \leq x \leq a_{k+1}$.

Atunci $E(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i| = kx - \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{j=k+1}^{n} a_j - (n-k)x$.

Dacă $n \geq 2k$, atunci $x \leq -1$ şi avem

$$E(x) = -nx + 2\sum_{i=1}^{k}(x - a_i) = n - \left(n(x+1) - 2\sum_{i=1}^{n}(x - a_i)\right).$$

Dar $2\sum_{i=1}^{n}(x-a_i) \leq 2\sum_{i=1}^{k}(x+1) = 2k(1+x)$ deci

$$E(x) \leq n-(2k-n)(1+x) \leq n.$$

Cu un raţionament similar arătăm că $E(x) \leq n$ şi în cazul $n \leq 2k$.

4. Se ştie că dacă $\triangle A_1B_1C_1$ şi $\triangle A_2B_2C_2$ au acelaşi centru de greutate atunci $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{0}$. Dacă $\overrightarrow{A_1A_2} = \alpha\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{B_1B_2} = \beta\overrightarrow{CA}$ şi $\overrightarrow{C_1C_2} = \gamma\overrightarrow{AB}$ se arată uşor că $\alpha = \beta = \gamma$ deoarece $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$. Atunci înseamnă că segmentele A_1A_2 şi BC, B_1B_2 şi CA, C_1C_2 şi AB sunt la fel orientate iar segmentele $[A_1B_1]$ şi $[A_2B_2]$, $[B_1C_1]$ şi $[B_2C_2]$, $[C_1A_1]$ şi $[C_2A_2]$ se intersectează.

*** back

5.4.1 Gheorghe Dumitrescu, 27 octombrie 2007, Craiova

1. $(m^4-m^2+1)(n^4-n^2+1)(m^4+3m^2+1)(n^4+3n^2+1) =$ $\left((m^2-1)^2+m^2\right)\left((n^2-1)^2+n^2\right)\left((m^2+1)^2+m^2\right)\left((n^2+1)^2+n^2\right)$.
Vom folosi *identitatea lui Lagrange:* $(a^2+c^2)(b^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$.
Astfel $(m^4-m^2+1)(n^4-n^2+1)(m^4+3m^2+1)(n^4+3n^2+1) =$ $[((m^2-1)(n^2-1)+mn)^2 + ((m^2-1)n - (n^2-1)m)^2][((m^2+1)(n^2+1) + mn)^2 + ((m^2+1)n-(n^2+1)m)^2]$
şi concluzia rezultă tot din această identitate.

2. a) Se efectuează calculele şi inegalitatea revine la a arăta că $\sum\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) \geq 6$, adevărat.
b) Majorăm suma din enunţ prin
$(x_1+x_4+...+x_{2005})(x_2+x_5+...+x_{2006})(x_3+x_6+...+x_{2007}) \leq \left(\frac{x_1+x_2+...+x_{2007}}{3}\right)^3 = 669^3$. Egalitatea se poate atinge pentru $x_1=x_2=x_3=669$ şi $x_i=0, i=4,5,...,2007$.

3. a) Suma este $\overrightarrow{0}$ dacă poligonul are un număr par de laturi.
b) Fie S suma celor n vectori. Fiecare vârf se proiectează în mijlocul unei laturi "opuse" corespunzătoare. Suma a doi vectori cu extremităţile în capetele unei laturi este un vector coliniar cu vectorul care are extremitatea în vârful opus, adică putem scrie $v_k + v_{k+1} = \alpha v_{k+(n+1)/2}, \alpha < 0$. Dar atunci $2S = \alpha S$ deci $S = 0$.

*** back

5.4.2 Nicolae Coculescu, Ziua 1, 30 noiembrie 2007, Slatina

1. Din $\{kx\} = \{ky\} \Rightarrow kx - ky \in \mathbb{Z}$ şi din $\{(k+1)\,x\} = \{(k+1)\,y\} \Rightarrow kx - ky + x - y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = y + t, t \in \mathbb{Z}$ astfel că $\{nx\} = \{ny + nt\} = \{ny\}$.

2. $\sum \frac{3a^5}{3a^5 + 2bc} = \sum \frac{9a^6}{9a^6 + 6abc} = \sum \frac{9a^6}{9a^6 + 2} \geq \frac{(3a^3 + 3b^3 + 3c^3)^2}{9a^6 + 9b^6 + 9c^6 + 6} \geq 1 \Leftrightarrow 18 \sum a^3 b^3 \geq 6$ şi ultima inegalitate rezultă din inegalitatea mediilor.

3. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC} = \frac{MB}{c}\overrightarrow{AB} + \frac{NC}{b}\overrightarrow{AC}$ iar $\overrightarrow{AD} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC} \Rightarrow PQ \| AC \Leftrightarrow [BM] \equiv [CN]$.

4. Modul de "construcţie" al partiţiei este bine determinat. Fie $1 \in A_1$. Atunci $2, 3 \in A_2 \Rightarrow 4, 5, 6, ..., 15 \in A_1$. $4^2, ..., 16^2 - 1 \in A_2$, $16^2, ..., 16^4 - 1 \in A_1$... şi în general

$$A_1 = \left\{2^0, 2^2, ..., 2^4 - 1, 2^8, ..., 2^{16} - 1, ..., 2^{2^k}, ..., 2^{2^{k+1}} - 1\right\},$$

$$A_2 = \left\{2^1, 2^2 - 1, 2^4, ..., 2^8 - 1, ..., 2^{2^{k-1}}, ..., 2^{2^k} - 1\right\}.$$

*** back

5.4.3 Nicolae Coculescu, Ziua 2, 1 decembrie 2007, Slatina

1. $x = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)}{a^3 + b^3 + c^3} = 1 + \frac{\sum a^2 (b + c)}{a^3 + b^3 + c^3} > 1 + \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^3 + b^3 + c^3} = 2$ (din inegalitatea triunghiului).

Pe de altă parte $x = 1 + \frac{\sum ab(a+b)}{a^3 + b^3 + c^3} \leq 1 + \frac{\sum (a^3 + b^3)}{a^3 + b^3 + c^3} = 3$. În concluzie $\lfloor x \rfloor = 3$ când triunghiul este echilateral şi $\lfloor x \rfloor = 2$ în rest.

2. a) Găsim $a_1 = 1, b_1 = 0, a_2 = 4, b_2 = 1$ şi demonstrăm prin inducţie că există $a_n > b_n$ astfel încât $u^n = ua_n - b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
$u^{n+1} = u^n \cdot u = \left(a_n\left(2 + \sqrt{3}\right) - b_n\right)\left(2 + \sqrt{3}\right) = 7a_n - 2b_n + (4a_n - b_n)\sqrt{3}$.
Punem $a_{n+1} = 7a_n - 2b_n$ şi $b_{n+1} = 4a_n - b_n$.

b) $(x - 2y)^2 - 3y^2 = 1$. Este suficient să arătăm că ecuaţia $X^2 - 3Y^2 = 1$ are o infinitate de soluţii. Dar aceasta este o *ecuaţie Pell* cu soluţia minimală $(X, Y) = (2, 1)$ şi soluţia generală (X_n, Y_n) unde $X_n + Y_n\sqrt[a]{3} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^n$,

$X_n, Y_n \in \mathbb{Z}$. Se demonstrează prin inducţie că dacă (X_n, Y_n) este soluţie atunci şi (X_{n+1}, Y_{n+1}) este soluţie. Într-adevăr $X_{n+1} + Y_{n+1}\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^n \cdot (2+\sqrt{3}) = (2+\sqrt{3})(X_n + Y_n\sqrt{3}) = 2X_n + 3Y_n + (X_n + 2Y_n)\sqrt{3}$ şi $X_{n+1} = 2X_n + 3Y_n$ şi $Y_{n+1} = X_n + 2Y_n$. Acum $X_{n+1}^2 - 3Y_{n+1}^2 = X_n^2 - 3Y_n^2 = 1$ şi soluţia se încheie.

3. Fie A o mulţime cu proprietatea din ipoteză şi $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ elementele sale.

   Fie $d = (x_1, x_2)$. Evident $\dfrac{x_2 - x_1}{(x_1, x_2)} < x_2$ deci $\dfrac{x_2 - x_1}{(x_1, x_2)} = x_1$. Dacă $x_1 = dx_1'$ şi $x_2 = dx_2'$, $\left(x_1', x_2'\right) = 1$ atunci $x_2' - x_1' = dx_1' \Rightarrow x_2' = x_1'(1+d) \Rightarrow x_1' = 1$ deci $x_1 = d$ şi $x_2 = d(d+1)$. Mulţimile A de câte 2 elemente $\{d, d(d+1)\}$ satisfac ipoteza. Să căutăm mulţimi A cu cel puţin 3 elemente. Dacă $(x_3, d) = 1$ atunci $x_3 - d \in A$ deci $x_3 - d = d$ sau $x_3 - d = d(d+1)$. Dacă $x_3 - d = d \Rightarrow x_3 = 2d$, imposibil. Deci $x_3 = d(d+2)$. Atunci $\dfrac{d(d+2) - d(d+1)}{d} = 1 \in A$ deci $d = 1$ şi pentru orice element $x_k \in A$ reiese că $x_k - 1 \in A$. De aici rezultă că toate mulţimile A de tipul $\{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \ldots$ împreună cu cele de mai sus satisfac ipoteza.

4. Cu Teorema lui Menelaus obţinem

$$\frac{MA}{MD} = \frac{BC}{BD} \cdot \frac{EA}{EC} = \frac{BC}{CD} \cdot \frac{FA}{FB}, \frac{MB}{ME} = \frac{CA}{CE} \cdot \frac{FB}{FA} = \frac{CA}{AE} \cdot \frac{BD}{DC}, \frac{MC}{MF} =$$

$$= \frac{AB}{AF} \cdot \frac{CD}{DB} = \frac{AB}{BF} \cdot \frac{CE}{EA}.$$

Atunci $\left(\dfrac{MA}{MD} \cdot \dfrac{MB}{ME} \cdot \dfrac{MC}{MF}\right)^2 = \dfrac{BC^2}{BD \cdot CD} \cdot \dfrac{CA^2}{CE \cdot EA} \cdot \dfrac{AB^2}{AF \cdot FB} \geq 64$ deci $\dfrac{MA}{MD} \cdot \dfrac{MB}{ME} \cdot \dfrac{MC}{MF} \geq 8$, cu egalitate când M este centrul de greutate al triunghiului.

*** back

5.4.4 Unirea, 1 februarie 2008, Focşani

1. Fie r_x, r_y, r_z raţiile celor 3 progresii. Avem $x_n = x_0 + nr_x$, $y_n = y_0 + nr_y$ şi $z_n = z_0 + nr_z$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Dar $z_0+nr_z = z_n = x_n y_n = x_0 y_0 + n x_0 r_x + n y_0 r_y + n^2 r_x r_y \Rightarrow r_z = x_0 r_x + y_0 r_y + n r_x r_y$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Deducem imediat că $r_x = 0$ sau $r_y = 0$.

2. a) $a = 4, b = -1$. Într-adevăr, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat prin recurenţa $x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$ cu termenii iniţiali $x_0 = 2, x_1 = 4$ are ecuaţia caracteristică $x^2 - 4x + 1 = 0$ şi soluţiile $x_1 = 2 - \sqrt{3}, x_2 = 2 + \sqrt{3}$ şi temenul general $x_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n = \alpha^n + \alpha^{-n}$.

   b) Şirul de la punctul a) este de fapt şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $x_n = \alpha^n + \alpha^{-n}$. Dar acest şir are toţi termenii numere întregi. Cum $0 < \alpha^{-n} < 1 \Rightarrow \{\alpha^{-n}\} = \alpha^{-n}$. Cum $\alpha^n, \alpha^{-n} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ şi $\lfloor \alpha^n \rfloor + \lfloor \alpha^{-n} \rfloor + \{\alpha^n\} + \alpha^{-n} \in \mathbb{Z}$ concluzia se impune.

3. a) Se găseşte că $BA' = p - c$, $CA' = p - b$, $CB' = p - a$, $AB' = p - c$, $AC' = p - b$, $BC' = p - a$. Totul rezultă acum din teorema lui Ceva.

   b) Se găseşte $\dfrac{NC'}{NC} = \dfrac{p-c}{c}$ şi $\overrightarrow{AN} = \dfrac{p-b}{p}\overrightarrow{AB} + \dfrac{p-c}{p}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{ON} = \dfrac{p-a}{p}\overrightarrow{OA} + \dfrac{p-b}{b}\overrightarrow{OB} + \dfrac{p-c}{c}\overrightarrow{OC}$

   Remarcă. Punctele A', B', C' sunt punctele de tangenţă ale cercurilor exînscrise cu laturile iar N este *punctul lui Nagel*. Se ştie că N are coordonatele baricentrice $\left(\dfrac{p-a}{p}, \dfrac{p-b}{p}, \dfrac{p-c}{p}\right)$.

*** back

5.4.5 Trepte în matematică, 16 februarie 2008, Călimăneşti

1. a) $|x-3|+|x-2|+|x-1|+|x+1|+|x+2|+|x+3| = |3-x|+|2-x|+|1-x|+|x+1|+|x+2|+|x+3| \geq 12$.

   Egalitate pentru $x \in [-1,1]$.

   b) $|x|+x^2+||x|-1|+6|x-2|+|x^2-1|+3|2x+1|$

   $= |x|+|x^2|+||x|-1|+|-6x+12|+|-x^2+1|+|6x+3|$

   $\geq |x+|x|+15| = 15$ pentru $x \leq 0$. Deci $m=15$ iar egalitatea se poate atinge pentru $x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right)$.

2. a) $x = 1$.

   b) Evident $0 \leq x \leq 1$. Dacă $0 \leq x < \frac{1}{2}$ nu obţinem soluţii. Dacă $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ atunci $0 = \lfloor 2\sqrt{x-x^2} \rfloor$

   Dar se verifică uşor că $0 \leq x-x^2 < \frac{1}{2}\ \forall x \in [0,1]$. În concluzie $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

3. Vom arăta că există o infinitate de numere întregi k astfel încât ecuaţia $x^2-kx+1=0$ să aibă rădăcini iraţionale. Rădăcinile sunt de forma $x_{1,2} = \dfrac{k \pm \sqrt{k^2-4}}{2}$. Numărul k^2-4 este pătrat perfect doar pentru $k \in \{-2, 2\}$. În rest numărul $\dfrac{k \pm \sqrt{k^2-4}}{2}$ este iraţional.

4. a) Totul rezultă din teorema lui Thales şi din teorema bisectoarei.

   b) Dacă $\angle A = 90°$ atunci $AB = AC = \frac{l}{\sqrt{2}}$. Din teorema asemănarii şi teorema bisectoarei $\frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AB+BC} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \Rightarrow \left|\overrightarrow{ED}\right| = \frac{l}{1+\sqrt{2}}$. Dacă $\angle A = 36°$ atunci $AD = BD$ şi $\frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{AB} = \frac{\sin 36°}{\sin 72°} = \frac{1}{2\cos 36°} \Rightarrow \left|\overrightarrow{ED}\right| = \frac{l}{2\cos 36°}$. Altfel, să observăm că $ED = BE = CD$ şi în trapezul isoscel (deci inscriptibil) $BCDE$ cu teorema lui Ptolemeu obţinem $ED \cdot l + BE^2 = EC^2$ iar $CE = AE$, $AE = \frac{ED}{l} \cdot AB$ etc.

   Remarcă. Valoarea $\cos 36°$ poate fi efectiv calculată folosind faptul că $\cos 2 \cdot 36° = -\cos 3 \cdot 36°$ şi apoi utilizând formulele unghiului dublu şi triplu.

*** back

5.4.6 Mathematica - modus vivendi, 22-24 februarie, Rm Vâlcea

1. Este clar că $x \geq 0$. Avem $\lfloor x^2 \rfloor + 1 \geq x^2$ şi $2\lfloor x \rfloor \leq 2x$ deci $x \leq 2$. Obţinem $x \in [1, \sqrt{2})$.

2. a) Din teorema bisectoarei $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{2DC}$ de unde $AC = 2DC$. Prin urmare $2a = b + c$.

   Exprimăm vectorii $\overrightarrow{IG}$ şi $\overrightarrow{BC}$ în funcţie de $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

   Astfel $\overrightarrow{IG} = \dfrac{a+c-2b}{3(a+b+c)}\overrightarrow{AB} + \dfrac{a+b-2c}{3(a+b+c)}\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Dreptele IG şi BC sunt paralele dacă şi numai dacă $-\dfrac{a+c-2b}{3(a+b+c)} = \dfrac{a+b-2c}{3(a+b+c)} \Leftrightarrow$ $2a = b + c$ şi demonstraţia se încheie.

   b) Triunghiul ABC este dreptunghic în A, deci $a^2 = b^2 + c^2$. Dar $4a^2 = b^2 + c^2 + 2bc$, de unde $3a^2 = 2bc$.

3. Rescriem inegalitatea ca

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{a_k + a_{k+1}}{2S - a_k - a_{k+1}}} \geq 2 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} (a_k + a_{k+1}) \sqrt{\frac{1}{(2S - a_k - a_{k+1})(a_k + a_{k+1})}} \geq 2.$$

Dar $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + a_{k+1}) \sqrt{\frac{1}{(2S - a_k - a_{k+1})(a_k + a_{k+1})}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k + a_{k+1})}{S} = 2.$

Egalitatea se poate atinge pentru $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}S$. Pentru $k \geq 3$ inegalitatea este strictă.

*** back

5.4.7 Cezar Ivănescu, 15 martie 2008, Târgovişte

1. Din inegalitatea *Cauchy-Schwarz* obţinem

$$(a+b\sin x)^2 \le (a^2+b^2)(1+\sin^2 x)$$

$$(c+d\sin y)^2 \le (c^2+d^2)(1+\sin^2 y)$$

$$(a+b\cos x)^2 \le (a^2+b^2)(1+\cos^2 x)$$

$$(c+d\cos x)^2 \le (c^2+d^2)(1+\cos^2 x)$$

Sumând inegalităţile avem

$$\frac{(a+b\sin x)^2+(c+d\sin y)^2+(a+b\cos x)^2+(c+d\cos x)^2}{a^2+b^2+c^2+d^2} \le$$

$$2+\frac{(a^2+b^2)(\sin^2 x+\cos^2 x)+(c^2+d^2)(\sin^2 y+\cos^2 y)}{a^2+b^2+c^2+d^2} = 3,$$ şi inegalitatea este demonstrată.

2. Este natural să scriem relaţia funcţională şi pentru $\frac{1}{x}$. Obţinem $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{2}{x^2}+3$ şi $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=2x^2+\frac{1}{x^2}+3$. De aici reiese că $f(x)=x^2+1$.

Urmează că

$$2S=\sum_{k=2}^{2007}\frac{2}{f(k)-2}=\sum_{k=2}^{2007}\frac{2}{k^2-1}=\sum_{k=2}^{2007}\frac{1}{k-1}-\sum_{k=2}^{2007}\frac{1}{k+1}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2006}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2006}+\frac{1}{2007}+\frac{1}{2008}\right)$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2007}-\frac{1}{2008}.$$

3.

$\sum$	21	10	18	29
24	7	3	5	9
15	4	1	2	8
39	10	6	11	12

*** back

5.4.8 Gheorghe Lazăr, 21-23 martie 2008, Sibiu

1. Cum $a_i \in [0,1]$ rezultă că $\dfrac{a_1}{a_1a_2+n-1} \leq \dfrac{a_1}{a_1a_2...a_n+n-1}$ şi analoagele. Prin adunarea celor n inegalităţi obţinem că
$\dfrac{a_1}{a_1a_2+n-1} + \dfrac{a_2}{a_2a_3+n-1} + ... + \dfrac{a_n}{a_na_1+n-1} \leq \dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{a_1a_2...a_n+n-1}$. Vom arăta că $a_1+a_2+...+a_n \leq a_1a_2...a_n+n-1$.

   Ştim că dacă $x, y \in [0,1] \Rightarrow (1-x)(1-y) \geq 0$ sau $x+y \leq xy+1$.

   Astfel avem $a_1+a_2+...+a_n \leq a_1a_2+1+a_3+...+a_n+n-2 \leq a_1a_2a_3+1+a_4+...+a_n+n-3 \leq ...$

   Repetând acest raţionament de $n-1$ ori vom obţine în final inegalitatea dorită.

2. Să luăm următoarele mulţimi de două elemente cu suma $2(a_1+nr)$:
$\{a_2, a_{2n}\}, \{a_3, a_{2n-1}\}, ..., \{a_n, a_{n+2}\}$, precum şi mulţimile $\{a_1\}$ şi $\{a_{n+1}\}$. Din principiul cutiei se vede uşor că oricum am selecta $n+2$ termeni ai progresiei vor exista 2 elemente care fac parte din aceeaşi mulţime şi problema se încheie.

3. a) Evident există un vector $\overrightarrow{v}$ de modul nenul. Fie acesta $\overrightarrow{v_1}$. Atunci $\overrightarrow{v_k} = a_k \cdot \overrightarrow{v_1}$ cu $a_k \in \mathbb{R}$.

   Dar $1 = \displaystyle\sum_{1\leq k\leq n} |\overrightarrow{v_k}| = \left|\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ a_k<0}} a_k\right| \overrightarrow{v_1} + \left|\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ a_k\geq 0}} a_k\right| \overrightarrow{v_1}$. Unul din cei 2 termeni ai acestei sume este cu siguranţă cel puţin egal cu $\frac{1}{2}$ şi alegem I mulţimea indicilor k respectivi.

   b) Fie $\overrightarrow{v_k} = x_k\overrightarrow{i} + y_k\overrightarrow{j}$, unde $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ sunt versori.

   Avem $1 = \displaystyle\sum_{1\leq k\leq n} |\vec{v_k}| = \sum_{1\leq k\leq n} \sqrt{x_k^2+y_k^2} \leq \sum_{1\leq k\leq n} (|x_k|+|y_k|) = \left|\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ x_k<0}} x_k\right|$

   $+ \left|\displaystyle\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ x_k\geq 0}} x_k\right| + \left|\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ y_k<0}} y_k\right| + \left|\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ y_k\geq 0}} y_k\right|.$

   Cu siguranţă una din cele 4 sume este cel puţin egală cu $\frac{1}{4}$ şi luăm J mulţimea de indici cu această proprietate. În cazul în care se realizează egalitatea, rămân 3 termeni cu suma 1, deci există o sumă mai mare sau egală cu $\frac{1}{3}$, deci mai mare decât $\frac{1}{4}$.

4. Pentru orice punct X avem că $f(X) = X'M_0 + M_0N_0 + N_0P' = X'P'$, unde X' este simetricul lui X faţă de BC, P' simetricul lui P faţă de AB şi M_0, N_0 intersecţiile dintre dreapta $X'P'$ şi BC respectiv AB. Să notăm acum $k = \dfrac{HY}{f(H)} = \dfrac{GY}{f(G)} = \dfrac{OY}{f(O)}$ şi presupunem că $k \neq 1$. Dar atunci dacă Y' este simetricul lui Y faţă de BC, avem $k = \dfrac{HY}{f(H)} = \dfrac{H'Y'}{H'P'}$. Există punctele S, T astfel încât $\dfrac{SY'}{SP'} = \dfrac{TY'}{TP'}$ şi atunci H' se află pe *cercul lui Apollonius* corespunzător diametrului ST. Dar analog se arată că G', O' se află şi ele pe acest cerc. Însă H', G', O' sunt coliniare (se află pe simetrica *dreptei lui Euler* faţă de BC), imposibil. Atunci $k = 1$ iar punctul Y este simetricul lui Y' faţă de BC, unde Y' este simetricul lui P' faţă de d', d' este simetrica dreptei Euler faţă de BC iar P' simetricul lui P faţă de AB.

*** back

5.4.9 Sfera, 22 martie 2008, Băileşti

Partea I.

1. 1. c) 2. a) 3. b) 4. c) 5. d)

Partea a II-a.

1. Fie $K = AM \cap IJ . \angle AIB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle AMB = 90^\circ + \angle MIJ \Rightarrow \angle JIM = \angle IMK$. Cum $\angle IMJ = 90^\circ$ rezultă că MK este mediana laturii IJ. Presupunem prin absurd că cele 2 cercuri nu sunt tangente. Ducem $IS \perp AM$ şi $JT \perp AM$ $(S, T \in AM)$ şi obţinem $\triangle ISK \equiv \triangle JTK$ deci razele celor 2 cercuri sunt egale. Dar $\frac{1}{2}S_{ABC} = S_{AMB} = S_{AMC} = p_1 r = p_2 r$, unde p_1, p_2 sunt semiperimetrele celor 2 triunghiuri şi r raza cercurilor înscrise. Aşadar $p_1 = p_2$ şi concluzia se impune.

2. Din inegalitatea mediilor $\sum a^4 + \frac{3}{4} = \sum \left(a^4 + \frac{1}{4}\right) \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{2}\sum a\left(a+b\right) \geq \sum a\sqrt{ab}$.

*** back

5.4.10 Traian Lalescu, 28-30 martie 2008, Deva

1. a) Fie $S = a + b$. Avem de arătat că $S^2 - 3S + 2 \geq 0$ sau $(S-1)(S-2) \geq 0$, adevărat pentru că $S \geq 2$.

b) Să punem $x = ac, y = bd, z = ad, t = bc$. Aplicând inegalitatea de la a) obţinem $4 + x^2 + y^2 + 4 + z^2 + t^2 \geq 3(x+y+z+t) = 3(a+b)(c+d)$.

2. Dacă $a + b + c \neq 0 \Rightarrow \dfrac{b+kc}{a} = \dfrac{c+ka}{b} = \dfrac{a+kb}{c} = k+1$. De aici obtinem sistemul

$$\begin{cases} b + kc = (k+1)a \\ c + ka = (k+1)b \\ a + kb = (k+1)c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a - c = k(c-b) \\ b - a = k(a-c) \\ c - b = k(b-a) \end{cases} \Longrightarrow a = b = c \text{ şi}$$

$$\frac{(a+b+c)^3}{abc} = 27.$$

Se arată uşor că în cazul $a + b + c = 0 \Rightarrow a = b = c$.

3. a) Din relaţia lui Sylvester obţinem că $\overrightarrow{OH_A} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ şi analoagele. Observăm mai departe că

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OH_A} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH_B} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OH_C} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH_D} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OQ}$. Din $\overrightarrow{OH_A} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ} \Rightarrow \overrightarrow{QH_A} = \overrightarrow{AO}$ şi analoagele. Rezultă că $QH_A = OA = QH_B = OB = QH_C = OC = QH_D = OD$ ceea ce înseamnă că patrulaterul $H_AH_BH_CH_D$ este inscriptibil.

Ştim că $\overrightarrow{H_AG_A} = \overrightarrow{2G_AO}$ şi analoagele de unde reiese că patrulaterul $G_AG_BG_CG_D$ are laturile paralele cu $H_AH_BH_CH_D$ deci este inscriptibil.

b) Este clar că O este centrul omotetiei de centru O şi coeficient 2 care duce patrulaterul $G_AG_BG_CG_D$ in $H_AH_BH_CH_D$. Această omotetie duce cercul circumscris patrulaterului $G_AG_BG_CG_D$ în cercul circumscris lui $H_AH_BH_CH_D$, deci duce centrul O_G în centrul O_H şi de aici deducem coliniaritatea celor 3 puncte.

4. Pentru $n = n_0$ avem $f(n_0+1) = f(n_0) = 1$. Pentru $n = n_0 + 1$ obţinem $f(n_0+2) = 1$ şi se vede uşor că $f(n) = 1, \forall n \geq n_0$. În continuare fie $f(n_0 - 1) \geq 1$. Pentru $n = n_0 - 1 \Rightarrow f(n_0 - 1) = 1$. Dacă $f(n_0-2) \geq 2$ atunci punem $n = n_0 - 2$ şi din cele de mai sus rezultă $1 = f(n_0-2)$, imposibil. La fel arătăm că $f(n) \in \{0,1\}$ dacă $n \leq n_0 - 1$. Dar dacă m este minim cu proprietatea că $f(m) = 1$ se observă imediat că $f(n) = 1, \forall n \geq m$ şi $f(n) = 0\, \forall n < m$. În concluzie sunt n_0 funcţii.

*** back

5.4.11 Alexandru Myller, 11-13 aprilie 2008, Iaşi

1. Să observăm că $x > 0$. Să scriem $x = m + \alpha$, unde $m = \lfloor x \rfloor$ iar $\alpha = \{x\}$, $m \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in (0,1)$. Avem ecuaţia $\frac{m}{\alpha} = \frac{2007(m+\alpha)}{2008} \Leftrightarrow 2007\alpha^2 + 2007m\alpha - 2008m = 0$. Dacă $m \geq 2007$ atunci $2007 \leq 2007m(1-\alpha) + m = 2007\alpha^2 < 2007$, absurd. Deci $0 < m < 2007$. Arătăm că pentru fiecare $0 < m < 2007$ găsim un $\alpha \in (0,1)$ corespunzător. Fie $f(\alpha) = 2007\alpha^2 + 2007m\alpha - 2008m$. Avem $\triangle_\alpha \geq 0$, deci ecuaţia $f(\alpha) = 0$ are rădăcini, iar din relaţiile lui Viète reiese că o rădăcină este pozitivă şi cealaltă negativă. Cum $f(0) = -2008m < 0$ este suficient să arătăm că $f(1) > 0$, ceea ce se vede imediat. Atunci ecuaţia are 2006 soluţii.

2. Numărul $64x^6 + 64x^5 + 256$ trebuie să fie pătrat perfect. Să încercăm o încadrare a acestei expresii tip polinom între 2 pătrate perfecte. Avem $(8x^3 + 4x^2 - x)^2 = 64x^6 + 64x^5 + 16x^3 + x^2$ şi $(8x^3 + 4x^2 - x + 1)^2 = 64x^6 + 64x^5 + 8x^3 + 9x^2 - 2x + 1$. Pentru $|x| \geq 3$ numărul $64x^6 + 64x^5 + 256$ este cuprins între $(8x^3 + 4x^2 - x)^2$ şi $(8x^3 + 4x^2 - x + 1)^2$ deci nu poate fi pătrat perfect. Rămân de analizat posibilităţile $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ care conduc la soluţiile $(x, y) \in \{(-2, \pm 6), (-1, \pm 2), (0, \pm 2), (2, \pm 10)\}$.

Remarcă. Cu toate că cele 2 pătrate de expresii polinomiale nu sunt tocmai uşor de găsit, este natural să căutăm un poliom $f(x)$ de grad 3 şi coeficient dominant 8. Apoi pentru a obţine termenul $64x^5$ trebuie să adăugăm în expresia lui $f(x)$ şi pe $4x^2$. Adăugând şi pe $-x$ (pentru a mai reduce eventual din termenii care apar în plus) ridicăm la pătrat pe $f(x)$ şi obţinem ce ne dorim.

3. Fie $M = AC \cap BD, N = BD \cap CE$. Notăm d_1, d_2 distanţele de la B şi D la AC, d_3, d_4 distanţele de la B şi D la CE.

Atunci $\dfrac{\text{aria}\,(ABC)}{\text{aria}\,(ABCD)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{d_2}{d_1}} = \dfrac{BM}{BD}$ şi $\dfrac{\text{aria}\,(CDE)}{\text{aria}\,(BCDE)} = \dfrac{DN}{BD}$ şi evident $\dfrac{BM}{BD} + \dfrac{DN}{BD} < 1$.

4. a) Fie d simetrica dreptei AM faţă de N. $d \| AM \Rightarrow d \cap BM \neq \emptyset$, fie $Q = d \cap BM$. Dacă P este simetricul lui Q faţă de N este clar că P se află pe dreapta AM. Punctele P şi Q sunt cele căutate şi sunt unic determinate (unicitatea se demonstrează uşor).

b) $2\overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} \Rightarrow 4ON^2 = AP^2 + BQ^2$ =constant, deoarece $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ} = 0$, AB fiind diametru.

*** back

5.4.12 Gheorghe Ţiţeica, 22-24 mai 2008, Drobeta Tr. Severin - Proba individuală

1. Să notăm x şi y lungimile laturilor celor 2 pătrate. Evident "lungimea" dreptunghiului este $x+y$ iar "lăţimea" este mai mare sau egală cu $\max(x,y)$. Dar suma ariilor celor 2 pătrate este egală cu $x^2+y^2=1$. Trebuie de fapt sa găsim maximul expresiei $x(x+y)$ în ipoteza $x^2+y^2=1$. Putem sa punem $x=\cos t$ şi $y=\sin t$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. Atunci $x(x+y)=\cos^2 t+\sin t\cos t=$ $\dfrac{\cos 2t+\sin 2t+1}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2t-\dfrac{\pi}{4}\right)\le\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

2. (i) Să notăm $s_i=x_{i+2}+\ldots+x_{i+k}$, pentru toţi i.

Din inegalitatea mediilor $\displaystyle\sum_i\frac{x_i}{x_{i+1}(x_{i+2}+\ldots+x_{i+k})}\ge n\sqrt[n]{\prod_i\frac{x_i}{x_{i+1}}\cdot\prod_i\frac{1}{s_i}}$.

Dar $\displaystyle\prod_i\frac{x_i}{x_{i+1}}=1$ (1)

şi

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\prod_i s_i}}\ge\frac{n}{\sum_i s_i}=\frac{n}{k\sum_i x_i}\ge\frac{n}{k} \qquad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) obţinem inegalitatea dorită.

(ii) Cum $x_1^2+kx_1x_2+x_2^2\ge(k+2)x_1x_2\Rightarrow\dfrac{(k+1)x_1x_2}{x_1^2+kx_1x_2+x_2^2}\le\dfrac{k+1}{k+2}\Rightarrow 1-$ $\dfrac{(k+1)x_1x_2}{x_1^2+kx_1x_2+x_2^2}\ge\dfrac{1}{k+2}\Rightarrow\dfrac{x_1^2-x_1x_2+x_2^2}{x_1^2+kx_1x_2+x_2^2}\ge\dfrac{1}{k+2}\Rightarrow\dfrac{x_1^3+x_2^3}{x_1^2+kx_1x_2+x_2^2}$ $\ge\dfrac{x_1+x_2}{k+2}$. Prin sumarea inegalităţilor analoage rezultă concluzia.

3. Să observăm mai întâi că $f(x)\in[-1,1]$ apare ca argument pentru f prin $f\circ f$. Înseamnă că $a\le -1$ şi $b\ge 1$. Pentru $x=a$ în relaţia dată obţinem $-1\le\dfrac{2a+1}{a+2}\le 1\Leftrightarrow -1\le a\le 1$. Analog $-1\le b\le 1$. Cu necesitate $a=-1$ iar $b=1$.

$f(f(f(x)))=f\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)=\dfrac{2f(x)+1}{f(x)+2}$. Pentru $x=1,-1$ găsim $f(1)$, $f(-1)\in\{-1,1\}$. Cum funcţia f este bijectivă nu putem avea $f(1)=f(-1)$ deci $f(a)+f(b)=f(1)+f(-1)=0$.

*** back

5.4.13 Gheorghe Ţiţeica, 22-24 mai 2008, Drobeta Tr. Severin - Proba pe echipe

1. Pentru $n = 1$ sau $n = 2$ se vede uşor că soluţiile sunt $x_1 = a$ respectiv $(x_1, x_2) \in \{(0, a), (a, 0)\}$. Fie $n \geq 3$. Dacă $a = 0 \Rightarrow x_i = 0$. Dacă $a \neq 0$ împărţim egalitatea $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = a^2$ prin a^2 şi obţinem $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} + ... + \frac{x_n^2}{a^2} = 1$. În particular $\frac{x_i}{a} \leq 1$ şi deci $1 = \frac{x_1^3}{a^3} + \frac{x_2^3}{a^3} + ... + \frac{x_n^3}{a^3} \leq \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} + ... + \frac{x_n^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x_i}{a} = 1 \Rightarrow x_i = a$. Mai avem şi soluţiile $x_i = a$ şi $x_j = 0$, $\forall j \in \{1, 2, ..., n\} - \{i\}$.

2. n este par, deci $d_2 = 2$. Cum $d_1 = 1$ rezultă că d_3 şi d_4 au parităţi diferite. Să zicem că $d_3 = 2d$. Presupunem că $n \not\vdots 4$. Cum $d_3 = 2d$, d impar, atunci d_4 este impar şi $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \equiv 0 \pmod 4$, contradicţie. Deci $n \vdots 4$ şi $d = 2$, $d_3 = 4$. Dar atunci $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \equiv 2 \pmod 4$, absurd. Deci $d_4 = 2d_3$, d_3 prim. Cum d_3 este divizor al lui $n \Rightarrow d_3 \mid 5$, $d_3 = 5$ şi $n = 130$.

   Remarcă. Problema a fost propusă de Bulgaria la Olimpiada Balcanică de Matematică desfăşurată în anul 1989 la Split.