LOCALE 2007

- *I C BRATIANU PITESTI*
- *C N L GOLESCU PITESTI*
- *LOCALA PITESTI*
- *LOCALA BACAU*
- *LOCALA BIHOR*
- *LOCALA BOTOSANI*
- *LOCALA BRAILA*
- *LOCALA BRASOV*
- *LOCALA BUCURESTI*
- *LOCALA BUZAU*
- *LOCALA CLUJ*
- *LOCALA CONSTANTA*

CLASA A XI-A

1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\sin x}{x^2}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^n(x)-\sin(x^n)}{x^{n+1}}$, unde $n\in N^*$ fixat.

Daniel Jinga, Piteşti

2. Fie $A\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$ matrice inversabilă astfel încât $\det\left(A+A^{-1}\right)=0$. Demonstrați că $\det\left(A-A^{-1}\right)=4$.

Daniel Jinga, Piteşti

3. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit astfel $a_0=2,\ a_1=1$ şi $a_{n+1}=a_n+a_{n-1},\ (\forall)n\geq 1$. Într-un sistem cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(a_{n+1},\ a_n)$, $B_n(a_{n+2},\ a_{n+1})$ şi $C_n(a_{n+3},\ a_{n+2})$. Arătați că aria triunghiului $A_nB_nC_n$ este constantă.

Gheorghe Gherghina, Piteşti

4. Fie $a_0,\ b_0>0$ şi $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale astfel încât

$$a_{n+1}=\sqrt{\frac{a_n^2+b_n^2}{2}}\ \text{ şi }\ b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\ (\forall)n\in\boldsymbol{N}.$$

Să se demonstreze că şirurile $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ sunt convergente.

Marin Ionescu, Piteşti

Subiecte selectate de ***Valerica Biriboiu, Daniel Jinga***

Back

CLASA A XI-A

1. Fie $m \in \boldsymbol{C}$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & m & -m \\ m & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculaţi A^n, $n \in \boldsymbol{N}$.

***Neculai Stanciu, Berca, Buzău, G. M.* 2/2006**

2. Aflaţi $X \in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$ astfel încât $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

***László Sziláard, Şamşud, Sălaj, G. M.* 11/2006**

3. Determinaţi parametrii reali a şi b astfel încât şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ să fie simultan convergente, unde

$$a_n = a\sqrt{n+3} + b\sqrt{9n+5} - \sqrt{4n+3},$$
$$b_n = a\sqrt{9n+2} + b\sqrt{25n+7} - \sqrt{64n+5}$$

4. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(n\pi\sqrt{nH2} + 2n + 4\right)$.

***Mihai George, Slatina, RMT* 2/2006**

Subiecte selectate de ***Teodor Nicolau şi Miron Tănăsescu, Piteşti***

[Back]()

LOCALA PITESTI

CLASA A XI-A

MATEMATICĂ – INFORMATICĂ

1. Fie $(z_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere complexe, $z_n = x_n + iy_n$, $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ şiruri de numere reale cu proprietatea că $\left| z_n + \dfrac{1}{z_n} \right| = p^n - n$, $p \in \boldsymbol{N}$, $p \geq 2$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 2$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{C_{2n}^n}{a_n^2}$, unde $a_n = \max\limits_{n\geq 1}(|z_n|)$.

2. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_3(\boldsymbol{R})$ astfel încât $\det\left(A^2 + I_3\right) = 0$. Să se demonstreze că:

a) $\det(A + I_3) - \det(A - I_3) = 4$.

b) $\operatorname{tr}\left(A^3\right) = \operatorname{tr}^3(A)$.

3. Să se calculeze limitele şirurilor $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ ştiind că: $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n \end{cases}$.

4. **a)** Fie f, $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, astfel încât $f(a+b) = f(a)g(b) + f(b)g(a)$, $(\forall) a, b \in \boldsymbol{R}$ şi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} g\left(\dfrac{x}{2^k}\right)$, unde $x \in \boldsymbol{R}^*$.

b) Fie $f : \boldsymbol{R}_+^* \to \boldsymbol{R}$, strict crescătoare astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Să se arate că, dacă există $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x+1) - f(x)}{x}$, atunci aceasta este zero.

[Back](#)

CLASA A XI-A

1. Să se calculeze limita şirului: $x_n = \frac{C_n^0}{2^n} + \frac{C_n^1}{2^n+1} + \frac{C_n^2}{2^n+2} + \ldots + \frac{C_n^n}{2^n+n}$.

2. Se consideră şirul $(x_n)_{n\in N^*}$, dat de relaţia $x_{n+1} = x_n\sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}}$, $(\forall)n \geq 1$, $x_1 \in (0,\ 1)$.

   a) Studiaţi convergenţa şirului dat.

   b) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} nx_n$.

3. Fie B o matrice inversabilă din $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ şi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ toate matricele obţinute prin permutările liniilor matricei B. Fie $S = \sum_{k=1}^{n} A_k - B$. Să se calculeze $\det S$ în funcţie de $\det B$.

4. Aflaţi numărul permutărilor $\sigma \in S_{17}$ care au două inversiuni.

Back

CLASA A XI-A

1. Calculați limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{x^3}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg} 2x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

2. Rezolvați ecuația matriceală:

$$X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 9 & 8\\ 0 & 1 & 6\end{pmatrix}.$$

3. Se dau matricele $A,\ B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ astfel încât $\det A=-1$, $\det B=-1$. Să se arate că matricea $A+\sqrt{3}\cdot B$ este inversabilă.

Ioan Cuc, Oradea

4. Fie $M=\left\{A=\begin{pmatrix}x & 3y\\ y & x\end{pmatrix}\ \middle|\ x^2-3\cdot y^2=1,\ x,\ y\in Z\right\}$

a) Să se arate că $A\cdot B\in M$, $(\forall)A,\ B\in M$

b) Dacă $(x_0,\ y_0)\in N^*\times N^*$, $x_0^2-3\cdot y_0^2=1$ și $A=\begin{pmatrix}x_0 & 3y_0\\ y_0 & x_0\end{pmatrix}$ să se arate că $A^n=\begin{pmatrix}x_n & 3y_n\\ y_n & x_n\end{pmatrix}$ cu $x_n^2-3\cdot y_n^2=1$ și să se studieze convergența șirului de termen general $a_n=\dfrac{x_n}{y_n}$, $n\geq 1$.

Viorel Sadoveanu, Oradea

Back

LOCALA BOTOSANI

CLASA A XI-A

1. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = \frac{2007x_n + 2007}{x_n + 2007}$, $n \in N$. Studiaţi convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ şi în caz de convergenţă calculaţi $\lim_{n\to\infty} x_n$.

2. **a)** Determinaţi $a,\ b \in \boldsymbol{R}$ astfel încât $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax^2} - \cos(bx)}{x^2} = -\frac{1}{2}(a^2+1)$.

b) Determinaţi $a \in \boldsymbol{R}$ astfel încât funcţia $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$,

$$f(x) = \sqrt[3]{ax^3} - \sqrt[3]{6x^3 + \sqrt[3]{ax^9 - 16x^8 + x^7}}$$

să aibă limită finită la $+\infty$ şi să se determine această limită.

3. Fie $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{R})$ astfel încât:

a) dacă $A^2 - B^2 = AB - BA$, demonstraţi că $\det(A+B) = 0$ sau $\det(A-B) = 0$.

b) dacă $A^2 + B^2 = AB - BA$, demonstraţi că $\det(A-B) = 0$.

4. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{C})$ astfel încât $\operatorname{Tr} A \cdot \det A = 0$ şi $\operatorname{Tr} A + \det A \neq 0$. Să se arate că pentru matricea $B \in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{C})$ avem $AB = BA$ dacă şi numai dacă $A^3 B = BA^3$.

Back

LOCALA BRAILA

CLASA A XI-A

1. Să se determine $\sigma \in S_4$ cu proprietatea că $\sigma^{2007} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Dan Negulescu

2. Să se rezolve în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ ecuația:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}.$$

Discuție după valorile parametrului real m.

Dan Negulescu

3. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ dat prin condițiile: $x_1 = 1,\ x_{n+1}^n = 1 + n\sqrt{x_n}$, $(\forall) n \geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n^2}$.

***Marian Ursărescu, G.M.* 4 / 2006**

4. Fie $f:(0, \infty) \to \mathbf{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ și $f(n+1) - f(n) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}^*$. Demonstrați că:

a) $0 < f(1) < \dfrac{1}{2}$; **b)** $\dfrac{13}{60} < f(1) < \dfrac{23}{60}$.

Radu Vasile

Back

LOCALA BRASOV

CLASA A XI-A

1. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 = 1$ şi $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, pentru orice $n \geq 0$.

   a) Studiaţi monotonia şi mărginirea şirului $(a_n)_{n\geq 0}$. **b)** Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

   c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n(a_n - 2)$. **d)** Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{2^n}$.

2. Fie $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ monotonă cu proprietatea că: $f(\operatorname{arctg} x) = e^{-x^2} \cdot \operatorname{arctg} f(x)$, pentru orice $x \in \boldsymbol{R}$. Să se demonstreze că $f(x) = 0$ pentru orice $x \in \boldsymbol{R}$.

Romeo Ilie

3. Fie M mulţimea matricelor de 3 linii şi 3 coloane cu elemente numere naturale astfel încât suma elementelor de pe fiecare linie şi fiecare coloană este egală cu 1.

   a) Determinaţi numărul elementelor lui M.

   b) Determinaţi două elemente A şi B din M astfel încât $A \cdot B \neq B \cdot A$.

   c) Arătaţi că dacă $A,\ B \in M$, atunci $A \cdot B \in M$.

   d) Arătaţi că dacă $A \in M$ atunci ea este inversabilă şi inversa sa este tot din M.

Prelucrare variantă Bacalaureat

4. Fie numerele reale $a > b > 0$ şi matricea

$$A = \begin{pmatrix} \max\limits_{x\in R} \dfrac{a + b\cos x}{a - b\cos x} & \min\limits_{x\in R} \dfrac{a + b\sin x}{a - b\sin x} \\ \min\limits_{x\in R} \dfrac{a + b\sin x}{a - b\sin x} & \max\limits_{x\in R} \dfrac{a + b\cos x}{a - b\cos x} \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze A^n, $n \in N^*$.

Dorin Frâncu

Back

CLASA A XI-A

1. Considerăm determinanţii cu elemente numere reale:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \\ d_1 & d_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 1 \\ d_1 & d_2 & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Se ştie că trei dintre ei sunt egali cu 1. Demonstraţi că:

a) şi cel de-al patrulea este egal cu 1;

b) $a_1 + c_1 = b_1 + d_1$ şi $a_2 + c_2 = b_2 + d_2$.

2. Fie ecuaţia $X^2 + aX + bI_n = O_n$, $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$, unde $a, b, n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 2$.

a) Demonstraţi că în cazul $n = 2$ ecuaţia are o infinitate de soluţii, oricare ar fi a, b.

b) Pentru care valori ale lui n este adevărat că ecuaţia are o infinitate de soluţii, oricare ar fi a, b?

3. Fie funcţia $f:(0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{e^{[\ln x]}}$. (aici $[t]$ reprezintă partea întreagă a numărului real t).

a) Determinaţi punctele de acumulare ale domeniului de definiţie în care funcţia are limită.

b) Demonstraţi că pentru orice $a \in [1, e]$ există un subşir al şirului $(f(n))_{n\geq 1}$ cu limita a.

4. Fie $a \in [0, 1)$ un număr scris în formă zecimală. Construim un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ astfel: x_1 se obţine permutând în mod arbitrar primele trei zecimale ale lui a, x_2 se obţine permutând în mod arbitrar zecimalele a doua, a treia şi a patra ale lui x_1 şi, în general, x_{n+1} se obţine permutând în mod arbitrar zecimalele $n+1$, $n+2$ şi $n+3$ ale lui x_n, $(\forall) n \geq 1$.

a) Arătaţi că orice şir astfel construit este convergent către o limită b.

b) Este posibil ca a să fie raţional şi b să fie iraţional?

c) Găsiţi un a pentru care orice şir $(x_n)_{n\geq 1}$, construit ca mai sus, are limită iraţională.

Back

LOCALA BUZAU

CLASA A XI-A

1. Fie şirul $(x_n)_{n\in N}$ definit prin $x_0 = x \in [0,\ 1]$, $x_{n+1} = \arcsin x_n$, $(\forall) n \in \boldsymbol{N}$.

a) Determinaţi x astfel încât şirul $(x_n)_{n\in N}$ să fie bine definit.

b) Pentru x găsit la punctul a) studiaţi natura şirului $(x_n)_{n\in N}$ şi dacă este convergent aflaţi limita sa.

2. Fie $x_0 = 1$, $y_0 = 5$, $x_{n+1} = \dfrac{3x_n + y_n}{4}$, $y_{n+1} = \dfrac{2x_n + 3y_n}{5}$.

a) Să se arate că $z_n = y_n - x_n$ este o progresie aritmetică.

b) Să se arate că şirurile $(x_n)_{n\in N}$ şi $(y_n)_{n\in N}$ sunt convergente şi să se calculeze limitele acestor şiruri.

3. Fie matricele $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{C})$ astfel încât $6 \cdot AB = 2 \cdot A + 3 \cdot B$. Să se arate că $AB = BA$.

Back

LOCALA CLUJ

CLASA A XI-A

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin relaţia de recurenţă $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n^{2006}}$, $a_1>0$. Arătaţi că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt[2007]{n}}=\sqrt[2007]{2007}$.

D. Popa, Cluj-Napoca

2. Fie $a\in \boldsymbol{R}^*$ şi $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^*$ o funcţie cu proprietatea:

$$8f(x)\cdot f(x+a)=4f(x)-1,\ (\forall)x\in\boldsymbol{R}.$$

a) Demonstraţi că $\operatorname{Im} f$ nu conţine valorile $\frac{1}{4}$ şi $\frac{1}{2}$.

b) Arătaţi că funcţia f este periodică.

V. Pop, Cluj-Napoca

3. Fie $A\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{C})$ cu urma $\operatorname{Tr}(A)=-1$ şi $B\in\mathcal{M}_2(\boldsymbol{C})$ cu $\det(B)=1$.

a) Arătaţi că $\det\left(A^2+3A+3I_2\right)-\det\left(A^2+A\right)=3$.

b) Arătaţi că $\det\left(B^2+B-I_2\right)+\det\left(A^2+I_2\right)=5$.

V. Pop, Cluj-Napoca

4. În planul axelor de coordonate se consideră punctele $A(1,\ 2)$, $B(5,\ 4)$ şi punctul mobil M pe axa absciselor. Dreptele MA şi MB intersectează axa ordonatelor în V, respectiv P iar prima bisectoare a axelor de coordonate în N, respectiv U.

a) Arătaţi că dreapta UV are o direcţie fixă.

b) Arătaţi că dreapta NP trece printr-un punct fix.

V. Lupşor, C. Pop, Cluj-Napoca

Back

CLASA A XI-A M1

1. Fie $a,\ b \in \boldsymbol{R}$ astfel încât $a^2 - 4b < 0$ și $x_1,\ x_2$ rădăcinile ecuației $x^2 - ax + b = 0$.

a) Să se arate că :

$$(x_1 A + x_2 B + I_n)(x_2 A + x_1 B + I_n) = b(A^2 + B^2) + (a^2 - 2b)AB + a(A+B) + I_n,$$

pentru $(\forall)\, A,\ B \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{R})$, cu proprietatea $AB = BA$.

b) Demonstrați că:

$$\det\left[b(A^2 + B^2) + (a^2 - 2b)AB + a(A+B) + I_n \right] \geq 0,$$

pentru $(\forall)\, A,\ B \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{R})$, cu $AB = BA$.

Cătălin Zîrnă

2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{Z})$, unde n este impar, $n > 2$.

a) Pentru $n = 3$, dacă matricea A are cel puțin o linie formată numai din numere impare, atunci A nu poate avea toți minorii de ordinul $(n-1)$, numere impare.

b) Arătați că afirmația de la punctul a) este adevărată pentru orice n impar, $n > 2$.

Nelu Chichirim

3. a) Demonstrați că: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{4n} \right) = \ln 4$.

b) Demonstrați că: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+7} + \ldots + \frac{1}{n+3n-2} \right) = \frac{1}{3}\ln 4$.

Doru Constantin Caragea

4. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, astfel încât $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_{n+1} = 1 + n\sqrt{x_n}, & (\forall)\, n \in \boldsymbol{N}^* \end{cases}$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^2} = 1$.

Marian Ursărescu, Roman, G. M. 4/2006

Back