LOCALE III

- *LOCALA SUCEAVA*
- *LOCALA TELEORMAN*
- *LOCALA VASLUI*
- *LOCALA VRANCEA*
- *JUDETEANA 2007*
- *NATIONALA PITESTI 2007*
- *BARAJ I 13 APR 2007*
- *SELECTIE I OIM SI OBM 2007*
- *BARAJ II 2007*
- *SELECTIE OIM SI OBM II 2007*

CLASA A XI-A

1. Să se determine $\min\limits_{m\in R\setminus\{-1\}} \dfrac{\sqrt{m^2+4m+5}}{|m+1|}$.

Gheorghe Marchitan

2. Se consideră şirul $(x_n)_{n\in R^*}$, definit prin relaţia $x_n = ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c,\ \ n \geq 2$, unde $x_1 \in [0,\ +\infty),\ a,\ b > 0,\ (b-1)^2 < 4ac$. Să se demonstreze că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{\dfrac{x_2^{x_1}x_3^{x_2}x_4^{x_3}\ldots x_{n+1}^{x_n}}{\left(x_1^{x_1}x_2^{x_2}x_3^{x_3}\ldots x_n^{x_n}\right)^2}}}{a^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}}} = e^{\frac{b}{a}}$.

Cătălin Ţigăeru

3. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$ astfel încât $A^3 = O_2$. Să se arate că există $\lambda \in \boldsymbol{R}$ astfel încât:

a) $B = (1+\lambda)\cdot A + I_2$ şi $C = (1-\lambda)\cdot A + I_2$ sunt inversabile;

b) $\det\left(B^{-1} + C^{-1}\right) = 4$.

Dumitru Crăciun

4. Să se determine $A^n,\ n \in \boldsymbol{N}^*$ ştiind că

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ k\cdot a & k\cdot b+1 \end{pmatrix},\ a,\ b,\ k \in \boldsymbol{R},\ a + k\cdot b \neq 0.$$

Livia Balaci

Back

LOCALA TELEORMAN

CLASA A XI-A

1. Să se determine matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ care verifică relația $A^2 - 3A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Fie $a, b, c \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{2a} & \frac{1}{2b+1} & \frac{1}{2c+1} \\ \frac{1}{2b+1} & \frac{1}{2b} & \frac{1}{2a+1} \\ \frac{1}{2c+1} & \frac{1}{2a+1} & \frac{1}{2c} \end{vmatrix}$$

este nenul.

3. Șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale verifică relația

$$[x_1] + [3x_2] + [5x_3] + \ldots + [(2n-1)x_n] = n^2, \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{\sqrt{n}} = 1$.

Marius Burtea

4. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x^n}$ pentru $n = 0$ și $n = 1$. Pentru ce valori $n \in \mathbf{N}$ există limita?

Probleme propuse și selectate de ***Mihai Ionescu***

[Back]

CLASA A XI-A

1. Să se determine, discutând după parametrii reali a, b, c limita:

$$\lim_{x\to\infty}\left(a\sqrt{x+1}+b\sqrt{4x+1}+c\sqrt{9x+1}\right).$$

2. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} S_n$ știind că: $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{2^{2k-1}+9\cdot 2^{k-1}+9}$.

G.M. 11/2006, *Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad*

3. Fie ecuația $x^3-x^2+ax+b=0$ cu $a,\ b\in \mathbf{C}$ și $x_1,\ x_2, x_3$ rădăcinile sale. Calculați determinantul:

$$\begin{vmatrix} -x_1 & x_1+x_3 & x_1+x_2 \\ x_2+x_3 & -x_2 & x_1+x_2 \\ x_2+x_3 & x_1+x_3 & -x_3 \end{vmatrix}.$$

G.M. 8/2006, *Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad*

4. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, cu $a+d=2,\ bc=-(a-1)^2$ și $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$.

Arătați că:

a) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+d_k)=2n$;

b) $\sum_{k=1}^{n}b_k\cdot\sum_{k=1}^{n}c_k=-\left[\frac{n(n+1)(a-1)}{2}\right]^2$.

Back

CLASA A XI-A

1. **a)** Determinați $x \in \boldsymbol{R}$ pentru care $\begin{vmatrix} x & x+1 & 2 & 3 \\ x+1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 3 & x & x+1 \\ 3 & x & x+1 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

b) Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$ astfel încât $A^2 + I_2 = 3A$. Să se calculeze $\det(A + I_2)$.

2. Se consideră șirul de numere reale strict pozitive $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin

$$x_n = \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_{n-2}} + \ldots + \frac{n}{x_0}, \ (\forall) n \geq 1.$$

a) Arătați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător.

b) Arătați că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

c) Arătați că șirul $\left(\frac{x_n}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ este mărginit.

3. Se consideră matricele pătratice $A, \ B \in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$ cu $A \neq O_2$, $A \neq I_2$, pentru care $A^2 = A$ și $B^{2007} = A$.

a) Arătați că A este singulară și că $\operatorname{tr}(A) = 1$.

b) Arătați că există $\alpha \in \boldsymbol{R}$ astfel încât oricare ar fi $n \geq 2$ să avem $B^n = \alpha^{n-1} B$.

c) Arătați că $A = B$.

4. **a)** Determinați $a, \ b \in \boldsymbol{R}$ astfel încât:

$$\lim_{x \to \infty} \left(a + \frac{bx^3}{x^4 + 1}\right)^x = e^{2007}.$$

b) Determinați $c \in (0, \ 2\pi)$ astfel încât:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(c + x) \cdot \operatorname{tg}(c + 2x) - \operatorname{tg}^2(c)}{x} \geq 6.$$

Probleme propuse și selectate de

Elena Pătrașcu, Cristi Savescu, Focșani

Back

JUDETEANA 2007

CLASA A XI-A

1. Fie $a_1 \in (0,\ 1)$ și $(a_n)_{\geq 1}$ șirul de numere reale dat de următoarea recurență:

$$a_{n+1} = a_n(1 - a_n^2), \text{ pentru orice } n \in N^*.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot a_n$.

2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}^*)$. Dacă $A \cdot {}^tA = I_n$, arătați că:

a) $|\operatorname{tr}(A)| \leq n$;

b) Pentru n impar avem $\det(A^2 - I_n) = 0$.

Cu $\operatorname{tr}(X)$ s-a notat urma matricei X, adică suma elementelor de pe diagonala principală iar ${}^tX$ este transpusa matricei X.

3. Fie $a,\ b \in \mathbf{R}$. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{a^2n^2 + bn} - an\right).$$

Fie șirul $(x_n)_{\geq 1}$ dat de $x_n = \sqrt{n} - \left[\sqrt{n}\right]$. Se notează cu A mulțimea punctelor sale limită, adică mulțimea punctelor $x \in \mathbf{R}$ pentru care există un subșir al lui $(x_n)_n$ cu limita x.

a) Să se arate că $\mathbf{Q} \cap [0,\ 1] \subset A$.

b) Să se determine A.

(Cu $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului real x).

4. Fie $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ cu proprietatea că $B^2 = I_n$ și $A^2 = AB + I_n$. Să se demonstreze că $\det(A) \leq \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Back

NATIONALA PITESTI 2007

CLASA A XI-A

1. Fie $A,\ B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ astfel încât $A^2 + B^2 = AB$. Să se arate că $(AB - BA)^2 = O_2$.

2. Dacă numerele reale a şi b $(a < b)$ sunt în imaginea unei funcţii continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, arătaţi că există un interval $I \subset \mathbf{R}$ astfel încât $f(I) = [a,\ b]$.

3. Definim $H_n = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1 \right\}$. Să se arate că există un număr finit de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ pentru care transformarea $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ dată de $f(x) = Ax$ are proprietatea $f(H_n) = H_n$:

a) pentru $n = 2$;

b) pentru orice $n \geq 3$.

4. Spunem că o funcţie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ are proprietatea (P) dacă f este derivabilă cu derivata continuă şi satisface relaţia:

$$f\left(x + f'(x)\right) = f(x),$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Arătaţi că:

a) Dacă f are proprietatea (P), atunci ecuaţia $f'(x) = 0$ are cel puţin o soluţie.

b) Daţi exemplu de funcţii neconstante cu proprietatea (P).

c) Dacă f are proprietatea (P) şi $f'(x) = 0$ are cel puţin două soluţii, atunci f este o funcţie constantă.

Back

BARAJ I 13 APR 2007

Primul baraj de selecție pentru OBM
13 aprilie 2007

1. Se consideră numerele întregi a și b. Să se arate că există și sunt unice numerele întregi x, y astfel încât:

$$(x+2y-a)^2+(2x-y-b)^2 \le 1.$$

2. Un trapez $ABCD$ are bazele AB și CD, iar cercurile cu diametrele AD și BC se intersectează în punctele M și N. Să se arate că punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD aparține dreptei MN.

3. Un carton de formă dreptunghiulară se împarte în suprafețe poligonale astfel: la fiecare pas una din suprafețele existente se taie printr-o linie dreaptă, obținându-se două noi suprafețe. Care este numărul minim de tăieturi necesare pentru ca, printre suprafețele obținute, să existe cel puțin 251 poligoane cu 11 laturi?

Back

Prima probă de selecție pentru OIM și OBM
13 aprilie 2007

1. Considerăm un punct P în interiorul unui poligon convex $A_1A_2...A_{2n}$, $n \geq 2$, nesituat pe niciuna din diagonalele acestuia. Arătați că există o latură a poligonului care nu este intersectată de niciuna dintre dreptele PA_1, PA_2, ..., PA_{2n}.

2. Fie $\mathscr{C}(O_1)$ și $\mathscr{C}(O_2)$ două cercuri exterioare. Punctele A, B, C aparțin cercului $\mathscr{C}(O_1)$, iar punctele D, E, F aparțin cercului $\mathscr{C}(O_2)$, astfel încât AD și BE sunt tangente exterioare la cercuri, iar CF este o tangentă comună cu punctele C, F aflate în interiorul patrulaterului $ABED$. Dreptele CO_1 și FO_2 intersectează dreptele AB, respectiv DE în M, respectiv N. Arătați că dreapta MN trece prin mijlocul segmentului CF.

3. Fie $f : \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R}$ cu proprietatea că $|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$, pentru orice $x, y \in \boldsymbol{Q}$. Să se arate că f este constantă.

4. Determinați valoarea maximă a produsului $(1-x_1)(1-x_2)\cdot\ldots\cdot(1-x_n)$, $n \geq 2$, dacă $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, ..., $x_n \geq 0$ și $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$.

Back

BARAJ II 2007

Al doilea baraj de selecție pentru OBMj

14 aprilie 2007

1. Să se determine numerele naturale $n \geq 4$ cu proprietatea că $\left[\sqrt{n}\right]+1$ divide $n-1$ şi $\left[\sqrt{n}\right]-1$ divide $n+1$.

2. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Notăm M, N punctele de tangență ale cercului înscris în triunghiul ABD cu laturile AB, AD respectiv şi P, Q punctele de tangență ale cercului înscris în triunghiul CBD cu laturile CD, CB respectiv. Dacă cercurile înscrise în triunghiurile ABD şi CBD sunt tangente, să se arate că:

a) Patrulaterul $ABCD$ este circumscriptibil.

b) Patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

c) Cercurile înscrise în triunghiurile ABC şi ADC sunt tangente.

3. Fie ABC un triunghi isoscel în A. Pentru orice punct P interior triunghiului considerăm cercul de centru A şi rază AP şi notăm M şi N intersecțiile laturilor AB, respectiv AC cu cercul. Să se determine poziția punctului P pentru care $MN+BP+CP$ este minimă.

Back

A doua probă de selecție pentru OIM și OBM

14 aprilie 2007

1. Fie $f = X^n + a_{n-1}X_{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ un polinom cu coeficienți întregi de grad $n \geq 3$, cu $a_k + a_{n-k}$ număr par pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n-1$ și a_0 număr par. Dacă $f = gh$, unde g și h sunt polinoame cu coeficienți întregi cu gradul lui g cel mult gradul lui h și toți coeficienții lui h sunt impari, arătați că f are o rădăcină întreagă.

2. Fie ABC un triunghi. Cercul înscris în triunghi este tangent la AB în E, iar cercul exînscris relativ la BC este tangent la dreapta AB în F. Fie D punctul de pe latura BC pentru care cercurile înscrise în triunghiurile ABD și ACD au. Dreptele DE și DB intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ADF în X și Y. Arătați că $XY \parallel AB$ dacă și numai dacă $AB = AC$.

3. Determinați mulțimile A de numere naturale nenule, cu $|A| \geq 2$ astfel încât pentru orice numere distincte $x, y \in A$ avem $\dfrac{x+y}{(x, y)} \in A$.

4. Fie S mulțimea n – uplurilor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ cu $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, unde $n \geq 3$. Notăm cu $M(n)$ cel mai mic întreg cu proprietatea că orice submulțime a lui S cu cel puțin $M(n)$ elemente conține trei n – uplurilor $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$, $(z_1, \ldots, z_n)$ astfel încât

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(z_i - x_i)^2.$$

a) Arătați că $M(n) \leq \left[\dfrac{2^{n+1}}{n}\right] + 1$.

b) Calculați efectiv $M(3)$ și $M(4)$.

Back