LOCALE II

- *LOCALA DAMBOVITA*
- *LOCALA DOLJ*
- *LOCALA GALATI*
- *LOCALA GIURGIU*
- *LOCALA HUNEDOARA*
- *LICEUL MIRON COSTIN IASI*
- *LOCALA IASI*
- *LOCALA MARAMURES*
- *LOCALA OLT*
- *LOCALA PRAHOVA*
- *LOCALA SATU MARE*
- *LOCALA SIBIU*

CLASA A XI-A

1. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{Z})$ astfel încât $\operatorname{tr}(A^2)=0$. Demonstrați că se pot alege câteva elemente ale matricei A^6 a căror medie aritmetică este un număr natural pătrat perfect.

Cristinel Mortici, Târgovişte

2. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ astfel încât $A^3 = I_3$ şi $a, b, c \in \mathbf{R}$ diferite două câte două. Arătați că matricea $aA^2 + bA + cI_3$ este inversabilă $\Leftrightarrow a+b+c \neq 0$.

Călin Burduşel, Târgovişte

3. Fie şirul $a_n = \frac{1}{C_n^0} + \frac{1}{C_n^1} + \ldots + \frac{1}{C_n^n}$, $n \in \mathbf{N}$. Arătați că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - 2) = 2$.

4. **a)** Fie $(a_n)_{n\in N} \subset (0, \infty)$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) = 2$. Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

b) Fie $(x_n)_{n\in N}$, $(y_n)_{n\in N}$, $(z_n)_{n\in N} \subset (0, \infty)$ şiruri mărginite astfel încât

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n+z_n} + \frac{y_n}{z_n+x_n} + \frac{z_n}{x_n+y_n}\right) = \frac{3}{2}.$$

Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(y_n - z_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(z_n - x_n) = 0$.

Cristinel Mortici, Târgovişte

Back

CLASA A XI-A

1. Fie A şi B două matrice din $\mathcal{M}_n(\boldsymbol{R})$, unde $n \geq 2$, astfel încât $AB = O_n$. Atunci, să se arate că $\det(I_n + A + B + A^2 + B^2) \geq 0$.

S. Stossel

2. Se consideră şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_n \in [0, 1]$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_n \geq 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$, care verifică relaţiile:

$$a_n + b_n \geq 1 \text{ şi } a_{n+1} + \frac{b_{n+1}}{a_n + b_n} \geq 1, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

Atunci, să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} = a_n + \dfrac{b_n}{x_n}$, pentru orice $n \geq 1$, este convergent. Daţi exemplu de şiruri $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ care verifică ipotezele problemei şi, în plus $a_n + b_n > 1$ pentru orice $n \geq 1$.

O. G. Mustafa

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ două şiruri de numere reale pozitive care satisfac inegalitatea:

$$2007a_{n+1} \leq 2006a_n + 2008b_n, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

Atunci, să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

I. Roventa

4. a) Să se calculeze mărimea $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, unde $a, b, c \in \boldsymbol{R}$.

b) Folosind eventual punctul a), stabiliţi identitatea:

$$(a_1^3 + b_1^3 + c_1^3 - 3a_1b_1c_1)(a_2^3 + b_2^3 + c_2^3 - 3a_2b_2c_2) = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC,$$

unde

$$\begin{cases} A = a_1a_2 + b_1c_2 + b_2c_1 \\ B = b_1b_2 + a_1c_2 + a_2c_1 \\ C = c_1c_2 + a_1b_2 + a_2b_1 \end{cases}.$$

[Back](#)

LOCALA GALATI

CLASA A XI-A

1. Se consideră şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietăţile:

a) $x_n \geq 2$, $(\forall) n \geq 1$;

b) $x_{n+1} \leq x_n^2 - 4 \cdot x_n + 6$, $(\forall) n \geq 2$;

c) $x_{n+1} + x_n^2 \leq 4 \cdot x_n - \frac{3}{2}$, $(\forall) n \geq 1$.

Să se demonstreze că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Romeo Zamfir

2. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(\sqrt[n]{a} - 2\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+2]{a}\right)$, unde $a \in \boldsymbol{R}_+^*$.

Vasile Popa

3. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{R})$ $(n \in \boldsymbol{N},\ n \geq 2)$ astfel încât $A^2 + A + I_n = O_n$. Aflaţi $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 2$ ştiind că $\det\left(A^n + I_n\right) = 2^{2007}$.

Felix Arhire

4. Arătaţi că mulţimea formată din triunghiurile cu laturile de lungimi $a-1$, a şi respectiv $a+1$, unde $a \in \boldsymbol{R}$, $a > 2$, include o submulţime infinită de triunghiuri cu lungimile laturilor şi respectiv aria, numere naturale.

Gheorghe Pădurariu

Back

CLASA A XI-A

1. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ o matrice inversabilă cu $A^2 = A^t$ (transpusa matricei A).

   a) Dați exemplu de matrice în condițiile problemei.

   b) Determinați A^{-1}.

   c) Calculați suma pătratelor tuturor elementelor matricei A.

Şerban Olteanu, Giurgiu

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$. Arătați că:

   a) A^n este matrice inversabilă, $(\forall) n \in N^*$ și $\left(A^{2^n}\right)^{-1} = A^{2^{n-1}}$, $(\forall) n \geq 2$.

   b) $\det A - \det A^2 + \det A^3 - ... + \det A^{2007} = 1 + \det\left(A - A^2 + ... + A^{2007}\right)$.

Ionel Tudor, Giurgiu

3. Un şir de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_1 = 1$ verifică relația:

$$\left(1 - x_{n+1}\right)\left(2 - 2x_n + x_n^2\right) + x_n = 1, \quad (\forall) n \in N^*.$$

   Să se determine x_{2007}.

Petronela Toma, Giurgiu

4. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ cu $x_n > 1$ şi $x_n = x_{n+1}^2 - 3x_{n+1} + 3$, $(\forall) n \in N$, $x_0 \in (1, 3)$.

   Calculați $\lim \prod_{k=1}^{n} (x_k - 2)$.

Şerban Olteanu, Giurgiu

Back

CLASA A XI-A

MATEMATICĂ – INFORMATICĂ

1. Fie $A=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$.

a) Arătați că $A=2\cdot\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6}\\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{pmatrix}$.

b) Calculați A^{2007}.

2. a) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ pentru $a_n=\left\{\sqrt{n^2+5n+9}\right\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x.

b) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\left\{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right\}$ nu are limită.

3. Fie $A,\ B\in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{C})$. Dacă $\det(A+X)=\det(B+X)$, $(\forall)X\in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{C})$, atunci $A=B$.

4. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale astfel încât $2\cdot a_n\leq a_{n+1}+a_{n-1}$, $(\forall)n\in \boldsymbol{N}^*$.

a) Arătați că $(a_n)_{n\geq 0}$ are limită.

b) Dacă $p,\ q\in\boldsymbol{R}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-pn-q)=0$, atunci $a_n\geq pn+q$, $(\forall)n\in\boldsymbol{N}$.

Back

LICEUL MIRON COSTIN IASI

CLASA A XI-A

1. Calculați limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin\dfrac{|x^2-1|}{x^2+1}-\dfrac{\pi}{2}}{x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \log_{x^2+x+1}\left(-x^2+x+1\right)$.

2. Fie $A=\begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $a\in \mathbf{R}$. Calculați A^n, $n\in \mathbf{N}$.

3. Considerăm şirul $(x_n)_{n\in N}$ cu $x_0=2$ şi $x_{n+1}=\dfrac{6\cdot x_n}{3+x_n}$, $(\forall)n\in N^*$. Se cere:

a) să arătați că şirul $y_n=\dfrac{x_n}{3-x_n}$, $n\in N^*$ formează o progresie geometrică;

b) să calculați $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-2)^{2^{n-1}}$.

4. Fie $a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2$ cinci numere întregi oarecare şi matricea

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & b_1 \\ b_2 & 0 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Doi elevi, A şi B, joacă următorul joc: A dă o valoare lui a_1, apoi B dă o valoare lui b_1. După aceasta A dă o valoare lui a_2 şi apoi B dă o valoare lui b_2. În final, A dă o valoare lui a_3. Câştigă A dacă şi numai dacă $|\det(M)|=1$. Precizați tripletele $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ care asigură victoria lui A, oricare ar fi alegerile făcute de B.

Back

CLASA A XI-A

1. Fie matricele $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2007^x\end{pmatrix}$, $x\in \mathbf{R}$. Calculați $\prod_{k=1}^{2007} A(k)$.

2. Fie $\mathcal{M}$ mulțimea matricelor de forma $A_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ -b_n & a_n\end{pmatrix}$, cu

$$a_n=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}}{2}$$ (la numărător sunt n radicali), iar $b_n=\sqrt{1-a_n^2}$, $n\in N^*$.

a) Determinați A_1^{2007}.

b) Verificați că $a_n=2\cdot a_{n+1}^2-1$, $(\forall)n\in N^*$.

c) Arătați că există $n\in N^*$ astfel încât $A_{2007}^n=I_2$.

3. Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$, definit prin $x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{2007}{x_n^2}\right)$, $x_0\geq\sqrt[3]{2007}$. Demonstrați că $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent, iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt[3]{2007}$.

4. Arătați că dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_{n+1}-a_n)=l\in\overline{\mathbf{R}}\setminus\{0\}$, atunci șirul $(a_n)_{n\in N^*}$ este strict monoton de la un rang încolo, iar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty\cdot\operatorname{sgn} l$.

Subiect elaborat de ***Silviu Boga***

Back

CLASA A XI-A

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenii pozitivi definit astfel : $a_1 = 0$ şi $a_{n+1} = \frac{1}{a_1+a_2} + \frac{1}{a_2+a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n+a_{n+1}}$, $(\forall) n \in N^* \mathbf{N}^*$. Calculaţi termenul general al şirului şi apoi determinaţi $\alpha \in \boldsymbol{R}$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}(a_{n+1}-a_n) \in \boldsymbol{R}^*$.

Ludovic Longaver, Baia Mare

2. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir definit astfel : $a_0 = x \in (0, \infty)$ şi $a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n^2}$, $(\forall) n \geq 0$. De asemenea fie $f:(0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ o funcţie pentru care $f(x) = f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$, $\forall x > 0$ şi $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$. Demonstraţi că:

a) $a_n \in (0, 1]$, $(\forall) n \geq 1$;

b) $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător ;

c) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$;

d) f este funcţie constantă .

3. a) Determinaţi $X \in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$ astfel încât $X^{2007} = \begin{pmatrix} 1 & 2007 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Determinaţi numărul matricelor $X \in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$ pentru care $X^{2007} = \begin{pmatrix} 1 & 2007 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Muşuroia Nicolae, Baia Mare

Back

CLASA A XI-A M1

1. Fie determinantul de ordinul n $(n \in N,\ n \geq 2)$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Să se stabilească o relație de recurență între termenii șirului $(\Delta_n)_{n\geq 2}$ și apoi să se calculeze Δ_n.

2. Fie A o mulțime mărginită de numere reale cu proprietatea că pentru orice

$$x,\ y \in A \Rightarrow \frac{x+y}{2} \in A.$$

Să se arate că oricare ar fi $a \in A$, există un șir $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere din $A \setminus \{a\}$ convergent la a.

Florian Dumitrel, Slatina

3. Calculați:

$$\lim_{x\to\infty}\left(2^{\frac{2-x}{x}}+4^{\frac{4-x}{x}}+6^{\frac{6-x}{x}}+12^{\frac{12-x}{x}}\right)^x.$$

Marian Teler, Costești, Argeș, G. M. 3/2006

4. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_1 = 2007$ și $x_{n+1} = \dfrac{n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$, $(\forall)n \geq 1$. Arătați că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent și calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Lucian Tuțescu, Craiova, Toma Gherghiev, Vidin, Bulgaria, G. M. 3/2006

Back

CLASA A XI-A

1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$. În A şi A^2 se cunosc elementele aflate pe poziţiile $(1, 1)$, $(1, 2)$ astfel: 2 respectiv 3 în A, 4 respectiv 12 în A^2. Să se arate că:

$$A^n = n \cdot 2^{n-1} \cdot A - (n-1) \cdot 2^n \cdot I_2, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

Gabriel Necula, Plopleni

2. Calculaţi determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix},$$

unde $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \boldsymbol{R}$ şi $x \in \boldsymbol{R}^* \setminus \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$.

3. Fie şirul de numere reale $(y_n)_{n\geq 1}$, $y_1 > 0$, astfel încât

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n}, \quad (\forall) n \geq 1.$$

a) Studiaţi convergenţa şirului.

b) Calculaţi: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{y_{n+1}}{y_n}\right)^{n^2 y_n^2}$.

Emil Vasile, Ploieşti

4. Fie $a > 1$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin:

$$x_0 = 0, \ x_1 = 1, \ (a+1)^{x_{n+2}} = a^{x_{n+1}} + \left(\sqrt{a+1}\right)^{x_n}, \ (\forall) n \geq 0.$$

Să se demonstreze că şirul este convergent şi să se determine limita şirului.

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploieşti

Back

LOCALA SATU MARE

CLASA A XI-A

1. **a)** Demonstrați că pentru orice matrice $X,\ Y \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ avem identitatea:

$$\det(X+Y)+\det(X-Y)=2\cdot\left(\det X+\det Y\right).$$

b) Folosind, eventual, punctul a) arătați că

$$(AB-BA)^2=\left(\det(AB+BA)-4\cdot\det A\cdot\det B\right)\cdot I_2,$$

pentru orice $A,\ B\in\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.

Traian Tămâian

2. Fie n un număr natural nenul, fixat şi ecuația (*) $X^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, pentru orice matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

a) Arătați că dacă X este soluție a ecuației (*), atunci $X\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot X$.

b) Să se rezolve ecuația (*).

Ovidiu Pop

3. Calculați:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n!)}{n^2}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1!+(2!)^2+\ldots+(n!)^n}$.

Traian Tămâian

4. Calculați:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-(1+x)^3}{x}$;

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\ln\left(e^{2007x}+\sin x-(1+x)^{2007}\right)-\ln x\right)$.

Traian Tămâian

Back

CLASA A XI-A

1. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Determinați matricele:

a) A^2 și A^4;

b) A^3 și A^5;

c) A^n, unde $n \in \boldsymbol{N}^*$.

Vasile Berghea

2. Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$. Demonstrați următoarele implicații:

a) Dacă $\det(X^2 + I_2) = 0$, atunci $\det(X) = 1$.

b) Dacă $\det(X^{2006} + I_2) = 0$, atunci $\det(X^2 + I_2) = (a+d)^2$.

Mihai Popa

3. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, cu $x_1 = 2007$ și $x_{n+1} = \dfrac{n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}$, $(\forall) n \geq 1$. Arătați că:

a) $(\forall) n \geq 1$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n > n$;

b) $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

4. Funcția $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ este monoton crescătoare pe $\boldsymbol{R}$ și $a \in \boldsymbol{R}$. Considerăm mulțimile $A = \{f(x) \mid x < a\}$ și $B = \{f(x) \mid x > a\}$. Arătați că $\sup(A)$ și $\inf(B)$ sunt finite și reprezintă limitele laterale ale lui f în punctul a.

Back