LOCALE 2008

- ✓ *Bihor*
- ✓ *Braila*
- ✓ *Brasov*
- ✓ *Bucuresti*
- ✓ *Buzau*
- ✓ *Caras-Severin*
- ✓ *Constanta*
- ✓ *Covasna*
- ✓ *Dolj*
- ✓ *Galati*
- ✓ *Gorj*
- ✓ *Hunedoara*
- ✓ *Maramures*
- ✓ *Mures*
- ✓ *Neamt*
- ✓ *Olt*
- ✓ *Salaj*

Bihor

1. Calculaţi :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}.$$

2. Să se rezolve ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} x & a & x+a \\ a & x+a & x \\ x+a & x & a \end{vmatrix} = 0.$$

3. Fie $\sigma \in S_n$ şi notăm :

$$S(\sigma)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}e^{\sigma(k)}.$$

Să se determine σ astfel încât $S(\sigma)$ să fie maximă şi apoi sa se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k}e^{\sigma(k)}\right]^2+3n}.$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

4. Să se calculeze :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{2006}-\sin^{2006}(x)}{x^{2008}}.$$

[Back](#)

Braila

1. Să se calculeze determinantul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin 2x & 1 & \sin x + \cos x \\ 1 & \sin 2x & \sin x + \cos x \\ \sin x + \cos x & \sin x + \cos x & 2 \end{vmatrix}.$$

2. $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se numeşte matrice nilpotentă dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^k = O_2$.

   a)Să se arate că matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ nu este nilpotentă, dar se scrie ca o sumă finită de matrice nilpotente distincte.

   b) Să se determine matricele nilpotente $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $b \cdot c \leq 0$.

3. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ cu $\det(A) \neq 0$ astfel încât $A^2 - A + I_n = O_n$. Determinaţi n astfel încât $\det(A^{504} + I_n) = 512$.

4. Fie şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale care satisface relaţia $(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n + 4) \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Calculaţi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

[Back]

Brasov

1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $\det A + \det B = 1$.

   a)Arătaţi că pentru orice x, y reale are loc relaţia:

   $\det(xA + yI_2) = x^2 \det A + xy \mathrm{tr} A + y^2$.

   b)Arătaţi că $\det(A^2 + I_2) = (1 - \det A)^2 + \mathrm{tr}(A)^2$.

   c)Arătaţi că $\det((A^2 + I_2)(B^2 + I_2)) \geq (\det A \cdot \det B + \mathrm{tr}(A) \cdot \mathrm{tr}(B))^2$

   unde $\mathrm{tr}(A)$ este urma matricei A.

2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ unde n este impar şi $n \geq 3$.Dacă matricea A are cel puţin o linie formată din numere impare, atunci ea nu poate avea toţi minorii de ordin $(n-1)$ impari.

3. Se dă şirul de numere reale definit prin: $x_1 > 0$, $x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n}, \forall n \geq 1$.

a)Să se arate că $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

b)Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

c)Aflaţi $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^2}$.

4. a) Arătaţi ca dacă functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este perioducă şi neconstantă atunci f nu are limită in $a = \infty$.Reciproca este adevărată ?

b) Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodice cu proprietatea că $\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0$.Să se arate că cele două funcţii au perioade egale şi $f(x) = g(x)$.

Back

Bucuresti

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.Să se calculeze A^n pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 = a > 0$,$x_{n+1} = \frac{2x_n+1}{2x_n+3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.Determinaţi $\lim_{n\to\infty} x_n$.

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir real, $q \in (-1, 1) - \{0\}$ şi $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k q^k$,$\forall n \geq 1$.

a) Să se arate că, dacă şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, atunci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

b)Să se dea un exemplu de şir $(a_n)_{n\geq 1}$ nemărginit, pentru care şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

4. Fie $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$.Definim şirul $(x_n^{(m)})_{n\geq 1}$ prin:

$$x_n^{(m)} = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots + \frac{1}{n^m}, \forall n \geq 1.$$

a)Să se arate ca şirul $(x_n^{(m)})_{n\geq 1}$ este convergent.

b)Notând cu $l_m = \lim_{n\to\infty} x_n^{(m)}$, să se determine $k \in \mathbb{N}$ pentru care există, este finită şi nenulă limita :

$$\lim_{n\to\infty} n^k (l_m - x_n^{(m)})$$

Back

Buzau

1. Fie progresia aritmetică $a_1, a_2, ..., a_n$ cu raţia şi primul termen ştrict pozitive. Să se calculeze :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots\sqrt{a_n}}\right).$$

2. Arătaţi că pentru orice $X, Y, Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ are loc egalitatea:

$$(XY - YX)^2 Z = Z(XY - YX)^2.$$

3. Calculaţi: $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$.

Back

Caras-Severin

1. Să se determine numerele naturale x, y, z ştiind că triunghiul determinat de punctele $A(x, y)$, $B(y, z)$ şi $C(z, x)$ are aria de $\frac{3}{2}$, iar centrul de greutate al triunghiului este punctul $G(2, 2)$.

2. Se consideră matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_3\mathbb{R}$ şi $\epsilon \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, rădăcină cubică a unităţii.Să se arate că dacă $\det(A + \epsilon B) = \det(A + \epsilon C)$, atunci:

$$\det(A + B) - \det(A + C) = 3\det(B + C)$$

3. Se consideră $a > 1$ fixat şi şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 > 0$ şi $x_{n+1} = \frac{x_n}{a^{x_n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot x_n$.

4. Pentru $n \in \mathbb{N}$ se notează cu $a_n = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos nx}{x^2}$.Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{2 \cdot a_n}\right)^{2^n}$

Back

Constanta

1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = BA$, $A^4 = 2I_n$, $B^6 = 2I_n$.Să se arate că matricele $A - B$, $A + B$ şi $A^3 - B^5$ sunt inversabile.

2. a)Fie o matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.Demonstraţi echivalenţa:

$$\det(X + I_2) = \det(X - I_2) \Leftrightarrow tr(X) = 0.$$

b)Fie o matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ pentru care există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\det(A^k + I_2) = \det(A^k - I_2)$ şi $\det(A^{k+1} + I_2) = \det(A^{k+1} - I_2)$.Arătaţi că $A^2 = O_2$.

3. Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+^*$ definit prin relaţia de recurenţă: $x_{n+1}^n = a \cdot x_n^{n+1}$, $\forall n \geq 1$, unde x_1 este fixat şi $a > 0$ dat.Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent dacă şi numai dacă $x_1 \leq \frac{1}{a}$.

4. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ şi $x_{n+1} = x_n - 3x_n^2$, $\forall n \geq 1$. Arătaţi că:

a)şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent la zero;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot x_n = \frac{1}{3}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}\left(n \cdot x_n - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$.

Back

Covasna

1. Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $x_0 = a$ şi $x_1 = b$, a, b reale date şi $x_n = \frac{2}{5}x_{n-1} + \frac{3}{5}x_{n-2}$, $\forall n \geq 2$. Să se determine termenul general al şirului şi să se calculeze limita şirului.

2. Să se calculeze limita:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \ln(2008 + n)}{\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]}.$$

3. Se consideră ,în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ecuaţia matriceală : $X^3 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

a)Rezolvaţi ecuaţia.

b)Arătaţi ca există un şir de numere reale $(a_n)_{n\geq 0}$ astfel încât $\sum_{k=1}^{n} X^k = a_n X, \forall n \in \mathbb{N}^*$, unde X este soluţia ecuaţiei matriceale de mai sus şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

4. Se dau matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ care satisfac relaţiile: $A + B = I_n$ şi $A^3 = A^2$. Să se demonstreze că $\det(I_n + AB) \neq 0$.

Back

Dolj

1. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^*)$, unde n este un număr natural impar. Dacă $A \cdot A^t = I_n$, arătaţi că $\det(A^2 - I_n) = 0$.

2. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_2(R)$, arătaţi că $\det(A^2 + B^2) \geq \det(A \cdot B - B \cdot A)$.

3. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ verifică inegalităţile $0 < x_n < a, \forall n \geq 1$, $(a - x_n)x_{n+1} \geq \frac{a^2}{4}$, $\forall n \geq 1$. Arătaţi că şirul (x_n) este convergent şi să se determine limita sa.

4. a) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{C_n^1}{\ln n} - \frac{C_n^2}{\ln^2 n} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{C_n^n}{\ln^n n} \right)$.

   b) Fie şirul (x_n) dat prin $x_1 = 2008$, $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{x_{n+1}}, \forall n \geq 1$. Arătaţi că şirul dat este convergent şi calculaţi limita sa.

Back

Galati

1. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}, x_1 = 2, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, \forall n \geq 1$.

   a)Demonstraţi ca $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător şi nemărginit.

   b)Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{x_n^2} = 1$

   c)Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{y_n - 1} - 3y_n + 2}{y_n - 1}$,unde $y_n = \frac{2n}{x_n^2}$.

2. Se consideră şirurile $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ cu proprietăţile $a_n \in (0, \frac{1}{2}), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $b_{3k+1} = a_{3k+2}, b_{3k+2} = a_{3k+3}, b_{3k+1} = a_{3k+1}, \forall k \in \mathbb{N}^*$.Dacă definim şirul $(x_n)_{n\geq 1}, x_n = a_n \left(\frac{1}{2} - b_n\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n x_k$.

3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $A^2 + B^2 = AB$ şi $BA = O_2$.Să se arate că $(A+B)^{2008} = A^{2008} + B^{2008}$.

4. Pentru ce valori ale lui n există cel puţin 2008 matrice pătratice simetrice de ordinul n având toate elementele 1 sau -1 şi suma elementelor de pe diagonala principală egală cu 0 ?

Back

Gorj

1. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C}^*$.Demonstraţi că :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = -a_1 a_2 \cdots a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots \frac{1}{a_n} \right).$$

2. Se consideră mulţimea $H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) | A^2 = A\}$.

a)Să se determine $A \in H$ cu $\det A \neq 0$.

b)Să se arate că matricea $T = \begin{pmatrix} 2007 & 0 \\ 0 & -2008 \end{pmatrix}$ nu se poate scrie ca o sumă finită de matrice din mulţimea H.

3. a) Să se arate că $\sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi $\forall n \in \mathbb{N}$.

b)Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^2(\pi\sqrt{n^2+2n})$.

4. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale cu proprietatea că $x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3 - x_n^4$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi $x_0 \in (0,1)$.

a)Să se arate că $x_1 \in (0,1)$

b) Să se stabilească dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este şir convergent.

Back

Hunedoara

1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

   a)Arătaţi că $A^2 - tr(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$.

   b)Dacă $\det A = 0$, să se arate că există $r \in \mathbb{C}$ astfel încât $A^n = r^{n-1}A, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie $V_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$.

   a)Să se arate că $V_4 = (d-c)(d-b)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

   b)Să se arate că $V_4 = (d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$.

3. Să se calculeze:

   a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;

   b) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$;

   c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

4. a)Să se arate că pentru orice $y \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x = e^y$.

   b)Să se demonstreze că $e^y \geq y + 1, \forall y \in \mathbb{R}$ (folosind, eventual, inegalitatea Bernoulli, adică $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x, x > -1$ şi $\alpha > 1$).

   c)Dacă $a > 0$ şi $a^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ atunci $a = e$.

[Back](#)

Maramures

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.Să se arate că ecuaţia $X^{2008} + X^{2007} + X^{2006} = A^{2007}$, nu are soluţii în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.Se ştie că A^n este de forma $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_b \end{pmatrix}$, unde $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ sunt şiruri de numere reale.

   a)Să se arate că $a_n^2 + b_n^2 = (a^2 + b^2)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

   b)Dacă $a^2 + b^2 < 1$ arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

   c)Dacă $a^2 + b^2 = 1$, iar şirurile a_n şi b_n sunt convergente , atunci $A = I_2$.

3. Fie şirurile $(x_n)_{n\geq 1}, x_n = 3^{2^n} + 1$; $(y_n)_{n\geq 1}, y_n = 3^{2^n} - 1$; $(z_n)_{n\geq 1}$, $z_n = a_1\frac{1}{x_1} + a_2\frac{2}{x_2} + \cdots a_n\frac{2^{n-1}}{x_n}$, unde $a_i \in \{-1, 1\}$.

   a)Să se arate că $\frac{1}{y_n} - \frac{1}{x_n} = \frac{2}{y_{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

   b)Să se arate că dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{8}$.

   c)Să se arate că şirul $(z_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

[Back]

Mures

1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.Să se arate că dacă $I_n + AB$ este inversabilă atunci şi $I_n + BA$ este inversabilă.

2. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_0 > 0$ definit prin relaţia de recurenţă :

$$(1 + n! \cdot x_n^2) \cdot x_{n+1} = e^n \cdot x_n \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}$$

   Determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

3. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2+\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

   a)Să se calculeze $A^n, n \in \mathbb{N}^*$.

b)Dacă notăm $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ şi $a_n + b_n - c_n = x_n + y_n\sqrt{2}$, unde $(x_n, y_n) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$.

4. Se consieră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general:

$$x_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin\sqrt{n^2+1} & \sin\sqrt[3]{n^3+1} & \sin\sqrt[4]{n^4+1} \\ \cos\sqrt{n^2+1} & \cos\sqrt[3]{n^3+1} & \cos\sqrt[4]{n^4+1} \end{vmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Back

Neamt

1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det A = tr(A) = 1$. Câte elemente are mulţimea $\{A^n\}_{n\in\mathbb{N}}$?

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$ şi să se determine limitele lor.

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale strict pozitive cu următoarele proprietăţi: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} n(b_{n+1} - b_n) = c > 0$.

   Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}b_{n+1} - a_n b_n)$.

4. Fie $p \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ şiruri de numere pozitive astfel încâ a_n diverge crescător la $+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0,\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{nb_n} = l \in \mathbb{R}$.Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{n^p}{n^{p+1} + \frac{a_i}{b_n}}$.Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} n^{p+1}(1 - x_n) = l$.

Back

Olt

1. Fie $\mathcal{P}$ mulţimea matricelor de ordin n care au pe fiecare linie şi pe fiecare coloană un singur element egal cu 1 iar celelalte egale cu 0.

   a) Să se arate ca există o bijecţie $\phi : S_n \to \mathcal{P}$, unde S_n reprezintă mulţimea permutărilor de ordin n.

   b)Să se demonstreze că $AB \in \mathcal{P}$, pentru orice $A \in \mathcal{P}$ şi $B \in \mathcal{P}$

   c)Să se calculeze suma $\sum_{A\in\mathcal{P}}(\det A)^2$ şi să se arate că orice matrice $A \in \mathcal{P}$ este inversabilă, iar $A^{-1} \in \mathcal{P}$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ notăm cu σ_n suma discontinuităţilor din intervalul $[0, n]$ ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [\sin x]$.Să se calculeze :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n}{n}$$

3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $\det A = \det B$. Să se arate că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ are loc relaţia :

$$\det(xA + yB) = \det(yA + xB)$$

4. Fie o funcţie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continuă in $x_0 = 1$.Ştiind că

$$f(x) = f(x^2 - x + 1) \text{ oricare ar fi } x \in [0, 1]$$

, arătaţi că f este constantă.

Back

Salaj

1. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 > 0$ şi $a_{n+1} = \frac{a_n^2+4}{a_n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.Studiaţi convergenţa şirului şi dacă este cazul determinaţi limita şirului.

2. Dacă $a, b > 0$ calculaţi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a+n+2^n)}{\ln(b+n^2+3^n)}.$$

3. Calculaţi A^n ,unde $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

4. Calculaţi $\lim_{x\to 1} \frac{2^{\sin(\pi x)}-2^{\tan \pi x}}{x-1}$.

[Back](#)