DETERMINANTI SPECIALI

#

Determinantul Vandermonde se notează cu $V(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ şi este definit prin

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

unde $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$.

Vom calcula valoarea lui, prin două metode.

Metoda I Efectuând $-a_1 L_{n-1} + L_n, -a_1 L_{n-2} + L_{n-1}, \ldots, -a_1 L_1 + L_2$, obţinem:

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} =$$

$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n - a_1) \cdot V(a_2, a_3, \ldots, a_n)$, care reprezintă o relaţie de recurenţă.

Deci,

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n - a_1) \cdot V(a_2, a_3, \ldots, a_n)$$

$$V(a_2, a_3, \ldots, a_n) = (a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \cdot \ldots \cdot (a_n - a_2) \cdot V(a_3, a_4, \ldots, a_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$V(a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) = (a_{n-1} - a_{n-2})(a_n - a_{n-2}) \cdot V(a_{n-1}, a_n)$$

Făcând produsul, se obţine:

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Metoda a II-a Fie polinomul $P(x) = V(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x)$ de gradul $n-1$. Observăm că $P(a_1) = P(a_2) = \ldots = P(a_{n-1}) = 0$ (am exclus cazul banal în care două dintre numerele $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ sunt egale). Deducem că polinomul P este de forma:

$$P(x) = a \prod_{k=1}^{n-1} (x - a_k)$$

Dezvoltând determinantul $V(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, după ultima linie, a fiind coeficientul lui x^{n-1}, deducem $a = V(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, deci

$$V(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},x)=V(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})\cdot\prod_{k=1}^{n-1}(x-a_k)$$

Pentru $x=a_n$, obținem:

$$V(a_1,a_2,\ldots,a_n)=V(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})\cdot\prod_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)$$

şi ţinând cont de această relaţie de recurenţă şi de egalitarea $V(a_1,a_2)=(a_2-a_1)$, obţinem

$$V(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i).$$

Back

#

Determinantul Vandermonde lacunar

Fie $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbf{C}$, $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$

Se numeşte **determinant Vandermonde lacunar**, şi se notează cu $V_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, determinantul

$$V_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & \cdots & a_n^{k-1}\\ a_1^{k+1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_n^{k+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n\end{vmatrix}$$

Pentru calculul lui, considerăm egalităţile

$$V(a_1,a_2,\ldots,a_n,x)=V(a_1,a_2,\ldots,a_n)\cdot\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)=$$

$$=V(a_1,a_2,\ldots,a_n)\cdot\left(x^n-S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}-\ldots+(-1)^nS_n\right),$$

unde S_k este suma Vietè de ordinul *k*.

Pe de altă parte dezvoltând determinantul $V(a_1,a_2,\ldots,a_n,x)$ după ultima coloană, obţinem

$$V(a_1,a_2,\ldots,a_n,x)=(-1)^{n+2}\left(V_0-xV_1+x^2V_2+\ldots+(-1)^nx^nV_n\right)$$

Identificând coeficienţii celor două forme ale polinomului $V(a_1,a_2,\ldots,a_n,x)$ obţinem:

$$V_0(a_1,a_2,\ldots,a_n)=V(a_1,a_2,\ldots,a_n)\cdot\prod_{k=1}^{n}a_k$$

$$V_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)=V(a_1,a_2,\ldots,a_n)\cdot S_{n-k},\ k=\overline{1,n}.$$

Back

#

Determinant polinomial

Fie $P_i \in \mathbf{C}[X]$ polinom de grad cel mult $n-1$, $i=\overline{1,n}$ şi fie $x_j \in \mathbf{C}$, $j=\overline{1,n}$.

Determinantul

$$\det(P_i(x_j))=\begin{vmatrix} P_1(x_1) & P_1(x_2) & \cdots & P_1(x_n) \\ P_2(x_1) & P_2(x_2) & \cdots & P_2(x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_n(x_1) & P_n(x_2) & \cdots & P_n(x_n) \end{vmatrix}$$

se numeşte **determinant polinomial**.

Dacă
$$P_1(x)=a_{11}+a_{12}x+\ldots+a_{1n}x^{n-1}$$
$$P_2(x)=a_{21}+a_{22}x+\ldots+a_{2n}x^{n-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_n(x)=a_{n1}+a_{n2}x+\ldots+a_{nn}x^{n-1}$$

şi notăm $P=(P_{ik})_{i,k=\overline{1,n}}$ matricea coeficienţilor polinoamelor P_i, $i=\overline{1,n}$ observând egalitatea $(P_i(x_j))=(P_{ik})(x_j^{k-1})$, deducem că

$$\det(P_i(x_j))=\det P\cdot V(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Back

#

Determinant circular

Fie $a_1,a_2,\ldots,a_n \in \mathbf{C}$. Se numeşte **determinant circular** al numerelor $a_1,a_2,\ldots,a_n$ şi se notează cu $C(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ determinantul

$$C(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \\ a_3 & a_4 & \cdots & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Pentru calculul lui, considerăm ecuaţia binomă $x^n-1=0$, $n\geq 2$, ale cărei rădăcini sunt $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ numite rădăcini de ordinul n ale unităţii şi construim un determinant Vandermonde de forma:

$$V(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \varepsilon_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Făcând produsul $C(a_1,a_2,\ldots,a_n)\cdot V(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$, obținem:

$$C(a_1,a_2,\ldots,a_n)\cdot V(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)=$$

$$=\begin{vmatrix} a_1+a_2\varepsilon_1+\ldots+a_n\varepsilon_1^{n-1} & a_1+a_2\varepsilon_2+\ldots+a_n\varepsilon_2^{n-1} & \cdots & a_1+a_2\varepsilon_n+\ldots+a_n\varepsilon_n^{n-1} \\ a_2+a_3\varepsilon_1+\ldots+a_1\varepsilon_1^{n-1} & a_2+a_3\varepsilon_2+\ldots+a_1\varepsilon_2^{n-1} & \cdots & a_2+a_3\varepsilon_n+\ldots+a_1\varepsilon_n^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+a_1\varepsilon_1+\ldots+a_{n-1}\varepsilon_1^{n-1} & a_n+a_1\varepsilon_2+\ldots+a_{n-1}\varepsilon_2^{n-1} & \cdots & a_n+a_1\varepsilon_n+\ldots+a_{n-1}\varepsilon_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Considerăm polinomul $f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots+a_nx^{n-1}$ astfel că produsul precedent se scrie:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1^n f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^n f(\varepsilon_2) & \cdots & \varepsilon_n^n f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^{n-1} f(\varepsilon_2) & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} f(\varepsilon_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2) & \cdots & \varepsilon_n f(\varepsilon_n) \end{vmatrix} = f(\varepsilon_1)\cdot f(\varepsilon_2)\cdot\ldots\cdot f(\varepsilon_n)\cdot\begin{vmatrix} \varepsilon_1^n & \varepsilon_2^n & \cdots & \varepsilon_n^n \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n \end{vmatrix}.$$

Ultima linie se poate aduce pe prima linie prin $n-1$ schimbări. Procedând analog cu celelalte linii, obținem:

$$C(a_1,a_2,\ldots,a_n)\cdot V(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1}\cdot f(\varepsilon_1)\cdot f(\varepsilon_2)\cdot\ldots\cdot f(\varepsilon_n)\cdot V(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)=$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot f(\varepsilon_1)\cdot f(\varepsilon_2)\cdot\ldots\cdot f(\varepsilon_n)\cdot V(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n),$$

de unde simplificând cu $V(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$, obținem:

$$C(a_1,a_2,\ldots,a_n)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot f(\varepsilon_1)\cdot f(\varepsilon_2)\cdot\ldots\cdot f(\varepsilon_n),$$

unde $f(\varepsilon)=a_1+a_2\varepsilon+a_3\varepsilon^2+\ldots+a_n\varepsilon^{n-1}$, iar ε este o rădăcină a ecuației $x^n-1=0$.

Back

#

Determinant Cauchy

Fie $a_i, b_j \in \mathbf{C}$, $i, j = \overline{1,n}$. Se numeşte **determinant Cauchy** al numerelor a_i, b_j, determinantul

$$D_{(a_i,b_j)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}.$$

Pentru calculul său scădem ultima linie din celelalte linii, dăm factori pe linii şi pe coloane apoi scădem ultima coloană din celelalte coloane şi dăm din nou factori.

Se obţine relaţia de recurenţă:

$$D_n = \frac{D_{n-1}}{a_n+b_n} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(a_n-a_k)(b_n-b_k)}{(a_n+a_k)(b_n+b_k)},$$

de unde

$$D_{(a_i,b_j)} = \frac{V(a_1,a_2,\ldots,a_n)\cdot V(b_1,b_2,\ldots,b_n)}{\prod_{i,j=1}^{n}(a_i+b_j)}.$$

Back

#

5.3. Funcţii polinomiale de tip determinant

În continuare este expusă o metodă de stabilire a unor proprietăţi ale determinanţilor cu ajutorul unor funcţii polinomiale de tipul:

$$\det(A+xB), \text{ unde } A, B \in M_n(\mathbf{C})$$

Teoremă. 5.3.1. Fie $A, B \in M_n(\mathbf{C})$. Atunci $f(x) = \det(A+xB)$ este un polinom de grad $\leq$ n având termenul liber egal cu det A şi coeficientul lui x^n egal cu det B.

Demonstraţie: Din dezvoltarea lui $\det(A+xB)$ cu definiţia determinantului, rezultă că f este un polinom de grad $\leq n$ iar termenul liber este egal cu $f(0) = \det A$. Coeficientul lui x^n este determinat de:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^n}\det(A+xB) = \lim_{x\to\infty} \det\left(\frac{1}{x}A+B\right) = \det B.$$

Exemplu 5.3.2. Dacă $A, B \in M_2(\mathbf{C})$, atunci

$$\det(A+B)+\det(A-B)=2(\det A+\det B).$$

Într-adevăr, conform teoremei 5.5.1. putem scrie:

$$\det(A+xB)=\det A+ax+\det B\cdot x^2$$

Atunci, pentru $x=1$ şi $x=-1$, obţinem:

$$\det(A+B)=\det A+a+\det B$$

$\det(A-B)=\det A-a+\det B$, $a\in\mathbf{C}$ de unde, prin adunare obţinem relaţia de demonstrat.

[Back](#)

#

5.4. Derivata unui determinant

Teoremă 5.4.1. Fie $f_{ij}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ funcţii derivabile pe $\mathbf{R}$, $i, j\in\{1,2,\ldots,n\}$, iar $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$f(x)=\begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{bmatrix}$$

Arătaţi că f este derivabilă pe $\mathbf{R}$ şi:

$$f'(x)=\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \ldots & \ldots & f_{1n}(x)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ f'_{j1}(x) & f'_{j2}(x) & \cdots & \cdots & f'_{jn}(x)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix},\ (\forall)x\in\mathbf{R}.$$

Demonstraţie: Faptul că funcţia f este derivabilă pe $\mathbf{R}$ rezultă din aceea că: dacă funcţiile $g_1, g_2, \ldots, g_n$ sunt funcţii derivabile pe $\mathbf{R}$, atunci funcţia $g_1\cdot g_2\cdot\ldots\cdot g_n$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$ şi

$$(g_1\cdot g_2\cdot\ldots\cdot g_n)'=\sum_{j=1}^{n}g_1\cdot g_2\cdot\ldots\cdot g'_j\cdot\ldots\cdot g_n.$$

În continuare, avem $f(x)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\cdot f_{1\sigma(1)}(x)\cdot f_{2\sigma(2)}(x)\cdot\ldots\cdot f_{n\sigma(n)}(x)$ (1)

Din (1) prin derivare, rezultă:

$$f'(x)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\cdot f_{1\sigma(1)}(x)\cdot f_{2\sigma(2)}(x)\cdot\ldots\cdot f'_{j\sigma(j)}(x)\cdot\ldots f_{n\sigma(n)}(x),$$

adică tocmai relaţia de demonstrat.

Exemplu 5.4.2. Să se demonstreze că:

$$\begin{vmatrix} \sin(x+\alpha) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ a & b & c \end{vmatrix},$$

$(\forall)x \in \mathbf{R}$, unde $\alpha,\beta,\gamma,a,b,x \in \mathbf{R}$.

Într-adevăr, fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{vmatrix} \sin(x+\alpha) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Evident f este derivabilă şi conform relaţiei demonstrate, putem scrie:

$$f'(x) = \begin{vmatrix} \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \sin(x+\alpha) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) \\ -\sin(x+\alpha) & -\sin(x+\beta) & -\sin(x+\gamma) \\ a & b & c \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \sin(x+\beta) & \sin(x+\beta) & \sin(x+\gamma) \\ \cos(x+\alpha) & \cos(x+\beta) & \cos(x+\gamma) \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ (\forall)x \in \mathbf{R}.$$

Cum $f'(x) = 0$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$ rezultă că f este constantă pe $\mathbf{R}$ şi deci $f(x)=f(0)$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$,

adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

Exemplu 5.4.3. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, x \in \mathbf{R}$. Să se arate că:

$$\begin{vmatrix} x+a_1 & x & \cdots & x \\ x & x+a_2 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & x+a_n \end{vmatrix} =$$

$$= \left(a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n + a_1 a_3 a_4 \cdot \ldots \cdot a_n + \ldots + a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}\right) x + a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Soluție: Fie $f(x) = \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \cdots & x \\ x & x+a_2 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$, $x \in \mathbf{R}$.

Se observă imediat că $f''(x) = 0$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$. Deci, $(\exists)A, B \in \mathbf{R}$ astfel încât $f(x) = Ax+B$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$.

Evident avem: $B=f(0)=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \ldots a_n$, iar

$$A = f'(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= a_2 a_3 \ldots a_n + a_1 a_3 a_4 \ldots a_n + \ldots + a_1 a_2 \ldots a_{n-1},$$

de unde rezultă concluzia.

Back