CLASE DE FUNCTII

[Relatii functionale. Functii injective, surjective, bijective]
[Functii pare, impare, periodice]
[Functii convexe]
#

CLASE DE FUNCŢII

7.1. Relaţii funcţionale. Funcţii injective (surjective, bijective)

Definiţia 7.1.1. Fie A şi B două mulţimi. O submulţime $R \subseteq A \times B$ se numeşte *relaţie funcţională* dacă :

(i) Pentru orice $a \in A$ există $b \in B$ astfel încât $(a, b) \in R$

(ii) $(a, b), (a, b') \in R \Rightarrow b = b'$.

Numim *funcţie* (sau *aplicaţie*) un triplet $f = (A, B, R)$ unde A şi B sunt două mulţimi nevide iar $R \subseteq A \times B$ este o relaţie funcţională.

În acest caz, pentru fiecare element $a \in A$ există un unic element $b \in B$ astfel încât $(a, b) \in R$. Convenim să notăm $b = f(a)$; elementul b se va numi *imaginea lui a* prin f. Mulţimea A se numeşte *domeniul* (sau *domeniul de definiţie* al lui f) iar B se numeşte *codomeniul* lui f şi spunem de obicei că f este o funcţie definită pe A cu valori în B scriind lucrul acesta prin $f : A \to B$ sau $A \xrightarrow{f} B$.

Relaţia funcţională R se mai numeşte şi *graficul* lui f (convenim să notăm pe R prin G_f, astfel că $G_f = \{(a, f(a)) : a \in A\}$. Dacă $f : A \to B$ şi $f' : A' \to B'$ sunt două funcţii, vom spune că ele sunt *egale* (şi vom scrie $f = f'$) dacă $A = A'$, $B = B'$ şi $f(a) = f'(a)$ pentru orice $a \in A$. Pentru o mulţime A, funcţia $1_A : A \to A$, $1_A(a) = a$ pentru orice $a \in A$ poartă numele de *funcţia identică a lui A* (în particular, putem vorbi de funcţia identică a mulţimii vide $1_\emptyset$). Dacă $A = \emptyset$ atunci există o unică funcţie $f : \emptyset \to B$ (este de fapt incluziunea lui $\emptyset$ în B). Dacă $A \neq \emptyset$ şi $B = \emptyset$ atunci în mod evident nu există nici o funcţie de la A la B.

Dacă $f : A \to B$ este o funcţie iar $A' \subseteq A$ şi $B' \subseteq B$ atunci notăm:

$$f(A') = \{f(a) : a \in A'\} \text{ şi } f^{-1}(B') = \{a \in A : f(a) \in B'\}$$

($f(A')$ se va numi *imaginea* lui A' prin f iar $f^{-1}(B')$ *contraimaginea* lui B' prin f).

În particular, notăm **Im**(f)=f (A). Evident, $f(\emptyset) = \emptyset$ şi $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Definiţia 7.1.2. Fiind date două funcţii $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ numim *compunerea* lor funcţia notată $g \circ f : A \to C$ şi definită prin $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ pentru orice $a \in A$.

Propoziţia7.1.3. Dacă $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ sunt trei funcţii, atunci:

(i) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;

(ii) $f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$.

Demonstraţie. (i). Într-adevăr, avem că $h \circ (g \circ f)$ şi $(h \circ g) \circ f$ au pe A drept domeniu de definiţie, pe D codomeniu şi pentru orice $a \in A$, $(h \circ (g \circ f))(a) = ((h \circ g) \circ f)(a) = h(g(f(a)))$.

(ii). Evident. ■

Propoziţia 7.1.4. Fie $f : A \to B$, $A', A'' \subseteq A$, $B', B'' \subseteq B$, $(A_i)_{i \in I}$, $(B_j)_{j \in J}$ două familii de submulţimi ale lui A şi respectiv B. Atunci:

(i) $A' \subseteq A'' \Rightarrow f(A') \subseteq f(A'')$;

(ii) $B' \subseteq B'' \Rightarrow f^{-1}(B') \subseteq f^{-1}(B'')$;

(iii) $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$;

(iv) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$;

(v) $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$;

(vi) $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

Demonstrație (i). Dacă $b\in f(A')$, atunci $b=f(a)$ cu $a\in A'$ și cum $A'\subseteq A''$ deducem că $b\in f(A'')$, adică $f(A')\subseteq f(A'')$.

(ii). Analog cu (i).

(iii). Deoarece pentru orice $k\in I$, $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_k$, conform cu (i) deducem că $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq f(A_k)$ și cum k este oarecare deducem că $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

(iv). Egalitatea cerută rezultă imediat din echivalențele : $b\in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \Leftrightarrow$ există $a\in \bigcup_{i\in I} A_i$ astfel încât $b=f(a) \Leftrightarrow$ există $i_0\in I$ astfel încât $a\in A_{i_0}$ și $b=f(a) \Leftrightarrow$ există $i_0\in I$ astfel încât $b\in f(A_{i_0}) \Leftrightarrow b\in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.

(v). Totul rezultă din echivalențele $a\in f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \Leftrightarrow f(a)\in \bigcap_{j\in J} B_j \Leftrightarrow$ pentru orice $j\in J$, $f(a)\in B_j \Leftrightarrow$ pentru orice $j\in J$, $a\in f^{-1}(B_j) \Leftrightarrow a\in \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

(vi). Analog cu (iv). ■

Definiția 7.1.5. Despre o funcție $f : A\to B$ vom spune că este:

(i) *injectivă,* dacă pentru orice $a, a'\in A$, $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$ (echivalent cu $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$) ;

(ii) *surjectivă,* dacă pentru orice $b\in B$, există $a\in A$ astfel încât $b=f(a)$;

(iii) *bijectivă,* dacă este simultan injectivă și surjectivă.

Dacă $f :A\to B$ este bijectivă, funcția $f^{-1}:B\to A$ definită prin echivalența $f^{-1}(b)=a \Leftrightarrow b=f(a)$ ($b\in B$ și $a\in A$) poartă numele de *inversa* lui f.

Se verifică imediat că $f^{-1}\circ f=1_A$ și $f\circ f^{-1}=1_B$.

Propoziția 7.1.6. Fie $f : A\to B$ și $g : B\to C$ două funcții.

(i) Dacă f și g sunt injective (surjective, bijective) atunci $g\circ f$ este injectivă (surjectivă, bijectivă ; în acest ultim caz $(g\circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$) ;

(ii) Dacă $g\circ f$ este injectivă (surjectivă, bijectivă) atunci f este injectivă, (g este surjectivă; f este injectivă și g este surjectivă).

Demonstrație. (i). Fie a, $a' \in A$ astfel încât $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$. Atunci $g(f(a)) = g(f(a'))$ și cum g este injectivă deducem că $f(a) = f(a')$ iar cum și f este injectivă deducem că $a = a'$, adică $g \circ f$ este injectivă.

Să presupunem acum că f și g sunt surjective și fie $c \in C$; cum g este surjectivă, $c = g(b)$ cu $b \in B$ și cum și f este surjectivă $b = f(a)$ cu $a \in A$ astfel că $c = g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$, adică $g \circ f$ este surjectivă.

Dacă f și g sunt bijective atunci faptul că $g \circ f$ este bijectivă rezultă imediat din cele expuse mai sus. Pentru a proba în acest caz egalitatea $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, fie $c \in C$. Avem că $c = g(b)$ cu $b \in B$ și $b = f(a)$ cu $a \in A$. Deoarece $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$ deducem că $(g \circ f)^{-1}(c) = a = f^{-1}(b) = f^{-1}(g^{-1}(c)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(c)$, adică $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

(ii). Să presupunem că $g \circ f$ este injectivă și fie a, $a' \in A$ astfel încât $f(a) = f(a')$. Atunci $g(f(a)) = g(f(a')) \Leftrightarrow (g \circ f)(a) = (g \circ f)(a') \Rightarrow a = a'$, adică f este injectivă.

Dacă $g \circ f$ este surjectivă, pentru $c \in C$, există $a \in A$ astfel încât $(g \circ f)(a) = c \Leftrightarrow g(f(a)) = c$, adică g este surjecție.

Dacă $g \circ f$ este bijecție atunci în particular $g \circ f$ este injecție și surjecție, deci conform celor de mai sus cu necesitate f este injecție iar g surjecție. ■

Propoziția 7.1.7. Fie M și N două mulțimi iar $f : M \to N$ o funcție. Între mulțimile P(M) și P(N) se definesc funcțiile $f_* : P(M) \to P(N)$, $f^* : P(N) \to P(M)$ prin $f_*(A) = f(A)$, $A \in P(M)$ și $f^*(B) = f^{-1}(B)$, $B \in P(N)$.

Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) f este injectivă ;

(ii) f_* este injectivă ;

(iii) $f^* \circ f_* = 1_{P(M)}$;

(iv) f^* este surjectivă ;

(v) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, pentru orice A, $B \in P(M)$;

(vi) $f(\complement_M A) \subseteq \complement_N f(A)$, pentru orice $A \in P(M)$;

(vii) Dacă g, h : $L \to M$ sunt două funcții astfel încât $f \circ g = f \circ h$, atunci $g = h$;

(viii) Există o funcție $g : N \to M$ astfel încât $g \circ f = 1_M$.

Demonstrație. Vom demonstra echivalența afirmațiilor astfel:

(i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(iv)$\Rightarrow$(v)$\Rightarrow$(vi)$\Rightarrow$(vii)$\Rightarrow$(i) iar apoi (i)$\Leftrightarrow$(viii) .

(i)$\Rightarrow$(ii). Fie A, $A' \in P(M)$ astfel încât $f_*(A) = f_*(A') \Leftrightarrow f(A) = f(A')$.

Dacă $x \in A$, atunci $f(x) \in f(A) \Rightarrow f(x) \in f(A') \Rightarrow$ există $x' \in A'$ astfel încât $f(x) = f(x')$. Cum f este injectivă, rezultă $x = x' \in A'$, adică $A \subseteq A'$; analog $A' \subseteq A$, deci $A = A'$, adică f_* este injectivă.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Pentru $A \in P(M)$ trebuie demonstrat că $(f^* \circ f_*)(A) = A \Leftrightarrow f^{-1}(f(A)) = A$. Incluziunea $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ este valabilă pentru orice funcție f. Pentru cealaltă incluziune, dacă $x \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow$ există $x' \in A$ astfel încât $f(x) = f(x') \Rightarrow f_*(\{x\}) = f_*(\{x'\}) \Rightarrow \{x\} = \{x'\} \Rightarrow x = x' \in A$, adică $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$.

(iii)$\Rightarrow$(iv). Deoarece $f^* \circ f_* = 1_{P(M)}$, pentru orice $A \in P(M)$, $f^*(f_*(A)) = A$, deci notând $B = f_*(A) \in P(N)$ avem că $f^*(B) = A$, adică f^* este surjectivă.

(iv)$\Rightarrow$(v). Fie $A, B \in P(M)$ şi $A', B' \in P(N)$ astfel încât $A=f^{-1}(A')$ şi $B=f^{-1}(B')$. Atunci $f(A \cap B)=f(f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')) = f(f^{-1}(A' \cap B'))$.

Să arătăm că $f(f^{-1}(A')) \cap f(f^{-1}(B')) \subseteq f(f^{-1}(A' \cap B'))$.

Dacă $y \in f(f^{-1}(A')) \cap f(f^{-1}(B')) \Rightarrow y \in f(f^{-1}(A'))$ şi $y \in f(f^{-1}(B')) \Rightarrow$ există $x' \in f^{-1}(A')$ şi $x'' \in f^{-1}(B')$ astfel încât $y = f(x') = f(x'')$.

Cum $x' \in f^{-1}(A')$ şi $x'' \in f^{-1}(B') \Rightarrow f(x') \in A'$ şi $f(x'') \in B'$, deci $y \in A' \cap B'$. Deoarece $y=f(x') \Rightarrow x' \in f^{-1}(A' \cap B')$, adică $y \in f(f^{-1}(A' \cap B'))$.

Astfel, $f(A \cap B) \supseteq f(A) \cap f(B)$ şi cum incluziunea $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ este adevărată pentru orice funcţie deducem că $f(A \cap B)=f(A) \cap f(B)$.

(v)$\Rightarrow$(vi). Pentru $A \in P(M)$ avem $f(A) \cap f(\complement_M A)=f(A \cap \complement_M A)=f(\varnothing)=\varnothing$, deci $f(\complement_M A) \subseteq \complement_N f(A)$.

(vi)$\Rightarrow$(vii). Fie $g, h : L \rightarrow M$ două funcţii astfel încât $f \circ g=f \circ h$ şi să presupunem prin absurd că există $x \in L$ astfel încât $g(x) \neq h(x)$, adică $g(x) \in \complement_M\{h(x)\}$; atunci $f(g(x)) \in f(\complement_M\{h(x)\}) \subseteq \complement_N f(h(\{x\}))=\complement_N\{f(h(x))\}$ deci $f(g(x)) \neq f(h(x)) \Leftrightarrow (f \circ g)(x) \neq (f \circ h)(x) \Leftrightarrow f \circ g \neq f \circ h$, ceea ce este absurd.

(vii)$\Rightarrow$(i). Fie $x, x' \in M$ astfel încât $f(x)=f(x')$ şi să presupunem prin absurd că $x \neq x'$. Notând $L=\{x, x'\}$ şi definind $g, h : L \rightarrow M$, $g(x)=x$, $g(x')=x'$, $h(x)=x'$, $h(x')=x$, atunci $g \neq h$ şi totuşi $f \circ g=f \circ h$, ceea ce este absurd.

(i)$\Rightarrow$(viii). Definind $g: N \rightarrow M$, $g(y)=x$ dacă $y=f(x)$ cu $x \in M$ şi y_0 dacă $y \notin f(M)$, atunci datorită injectivităţii lui f, g este definită corect şi evident $g \circ f=1_M$.

(viii)$\Rightarrow$(i). Dacă $x, x' \in M$ şi $f(x)=f(x')$, atunci $g(f(x))=g(f(x')) \Rightarrow x=x'$, adică f este injectivă. ■

Propoziţia 7.1.8. Cu notaţiile de la propoziţia precedentă, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) f este surjectivă ;

(ii) f_* este surjectivă ;

(iii) $f_* \circ f^* = 1_{P(N)}$;

(iv) f^* este injectivă ;

(v) $f(\complement_M A) \supseteq \complement_N f(A)$, pentru orice $A \in P(M)$;

(vi) Dacă $g, h : N \rightarrow P$ sunt două funcţii astfel încât $g \circ f=h \circ f$, atunci $g=h$;

(vii) Există o funcţie $g : N \rightarrow M$ astfel încât $f \circ g=1_N$.

Demonstraţie. Vom demonstra echivalenţa afirmaţiilor astfel:

(i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(iv)$\Rightarrow$(v)$\Rightarrow$(vi)$\Rightarrow$(i) iar apoi (i)$\Leftrightarrow$(vii).

(i)$\Rightarrow$(ii). Fie $B \in P(N)$ şi $y \in B$; atunci există $x_y \in M$ astfel încât $f(x_y)=y$.

Notând $A=\{x_y : y \in B\} \subseteq M$ avem că $f(A)=B \Leftrightarrow f_*(A)=B$.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Avem de demonstrat că pentru orice $B \in P(N)$, $f(f^{-1}(B))=B$. Incluziunea $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ este valabilă pentru orice funcţie f. Fie acum $y \in B$; cum f_* este surjectivă, există $A \subseteq M$ astfel încât $f_*(A)=\{y\} \Leftrightarrow f(A)=\{y\}$, deci există $x \in A$ astfel încât $y=f(x)$ şi deoarece $y \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \Rightarrow y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$, de unde şi incluziunea $B \subseteq f(f^{-1}(B))$.

(iii)⇒(iv). Dacă $B_1, B_2 \in P(N)$ şi $f^*(B_1)=f^*(B_2)$, atunci $f_*(f^*(B_1)) = f_*(f^*(B_2)) \Leftrightarrow 1_{P(N)}(B_1) = 1_{P(N)}(B_2) \Leftrightarrow B_1=B_2$, adică f^* este injectivă.

(iv)⇒(v). Fie $A \subseteq M$; a arăta că $f(\complement_M A) \supseteq \complement_N f(A)$, revine la $f(\complement_M A) \cup f(A)=N \Leftrightarrow f(\complement_M A \cup A) = N \Leftrightarrow f(M) = N$. Să presupunem prin absurd că există $y_0 \in N$ astfel încât pentru orice $x \in M$, $f(x) \neq y_0$, adică $f^{-1}(\{y_0\})=\emptyset \Leftrightarrow f^*(\{y_0\})=\emptyset$. Deoarece şi $f^*(\emptyset)=\emptyset \Rightarrow f^*(\{y_0\})=f^*(\emptyset)$ iar pentru că f^* este presupusă injectivă ar rezulta că $\{y_0\}=\emptyset$, ceea ce este absurd.

(v)⇒(vi). În particular, pentru A=M avem $f(\complement_M M) \supseteq \complement_N f(M) \Leftrightarrow f(\emptyset) \supseteq \complement_N f(M) \Leftrightarrow \emptyset \supseteq \complement_N f(M) \Leftrightarrow f(M)=N$.

Dacă $g, h : N \to P$ sunt două funcţii astfel încât $g \circ f = h \circ f$, atunci pentru orice $y \in N$, există $x \in M$ astfel încât $f(x)=y$ (căci $f(M)=N$) şi astfel $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = (h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(y)$, adică g=h.

(vi)⇒(i). Presupunem prin absurd că există $y_0 \in N$ astfel încât $f(x) \neq y_0$, pentru orice $x \in M$. Definim $g, h : N \to \{0, 1\}$ astfel : $g(y)=0$, pentru orice $y \in N$ şi

$$h(y)=\begin{cases}0, & pentru\ y \in N-\{y_0\}\\ 1, & pentru\ y=y_0\end{cases}$$

Evident $g \neq h$ şi totuşi $g \circ f = h \circ f$, ceea ce este absurd, deci f este surjectivă.

(i)⇒(vii). Pentru fiecare $y \in N$ alegând câte un singur $x_y \in f^{-1}(\{y\})$, obţinem astfel o funcţie $g : N \to M$, $g(y)=x_y$, pentru orice $y \in N$, ce verifică în mod evident relaţia $f \circ g = 1_N$.

(vii)⇒(i). Pentru $y \in N$, scriind că $f(g(y))=y$, rezultă $y=f(x)$, cu $x=g(y) \in M$, adică f este surjectivă.■

Din propoziţiile precedente obţinem imediat:

Corolarul 7.1.9. Cu notaţiile de la Propoziţia 7.1.7, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) f este bijectivă ;

(ii) $f(\complement_M A)=\complement_N f(A)$, pentru orice $A \in P(M)$;

(iii) f_* şi f^* sunt bijective ;

(iv) Există o funcţie $g : N \to M$ astfel încât $f \circ g = 1_N$ şi $g \circ f = 1_M$.

Propoziţia 7.1.10. Fie M o mulţime finită şi f:M→M o funcţie. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) f este injectivă ;

(ii) f este surjectivă ;

(iii) f este bijectivă .

Demonstraţie. Vom demonstra următoarele implicaţii: (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i).

(i)⇒(ii). Dacă f este injectivă, atunci f(M) şi M au acelaşi număr de elemente şi cum $f(M) \subseteq M$ rezultă că f (M)=M , adică f este şi surjectivă.

(ii)⇒(iii). Dacă f este surjectivă, atunci pentru orice element $y \in M$ va exista un unic element $x_y \in M$ astfel încât $f(x_y) = y$ (căci în caz contrar ar rezulta contradicţia că M ar avea mai multe elemente decât M), adică f este şi injectivă.

(iii)⇒(i). Evident. ■

Propoziția 7.1.11. Fie M și N două mulțimi având m, respectiv n elemente. Atunci:

(i) Numărul funcțiilor definite pe M cu valori în N este egal cu n^m ;

(ii) Dacă m = n, atunci numărul funcțiilor bijective de la M la N este egal cu m! ;

(iii) Dacă $m \leq n$, atunci numărul funcțiilor injective de la M la N este egal cu A_n^m ;

(iv) Dacă $m \geq n$, atunci numărul funcțiilor surjective de la M la N este egal cu

$$n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - ... + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}.$$

Demonstrație. (i). Facem inducție matematică după m; dacă m=1, mulțimea M va avea un singur element și este clar că vom avea $n = n^1$ funcții de la M la N. Presupunem afirmația adevărată pentru mulțimile M ce au cel mult m-1 elemente.

Dacă M este o mulțime cu m elemente, putem scrie $M=M'\cup\{x_0\}$, cu $x_0\in M$ iar M′ submulțime a lui M cu m-1 elemente.

Pentru orice $y\in N$ și $g : M'\to N$ funcție, considerând $f_{g,y} : M\to N$, $f_{g,y}(x) = g(x)$ dacă $x\in M'$ și y dacă $x=x_0$, deducem că oricărei funcții $g: M'\to N$ îi putem asocia n funcții distincte de la M la N ale căror restricții la M′ sunt egale cu g. Aplicând ipoteza de inducție pentru funcțiile de la M′ la N, deducem că de la M la N se pot defini $n\cdot n^{m-1}=n^m$ funcții.

(ii). Facem inducție matematică după m; dacă m =1, mulțimile M și N vor avea câte un singur element și vom avea o singură funcție bijectivă de la M la N.

Presupunem afirmația adevărată pentru toate mulțimile M′ și N′ ambele având cel mult m-1 elemente și fie M și N mulțimi având fiecare câte m elemente. Scriind $M=M'\cup\{x_0\}$, cu $x_0\in M$ iar M′ submulțime a lui M cu m-1 elemente, atunci orice funcție bijectivă $f : M\to N$ este perfect determinată de valoarea $f(x_0)\in N$ precum și de o funcție bijectivă $g : M'\to N'$, unde $N' = N \setminus \{f(x_0)\}$. Deoarece pe $f(x_0)$ îl putem alege în m moduri iar pe g în (m-1)! moduri (conform ipotezei de inducție) deducem că de la M la N putem defini (m-1)!·m =m! funcții bijective.

(iii). Dacă $f : M\to N$ este injectivă, atunci luând drept codomeniu pe $f(M)\subseteq N$, deducem că f determină o funcție bijectivă $\overline{f} : M\to f(M)$, $\overline{f}(x) = f(x)$, pentru orice $x\in M$, iar f(M) are m elemente. Reciproc, dacă vom alege în N o parte N′ a sa cu m elemente, atunci putem stabili m! funcții bijective de la M la N′ (conform cu (ii)). Cum numărul submulțimilor N′ ale lui N care au m elemente este egal cu C_n^m , rezultă că putem construi $m!\,C_n^m = A_n^m$ funcții injective de la M la N.

(iv). Să considerăm $M=\{x_1, x_2, ...,x_m\}$, $N=\{y_1, y_2, ...,y_n\}$ iar M_i mulțimea funcțiilor de la M la N astfel încât y_i nu este imaginea nici unui element din M, i = 1, 2, ..., n.

Astfel, dacă notăm prin F_m^n mulțimea funcțiilor de la M la N, mulțimea funcțiilor surjective S_m^n de la M la N va fi complementara mulțimii $M_1\cup M_2\cup ... \cup M_n$ din F_m^n , deci conform Principiului includerii și excluderii (vezi Teorema 6.3.1) avem egalitățile :

$$(1)\quad \left|S_m^n\right| = \left|F_m^n\right| - \left|\bigcup_{i=1}^n M_i\right| = n^m - \left|\bigcup_{i=1}^n M_i\right| = n^m - \sum_{i=1}^n |M_i| + \sum_{1\leq i<j\leq n} \left|M_i \cap M_j\right| - \\ - \sum_{1\leq i<j<k\leq n} \left|M_i \cap M_j \cap M_k\right| + ... + (-1)^n \left|M_1 \cap M_2 \cap .... \cap M_n\right|$$

Deoarece M_i este de fapt mulţimea funcţiilor definte pe M cu valori în $N \setminus \{y_i\}$, $M_i \cap M_j$ este mulţimea funcţiilor definite pe M cu valori în $N \setminus \{y_i, y_j\}$ ..., etc, conform punctului (i) avem că:

$$(2)\quad |M_i| = (n-1)^m,\ |M_i \cap M_j| = (n-2)^m, \ldots, \text{etc},$$

$(|M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n| = 0$, deoarece $M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n = \varnothing)$.

Deoarece sumele ce apar în (1) au, respectiv, $C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$ temeni egali, ţinând cont de acest lucru şi de (2), relaţia (1) devine:

$$S_m^n = n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}. \quad \blacksquare$$

Pentru o mulţime nevidă M şi $A \in P(M)$ definim $\varphi_A : M \to \{0,1\}$,

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0, & dacă\ x \notin A \\ 1, & dacă\ x \in A \end{cases}$$

pentru orice $x \in M$. Funcţia φ_A poartă numele de *funcţia caracteristică* a mulţimii A.

Propoziţia 7.1.12. Dacă $A, B \in P(M)$, atunci:

(i) $A = B \Leftrightarrow \varphi_A = \varphi_B$;

(ii) $\varphi_\varnothing = 0$, $\varphi_M = 1$;

(iii) $\varphi_{A \cap B} = \varphi_A \varphi_B$, $\varphi_A^{\ 2} = \varphi_A$;

(iv) $\varphi_{A \cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A \varphi_B$;

(v) $\varphi_{A \setminus B} = \varphi_A - \varphi_A \varphi_B$, $\varphi_{C_M A} = 1 - \varphi_A$;

(vi) $\varphi_{A \Delta B} = \varphi_A + \varphi_B - 2\varphi_A \varphi_B$.

Demonstraţie. (i).„$\Rightarrow$”. Evident.

„$\Leftarrow$” Presupunem că $\varphi_A = \varphi_B$ şi fie $x \in A$; atunci $\varphi_A(x) = \varphi_B(x) = 1$, deci $x \in B$, adică $A \subseteq B$. Analog $B \subseteq A$, de unde $A = B$.

(ii). Evident.

(iii). Pentru $x \in M$ putem avea următoarele situaţii: $(x \notin A, x \notin B)$ sau $(x \in A, x \notin B)$ sau $(x \notin A, x \in B)$ sau $(x \in A, x \in B)$. În fiecare situaţie în parte se verifică imediat relaţia $\varphi_{A \cap B}(x) = \varphi_A(x)\varphi_B(x)$.

Cum $A \cap A = A \Rightarrow \varphi_A = \varphi_A \varphi_A = \varphi_A^{\ 2}$.

(iv), (v). Asemănător cu (iii).

(vi). Avem $\varphi_{A \Delta B} = \varphi_{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)} = \varphi_{A \setminus B} + \varphi_{B \setminus A} - \varphi_{A \setminus B}\varphi_{B \setminus A} =$

$= \varphi_A - \varphi_A \varphi_B + \varphi_B - \varphi_B \varphi_A - \varphi_{(A \setminus B) \cap (B \setminus A)} = \varphi_A + \varphi_B - 2\varphi_A \varphi_B$

deoarece $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$. $\blacksquare$

Fie M o mulţime oarecare iar $\rho \in$ **Echiv** (M). Funcţia $p_{\rho,M} : M \to M/\rho$ definită prin $p_{\rho,M}(x) = [x]_\rho$ pentru orice $x \in M$ este surjectivă şi poartă numele de *surjecţia canonică*.

Propoziţia 7.1.13. Fie M şi N două mulţimi pe care s-au definit relaţiile de echivalenţă ρ, respectiv ρ′ şi f : M→N o funcţie având proprietatea:

$(x, y) \in \rho \Rightarrow (f(x), f(y)) \in \rho'$, pentru orice $x, y \in M$.

Atunci există o singură funcţie $\overline{f}$: M/ρ→N/ρ′ astfel încât diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_{M,\rho}"'] & N \arrow[d, "p_{N,\rho'}"] \\ M/\rho \arrow[r, "\overline{f}"] & N/\rho \end{tikzcd}$$

este comutativă (adică $p_{N,\rho'}\circ f=\overline{f}\circ p_{M,\rho}$, unde $p_{M,\rho}$, $p_{N,\rho'}$ sunt surjecţiile canonice).

Demonstraţie. Pentru $x\in M$, vom nota prin $[x]_\rho$ clasa de echivalenţă a lui x modulo relaţia ρ. Pentru $x\in M$, definim: $\overline{f}([x]_\rho) = [f(x)]_{\rho'}$. Dacă $x, y\in M$ astfel încât $[x]_\rho=[y]_\rho \Leftrightarrow (x, y)\in\rho \Rightarrow [f(x), f(y)]\in\rho'$ (din enunţ) $\Rightarrow [f(x)]_{\rho'} = [f(y)]_{\rho'}$, adică $\overline{f}$ este corect definită.

Dacă $x\in M$, atunci $(\overline{f}\circ p_{M,\rho})(x) = \overline{f}(p_{M,\rho}(x)) = \overline{f}([x]_\rho) = [f(x)]_{\rho'} = p_{N,\rho'}(f(x))= =(p_{N,\rho'}\circ f)(x)$, adică $p_{N,\rho'}\circ f=\overline{f}\circ p_{M,\rho}$.

Pentru a demonstra unicitatea lui $\overline{f}$, să presupunem că ar mai exista o funcţie $\overline{f}\,'$: M / ρ→N / ρ′ astfel încât $p_{N,\rho'}\circ f=\overline{f}\,'\circ p_{M,\rho}$, şi fie $x\in M$.

Atunci $\overline{f}\,'([x]_\rho)=\overline{f}\,'(p_{M,\rho}(x))=(\overline{f}\,'\circ p_{M,\rho})(x)=(p_{N,\rho'}\circ f)(x) = p_{N,\rho'}(f(x)) = [f(x)]_{\rho'} = \overline{f}\,'([x]_\rho)$, de unde deducem că $\overline{f} = \overline{f}\,'$ ■

Propoziţia 7.1.14. Fie M şi N două mulţimi iar f :M→N o funcţie ; notăm prin ρ_f relaţia binară de pe M definită astfel:

$$(x, y)\in\rho_f \Leftrightarrow f(x)=f(y)\ \ (x, y\in M).$$

Atunci:

(i) ρ_f este relaţie de echivalenţă pe M;

(ii) Există o unică funcţie bijectivă $\overline{f}$: M/ρ_f→ Im (f) astfel încât

$$i\circ\overline{f}\circ p_{M,\rho_f} = f,\ \ i:Im(f)\to N \text{ fiind incluziunea.}$$

Demonstraţie. (i). Evident (relaţia de egalitate fiind o echivalenţă pe M).

(ii). Păstrând notaţia claselor de echivalenţă de mai sus, pentru $x\in M$ definim $\overline{f}([x]_{\rho_f})=f(x)$. Funcţia $\overline{f}$ este corect definită căci dacă $x, y\in M$ şi $[x]_{\rho_f}=[y]_{\rho_f}\Leftrightarrow(x, y)\in\rho_f \Leftrightarrow f(x)=f(y)$ (de aici rezultă imediat şi injectivitatea lui $\overline{f}$) . Cum $\overline{f}$ este în mod evident şi surjectivă, deducem că $\overline{f}$ este bijectivă. Pentru a proba unicitatea lui $\overline{f}$, fie f_1 : M/ρ_f →Im (f) o altă funcţie bijectivă astfel încât $i\circ f_1\circ p_{M,\rho_f} = f$ şi $x\in M$. Atunci, $(i\circ f_1\circ p_{M,\rho_f})(x)=f(x) \Leftrightarrow f_1([x]_{\rho_f})=f(x)\Leftrightarrow f_1([x]_{\rho_f})=f(x)=\overline{f}([x]_{\rho_f})$, adică $f_1=\overline{f}$. ■

Propoziţia 7.1.15. Fie M o mulţime finită cu m elemente. Atunci numărul $N_{m,k}$ al relaţiilor de echivalenţă ce pot fi definite pe M astfel încât mulţimea cât să aibă k elemente (k≤m) este dat de formula:

$$N_{m,k} = (1/k!)\cdot[k^m - C_k^1(k-1)^m + C_k^2(k-2)^m - ... + (-1)^{k-1}C_k^{k-1}].$$

Deci, numărul relaţiilor de echivalenţă ce pot fi definite pe mulţimea M este dat de formula $N=N_{m,1}+N_{m,2}+...+N_{m,m}$.

Demonstrație. Dacă ρ este o relație de echivalență, $\rho \in \mathrm{Echiv}(M)$, atunci avem surjecția canonică $p_{M,\rho} : M \to M/\rho$. Dacă în general, $f : M \to N$ este o funcție surjectivă, atunci cum am stabilit în cazul Propoziției 7.1.14, aceasta dă naștere la următoarea relație de echivalență de pe M : $(x, y) \in \rho_f \Leftrightarrow f(x)=f(y)$. Mai mult, dacă $g : N \to N'$ este o funcție bijectivă atunci relațiile ρ_f și $\rho_{g\circ f}$ coincid căci $(x,y) \in \rho_{g\circ f} \Leftrightarrow (g\circ f)(x)=(g\circ f)(y) \Leftrightarrow g(f(x))=g(f(y)) \Leftrightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow (x, y) \in \rho_f$. Deci, dacă N are k elemente, atunci k! funcții surjective de la M la N vor determina aceiași relație de echivalență pe M. Luând în particular $N=M/\rho$ și ținând cont de Propoziția 7.1.11 deducem că $N_{m,k} = (1/k!)\cdot[k^m - C_k^1(k-1)^m + C_k^2(k-2)^m - ... + (-1)^{k-1}C_k^{k-1}]$. ■

Back
#

7.2. Funcții pare, impare, periodice

Fie $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Definiția 7.2.1. O funcție $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ se numește *pară* dacă $f(-x) = f(x)$, pentru orice $x \in [-a, a]$.

Exemple. Funcția $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ este o funcție pară; de asemenea funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2k}$ este pară ($k \in \mathbb{N}$).

Observație. Un produs finit de funcții pare este o funcție pară; de asemenea, o sumă finită de funcții pare este o funcție pară. Dacă compunem două funcții pare rezultatul este tot o funcție pară.

Definiția 7.2.2. O funcție $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ se numește *impară* dacă $f(-x) = -f(x)$, pentru orice $x \in [-a, a]$.

Exemple. Funcțiile $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ și $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$) sunt funcții impare.

Observații. 1. Un produs par de funcții impare este o funcție pară, iar un produs impar de funcții impare este funcție impară;

2. O sumă finită de funcții impare este o funcție impară.

3. Dacă compunem două funcții impare obținem tot o funcție impară.

Teorema 7.2.3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție impară și bijectivă.

Atunci funcția $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este impară.

Demonstrație. Fie $y \in \mathbb{R}$. Trebuie demonstrat că $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$.

Avem, $f(f^{-1}(-y)) = -y$ iar $f(-f^{-1}(y)) = -f(f^{-1}(y)) = -y$, adică $f(f^{-1}(-y)) = f(-f^{-1}(y))$ și deci $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$. ■

Observații. 1. Funcțiile $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ și $\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sunt impare.

2. Orice funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se poate scrie ca suma dintre o funcție pară și una impară (vezi exercițiul 7.2.4.).

Definiția 7.2.4. O funcție f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se numește *periodică* dacă există un număr real $T \neq 0$ pentru care $f(x + T) = f(x)$, pentru orice $x \in\mathbb{R}$.

Un astfel de număr T poartă numele de *perioadă* a funcției f. Cea mai mică perioadă strict pozitivă a funcției f, dacă există, poartă numele de *perioadă principală*.

Exemple.
Funcțiile trigonometrice sunt funcții periodice (funcțiile sinus și cosinus au perioada principală 2π iar funcțiile tangentă și cotangentă au perioada principală π).

Funcția $\{x\}$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este periodică și are perioada principală egală cu 1; într-adevăr, $\{x+1\} = \{x\}$ și 1 este cel mai mic număr cu această proprietate ($\{x\} = x - [x]$).

Observații. 1. Dacă T este perioada principală pentru f, atunci și -T este perioadă pentru f;

2. Dacă T este perioada pentru f, atunci și kT este perioadă pentru f, pentru orice $k\in\mathbb{Z}$;

3. Dacă g este o funcție periodică iar f este o funcție oarecare, atunci $f\circ g$ este periodică; în particular, dacă compunem două funcții periodice obținem tot o funcție periodică;

4. Fie f, g : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două funcții periodice. Dacă f posedă o perioadă T_1 iar g o perioadă T_2 astfel încât $\frac{T_1}{T_2}\in\mathbb{Q}$ atunci $f \pm g$, fg, $\frac{f}{g}$ (când este definită) sunt funcții periodice.

Într-adevăr, putem presupune că există două numere naturale p, q astfel încât $pT_1 = qT_2$. Evident pT_1 este perioadă pentru f, iar qT_2 este perioadă pentru g, deci f și g posedă perioade egale; atunci evident $f\pm g$, fg și $\frac{f}{g}$ sunt periodice.

Back
#

7.3. Funcții convexe (concave)

Definiția 7.3.1. Fie f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, a, b $\in$ $\mathbb{R}$, a<b. Vom spune că f este *convexă (concavă)* pe (a, b) dacă pentru orice $x_1, x_2 \in (a, b)$ și orice $t \in [0, 1]$ avem

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \text{ (respectiv, } f(tx_1 + (1-t)x_2) \ge tf(x_1) + (1-t)f(x_2)).$$

Teorema 7.3.2. Dacă f este de două ori derivabilă pe (a, b), atunci f este convexă pe (a, b) dacă și numai dacă $f'' \ge 0$ pe (a, b).

Demonstrație. Să presupunem că $f''\ge 0$ pe (a, b) și să demonstrăm ca f este convexă pe (a, b). Atunci f' este crescătoare pe (a, b), deci pentru orice $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 \le x_2 \Rightarrow f'(x_1) \le f'(x_2)$.

Fie acum $t \in [0, 1]$ și $x_0 = tx_1+(1-t)x_2$. Se observă imediat că $x_1 < x_0 < x_2$.

Conform teoremei lui Lagrange există $c_1 \in (x_1, x_0)$ și $c_2 \in (x_0, x_2)$ astfel încât $f'(c_1)=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$ și $f'(c_2)=\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$. Cum $c_1 < c_2 \Rightarrow f'(c_1) < f'(c_2)$, deci $\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$.

Înlocuind la numitori x_0 prin $tx_1+(1-t)x_2$ și grupând convenabil se ajunge la $f(x_0) \le tf(x_1)+(1-t)f(x_2) \Leftrightarrow f(tx_1 + (1-t)x_2) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$, adică f este convexă.

Invers, să presupunem că f este convexă pe (a, b) şi să demonstrăm că $f'' \geq 0$ pe (a, b). Fie $\alpha < \beta < \gamma$ trei numere reale din domeniul de definiţie al lui f.

Vom proba că $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \leq \frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$.

În relaţia $f(tx_1+(1-t)x_2) \leq tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$ punem $x_1 = \alpha$, $x_2 = \gamma$, $t = \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}$, deci $1-t = \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$; evident $\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} \in [0, 1]$.

Vom obţine prin înlocuire $f\left(\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\cdot\alpha + \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\cdot\gamma\right) \leq \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\cdot f(\alpha) + \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\cdot f(\gamma)$, adică

$f\left(\frac{\gamma\alpha-\beta\alpha+\beta\gamma-\alpha\gamma}{\gamma-\alpha}\right) \leq \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\cdot f(\alpha) + \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\cdot f(\gamma)$, sau reducând

$f(\beta)\cdot(\gamma-\alpha) \leq f(\alpha)\cdot(\gamma-\beta) + f(\gamma)\cdot(\beta-\alpha)$, echivalent cu

$$(*)\quad \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \leq \frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$$

Vom alege acum patru puncte $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$. Din cele deduse anterior scriem $\frac{f(x_2)-f(\alpha)}{x_2-\alpha} \geq \frac{f(\alpha)-f(x_1)}{\alpha-x_1}$ şi $\frac{f(\beta)-f(x_2)}{\beta-x_2} \geq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Dacă $\alpha \to x_1$ şi $\beta \to x_2$ obţinem $f'(x_2) \geq f'(x_1)$, pentru că f(x) este derivabilă şi cum alegerea lui x_1 şi x_2 este arbitrară, condiţionată numai de $x_1 < x_2$ scriem $f'(x_2) - f'(x_1) \geq 0$.

Împărţind cu cantitatea pozitivă $x_2 - x_1$ obţinem $\frac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$.

Trecând la limită $\lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1} = f''(x_1) \geq 0$ şi afirmaţia este probată.

Observaţie. Evident, f concavă dacă şi numai dacă - f convexă; analog obţinem că f concavă pe (a, b) dacă şi numai dacă $f'' \leq 0$ pe (a, b).

Teorema 7.3.3. (Jensen). Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$. Atunci f este convexă pe (a, b) dacă şi numai dacă pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$ şi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ cu $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, avem $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

Egalitate avem când $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Demonstraţie. „$\Leftarrow$". Evident.

„$\Rightarrow$". Să observăm pentru început că dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ cu $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, atunci şi $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in (a, b)$.

Într-adevăr, avem că $a < \min\limits_{1\leq i\leq n}\{x_i\} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \leq \max\limits_{1\leq i\leq n}\{x_i\} < b$.

Să revenim acum la demonstraţia teoremei. Dacă n = 2 totul este clar.

Fie n = 4; $x_1, x_2, x_3, x_4 \in (a, b)$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in [0, 1]$ şi $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1$.

Dacă considerăm $y_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}x_2$, $y_2 = \frac{\lambda_3}{\lambda_3+\lambda_4}x_3 + \frac{\lambda_4}{\lambda_3+\lambda_4}x_4$, $\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2$ şi $\mu_2 = \lambda_3 + \lambda_4$, atunci $f(\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) \leq \mu_1 f(y_1) + \mu_2 f(y_2)$

$$\Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{4}\lambda_i x_i\right)\le(\lambda_1+\lambda_2)f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}x_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}x_2\right)+(\lambda_3+\lambda_4)f\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_3+\lambda_4}x_3+\frac{\lambda_4}{\lambda_3+\lambda_4}x_4\right)\Leftrightarrow$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{4}\lambda_i x_i\right)\le(\lambda_1+\lambda_2)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}f(x_1)+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}f(x_2)\right)+$$

$$+(\lambda_3+\lambda_4)\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_3+\lambda_4}f(x_3)+\frac{\lambda_4}{\lambda_3+\lambda_4}f(x_4)\right)=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i f(x_i).$$

Raţionând din aproape în aproape (un fel de inducţie matematică) deducem că implicaţia „$\Rightarrow$“ este adevărată dacă n este de forma $n = 2^k$ cu $k \in \mathbb{N}$.

Fie acum n un număr natural oarecare iar k cel mai mic număr natural cu proprietatea că $n \le 2^k$ cu $k \in \mathbb{N}$. Considerăm

$$\mu_j=\begin{cases}\dfrac{\lambda_j}{2^k-n}, & \textit{pentru } j=1,\ 2,\ \ldots,n\\[2mm] \dfrac{2^k-n-1}{\left(2^k-n\right)^2}, & \textit{pentru } j=n+1,\ n+2,\ \ldots,\ 2^k\end{cases}$$

$$y_j=\begin{cases}x_j, & \textit{pentru } j=1,\ 2,\ \ldots,n\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i, & \textit{pentru } j=n+1,\ n+2,\ \ldots,\ 2^k\end{cases}.$$

Avem

$$f\left(\sum_{j=1}^{2^k}\mu_j y_j\right)\le\sum_{j=1}^{2^k}\mu_j f(y_j)\Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\le\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)}{2^k-n}+\left(2^k-n\right)\left(\frac{2^k-n-1}{\left(2^k-n\right)^2}f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\le\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)}{2^k-n}+\frac{2^k-n-1}{2^k-n}f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\Leftrightarrow$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\le\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)}{2^k-n}+f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)-\frac{f\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)}{2^k-n}\Leftrightarrow$$

$$0\le\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)}{2^k-n}-\frac{f\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)}{2^k-n}\Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i).$$

Observaţie. Analog deducem că f este concavă pe (a, b) dacă şi numai dacă pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$ şi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ cu $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$, avem $f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\ge\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$.

Aplicaţii. 1. Fie $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi $a, b \in\mathbb{R}$ cu $a < b$ iar $x_1, \ldots, x_n \in (a, b)$. Dacă f este convexă pe (a, b) atunci $f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)\le\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}$; dacă f este concavă pe (a, b) atunci $f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)\ge\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}$.

Demonstraţie. Totul rezultă din Teorema 7.3.3 luând $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=\frac{1}{n}$.

2. (*Inegalitatea lui Hölder*) Fie $x_1, \ldots, x_n > 0$ iar $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ cu $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Atunci avem inegalitatea $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}$.

Demonstrație. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. Atunci $f'(x) = \frac{1}{x}$ și $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$. Deci f este concavă, conform Teoremei 7.3.1, pe $(0, \infty)$. Conform teoremei 7.3.3 putem scrie

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \Leftrightarrow \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln(x_i)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geq \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}\right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}.$$

Observații. **1.** Dacă $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ obținem că, $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$, adică inegalitatea mediilor .

2. O variantă generalizată a inegalității lui Hölder este următoarea:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^q\right)^{1/q},$$

unde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n > 0$ iar $n \geq 2$.

Pentru demonstrația acesteia recomandăm cititorului de exemplu lucrarea [19, p. 248].

3. Să se arate că dacă $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ atunci

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \geq \left(1 + \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}\right)^n.$$

(Cauchy)

Soluție. Putem scrie

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) = 1 + \sum a_1 + \sum a_1 a_2 + \ldots + \sum a_1 a_2 \ldots a_k + \ldots + a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Conform inegalității mediilor, pentru $1 \leq k \leq n$ avem

$$\sum a_1 a_2 \ldots a_k \geq C_n^k \cdot \sqrt[C_n^k]{(a_1 a_2 \ldots a_n)^{C_{n-1}^{k-1}}} \Leftrightarrow \sum a_1 a_2 \ldots a_k \geq C_n^k \cdot (a_1 a_2 \ldots a_n)^{C_{n-1}^{k-1}/C_n^k} \Leftrightarrow$$

$\sum a_1 a_2 \ldots a_k \geq C_n^k \cdot (a_1 a_2 \ldots a_n)^{k/n}$, astfel că obținem:

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum a_1 a_2 \ldots a_k\right) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(C_n^k \cdot \sqrt[n]{(a_1 a_2 \ldots a_n)^k}\right) = \left(1 + \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}\right)^n.$$

4. Dacă $a_1, a_2, a_3 > 0$, atunci $\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3} \geq \frac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}{a_1^4 + a_2^4 + a_3^4}$.

Soluție. Considerăm funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, care este convexă pe $(0, \infty)$.

Fie $\lambda_1 = \frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \lambda_2 = \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \lambda_3 = \frac{a_3^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$,

$$x_1 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2a_2 a_3}, x_2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2a_1 a_3}, x_3 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2a_1 a_2}.$$

Conform Teoremei 7.3.3 putem scrie

$$f\left(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{3}\lambda_i f(x_i) \Leftrightarrow \left(\frac{a_1^2}{2a_2a_3}+\frac{a_2^2}{2a_1a_3}+\frac{a_3^2}{2a_1a_2}\right)^2 \le$$

$$\le \frac{a_1^2\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)}{4a_2^2a_3^2}+\frac{a_2^2\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)}{4a_1^2a_3^2}+\frac{a_3^2\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)}{4a_1^2a_2^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(a_1^3+a_2^3+a_3^3\right)^2}{4a_1^2a_2^2a_3^2} \le \frac{\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(a_1^4+a_2^4+a_3^4\right)}{4a_1^2a_2^2a_3^2} \Leftrightarrow \frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{a_1^3+a_2^3+a_3^3} \ge \frac{a_1^3+a_2^3+a_3^3}{a_1^4+a_2^4+a_3^4}.$$

5. Dacă $a_i \ge 0$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ şi $0 < x_i \le 1$ pentru i = 1, 2, …, n, să se demonstreze că $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+x_i} \le \frac{1}{1+x_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Soluţie. Putem presupune fără a restrânge generalitatea că $a_i > 0$ pentru i = 1, 2, …, n. Notăm $y_i = \ln(x_i)$ şi deoarece $x_i \in (0, 1]$, rezultă că $y_i \in (-\infty, 0]$. Considerăm funcţia $f:(-\infty, 0]\to\mathbb{R}$, $f(y) = (1+e^y)^{-1}$. Această funcţie este de două ori derivabilă şi $f''(y) = e^y(e^y-1)(e^y+1)^{-3} \le 0$, pentru orice $y \in (-\infty, 0]$. Deci f este concavă pe intervalul $(-\infty, 0]$ şi conform inegalităţii lui Jensen avem $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+x_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+e^{y_i}} \le \frac{1}{1+e^{\sum_{i=1}^{n} a_i y_i}} = \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{n} e^{a_i y_i}} = \frac{1}{1+x_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_n}}$, cu egalitate dacă şi numai dacă $y_1 = y_2 = \ldots = y_n$, adică $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

6. Fie $I\subseteq\mathbb{R}$ un interval iar $f_1, f_2, \ldots f_n : I\to\mathbb{R}_+$ funcţii concave, $n\in\mathbb{N}$. Să se demonstreze că funcţia $\sqrt[n]{f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n}$ este de asemenea concavă.

(OIM)

Soluţie. Fie $F(x) = f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)$. Prin ipoteză avem $F(tx+(1-t)y) \ge \prod_{i=1}^{n}\left(tf_i(x)+(1-t)f_i(y)\right) = \sum_{k=0}^{n} t^k(1-t)^{n-k}\cdot\sum f_{i_1}(x)\ldots f_{i_k}(x)f_{i_{k+1}}(y)\ldots f_{i_n}(y)$, unde a doua sumă conţine C_n^k termeni corespunzători posibilităţilor de a alege submulţimile $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ ale lui $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Din inegalitatea mediilor deducem că

$$\sum f_{i_1}(x)\ldots f_{i_k}(x)f_{i_{k+1}}(y)\ldots f_{i_n}(y) \ge C_n^k\left[F(x)^{C_{n-1}^{k-1}}\cdot F(y)^{C_{n-1}^{n-k-1}}\right]^{1/C_n^k} = C_n^k\cdot(F(x))^{\frac{k}{n}}\cdot(F(y))^{\frac{n-k}{n}}$$

Deci $F(tx+(1-t)y) \ge \sum_{k=0}^{n} C_n^k\cdot[t(F(x))^{\frac{1}{n}}]^k\cdot[(1-t)(F(y))^{\frac{1}{n}}]^{n-k} = [t(F(x))^{\frac{1}{n}}+(1-t)(F(y))^{\frac{1}{n}}]^n$,

adică tocmai ceea ce trebuia probat.

Back