# *ETAPA LOCALA, JUDETEANA, NATIONALA SI INTERJUDETENE*

*** back

# Capitolul 1

# Clasa a IX-a

## 1.1 Etapa locală

### 1.1.1 Arad

1. Dacă $a, b, c$ sunt numere reale pozitive, astfel încât $a^2+b^2+c^2=\frac{5}{3}$ să se arate că:

   i) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}<\frac{1}{abc}$;

   ii) $a-2b+c\leq\sqrt{10}$.

2. Fie $a\in\mathbb{R}_+^*$ cu proprietatea $\{a\}+\left\{\frac{1}{a}\right\}=1$. Arătaţi că $a\notin\mathbb{Q}$. Daţi exemplu de astfel de număr.

3. Considerăm punctele $M$ şi $N$ în planul triunghiului $ABC$ şi $p, q\in\mathbb{R}^*$. Ştiind că $\overline{AM}=p\overline{AB}+\overline{AC}$ şi $\overline{CN}=q\overline{CB}$, să se arate că $A, M$ şi $N$ sunt coliniare dacă şi numai dacă $\frac{1}{q}-\frac{1}{p}=1$.

4. Se consideră expresia $E(x)=|x-1|+|x-2|+\ldots+|x-2008|, x\in\mathbb{R}$. Determinaţi $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} E(x)$ precum şi pentru ce valori ale lui $x$ se realizează.

*** back

### 1.1.2 Bihor

1. Fie punctele coliniare ordonate şi echidistante $M_1, M_2, \ldots, M_n$ şi $O$ un punct arbitrar.

   a) Să se exprime vectorii $\overrightarrow{OM_i}, i = 1, 2, \ldots, n$ în raport cu $\overrightarrow{OM_1}$ şi $\overrightarrow{OM_n}$.

   b) Să se arate că:

$$\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \cdots + \overrightarrow{OM_n} = \frac{n}{2}\left(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_n}\right).$$

2. Dacă $a,\ b,\ c > 0$ şi $abc = 1$, arătaţi că:

$$E = \frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(a+c)} + \frac{1}{c^2(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Drimbe Daniel şi Marius Cicortaş

3. Fără a face efectiv calcule demonstraţi că numarul $(2008^{10} + 2008^5 + 1)$ este divizibil cu numărul $(2008^2 + 2009)$.

Romulus Pleşa şi Viorica Pleşa

4. Să se demonstreze că funcţia $f$ ce are proprietatea că $\exists a \neq 0$ astfel încât

$$f(x+a) = \frac{f(x) + \sqrt{3}}{1 - f(x)\cdot\sqrt{3}},\ f(x) \neq \sqrt{3},\ \forall x \in \mathbb{R},$$

este periodică.

Ioan Cuc

*** back

### 1.1.3 Braşov

1. a) Să se dea exemplu de număr real $a$ care are proprietatea $\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} = 1$, unde cu $\{x\}$ s-a notat partea fracţionară a numărului real $x$.

   b) Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime cu cel puţin trei elemente, având proprietatea că, pentru orice două elemente distincte $x, y \in A$, rezultă $x+y \in \mathbb{Q}$. Să se demonstreze că $A \subset \mathbb{Q}$.

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} |x+k| + \sum_{k=1}^{n} |x-k|, \; g(x) = f(x) + |2x-1|, \forall x \in \mathbb{R}.$$

   a) Să se demonstreze că $f(x) \geq n(n+1), \forall x \in \mathbb{R}$.

   b) Să se determine valoarea minimă a funcţiei $g$.

3. Să se determine funcţia $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^*$ care verifică simultan condiţiile

   i) $f(1) = 2008$,

   ii) $f(1) + f(2) + ... + f(n) = \frac{1}{n} f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

4. Fie $ABCDE$ un pentagon înscris într-un cerc. Notăm cu $H_1, H_2, H_3, H_4$ ortocentrele triunghiurilor $ABC, BCD, CDE$, respectiv $ACE$. Să se demonstreze că patrulaterul $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.

*** back

### 1.1.4 Brăila

1. a) Demonstraţi că $(a+b)^n \leq 2^{n-1}\left(a^n+b^n\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$.

   b) Demonstraţi că $(a+b)^n\left(a^n+b^n\right) \leq 2^n\left(a^{2n}+b^{2n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$.

Runceanu Emilian

2. Demonstraţi că $\sqrt{\dfrac{a^2+2008^2}{3}} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \forall a \in \mathbb{Z}$.

Dan Negulescu

3. Dacă $a,\ b,\ c$ sunt lungimile laturilor unui triunghi, demonstraţi că

$$9a^2+9b^2+17c^2-14ac-14bc-6ab>0.$$

Nicolae Stănică

4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\left\lfloor\sqrt{\dfrac{x+7}{2}}\right\rfloor=\dfrac{x+1}{2}$, unde $\lfloor a\rfloor$ este partea întreagă a numărului $a$.

Vasile Tarciniu, G.M. nr. 6/2007

*** back

### 1.1.5 Bucureşti

1. a) Să se dea exemplu de număr real $a$ care are proprietatea $\{a\}+\left\{\frac{1}{a}\right\}=1$, unde cu $\{x\}$ s-a notat partea fracţionară a numărului real $x$.

   b) Fie $A\subset\mathbb{R}$ o mulţime cu cel puţin trei elemente, având proprietatea că, pentru orice două elemente distincte $x,y\in A$, rezultă $x+y\in\mathbb{Q}$. Să se demonstreze că $A\subset\mathbb{Q}$.

2. Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}|x+k|+\sum_{k=1}^{n}|x-k|,\ g(x)=f(x)+|2x-1|,\forall x\in\mathbb{R}.$$
   a) Să se demonstreze că $f(x)\geq n(n+1),\forall x\in\mathbb{R}$.

   b) Să se determine valoarea minimă a funcţiei $g$.

3. Să se determine funcţia $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}^*$ care verifică simultan condiţiile

   i) $f(1)=2008$,

   ii) $f(1)+f(2)+...+f(n)=\frac{1}{n}f(n),\forall n\in\mathbb{N}^*$.

4. Fie $ABCDE$ un pentagon înscris într-un cerc. Notăm cu $H_1,H_2,H_3,H_4$ ortocentrele triunghiurilor $ABC,BCD,CDE$, respectiv $ACE$. Să se demonstreze că patrulaterul $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.

*** back

### 1.1.6 Buzău

1. Fie dat un număr real $a$. Aflaţi $x,\ y,\ z\in\mathbf{R}$ ce verifică simultan ecuaţiile:
$$x+y+z=4a\ \text{şi}\ xy+yz+zx=7a^2-az.$$

2. Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ pentru care avem:
$$\frac{a}{b}\left(f(x)-\frac{bx}{a}\right)\leq\frac{1}{x}\leq\frac{b}{a}\left(f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{bx}{a}\right),\forall\, x\in\mathbb{R}^*.$$

3. Fie $G$ şi $G'$ centrele de greutate ale triunghiurilor $ABC$ respectiv $A'B'C'$. Să se arate că există relaţia:
$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}.$$

*** back

## 1.1.7 Călăraşi

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

   a) $\{x\}^{2008} - \lfloor x \rfloor^{2008} - x^{2008} = 0$;

   b) $ax + a\lfloor x \rfloor = a$.

2. a) Se dau mulţimile $A = \{y \in \mathbb{Z} : y = x + x^2, x \in \mathbb{Z}\}$ şi $B = \{y \in \mathbb{Z} : y = x + x^4, x \in \mathbb{Z}\}$. Să se determine $A \cap B$.

   b) Fie $M = \{x \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z}, x^2 + 5x + 4 = n^2\}$. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiei "$M \subset [-5, 0]$".

3. a) Şirul de numere pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ formează o progresie aritmetică, iar şirul $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ o progresie geometrică. Să se arate că dacă $a_1 < a_2$, $a_1 = b_1$ şi $a_2 = b_2$ atunci pentru orice $n$ număr natural $n > 2$ este adevărată inegalitatea $a_n < b_n$.

   b) Se consideră un pătrat de latură 1. Ducând 4 drepte paralele cu laturile sale, îl împărţim în 9 părţi egale. Pătratul din mijloc îl eliminăm. Cele 8 pătrate rămase le împărţim în acelaşi mod în 9 pătrate egale şi din nou eliminăm pătratul din mijloc. Repetând procedeul de 2008 ori, se cere aria pătratelor eliminate.

4. a) Arătaţi că $\dfrac{2a}{ab+1} \le \sqrt{\dfrac{a}{b}}, \forall a, b \in (0, +\infty)$.

   b) Dacă $a, b, c > 0$ astfel încât $abc = 1$, să se demonstreze inegalitatea:

   $$\frac{2a}{ab+1} + \frac{2b}{bc+1} + \frac{2c}{ca+1} \le a\sqrt{c} + b\sqrt{a} + c\sqrt{b}.$$

   c) Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a + b + c = 1$. Să se demonstreze inegalitatea:

   $$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \le a^2 + b^2 + c^2.$$

Dan Marinache

*** back

## 1.1.8 Constanţa

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \{x\} + \{2x\} + \{3x\}$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real $a$. Să se arate că:

   a) funcţia $f$ este periodică şi să se determine perioada principală;

   b) să se rezolve inecuaţia $f(x) \leq 1$.

2. Fie $a, b, c \in (-1, \infty)$ astfel încât să avem $ab + bc + ca + 2abc = 1$. Să se arate că:

$$\frac{1}{2+a+b} + \frac{1}{2+b+c} + \frac{1}{2+c+a} \leq 1.$$

Tudorel Lupu

3. Să se determine numerele strict pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pentru care este adevărată egalitatea:

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = \frac{2n+1}{3} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Gazeta Matematică

4. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Notăm cu $H_1, H_2, H_3, H_4$ ortocentrele triunghiurilor $ABC, BCD, CDA$ respectiv $DAB$, iar $M, n$ mijloacele diagonalelor $AC$ respectiv $BD$. Să se arate că dacă triunghiurile $MH_2H_4$ şi $NH_1H_3$ au acelaşi centru de greutate, atunci patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi.

Cezar Lupu

*** back

### 1.1.9 Covasna

1. Fie $x, y \in \mathbf{R}$ astfel încât $x - 6y + 2 = 0$ şi $x \in [-2, 4]$. Dacă
$$a = \sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 2y + 17}$$
să se calculeze $[a]$ (partea întreaga a lui $a$).

2. Să se demonstreze că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}, 2^{3^n} + 1$ este divizibil cu $3^{n+1}$.

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir neconstant, cu proprietatea că:
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{a_{n+1}}{3}, \forall n \in \mathbf{N}^*$$
şi $(b_n)_{n\geq 1}$ un şir al cărui termen general este dat de relaţia: $b_n = \frac{a_n}{n}, \forall n \in \mathbf{N}^*$. Să se demonstreze că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică.

4. În triunghiul dreptunghic $ABC, m\left(\hat{A}\right) = 90^0$. Fie $AM$ şi $AN$ $(M, N \in BC)$ înaltimea, respectiv mediana din vârful $A$ astfel încât $4 \cdot \overrightarrow{MN} = \sqrt{3} \cdot \overrightarrow{BC}$. Să se demonstreze că: $BC^2 = 4 \cdot AB \cdot AC$.

*** back

## 1.1.10 Dolj

1. Să se demonstreze prin inducţie următoarea egalitate:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}, \forall n \geq 1.$$

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, distincte două câte două şi mulţimile:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R}^* \mid ax^2+bx+c=0\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{R} \mid bx^2+cx+a=0\}, \\ C &= \{x \in \mathbb{R} \mid cx^2+ax+b=0\}. \end{aligned}$$

Să se arate că dacă $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, atunci $A \cup B \cup C$ are exact patru elemente.

3. În $\triangle ABC$ se consideră bisectoarele $(AA_1, (BB_1, (CC_1$ şi $I$ centrul cercului înscris în $\triangle ABC$.

   a) Să se exprime $\overrightarrow{AI}$ şi $\overrightarrow{AA_1}$ cu ajutorul lui $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

   b) Dacă $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=0$, să se arate că $\triangle ABC$ este echilateral.

4. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\{x\}-\{2x\}=x$.

*** back

## 1.1.11 Galaţi

1. Să se arate că oricare ar fi $2^k + 1$ numere prime mai mari ca 2, există cel puţin două care au diferenţa divizibilă cu $2^{k+1}$ (k număr natural nenul).

Petre Bătrâneţu

2. Mulţimile finite A şi B satisfac egalitatea:

$$\frac{1}{\text{card }(A \cap B)} + \frac{1}{\text{card }(A \cup B)} + \frac{1}{\text{card }P(A \cup B)} = \frac{19}{24},$$

unde card $(M)$ reprezintă numărul elementelor mulţimii $M$ iar $P(M)$ este mulţimea tuturor submulţimilor lui $M$. Să se justifice egalitatea $A = B$.

Marian Baroni

3. Să se arate că oricare ar fi numerele reale $a, b, c \in (0, \infty)$, avem inegalitatea:

$$\sqrt{\frac{ab}{ab + c\cdot(a+b+c)}} + \sqrt{\frac{bc}{bc + a\cdot(a+b+c)}} + \sqrt{\frac{ca}{ca + b\cdot(a+b+c)}} \leq \frac{3}{2}.$$

Cerasela Momoiu

4. În triunghiul ABC, cu $AB \neq AC$, punctul $D$ este mijlocul laturii $BC$, $I$ este centrul cercului înscris în triunghiul $ABC$, $DI \cap AB = \{E\}, AD \cap EC = \{S\}$.

a) Să se demonstreze că $\overrightarrow{r_I} = \frac{a\overrightarrow{r_A} + b\overrightarrow{r_B} + c\overrightarrow{r_C}}{a+b+c}$, unde $a, b, c$ sunt lungimile laturilor triunghiului $ABC$.

b) Să se calculeze valoarea raportului $\frac{SC}{SE}$ în funcţie de $a, b, c$.

Constantin Ursu

*** back

## 1.1.12 Gorj

1. Să se demonstreze că:

   a) $(x+y)^2 \geq 4xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

   b) $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} \geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}, \forall a,\ b,\ c > 0$.

2. Se consideră mulţimile $A = \{x \in \mathbb{N},\ x \leq 2008 \mid x$ se divide cu 11 dar nu se divide cu 13$\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{N},\ x \leq 2008 \mid x$ se divide cu 13 dar nu se divide cu 11$\}$. Care mulţime are mai multe elemente? Justificare.

3. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 1$ astfel încât:

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n} = \frac{(n+1)\sqrt{a_n}}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

   a) Să se determine $a_2$ şi $a_3$.

   b) Să se arate că $a_n$ este număr natural pătrat perfect, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

4. Se consideră în plan punctele $A,\ B,\ C,\ D,\ E$ şi fie $G_1$ şi $G_2$ centrele de greutate ale triunghiurilor $ABC$ respectiv $ABE$. Să se arate că:

   a) $3\overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ pentru orice punct $O$ din plan;

   b) dacă $M$ şi $N$ sunt mijloacele segmentelor $[DE]$ respectiv $[CD]$ atunci segmentele $[G_1M]$ şi $[G_2N]$ se intersectează într-un punct $G$ cu proprietatea $\frac{G_1G}{GM} = \frac{G_2G}{GN}$.

*** back

## 1.1.13 Hunedoara

1. Fie $a$, $b$, $t$ numere reale pozitive. Să se arate că

(i) Dacă $a = b$ atunci $\dfrac{1}{a+bt} + \dfrac{t}{at+b} = \dfrac{2}{a+b}$.

(ii) Dacă $a < b$ atunci $\dfrac{1}{a+bt} + \dfrac{t}{at+b} \geq \dfrac{2}{a+b}$.

(iii) Dacă $a > b$ atunci $\dfrac{1}{a+bt} + \dfrac{t}{at+b} \leq \dfrac{2}{a+b}$.

2. Fie $\mathbb{Z}^2 = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{Z}\}$ şi $XOY$ un reper cartezian în plan

(i) Dacă $ABC$ este un triunghi din planul $XOY$ ale cărui vârfuri au coordonatele în $\mathbb{Z}^2$, să se arate că $2 \cdot \text{aria}\,(ABC) \in \mathbb{N}^*$.

(ii) Să se cerceteze dacă există în planul $XOY$ un hexagon regulat ale cărui vârfuri să aibă coordonatele în $\mathbb{Z}^2$.

3. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi numerele naturale nenule $a_1, a_2, ..., a_n$. Să se arate că toate ecuaţiile $x^2 - (a_k + 1)\, x + a_{k+1} = 0, k = 1, 2, ..., n$ cu $a_{n+1} = a_1$ au rădăcinile în $\mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

4. Fie $ABC$ un triunghi nedreptunghic, $H$ ortocentrul său, $O$ centrul cercului circumscris triunghiului, iar $O_a, O_b$ respectiv $O_c$ centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $HBC, HCA$, respectiv $HAB$.

(i) Să se arate că $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{AO}$.

(ii) Să se demonstreze că pentru orice punct $M$ din planul triunghiului $ABC$ are loc relaţia $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MO_a}$.

(iii) Să se demonstreze că $O$ este ortocentrul triunghiului $O_aO_bO_c$.

*** back

### 1.1.14 Iaşi

1. Dacă $a, b, c$ sunt numere reale pozitive cu suma 1, demonstraţi inegalitatea:

$$\frac{\sqrt{ab}}{1-c}+\frac{\sqrt{bc}}{1-a}+\frac{\sqrt{ca}}{1-a}\leq\frac{1}{8}\left(3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

2. Arătaţi că într-un triunghi dreptunghic, dreapta $IG$ nu poate fi paralelă cu ipotenuza, însă poate fi paralelă cu una dintre catete (notaţiile sunt cele uzuale).

3. Demonstraţi că pentru orice $x\in(0,1)$, există $n\in\mathbb{Z}$ pentru care $\frac{1}{3}\leq\{nx\}<\frac{1}{2}$ (unde $\{\cdot\}$ desemnează partea fracţionară).

4. Fie mulţimea $A=\{1,2,3,...,98\}$. Arătaţi că oricum am alege 50 de elemente ale lui $A$, există două printre ele având suma cub perfect.

Subiect elaborat de Gabriel Popa

*** back

## 1.1.15 Maramureş

1. a) Să se arate că $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\geq\frac{(x+y)^2}{a+b}, \forall x,y\in\mathbb{R}$ şi $a,b>0$. Generalizare.

b) Să se determine cel mai mare număr real $\alpha$, ştiind că

$$\frac{a^2}{b-4}+\frac{b^2}{c-4}+\frac{c^2}{a-4}\geq\alpha,\ \forall\, a,b,c\in(4,\infty).$$

2. Se consideră numărul natural $a$ şi expresia $E(a)=\{\sqrt{a}\}+\{\sqrt{a}\}^2+\{\sqrt{a}\}^3$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real $x$. Să se demonstreze că $E(a)$ este număr raţional dacă şi numai dacă $a$ este pătrat perfect.

Florin Bojor

3. Fie triunghiul $ABC$. În planul triunghiului considerăm punctele definite de relaţiile următoare:

$$\overrightarrow{AT}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB},\ 2\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{0},\ \overrightarrow{AD}=\frac{18}{35}\overrightarrow{AB}$$

şi

$$34\overrightarrow{MA}+36\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}=0.$$

a) Determinaţi două numere $x,\ y\in\mathbb{Z}$ pentru care $x\cdot\overrightarrow{MT}+y\cdot\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{0}$.

b) Arătaţi că punctele $C, M, D$ sunt coliniare.

c) Dacă $AM\cap BC=Q$ aflaţi valoarea raportului $\frac{MA}{AQ}$.

G.M. 8/2005

4. Pentru fiecare număr real $a$ şi fiecare submulţime $X\subset\mathbb{R}$ definim mulţimile

$$aX=\{ax:x\in X\}\ \text{şi}\ X+a=\{x+a:x\in X\}.$$

Să se determine toate şirurile de numere naturale $(a_n)_{n\geq1}$ şi $(b_n)_{n\geq1}$ astfel încât

$$(2\mathbb{Z}+1)\cup(2^2\mathbb{Z}+2)\cup(2^3\mathbb{Z}+2^2)\cup\ldots\cup(2^n\mathbb{Z}+2^{n-1})=a_n\mathbb{Z}\backslash b_n\mathbb{Z}.$$

Marin Toloşi

*** back

## 1.1.17 Sălaj

1. Fie $a,\ b > 0$ astfel încât $a^n + b^n = 2, n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că

   a) $ab \leq 1$;

   b) $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geq 4$.

2. Arătaţi că $\exists m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât partea întreagă a numărului

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{mn+1}$$

   să fie 1, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

3. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ce satisfac ecuaţia

$$x^2 f(x) + f(2-x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 5,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

G.M. 12/2006

4. Fie $[AB]$ şi $[CD]$ două coarde perpendiculare ale unui cerc de centru $O$. Dacă $\{P\} = AB \cap CD$ să se demonstreze că $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}$.

*** back

## 1.1.18 Satu Mare

1. Arătaţi că:

a) $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(x+1), \forall x \geq 0$

b) $\sqrt{\frac{a}{b+1}} + \sqrt{\frac{b}{a+1}} < \frac{a+b+1}{a+1}, \forall a, b \in [0, +\infty)$, cu $a \leq b$.

2. O funcţie $f$ definită pe mulţimea numerelor naturale strict pozitive verifică relaţia:

$$f(1) + 2f(2) + \ldots + nf(n) = \frac{n^2(n+1)}{2} f(n), \forall n \geq 1.$$

Dacă $f(1) = 2008$, să se calculeze $f(2008)$.

Adalbert Kovacs

3. a) Să se rezolve în numere naturale ecuaţia: $xy + 2(x-y) = 2007$.

Traian Tamîian

b) Determinaţi $a_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1, 2007}$, astfel încât $\sum (-1)^k a_k = \sum a_k^2 = 2007$.

Traian Tamîian

4. a) În truinghiul $ABC$, centrul cercului înscris este $I$ şi centrul de greutate este $G$. Să se determine relaţia între lungimile laturilor triunghiului astfel încât dreapta $IG$ să fie paralela cu latura $BC$.

Olosz Ferenc

b) În triunghiul $ABC$ oarecare se consideră punctul $S \in (BC)$ astfel încât $\frac{BS}{CS} = \frac{c^2}{b^2}$, unde $\overrightarrow{AB} = \vec{c}; \overrightarrow{BC} = \vec{a}; \overrightarrow{AC} = \vec{b}$, având modulele respectiv $c, a, b$. Dovediţi că:

$$\left|\overrightarrow{AS}\right| \leq \frac{bc(b+c)}{b^2+c^2}.$$

Netea Aurel

*** back

## 1.1.19 Teleorman

1. a) Dacă $a, b > 0$, arătaţi că

$$\frac{2}{a+b} \geq \frac{a+b}{a^2+b^2}.$$

b) Dacă $x, y, z > 0$ şi $xyz = 1$ , arătaţi că:

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} + \frac{y+z}{y^2+z^2} + \frac{z+x}{z^2+x^2} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

2. Să se determine numerele $a, b, c, d$ în progresie geometrica, ştiind că $a+1, b+6, c+6$ şi $d-4$ sunt în progresie aritmetica.

3. Fie $ABC$ un triunghi, $D$ mijlocul lui $(AC)$ şi $M$ un punct în plan astfel încât

$$\overrightarrow{MA} + a \cdot \overrightarrow{MB} = b \cdot \overrightarrow{MD}, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}.$$

a) Dacă $a = b = 1$, arataţi că $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BC}$.

b) Dacă $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BC}$, arataţi că $a = b = 1$.

4. În patrulaterul $ABCD$, $M$, $N$, $P$, $Q$ sunt mijloacele laturilor $(AB)$, $(BC)$, $(CD)$ respectiv $(DA)$.

a) Arătaţi că: $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$ şi $\overrightarrow{QN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$.

b) Arătaţi că: $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{AC}$.

*** back

## 1.1.20 Timiş

1. Să se determine numărul elementelor mulţimii:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x = \frac{m^2+3}{m^2+m+1}, m \in \mathbb{Z} \cap [-2008, 2008] \right\}.$$

2. Să se calculeze

$$\sum_{k=2}^{2008} \frac{\left\lfloor \frac{k^2}{4} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor},$$

unde $\lfloor x \rfloor$ reprezintă partea întreagă a numărului real $x$.

Andrei Eckstein

3. Fie $ABCD$ un patrulater convex, $E$ - mijlocul diagonalei $[AC]$ şi $F$ mijlocul celeilalte diagonale $[BD]$. Demonstraţi că dacă $\alpha \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, atunci patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

4. Dacă $G$ este centrul de greutate al triunghiului $ABC$, iar $G_1 G_2, G_3$ sunt centrele de greutate ale triunghiurilor $GBC, GCA$, respectiv $GAB$, arătaţi că:

$$\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = \overrightarrow{0}.$$

Aurel Doboşan

*** back

### 1.1.21 Vaslui

1. Dacă $a, b, c > 0$ şi $a + b + c = 1$ demonstraţi că

$$\frac{\sqrt{ab}}{1-c} + \frac{\sqrt{bc}}{1-a} + \frac{\sqrt{ca}}{1-a} \leq \frac{1}{8}\left(3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

G.M. 9/2007

2. Fie $a \in \mathbb{R}, a > 2$ (fixat) şi $(x_n)_{n \geq 0}$ un şir de numere reale cu $x_0 > 0, x_1 - x_0 > 1$, care satisface recurenţa: $x_{n+1} = ax_n + (1-a)\,x_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că

$$x_n > \frac{(a-1)^n - 1}{a-2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

3. Fie $\overline{r_A}, \overline{r_B}, \overline{r_C}$ vectorii de poziţie ai vârfurilor $\triangle ABC$, iar $a, b, c$ lungimile laturilor $BC, CA$ respectiv $AB$. Să se demonstreze că dacă $(b+c-2a)\,\overline{r_A} + (c+a-2b)\,\overline{r_B} + (a+b-2c)\,\overline{r_C} = \overline{0}$ atunci $\triangle ABC$ este echilateral.

4. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil şi $H_1, H_2, H_3, H_4$ ortocentrele triunghiurilor $BCD$, $CDA$, $DAB$, $ABC$. Să se demonstreze că patrulaterul $ABCD$ este congruent cu patrulaterul $H_1H_2H_3H_4$.

*** back

## 1.1.22 Vrancea

1. Se consideră mulţimea $A = \{x^2 - 3y^2$, unde $x,\ y$ sunt numere întregi$\}$.

   a) Să se demonstreze egalitatea

   $$\left(x^2 - 3y^2\right)\left(a^2 - 3b^2\right) = (xa + 3yb)^2 - 3\,(ay + bx)^2$$

   pentru orice numere reale $a,\ b,\ x,\ y$.

   b) Să se arate că $0 \in A$, dar $2 \notin A$.

   c) Să se arate că $6^n \in A,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

2. a) Să se verifice că $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2\,(n+1)^2}{4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

   b) Să se determine mulţimea $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

   $$a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 = (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2\,.$$

3. Să se arate că punctul $I$ este centrul cercului înscris în triunghiul $ABC$ dacă şi numai dacă $a \cdot \overrightarrow{AI} + b \cdot \overrightarrow{BI} + c \cdot \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{0}$, unde $a = BC, b = CA, c = AB$.

4. Fie paralelogramul $ABCD$, $E$ un punct pe diagonala $(BD)$, diferit de centrul paralelogramului şi $C'$ simetricul lui $C$ faţă de $E$. Paralela prin $C'$ la $AD$ intersectează dreapta $AB$ în punctul $F$, iar paralela prin $C'$ la $AB$ intersectează $AD$ în punctul $G$. Să se arate că:

   a) $EF \| AC$;

   b) punctele $E, F, G$ sunt coliniare.

Daniela Sîrghie, Focşani

*** back

## 1.2 Etapa judeţeană şi a municipiului Bucureşti

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu proprietatea că $|a_{n+1} - a_n| \leq 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, iar $(b_n)_{n\geq 1}$ şirul definit prin

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Să se arate că $|b_{n+1} - b_n| \leq \frac{1}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Dan Marinescu şi Viorel Cornea, Hunedoara

2. Fie mulţimea $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 6$. Să se arate că $A$ este reuniunea a trei mulţimi disjuncte două câte două, cu acelaşi cardinal şi aceeaşi sumă a elementelor lor, dacă şi numai dacă $n$ este multiplu de 3.

***

3. Să se arate că dacă $n \geq 4, n \in \mathbb{N}$ şi $\left[\frac{2^n}{n}\right]$ este o putere a lui 2, atunci $n$ este o putere a lui 2.

E. Regen, Bucureşti

4. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Se notează cu $P$ punctul de intersecţie a dreptelor $AD$ şi $BC$, şi cu $Q$ punctul de intersecţie a dreptelor $AB$ şi $CD$. Fie $E$ al patrulea vârf al paralelogramului $ABCE$ şi $F$ intersecţia dreptelor $CE$ şi $PQ$. Să se demonstreze că punctele $D, E, F$ şi $Q$ sunt conciclice (aparţin aceluiaşi cerc).

Geoff Smith, Marea Britanie

*** back

## 1.3 Etapa naţională

1. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pentru care

$$f\left(x^2 + f(y)\right) = xf(x) + y,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$.

2. a) Arătaţi că $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^{2n}} > n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Demonstraţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea

$$\min\left\{k \in \mathbb{N}, k \geq 2 : \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{k} > n\right\} > 2^n.$$

3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi numerele reale $a_i, i = 1, 2, ..., n$ cu $|a_i| \leq 1$ şi $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$. Arătaţi că

$$\sum_{i=1}^{n} |x - a_i| \leq n, \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R} \text{ cu } |x| \leq 1.$$

4. Pe laturile triunghiului $ABC$ se consideră punctele $C_1, C_2 \in (AB), B_1, B_2 \in (CA), A_1, A_2 \in (BC)$ astfel încât triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$ au acelaşi centru de greutate. Arătaţi că mulţimile $[A_1B_1] \cap [A_2B_2], [B_1C_1] \cap [B_2C_2], [C_1A_1] \cap [C_2A_2]$ sunt nevide.

*** back

## 1.4 Concursuri interjudeţene

### 1.4.1 Gheorghe Dumitrescu, 27 octombrie 2007, Craiova

1. Demonstraţi că pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$ există $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\left(m^4 - m^2 + 1\right)\left(n^4 - n^2 + 1\right)\left(m^4 + 3m^2 + 1\right)\left(n^4 + 3n^2 + 1\right) = x^2 + y^2.$$

Traian Tămâian, G.M. 7/2007

2. a) Dacă $a, b, c \in [0, \infty)$ atunci arătaţi că $[(a+b+c)/3]^3 \geq abc$.

   b) Folosind eventual punctul a) determinaţi maximul expresiei

$$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + \ldots + x_{2005}x_{2006}x_{2007},$$

unde $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{2005}, x_{2006}, x_{2007} \in [0, \infty)$ cu $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2007} = 2007$.

3. Fie $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ un poligon regulat cu $n$ laturi înscris în cercul de centru $O$. Calculaţi suma

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}$$

în fiecare din cazurile: a) $n$ par; b) $n$ impar.

***

*** back

## 1.4.2 Nicolae Coculescu, Ziua 1, 30 noiembrie 2007, Slatina

1. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ şi $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\{kx\} = \{ky\}$ şi $\{(k+1)x\} = \{(k+1)y\}$. Să se arate că $\{nx\} = \{ny\}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

   Ovidiu Pop

2. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, \infty)$ şi $3abc = 1$, atunci are loc inegalitatea

$$\frac{3a^5}{3a^5+2bc} + \frac{3b^5}{3b^5+2ca} + \frac{3c^5}{3c^5+2ab} \geq 1.$$

   Costel Anghel

3. Fie $ABC$ un triunghi, punctele $M \in [AB]$, $N \in [AC]$, iar $P$ şi $Q$ mijloacele segmentelor $[MN]$ şi $[BC]$. Ştiind că $PQ$ este paralelă cu bisectoarea unghiului $A$, arătaţi că $[BM] \equiv [CN]$.

   Gheorghe Duţă

4. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n \geq 2$, există o unică partiţie a mulţimii $\{1, 2, ..., n\}$ în două mulţimi $A_1, A_2$ astfel încât $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \neq y$, pentru orice $x, y \in A_k, k = 1, 2$.

   Costin Bădică

*** back

### 1.4.3 Nicolae Coculescu, Ziua 2, 1 decembrie 2007, Slatina

1. Fie $a, b, c$ lungimile laturilor unui triunghi. Să se calculeze partea întreagă a numărului

$$x = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)}{(a^3 + b^3 + c^3)}.$$

Costel Anghel

2. Se consideră numărul real $u = 2 + \sqrt{3}$.

a) Să se demonstreze că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, există $a_n, b_n \in \mathbb{N}$, $a_n > b_n$, astfel încât $u^n = a_n u - b_n$.

b) Să se arate că ecuaţia $x^2 - 4xy + y^2 = 1$ are o infinitate de soluţii în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Florian Dumitrel

3. Determinaţi mulţimile $A \subset \mathbb{N}^*$, cu cel puţin două elemente, având proprietatea că pentru orice $x, y \in A, x > y$, rezultă $\frac{x - y}{(x, y)} \in A$.

Marius Perianu

4. Fie $M$ în interiorul triunghiului $ABC$. Se notează $\{D\} = AM \cap BC, \{E\} = BM \cap CA, \{F\} = CM \cap AB$. Să se determine punctul $M$ pentru care produsul

$$\frac{MA}{MD} \cdot \frac{MB}{ME} \cdot \frac{MC}{MF}$$

are valoarea minimă.

***

*** back

### 1.4.4 Unirea, 1 februarie 2008, Focşani

1. Fie progresiile aritmetice $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ şi $\mathbf{y} = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Să se arate că şirul $\mathbf{z} = (x_i \cdot y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ este o progresi aritmetică dacă şi numai dacă cel puţin una dintre progresiile $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ este constantă.

Dan Brânzei

2. Se consideră şirul $x_n = \alpha^n + a^{-n}$, unde $n \in \mathbb{N}$ şi $\alpha = 2 + \sqrt{3}$.

   a) Să se arate că există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

   b) Să se arate că $\{\alpha^n\} = 1 - \alpha^{-n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

***

3. Se dă triunghiul $ABC$, cu laturi de lungimi $a, b, c$ şi cu semiperimetrul $p$. Se consideră punctele $A_1, A_2$ astfel ca $B \in [A_1C]$, $C \in [BA_2]$ şi mijlocul $A'$ al segmentului $[A_1A_2]$. Se definesc analog punctele $B', C'$. $A_1B = c$, $A_2C = b$. Să se arate că:

   a) Segmentele $[AA'], [BB'], [CC']$ au în comun un punct $N$.

   b) Pentru orice punct $O$ din planul $(ABC)$ are loc
   $p \cdot \overrightarrow{ON} = (p-a) \cdot \overrightarrow{OA} + (p-b) \cdot \overrightarrow{OB} + (p-c) \cdot \overrightarrow{OC}$.

Dan Brânzei

4. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir strict crescător de numere impare. Notăm cu $s_k$ suma primilor $k$ termeni ai acestui şir. Să se arate că pentru orice $k$ natural în inervalul $[s_k, s_{k+1}]$ se află cel puţin un pătrat perfect.

***

*** back

## 1.4.5 Trepte în matematică, 16 februarie 2008, Călimăneşti

1. a) Să se arate că $|x-3|+|x-2|+|x-1|+|x+1|+|x+2|+|x+3| \geq 12$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

   Să se determine mulţimea valorilor lui $x$ pentru care se obţine egalitatea.

   b) Determinaţi $m \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât

   $|x|+x^2+||x|-1|+6|x-2|+|x^2-1|+3|2x+1| \geq m, \forall x \in \mathbb{R}$.

   Stabiliţi mulţimea valorilor lui $x$ pentru care se obţine egalitatea.

Florian Pană, Călimăneşti

2. Să se rezolve ecuaţiile

   a) $\left\lfloor \frac{2x+2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2x-1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2x-4}{2} \right\rfloor = 2\sqrt{x^2-x}$ în $\mathbb{Z}$.

   b) $\left\lfloor \frac{2x+2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2x-1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2x-4}{2} \right\rfloor = \left\lfloor 2\sqrt{x^2-x} \right\rfloor$ în $\mathbb{R}$, unde $\lfloor a \rfloor$ reprezintă parta întreagă a numărului $a$.

Florian Pană, Călimăneşti

3. Se consideră mulţimea $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} : x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \right\}$.

   a) Arătaţi că mulţimea $A$ este nevidă.

   b) Indicaţi 2008 elemente ale mulţimii $A$.

Vasile Buşagă, Călimăneşti

4. Fie $[BD$ şi $[CE$ bisectoare în triunghiul $ABC$, $E \in (AB)$, $D \in (AC)$.

   a) Arătaţi că vectorii $\overrightarrow{ED}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă $\angle B = \angle C$.

   b) În condiţiile de la punctul a) determinaţi $\left|\overrightarrow{ED}\right|$ *în* funcţie de $BC = l$, pentru cazurile

   i) $\angle A = 90°$ şi ii) $\angle A = 36°$.

Florian Pană, Călimăneşti

*** back

## 1.4.6 Mathematica - modus vivendi, 22-24 februarie, Rm Vâlcea

1. Să se rezolve ecuaţia: $\lfloor x^2 \rfloor + 1 = 2\lfloor x \rfloor$, unde $\lfloor x \rfloor$ reprezintă partea întreagă a numărului $x$.

Laurenţiu Panaitopol, Bucureşti

2. În triunghiul $ABC$, cu $AB < AC, AB = 2BD$ unde $[AD$ este bisectoarea $\angle BAC, D \in (BC)$.

   a) Demonstraţi că $IG \| BC$ unde $G$ este centrul de greutate al triunghiului şi $I$ este centrul cercului înscris triunghiului $ABC$.

   b) Dacă $BC = 3AG$ arătaţi că $3a^2 = 2bc$, unde $a, b, c$ sunt lungimile laturilor triunghiului.

Ion Ghica, Râmnicu Vâlcea

3. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \infty)$ astfel încât $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S$. Să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{a_k + a_{k+1}}{2S - a_k - a_{k+1}}} \geq 2,$$

unde $a_{n+1} = a_1$. Precizaţi când are loc egalitatea.

Dumitru Acu, Sibiu

4. Se consideră triunghiul $ABC$ şi punctele $D, Q, E$ cu proprietăţile:

$$D \in (AB), Q \in (CD), C \in (BE) \text{ şi } \frac{AB}{AD} = \frac{CQ}{QD} = \frac{BE}{BC}.$$

Se mai consideră şi punctele $F$ şi $M$ aşa încât

$$CE \| DF, DC \| FE, DE \cap FQ = \{M\}.$$

Să se arate că punctele $Q$, $M$ şi $F$ sunt coliniare dacă şi numai dacă $2 + \frac{AB}{AD} = \frac{DE}{DM}$.

Nicolae Pavelescu, Râmnicu Vâlcea

*** back

### 1.4.7 Cezar Ivănescu, 15 martie 2008, Târgovişte

1. Demonstraţi că pentru orice numere reale nenule $a, b, c, d, x, y$ are loc inegalitatea

$$\frac{(a+b\sin x)^2+(c+d\sin y)^2+(a+b\cos x)^2+(c+d\cos x)^2}{a^2+b^2+c^2+d^2} \leq 3.$$

Dinu Teodorescu

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{2}{x^2}+3$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}^*$. Calculaţi

$$S=\sum_{k=2}^{2007}\frac{1}{f(k)-2}.$$

Gazeta Matematică

3. Să se aşeze numerele $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ în tabelul de mai jos, astfel încât fiecare număr să apară o singură dată, iar sumele numerelor pe fiecare din cele trei linii şi cele patru coloane să fie cele scrise pe prima linie, respectiv prima coloană. Justificare!

| $\sum$ | 21 | 10 | 18 | 29 |
|---|---|---|---|---|
| 24 | | | | |
| 15 | | | | |
| 39 | | | | |

Adrian Atanasiu

*** back

### 1.4.8 Gheorghe Lazăr, 21-23 martie 2008, Sibiu

1. Dacă $a_1, a_2, ..., a_n \in [0,1]$, să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{a_1}{a_1a_2+n-1}+\frac{a_2}{a_2a_3+n-1}+...+\frac{a_n}{a_na_1+n-1}\leq 1.$$

Alin Pop, Sibiu

2. Fie $n$ un număr natural, $n\geq 3$ şi $2n$ numere reale $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ care constituie o progresie aritmetică de raţie $r\neq 0$. Arătaţi că oricum am alege submulţimea $A$ cu $n+2$ elemente, $A\subset\{a_1,a_2,...,a_{2n}\}$, există cel puţin două elemente distincte în $A$ având suma $2(a_1+nr)$.

Dumitru Acu, Sibiu

3. Fie $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}$, $n\geq 4$, vectori în plan (nu neapărat diferiţi), pentru care:

$$|\overrightarrow{v_1}|+|\overrightarrow{v_2}|+...+|\overrightarrow{v_n}|=1.$$

a) Presupunând în plus că, că toţi vectorii sunt coliniari, arătaţi că există $I$ o submulţime nevidă de indici, $I\subset\{1,2,...,n\}$, astfel încât $\left|\sum_{i\in I}\overrightarrow{v_i}\right|\geq\frac{1}{2}$.

b) În cazul general, demonstraţi că există $J$ o submulţime nevidă de indici, $J\subset\{1,2,...,n\}$, astfel încât $\left|\sum_{j\in J}\overrightarrow{v_i}\right|>\frac{1}{4}$.

Dumitru Barac, Sibiu

4. Se consideră un triunghi $ABC$ ascuţitunghic, $\angle B<60^\circ$ şi $P$ un punct oarecare din interiorul triunghiului (notaţiile sunt cele obilnuite). Definim funcţia $f:\mathrm{Int}[\triangle ABC]\rightarrow(0,\infty)$, $f(X)=\min\{XM+MN+NP: M\in[BC], N\in[AB]\}$. Să se arate că există un singur punct $Y$ în planul triunghiului având proprietatea $\frac{HY}{f(H)}=\frac{GY}{f(G)}=\frac{OY}{f(O)}$ şi să se precizeze modul de construcţie al lui $Y$.

Emanuel Vlad, Bucureşti

*** back

### 1.4.9 Sfera, 22 martie 2008, Băileşti

**Partea I.**

1. Dacă $S = \sum_{n=1}^{1000} \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ , unde $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ este partea întreagă a lui $n$, atunci:

   a) $S = 20000$; b) $S = 20001$; c) $S = 20615$; d) $S = 20715$

2. Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $2008\,(x - 1) + \lfloor x \rfloor$ , unde $\lfloor x \rfloor$ reprezintă partea întreagă a lui $x$ este:

   a) 0; b) 1; c) 2; d) 3

3. Dacă $S = \sum_{m \in A} m$, unde

   $$A = \left\{ m \in \mathbb{Z} : \text{ecuaţia } x^2 - 2mx + m + 3 = 0 \text{ admite o rădăcină întreagă} \right\}$$

   atunci:

   a) $S = 7$; b) $S = 1$; c) $S = 10$; d) $S = 0$

4. Fie $x, y, z > 0$ astfel încât $x + y + z = xy + yz + zx$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$. Dacă $P = xyz$ atunci:

   a) $P = 0$; b) $P = \frac{1}{2}$; c) $P = 1$; d) $P = 2$

5. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat şi punctele $M \in (AC)\,, N \in (CE)$ astfel încât $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = k$. Valoarea lui $k$ pentru care punctele $B, M, N$ sunt coliniare este:

   a) $\frac{1}{2}$; b) 1; c) $\sqrt{3}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Cătălin Cristea, Craiova

*** back

**Partea a II-a**

1. Fie $M$ mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului $ABC$. Notăm cu $I$ şi $J$ centrele cercurilor înscrise în triunghiurile $ABM$ şi $ACM$. Dacă $\angle AIB - \angle MIJ = 90^\circ$, să se demonstreze că $[AB] \equiv [AC]$.

Marius Perianu şi Florian Dumitrel, Slatina

2. Fie $a, b, c > 0$. Demonstraţi că

$$a\sqrt{ab} + b\sqrt{bc} + c\sqrt{ca} \leq a^4 + b^4 + c^4 + \frac{3}{4}.$$

Cătălin Cristea, Craiova

*** back

## 1.4.10 Traian Lalescu, 28-30 martie 2008, Deva

1. a) Să se arate că dacă $x, y \in (0, \infty)$ au produsul 1, atunci

   $$4 + x^2 + y^2 \geq 3(x + y).$$

   b) Fie $a, b, c, d$ numere reale pozitive cu $abcd = 1$. Să se arate că

   $$8 + (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq 3(a + b)(c + d).$$

   Andrei Eckstein

2. Fie $k \in \mathbb{R}$ fixat.Să se determine mulţimea valorilor expresiei $\dfrac{(a+b+c)^3}{abc}$, unde $a, b, c$ sunt numere reale nenule astfel încât $\dfrac{b+kc}{a} = \dfrac{c+ka}{b} = \dfrac{a+kb}{c}$.

   Andrei Eckstein

3. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc de centru $O$. Notăm cu $H_A, H_B, H_C$ şi $H_D$ ortocentrele triunghiurilor $BCD, CDA, DAB$, respectiv $ABC$, iar cu $G_A, G_B, G_C, G_D$ centrele de greutate ale acestor triunghiuri.

   a) Demonstraţi că patrulaterele $H_AH_BH_CH_D$ şi $G_AG_BG_CG_D$ sunt inscriptibile.

   b) Fie $O_H$ şi $O_G$ centrele cercurilor circumscrise patrulaterelor $H_AH_BH_CH_D$ şi $G_AG_BG_CG_D$. Arătaţi că punctele $O, O_G$ şi $O_H$ sunt coliniare.

   Dorel Miheţ

4. Fie $n_0 \in \mathbb{N}$. Aflaţi numărul funcţiilor $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cu proprietăţile:

   i) $f(f(n) + n) = f(n), \forall n \in \mathbb{N}$

   ii) $f(n_0) = 1$.

   Dorel Miheţ

*** back

## 1.4.11 Alexandru Myller, 11-13 aprilie 2008, Iaşi

1. Determinaţi numărul soluţiilor ecuaţiei

$$\frac{\lfloor x \rfloor}{\{x\}} = \frac{2007x}{2008}.$$

Mihail Bălună

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x^6 + x^5 + 4 = y^2$.

Ion Cucurezeanu

3. Fie $ABCDE$ un pentagon convex. Demonstraţi că

$$\frac{\text{aria}\,(ABC)}{\text{aria}(ABCD)} + \frac{\text{aria}\,(CDE)}{\text{aria}\,(BCDE)} < 1.$$

Dan Ismailescu

4. Fie $C_1, C_2$ două cercuri concentrice distincte şi $[AB]$ un diametru al cercului $C_1$. Considerăm două puncte variabile $M \in C_1, N \in C_2$, nesituate pe dreapta $AB$.

a) Arătaţi că există şi sunt unic determinate punctele $P, Q$ situate pe dreptele $MA$, respectiv $MB$, astfel încât $N$ să fie mijlocul segmentului $[PQ]$.

b) Arătaţi că suma $AP^2 + BQ^2$ este constantă, unde $P, Q$ sunt definite la punctul a).

Mihai Piticari, Mihail Bălună

*** back

## 1.4.12 Gheorghe Ţiţeica, 22-24 mai 2008, Drobeta Tr. Severin - Proba individuală

1. Găsiţi cel mai mic număr real $A$ astfel încât pentru orice două pătrate având suma ariilor egală cu 1 există un dreptunghi de arie $A$ în care pot fi introduse

cele două pătrate (fără ca interioarele celor două pătrate să se suprapună). Se va considera că laturile pătratelor sunt paralele cu laturile dreptunghiului.

***

2. Fie $n$ şi $k$ numere naturale nenule cu $k < n$ şi fie $x_1, ..., x_n$ numere reale pozitive.

(i) Să se arate că dacă $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1$, atunci

$$\frac{x_1}{x_2(x_3 + ... + x_{k+2})} + \frac{x_2}{x_3(x_4 + ... + x_{k+3})} + ... + \frac{x_n}{x_1(x_2 + ... + x_{k+1})} \geq \frac{n^2}{k};$$

(ii) Să se arate că dacă $\prod_{i=1}^{n} x_i \geq 1$, atunci

$$\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + kx_1x_2 + x_2^2} + \frac{x_2^3 + x_3^3}{x_2^2 + kx_2x_3 + x_3^2} + ... + \frac{x_n^3 + x_1^3}{x_n^2 + kx_nx_1 + x_1^2} \geq \frac{2n}{k+2}.$$

Constantin Cristian Dinu

3. Fie $f : [a, b] \to [-1, 1]$ o funcţie cu proprietatea că

$$(f \circ f)(x) = \frac{2x+1}{x+2}, \forall x \in [a, b].$$

Să se demonstreze că $f(a) + f(b) = 0$.

Romeo Ilie, Gazeta Matematică 7-8/1998

*** back

## 1.4.13 Gheorghe Ţiţeica, 22-24 mai 2008, Drobeta Tr. Severin - Proba pe echipe

1. Să se găsească toate soluţiile reale ale sistemului

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a^2 \\ \ldots \\ x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n = a^n \end{cases}$$

unde $a \in \mathbb{R}$ este dat.

***

2. Fie $d_1, d_2, \ldots, d_k$ toţi divizorii naturali ai numărului natural $n$, astfel încât

$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n.$

Să se determine toate numerele $n$ pentru care $k \geq 4$ şi

$n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2.$

***

*** back

### 1.4.14 Concursul interjudeţean "Papiu Ilarian", Târgu Mureş

1. Fie $a, b, c$ numere reale pozitive.Pentru fiecare număr natural $n$ definim suma:

$$S_n = \frac{a^n b^n}{a^{2n+3} + b^{2n+3} + a^n b^n} + \frac{b^n c^n}{b^{2n+3} + c^{2n+3} + b^n c^n} + \frac{c^n a^n}{c^{2n+3} + a^{2n+3} + c^n a^n}$$

Să se arate că:

a)$S_n \leq S_{n-1}, \forall n \geq 1$;

b)Dacă $abc = 1$ atunci $S_n \leq 1, \forall n \geq 1$.

2. Fie ecuaţiile de gradul doi: $x^2 - ax + b = 0$ şi $y^2 - bx + a = 0$.

a)Să se arate că există o infinitate de perechi $(a, b)$ de numere întregi pentru care ambele ecuaţii au rădăcinile întregi.

b)Să se determine toate perechile $(a, b)$ de numere naturale pentru care ambele ecuaţii au rădăcinile naturale.

3. Să se determine toate funcţiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ cu proprietatea:

$$f(m \cdot n) = (m, f(n)) \cdot [n, f(m)], \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

(s-a notat $(x, y)$ =c.m.m.d.c. şi $[x, y]$ =c.m.m.m.c. al numerelor $x$ şi $y$).

4. Într-un cub cu muchia egală cu 1 se consideră $n$ sfere cu suma ariilor suprafeţelor lor egală cu 32.

a)Să se arate că există o dreaptă care taie cel puţin 9 sfere.

b)Să se arate că există un plan care taie cel puţin 11 sfere.