Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Caraş-Severin

REVISTA DE MATEMATICĂ

A ELEVILOR ŞI PROFESORILOR

DIN JUDEŢUL CARAŞ-SEVERIN

Nr. 35, An XII – 2011

Editura „Neutrino”
Reşiţa, 2011

Titlul: Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din judeţul Caraş-Severin
I.S.S.N. 1584-9481
Acest număr al revistei are avizul Comisiei SSMR pentru publicaţii

Mobil: 0741017700
www.neutrino.ro
E-mail: contact@neutrino.ro

CUPRINS

Gânduri

♦ Nimic nu costă mai mult decât neştiinţa.

Grigore Moisil

♦ Explozivul cel mai puternic nu este toluenul, nici bomba atomică, ci ideea omenească.

Grigore Moisil

♦ Mi-am dat seama, mai mult decât oricând, că sunt un om ca oricare altul.

Grigore Moisil

♦ Idealul de fericire? Să trăiesc printre oameni care judecă corect.

Grigore Moisil

♦ Nicio problemă nu are graniţe. Orice răspuns are multe.

Grigore Moisil

♦ Eu sunt omul care demonstrez, nu conving.

Grigore Moisil

♦ Se ştie că un profesor bun e cel care te face ca lucrurile mai grele să ţi se pară uşoare.

Grigore Moisil

♦ Învăţând matematică, înveţi să gândeşti.

Grigore Moisil

♦ Tot ce e gândire corectă este sau matematică sau susceptibilă de matematizare.

Grigore Moisil

Matematica...altfel (partea a V-a)

Ioan Dăncilă, Bucureşti

Răspunzând invitației din numărul trecut, vom aminti câte ceva despre numărul 5, într-adevăr unul special. O primă observație ar fi că, mult timp, numărarea a evoluat doar până la "patru"; multe studii arată că majoritatea oamenilor sunt capabili să sesiseze dintr-o dată, fără *numărare,* cel mult 4 obiecte. Pentru 5 e nevoie deja de operații de compunere – descompunere. Este greu de văzut cinci linii | | | | |, pe când în forma | | | | | ne dăm seama imediat că $3+2=5$.

Câte degete s-adun? mâna să se strângă-n pumn ? Evident, numărul 5 este strâns legat de numărul degetelor unei mâini ; există populații care au folosit sau mai folosesc un sistem cvinar de numerație. În antichitate, grecii foloseau numărătoarea în baza 5. Homer povesteşte în *Odiseea* că Proteu număra focile câte cinci. Țăranii noştri, în unele sate, mai folosesc răbojul în care numărarea se bazează pe gruparea cinci (patru segmente alcătuind un pătrat tăiat de un al cincilea în diagonală).

Egiptenii considerau că întreg universul era format din *cinci* elemente: pământul, aerul apa, focul şi eterul. Expresia latină *quinta essentia* (din care provine cuvântul chintesență) se referea la cele cinci elemente esențiale sau poate chiar la cel mai subtil element al lumii. În *Timaios*, Platon explica structura materiei din univers cu ajutorul celor *cinci* solide (sau poliedre) regulate : tetraedrul (asociat cu focul), cubul (asociat cu pământul), octaedrul (cu aerul), dodecaedrul (cu universul sferic, numit cosmos) şi icosaedrul (asociat cu apa).

Credeți că este vreo legătură între teoria lui Platon şi filmul lui Luc Besson : *Al cincilea element* ?

Aşa cum π este un număr special în matematică (şi nu numai), faptul că ecuația generală de gradul 5 nu poate fi rezolvată prin formulă cu radicali, a făcut ca numărul 5 să fie unul special. În plus, încercările în acest domeniu au condus la una dintre cele mai remarcabile creații din istoria matematicii: *teoria grupurilor* ; ar fi aici multe de spus despre simetrie, matematică, artă şi biologie...

Să mai remarcăm "sensibilitatea" viespiilor la numărul 5 : ouăle din care vor ieşi masculi sunt dispuse în formații de ... exact *cinci* ! ... cele din care vor ieşi femele sunt dispuse în formații de câte zece...

În final, să mai spunem că majoritatea covârşitoare a florilor au 5 petale (viorelele, lalelele, trandafirii sălbatici, etc). Puteți lega numărul petalelor florilor de şirul lui Fibonacci?

Cel mai mare număr?

Ioan Dăncilă, Bucureşti

I-au trebuit omului milenii ca să treacă de la cantitate la număr. A găsit un mijloc de a deosebi o grămadă de alta atunci când acestea erau compuse din aceleaşi obiecte, iar grămezile la îndemână : corespondența unu la unu, apoi numărarea când grămezile nu erau şi nu puteau fi apropiate una de alta. Şi, pentru a putea număra, întâi obiecte concrete, apoi *obiecte* ale minții, omul a inventat numerele şi numerația : figurată, vorbită, scrisă. Iar după ce a înțeles succesiunea numerelor naturale s-a ambiționat să-l afle pe cel mai mare.

Cine şi-l poate imagina? Cine-l poate reprezenta? Cine-l poate scrie ? Acestea au fost şi sunt provocări în încercarea omului de a-şi cunoaşte (şi depăşi) limitele.

Cel mai mare număr? Să fie oare numărul albinelor dintr-un roi? Puzderia de stele? Numărul particolelor din univers? Istoria matematicii consemnează dorințele şi posibilitățile omului de a inventa, a numi, scrie şi utiliza numere cât mai mari. Prezentarea celui mai mare număr cu o anumită proprietate a fost privită de fiecare dată ca o reuşită. O victorie a spiritului.

Ca să poată explica mulțimea minunățiilor văzute de el în China, Marco Polo (sec. XIV) a inventat cuvântul *milion*. Mai târziu (sec.XIX), pentru numărarea banilor, bancherii francezi au introdus cuvântul *miliard*.

Cel mai mare număr natural scris vreodată cu cifre romane este un rezultat al numărării efective şi se află pe o inscripție din anul 260 î Hr : se consemnează astfel numărul 2 300 000 – numărul prizonierilor cartaginezi, prin repetarea de 23 de ori a semnului special CCCI >>> folosit de romani pentru a scrie o sută de mii.

Cel mai mare număr ce poate fi figurat utilizând părți ale corpului va ține seama că degetele celor două mâini împreunate deasupra capului reprezintă un milion şi că mai există încă 54 de poziții distincte degete-brațe (stângul-dreptul) care reprezintă numere de forma $a, 10a, 100a, 1000a, 10000a, 100000a,$ unde $1 \le a \le 9$ este un număr natural. Acest sitem este unul aditiv.

Cel mai mare număr utilizat de mayaşi este cel ce reprezintă 13 baktun, interval de timp corespunzător a 1 872 000 de ani (Marele Ciclu). Este un număr rezultat din calcule astronomice făcute de civilizația maya.

O adevărată frenezie a numerelor foarte mari o găsim în civilizația hindusă. Sunt consemnate chiar numere de ordinul

$10^{190}, 10^{250}$; acestea au fost obținute pe baza unor speculații privind anumite cicluri cosmice. Cel mai probabil, această căutare a fost stimulată şi uşurată de sistemul atât de comod al numerației hinduse, în care scrierea numerelor şi operațiile cu acestea se fac după reguli foarte simple.

Scrierea numerelor sub formă de puteri a creat noi posibilități de a afla şi a scrie numere cât mai mari. Astfel, cel mai mare număr scris cu trei cifre nu mai este 999, ci $9^{9^9} = 9^{387420489}$, un număr care are peste o jumătate de miliard de cifre ! Scrierea lui sub formă zecimală s-ar întinde pe mai mult de 1600 km !

Cel mai mare număr prim descoperit până acum, din câte ştim în acest moment, este al 41-lea număr Mersenne : $2^{24036583} - 1$ (descoperit în 2004), care s-ar scrie cu 7 235 233 cifre.

Preocupat de punerea la punct a unui sistem care să-i permită scrierea unor numere cât mai mari, Arhimede a ajuns la un număr pe care, dacă l-am scrie în sistemul zecimal, ar fi alcătuit de 1 urmat de 80 de milioane de miliarde de cifre. Tot el a demonstrat că numărul grăunțelor de nisip cu care s-ar putea umple Universul (cunoscut pe atunci) este evident mai mic decât acest număr. Inspirați de Arhimede, americanii E.Kasner şi J.Newman definesc *googol*-ul: 1 urmat de 100 de zero, adică 10^{100}. Numărul picăturilor de ploaie care cad asupra oraşului New-York timp de un an este, au constatat ei, mult inferior acestui număr. Imediat, nepotul de 8 ani al lui Kasner, sugerează un număr mult mai mare : *googol plex :* 1 urmat de un *googol* de zero, adică 10^{googol}. Pentru comparare, să remarcăm că numărul particolelor din Universul cunoscut acum este 10^{87}, adică inferior unui *googol plex.*

Cu multă clarviziune, autorii *googol*-ui au prevăzut şi unde va fi utilizat acest număr : cel puțin în probleme de combinatorică.

Campionul mondial al numerelor mari, de-acum gigantice, a fost însă dedus de R.L. Graham, dintr-o problemă de combinatorică (teoria lui Ramsey). Acesta nu poate fi exprimat folosind notațiile uzuale. Dacă toată materia existentă în univers s-ar transforma în cerneală ea nu ar fi suficientă pentru a scrie, în sistem zecimal, acest număr. De aceea, s-a dovedit necesară o notație nouă : $3 \uparrow 3$ semnifică « 3 la cub », apoi $3 \uparrow\uparrow 3$ desemnează pe $3 \uparrow (3 \uparrow 3) = 3 \uparrow 27 = 7\ 625\ 597\ 484\ 987 = u$. Avem astfel şi $3 \uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow 3) = 3 \uparrow\uparrow (u) = 3 \uparrow (u \uparrow u)$. La fel,

$3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow\uparrow 3)$. Toate acestea fiind acceptate, să construim numărul lui Graham. Se consideră numărul $a = 3 \uparrow\uparrow\uparrow ... \uparrow\uparrow 3$ care are $3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3$ « săgeți », apoi $b = 3 \uparrow\uparrow\uparrow ... \uparrow\uparrow 3$ în care numărul de « săgeți » este numărul a anterior precizat. Se continuă procedeul, construind numărul $c = 3 \uparrow\uparrow\uparrow ... \uparrow\uparrow 3$ în care numărul de « săgeți » este b, şi tot aşa de 63 de ori, ajungând astfel la numărul lui Graham.

O întrebare legitimă ar fi : pentru ce toate aceste eforturi, cui îi pasă de numerele acestea cât mai mari, la ce folosesc de fapt ? Unul dintre răspunsuri este : la asigurarea securității datelor, problemă asupra căreia se apleacă toate marile companii din lume.

Bibliografie :

[1] Adrian C.Albu – O istorie a matematicii.Antichitatea, Ed. Nomina, 2009
[2] Ion Ionescu – Povestiri ştiinţifice. Biblioteca ziarului Universul, 1941
[3] Denis Guedj – L'empire de nombres, Ed. Galimard 1996

Polinoame şi determinanți

REZUMAT. În această notă vom pune în evidență modul în care pot interveni polinoamele în problemele care au ca subiect noțiunea de determinant.

Steluța şi Mihai Monea – Deva

1. INTRODUCERE. În învățământul românesc, noțiunea de determinant face parte din programa şcolară a clasei a XI-a. Noțiunea nu se dovedeşte a fi una foarte dificilă , cel puțin în prima fază, astfel încât un elev mediu deprinde relativ uşor modul de calcul şi câteva proprietăți. Dar pentru un elev care se antrenează pentru concursurile şcolare este nevoie de mult mai mult. De aceea scopul acestei note este de a pune în discuție şi alte aspecte legate de determinați , decât doar simple calcule. Mai mult, vom încerca să utilizăm doar conceptul de determinant , încercând să evităm scrierea sa sub formă tabloidă.

2. POLINOAME GENERATE CU AUTORUL DETERMINANȚILOR. Deoarece rezultatele teoretice care vor fi prezentate în acest paragraf sunt cunoscute în literatura de specialitate, ne vom rezuma doar la a le prezenta fără însă vreo demonstrație. Vom prezenta rezultate cu caracter general, dar şi particularizări importante.

Considerăm două matrice pătratice $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Cu ajutorul lor construim expresia algebrică $f(x,y) = \det(xA + yB)$. Forma algebrică a acestei expresii este

$$f(x,y) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}y + a_{n-2}x^{n-2}y^2 + \ldots + a_1 xy^{n-1} + a_0 y^n,$$

unde $a_n = \det(A)$, iar $a_0 = \det(B)$. Pentru cazul particular $n = 2$ obținem:

$$f(x,y) = \det(A)x^2 + (Tr(A)Tr(B) - Tr(AB))xy + \det(B)y^2.$$

Dacă alegem $A = I_2$ şi $y = -1$, atunci obținem un polinom de o singură variabilă, $f(x) = \det(xI_2 - B)$, numit *polinomul caracteristic al matricei* B. În acest caz $a_{n-1} = Tr(B)$.

3. REZULTATE CLASICE. În acest paragraf vom prezenta două rezultate cunoscute, la a căror rezolvare intervin polinoamele descrise anterior. Motivul pentru care facem acest lucru este de a familiariza cititorul cu ideile pe care le vom folosi în continuare.

Aplicația 1. *Fie* $A, B \in M_n(C)$ *şi* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *o rădăcină de ordinul* n *a unității. Atunci* $\sum_{k=0}^{n-1} \det(A + \alpha^k B) = n(\det(A) + \det(B))$.

Soluție: Mai întâi calculăm $\sum_{k=1}^{n} \alpha^{kp}$, pentru orice $p \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Avem $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{kp} = \frac{\alpha^{np} - 1}{\alpha^p - 1} = 0$ Fie $f(x,y) = \det(xA + yB)$. Atunci

$$\sum_{k=0}^{n-1} \det(A + \alpha^k B) = \sum_{k=0}^{n-1} f(1, \alpha^k) == \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_n + a_{n-1}\alpha^k + a_{n-2}\alpha^{2k} + \ldots + a_{n-1}\alpha^{k(n-1)} + a_0\alpha^{kn}\right)$$

$$= na_n + a_{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k + \ldots + \sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{k(n-1)} + na_0 = n\det(A) + n\det(B)$$ ceea ce trebuia demonstrat.

Aplicația 2. *Fie* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *astfel încât* $AB = BA$. *Atunci* $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Soluție: Avem $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$. Atunci $\det(A^2 + B^2)$ $= \det(A + iB)\det(A - iB) = f(1,i)\, f(1,-i) = f(1,i)\overline{f(1,i)} = |f(1,i)|^2 \geq 0$.

4. PROBLEME SELECTATE DINTRE CELE DATE LA OLIMPIADA DE MATEMATICĂ. Aceste paragraf reprezintă o selecție de probleme date în anii anteriori la concursurile de matematică. Aceste probleme sunt însoțite de soluții în spiritul celor prezentate în paragraful anterior.

Problema 4.1 *Să se arate că oricare ar fi* $A,B\in M_n(\mathbb{Z})$ *şi oricare ar fi* $x\in\mathbb{Z}$, *numerele* $\det(A+xB)$ *şi* $\det(A-xB)$ *au aceeaşi paritate.*

(Gh. Bordea, Etapa locală, Constanța, 1987)

Soluție: Fie $g(x)=\det(A+xB)$. Atunci $g(x)=ax^2+bx+c$, cu $a,b,c,x\in\mathbb{Z}\Rightarrow\det(A-xB)=g(-x)=ax^2-bx+c\Rightarrow\det(A+xB)+\det(A-xB)$ $=g(x)+g(-x)=2ax^2+2c$, care este număr par, rezultă concluzia.

Problema 4.2 Fie $A\in M_2(\mathbb{R})$ având proprietățile $\det(A-3I_2)=4$ şi $\det(A+2I_2)=9$. Calculați $(A-I_2)^{2009}$.

(Etapa locală, Argeş 2009)

Soluție: Fie $g(x)=\det(A+xI_2)\Rightarrow g(x)=\det(A)+Tr(A)x+x^2$. Avem $g(-3)=4$ și $g(2)=9\Rightarrow$ $\det(A)-3Tr(A)+9=4$ și $\det(A)+2Tr(A)+4=9\Rightarrow Tr(A)=2$ şi $\det(A)=1\Rightarrow g(x)=1+2x+x^2$, deci $g(-1)=0\Rightarrow\det(A-I_2)=0$. Dar $Tr(A-I_2)=Tr(A)-Tr(I_2)=0$, deci, cu teorema Hamilton Cayley avem $(A-I_2)^2=O_2\Rightarrow(A-I_2)^{2009}=O_2$. □

Problema 4.3 *Se consideră matricele* $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ *cu proprietatea* $\det(A+2009B)=\det(2009A+B)$. *Demonstrați că* $\det(A)=\det(B)$.

(M. Totolici, Etapa locală, Galați, 2009)

Soluție: Fie $f(x,y)=\det(xA+yB)$. Avem $f(1,2009)=f(2009,1)$, de unde $\det(A)+2009\big(Tr(A)Tr(B)-Tr(AB)\big)+2009^2\det(B)=$ $=2009^2\det(A)+2009\big(Tr(A)Tr(B)-Tr(AB)\big)+\det(B)$, care conduce la $\left(2009^2-1\right)\det(A)=\left(2009^2-1\right)\det(B)$.□

Problema 4.4 *Fie* $A\in M_2(\mathbb{C})$. *Dacă* $\det(A+Tr(A)I_2)=\det(A^2+2I_2)$ *atunci* $\det(A)\in\{1,4\}$.

(M. Opincariu, Gazeta Matematică,P 26042)

Soluție: Fie $d=\det(A)$ şi $u=Tr(A)$. Fie $g(x)=\det(A+xI_2)$. Atunci $g(x)=d+ux+x^2$ Deoarece $A^2+2I_2=\left(A+iI_2\sqrt{2}\right)\left(A-iI_2\sqrt{2}\right)$, ipoteza devine $g(u)=g\left(i\sqrt{2}\right)g\left(-i\sqrt{2}\right)$. Obținem $d+2u^2=(d-2)^2+2u^2$ şi $d^2-5d+4=0$, de unde $d=\{1,4\}$. □

Problema 4.5 *Fie* $A,B\in M_2(\mathbb{R})$. *Fie* $C=AB-BA$. *Dacă* $\det(C)=-1$ *atunci* $\det(I_2\pm C)=0$.

(D. Seclăman)

Soluție: Fie $g(x)=\det(C+xI_2)$. Cum $Tr(C)=0$, deducem $g(x)=x^2-1$, deci $g(\pm1)=0$ şi concluzia. □

Problema 4.6 *Fie* $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ *astfel încât* $AB=BA$. *Dacă* $\det(A+B)=1$, $\det(A+2B)=1$ *şi* $\det(A+3B)=1$ *atunci* $B^2=O_2$.

Soluție: Fie $g(x)=\det(A+xB)$. Atunci $g(x)=ax^2+bx+c$. Din $g(1)=g(2)=g(3)=1$, obținem $a+b+c=1$, $a+2b+4c=1$ şi $a+3b+9c=1$. Deducem că $a=1$, $b=c=0$, deci $\det(B)=0$, $\det(A)=1$ şi A este inversabilă.

Dar $\det(A+xB)=\det\left(A\left(I_2+xA^{-1}B\right)\right)=\det(A)\det\left(I_2+xA^{-1}B\right)$ şi, prin urmare $\det\left(I_2+xA^{-1}B\right)=1$. Atunci $x^2\det\left(A^{-1}B\right)+xTr\left(A^{-1}B\right)+1=1$, pentru orice $x\in\mathbb{C}$. Atunci $Tr\left(A^{-1}B\right)=0$ şi deducem din teorema Hamilton Cayley pentru matricea $A^{-1}B$ că $\left(A^{-1}B\right)^2=O_2$. De aici $\left(A^{-1}\right)^2B^2=O_2$ şi concluzia. □

Problema 4.7 *Fie* $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ *o rădăcină de ordinul 3 a unității. Fie matricele* $A,B,C\in M_3(\mathbb{R})$. *Dacă* $\det(A+\alpha B)=\det(A+\alpha C)$, *atunci* $\det(A+B)-\det(A+C)=3\det(B)-3\det(C)$.

(C. Cristea, Gazeta Matematică, P 25771)

Soluție: Fie polinoamele $f(x)=\det(A+xB)=a+bx+cx^2+dx^3$ şi $g(x)=\det(A+xC)=a+nx+px^2+qx^3$, unde $a=\det(A)$, $d=\det(B)$ şi $q=\det(C)$ Ipoteza devine $f(\alpha)=g(\alpha)$ şi conduce la

$a+b\alpha+c\alpha^2+d=a+n\alpha+p\alpha^2+q$. Dar $1+\alpha+\alpha^2=0$, de unde obținem $(a-c+d)+\alpha(b-c)=(a-p+q)+\alpha(n-p)$ şi apoi $a-c+d=a-p+q$ şi $b-c=n-p$. Atunci $b-n=c-p=d-q$.

În aceste condiții avem $\det(A+B)-\det(A+C)$

$=f(1)-g(1)=a+b+c+d-a-n-p-q=3(d-q)=$

$=3\big(\det(B)-\det(C)\big)$ ceea ce încheie soluția. □

Problema 4.8 *Fie* $A\in M_2(\mathbb{R})$ *cu* $\det(A)=-1$. *Arătați că* $\det(A^2+I_2)\geq 4$.

Soluție: Fie $f(x)=\det(A+xI_2)$. Dacă notăm $u=Tr(A)$, avem $f(x)=x^2-ux-1$.

Atunci $\det(A^2+I_2)=\det(A+iI_2)\det(A-iI_2)=f(i)f(-i)$

$=(-2-iu)(-2+ui)=4+u^2\geq 4$, ceea ce trebuia demonstrat. □

Problema 4.9 *Fie* $\alpha\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$ *o rădăcină de ordinul 3 a unității. Fie* $A,B\in M_2(\mathbb{R})$. *Dacă* $\det(A+\alpha B)+\det(A+\alpha^2 B)=\det(A-B)$ *atunci* $\det(A)=2\det(B)$.

(C. Cristea, Gazeta Matematică, P 25751)

Soluție: Fie $f(x)=\det(A+xB)$. Atunci $f(x)=a+bx+cx^2$, unde $a=\det(A)$ şi $c=\det(B)$. Ipoteza devine $f(\alpha)+f(\alpha^2)=f(-1)$, adică $(a+b\alpha+c\alpha^2)+(a+b\alpha^2+c\alpha)=a-b+c$. Cum $1+\alpha+\alpha^2=0$ obține $a=2c$ care este echivalent cu concluzia. □

BILIOGRAFIE

[1] Gh. ANDREI, C. CARAGEA, Probleme alese de matematică, Ed. Gil, Zalău, 1999.

[2] Gh. ANDREI, C. CARAGEA, GH. BORDEA, *Algebra pentru concursurile şcolare(clasa a XI-a)*, Ed. TopAZ, Constanța, 1993.

[3] D. BRÂNZEI şi alții, *Matematică, concursuri şi olimpiade şcolare 2009*, Ed. Paralela 45, Piteşti, 2010.

[4] F. ZHANG, *Matrices Theory*, *Springer*, New York, 1999.

[5] *** - *Gazeta Matematică*, Ediția electronică

Concursul de Matematică al Revistei RMCS, Ediția a VI-a, 5 martie 2011, Oțelu-Roşu

prezentare de Lucian Dragomir şi Ovidiu Bădescu

1. Organizare

Concursul a fost precedat, ca în fiecare an, de selectarea elevilor participanți la Oțelu-Roşu; aceasta a constat în corectarea soluțiilor la problemele de concurs publicate în revistă în numerele 31, 32, 33 şi 34 de către o comisie formată din Nicoleta Toader, Heidi Feil, Iulia Cecon, Lucian Dragomir; calificarea elevilor s-a făcut, ca de obicei, în ordinea descrescătoare a punctajelor obținute. S-au calificat 149 de elevi din clasele I – XII . Concursul a avut loc în data de 5.03.2011 şi a fost găzduit, din nou, de Liceul Bănățean din Oțelu-Roşu; mulțumim şi pe această cale organizatorilor, în special Doamnelor Directoare Rozina Ghiorghioni şi Daniela Chelbea, profesorilor de matematică şi tuturor cadrelor didactice ale şcolii gazdă, care au depus eforturi deosebite pentru a transforma, şi în acest an, acest concurs într-un eveniment chiar reuşit. Deschiderea Concursului a avut loc la ora 9, concursul s-a desfăşurat între orele 10 – 13, a urmat activitatea de evaluare şi, la ora 17, mult aşteptata festivitate de premiere.

2. Sponsori, alte activități

Costul mesei de prânz, de altfel foarte bună, ca şi *întregul fond de premiere*, a fost suportat şi în acest an de Consiliul Local şi Primăria oraşului Oțelu-Roşu, la care s-au adăugat câteva sponzorizări ale unor persoane apropiate de matematică. Toți elevii participanți au primit câte o diplomă de calificare(pentru că o meritau prin simplul fapt că au ajuns să concureze), iar cei câştigători au primit diplomă de premiere, precum şi premii . Noutatea acestei ediții a constat în faptul că premiile acordate nu au mai fost în bani, ci în cărți, credem noi, deosebit de valoroase, aşadar utile. E suficient să enumerăm doar câteva titluri (învitându-vă astfel să încercați cu toții achiziționarea unora dintre ele) : *Probleme de teoria numerelor şi combinatorică pentru juniori (Editura Gil), Olimpiade matematice ruseşti (Editura Gil), Vârsta de aur a matematicii (Fundația Theta),Splendorile trigonometriei (Fundația Theta), Zece lecții alese de matematică elementară (Biblioteca SSMR), Secțiunea de aur (Editura Humanitas), Ecuația care n-a putut fi rezolvată (Editura Humanitas), Matematica pentru învingători (Editura ErcPress)* Cheltuieli colaterale necesare bunei desfăşurări a concursului au fost posibile folosind fonduri proprii ale Filialei (provenite din cotizațiile membrilor şi din vânzarea revistei, care, una peste alta, nu aduce beneficii decât minore din punct de vedere financiar; câştigurile sunt, credem, în plan intelectual...).

În mod special, se cuvine să mulţumim, din nou, efectiv din suflet Domnului Primar al oraşului Oţelu-Roşu, Iancu Simion – Simi, care a fost trup şi suflet, de la începuturile acestui concurs, alături de noi, simţind că orice manifestare care adună minţi luminate într-o comunitate va aduce, cândva, lumină în comunitate. Şi nu în ultimul rând, mulţumiri Domnului Viceprimar al localităţii gazdă, Enache Dragoş, care a susţinut permanent cauza şcolii, a performanţei în matematică în special, ca o certitudine a viitoarelor împliniri. Cei care cred altceva...ajunge să nici nu ne mai intereseze; altcineva îi va judeca.

3. Subiecte

Subiectele au fost selectate şi în acest an de profesorii Mihai Monea (Deva) şi Lucian Dragomir (Oţelu – Roşu) (nu se poate să nu remarcaţi, din nou, că *multe dintre probleme sunt preluate din Gazeta Matematică, revista care n-ar trebui să lipsească de pe masa nici unui pasionat de matematică.* Puteţi să vă abonaţi la orice oră, trebuie numai să întrebaţi... Alte probleme au fost preluări din RMCS....(subiecte, bareme de corectare, rezultate – toate le puteţi găsi la adresa: www.neutrino.ro).

4. Premianţii.

Clasa I

Premiul I	Florea Ioana-Patricia	Şcoala Gen. Nr. 2 Reşiţa
Premiul II	Rusu Adelin	Şcoala Gen. Nr. 2 Reşiţa
Premiul III	Neveanu Alexandra Elena	Şcoala Gen. Nr. 2 Reşiţa
Menţiune	Boc Alissia Driada	Şcoala Gen. Nr. 2 Reşiţa
Menţiune	Dina Emanuel	Lic. Hercules B. Herculane
Menţiune	Băltăţeanu Valentina	Lic. Hercules B. Herculane
Menţiune	Murguleţ Alexandru	Lic. Hercules B. Herculane
Menţiune	Manole Alexandra	Şcoala Gen. Nr. 2 Reşiţa

Clasa a II-a

Premiul I	Boloca Mădălina	Şcoala Gen. Nr. 2 Reşiţa
Premiul II	Feil Nadia	Şcoala Gen. Nr. 1 Oţelu Roşu
Premiul III	Jula Diandra Melinda	Şcoala Gen. Nr. 2 Reşiţa
Menţiune	Coman Alina	Lic. Hercules B. Herculane
Menţiune	Viericiu Daniel	Lic. Hercules B. Herculane
Menţiune	Stuparu Daniel	Şcoala Gen. Nr. 2 Reşiţa
Menţiune	Schelean Alexandra	Şcoala Gen. Nr. 1 Oţelu Roşu
Menţiune	Ţucă Willinger Andra	Şcoala Gen. Nr. 2 Reşiţa

Clasa a III-a

Premiul I	Ciobanu Elena	Şcoala Gen. Nr. 2 Reşiţa
Premiul II	Lazarov Andrei	Lic. Gen. Dragalina Oraviţa
Premiul II	Pădurean Daniel	Lic. Traian Lalescu Reşiţa
Premiul III	Bodnar Emanuela	Şcoala Gen. Nr. 9 Reşiţa
Menţiune	Voinea Nicoleta	Şcoala Gen. Nr. 9 Reşiţa
Menţiune	Rotariu Răzvan Ion	Şcoala Gen. Nr. 2 Reşiţa
Menţiune	Ghimboaşă Petronela	Lic. C.D. Loga Caransebeş

Clasa a IV-a

Premiul I	Bolbotină Gabriel	Lic Hercules Băile Herculane
Premiul I	Potocean Teodora Aura	Şcoala Gen. Nr. 2 Reşiţa
Premiul II	Goian Tudor	Şcoala Gen. Nr. 8 Reşiţa
Premiul III	Voiţ Iulia	Şcoala Gen. Nr. 1 Oţelu Roşu
Menţiune	Bălănoiu Ana-Maria-Antonia	Şcoala Gen. Nr. 2 Reşiţa
Menţiune	Preda Damir	Şcoala Romul Ladea Oraviţa
Menţiune	Cenda Sabina	Şcoala Gen. Nr. 8 Reşiţa

Clasa a V-a

Premiul I	Cîrstea Denisa	Liceul Traian Lalescu Reşiţa
Premiul II	Freisz Patrick	Liceul Traian Lalescu Reşiţa
Premiul III	Lucaci Cristiana	Liceul Traian Lalescu Reşiţa
Menţiune	Nicola Elena -Beatrice	Şcoala Gen. Nr. 2 Reşiţa
Menţiune	Imbrescu Raluca	Şcoala Gen. Nr. 9 Reşiţa
Menţiune	Zaharia Flavia Cristiana	Şcoala Gen. Nr. 9 Reşiţa
Menţiune	Iacob –Mare Ionuţ Radu	Liceul Traian Lalescu Reşiţa

Clasa a VI-a

Premiul I	Hrenyak Alexia Nadina	Şcoala Gen. Nr. 1 Oţelu Roşu
Premiul II	Ionescu Robert	Liceul Traian Doda Caransebeş
Premiul III	Bălean Vlad	Şcoala Gen. Nr. 9 Reşiţa
Menţiune	Ciobanu Iulia Andreea	Lic. C.D. Loga Caransebeş
Menţiune	Cioarcă Adnana	Şcoala Gen. Nr. 1 Oţelu Roşu

Clasa a VII-a

Premiul I	Ciobanu Anca	Şcoala Gen. Nr. 2 Reşiţa
Premiul II	Neaţu Monica	Şcoala Gen. Nr. 2 Reşiţa
Premiul III	Balmez Andrada	Şcoala Romul Ladea Oraviţa

Menţiune	Szatmari Larisa	Şcoala Gen. Nr. 1 Oţelu Roşu
Menţiune	Toader Răzvan	Şcoala Gen. Nr. 1 Oţelu Roşu
Menţiune	Rus Daniel	Şcoala Gen. Nr. 8 Reşiţa
Menţiune	Gaiţă Nadine	Şcoala Gen. Nr. 9 Reşiţa

Clasa a VIII-a

Premiul I	Ciulu Miruna Dalila	Şcoala Gen. Nr. 6 Reşiţa
Premiul II	Ştefănescu Nicolae-Andrei	Şcoala Gen. Nr. 1 Oţelu Roşu
Premiul III	Dinulică Petru Augustin	Liceul C.D. Loga Caransebeş
Premiul III	Dinulică Ioan Septimiu	Liceul C.D. Loga Caransebeş
Menţiune	Gheorghişan Călin	Şcoala Romul Ladea Oraviţa
Menţiune	Pîrvu Ancuţa Iulia	Şcoala Romul Ladea Oraviţa

Clasa a IX a

Premiul I	Ţeudan Adina	Liceul Traian Lalescu Reşiţa
Premiul II	Preda Gabriela Dagmar	Liceul Bănăţean Oţelu Roşu
Premiul III	Radu Ionela	Liceul Bănăţean Oţelu Roşu
Menţiune	Moacă Nicoleta Adriana	Lic Hercules Băile Herculane
Menţiune	Băilă Diana	Liceul Bănăţean Oţelu Roşu

Clasa a X-a

Premiul I	Stoicănescu Gelu	Lic.Internaţional Informatică Bucureşti
Menţiune	Dumitraşcu Andreea	Lic. Traian Doda Caransebeş
Menţiune	Krocoş Lorena	Liceul Bănăţean Oţelu Roşu
Menţiune	Kuhn Anne-Marie	Liceul Bănăţean Oţelu Roşu

Clasa a XI a

Premiul I	Semenescu Anca	Lic. C.D. Loga Caransebeş
Premiul II	Mocanu Ioana-Dora	Lic. Traian Doda Caransebeş
Premiul III	Szabo Cristian	Lic. Traian Doda Caransebeş
Menţiune	Tuştean Ionuţ Claudiu	Lic. Traian Doda Caransebeş

Clasa a XII a

Premiul I	Zanfir Cristian	Lic. Traian Doda Caransebeş
Premiul II	Cococeanu Oana	Liceul Bănăţean Oţelu Roşu
Premiul III	Galescu Dan	Lic. Traian Doda Caransebeş

Concursul Județean al Revistei de Matematică Caraş-Severin, Ediția a VII-a

Regulament (modificat față de cel anterior, aşadar lecturați!)

Ediția a VII-a a Concursului Revistei demarează acum, cu problemele propuse în acest număr. Fiecare elev trebuie să rezolve(subliniem din nou: **singur!;** altfel e posibil să vă treziți calificați la concurs şi acolo să nu faceți mare lucru, dați naştere la întrebări şi credem că nici n-o să vă simțiți prea bine), aşadar să rezolve cât mai multe probleme de la clasa sa, de la clasa precedentă sau de la orice clasă superioară.

Redactați îngrijit(ne adresăm în primul rând elevilor) fiecare problemă pe câte o foaie separată*(enunț + autor + soluție + numele vostru +clasa)*, completați talonul de concurs de pe ultima copertă a revistei şi trimiteți totul într-un plic format A4, *coală ministerială*, adresat astfel **(FOARTE IMPORTANT)**:

Prof. Lucian Dragomir, Liceul Bănățean Oțelu-Roşu, str.Republicii 10-12, 325700, Oțelu-Roşu, Caraş-Severin (*în colțul din dreapta jos a plicului*), cu mențiunea **"**probleme rezolvate, clasa …." (*în colțul din stânga jos, **scrieți evident clasa în care sunteți!!!***).

Colțul din *stânga sus* vă este rezervat(expeditor), acolo vă scrieți numele, prenumele, adresa. Insistăm asupra trimiterilor în plic (nu în folii de plastic) şi asupra respectării cu strictețe a termenelor finale indicate de fiecare dată - plicurile primite după data limită nu vor fi luate în considerare. Revenim: redactați complet, justificați, răspundeți exact la cerința problemei.

Subliniem: *Concizia şi claritatea redactării vor fi luate în considerare pentru eventuale departajări*!!!(aceasta este evident valabil şi pentru concursul efectiv).

Rezolvări poate trimite orice elev, indiferent de județul în care învață, el va apărea ca şi rezolvitor cu punctajul corespunzător, însă la Concursul RMCS pot fi invitați, cel puțin deocamdată, doar elevii județului Caraş-Severin. Ne cerem scuze pentru acest inconvenient elevilor şi colegilor din țară.

Probabil că s-a remarcat şi introducerea unei noi rubrici: *Probleme alese.* La aceste probleme (care se punctează cu maxim 25 de puncte) se primesc soluții de la orice elev, indiferent de clasă.

După data limită de trimitere a soluțiilor, acestea sunt evaluate şi în numărul următor al revistei vor fi publicați toți rezolvitorii cu punctajele obținute.

La ediția a VII-a a concursului vor fi selectați concurenții în funcție de punctajele obținute din rezolvarea problemelor publicate în numerele 35, 36, 37 şi 38 ale revistei noastre. În jurul datei de 20 ianuarie 2012 se va întocmi clasamentul general(prin însumarea punctelor obținute şi astfel primii clasați vor fi invitați, împreună, ca şi în acest an, să participe la concurs; acesta va avea loc în luna februarie sau martie, într-un oraş care va fi anunțat în timp util.

Noutatea acestei ediții este că renunțăm, din mai multe motive, la organizarea concursului pentru elevii ce clasa I. Aşadar, concursul se adresează doar elevilor claselor II – XII.

Subiectele vor fi alese tot din probleme de genul **RMCS** sau **G.M.** sau ceva cât de cât nou. Veți remarca, desigur, că unele probleme pe care vi le propunem sunt din numere mai vechi ale Gazetei Matematice, în speranța că vă vom trezi interesul pentru una dintre cele mai serioase şi vechi reviste de matematică din lume. Abonați-vă la ***Gazeta Matematică***, sigur veți avea numai de câştigat!

Din nou, spor la treabă tuturor: elevi, profesori, părinți sau prieteni!

(*Informații suplimentare se pot obține la: prof.Ovidiu Bădescu, tel: 0741017700 sau prof. Lucian Dragomir, tel: 0255/530303 sau 0722/883537, e-mail: lucidrag@yahoo.com).* ■

Etapa județeană a Olimpiadei de matematică 12.03.2011

La o săptămână de la Concursul Județean al revistei,altă şcoală primitoare a fost gazda etapei județene a olimpiadei şi a concursului de matematică aplicată Adolf Haimovici : *Colegiul Tehnic Reşița.*

Deoarece subiectele şi baremurile de corectare se vor publica în Gazeta Matematică şi se află deja la adresa www.neutrino.ro, vom publica doar lista finală, după contestații, a premianților.

Nume, prenume	Cls.	Şcoala	Premiul
Imbrescu Raluca	5	Şcoala Gen. 9 Reşița	I
Nicola Beatrice	5	Şcoala Gen. 2 Reşița	II
Freisz Patrick	5	Lic.Traian Lalescu	III
Cîrstea Denisa	5	Lic.Traian Lalescu	m
Milencovici Merima	5	Şcoala Gen. 2 Reşița	m
Iancu Denis	6	Lic. Ped. Caransebeş	I
Ardelean Andra	6	Lic. Ped. Caransebeş	II
Cioarcă Adnana	6	Şc. Gen. 1 Oțelu Roşu	III
Firanda Andrada	6	Şc. Gen. 1 Oțelu Roşu	m
Epuraş Georgian	6	Lic. Bănățean O.Roşu	m
Ciobanu Anca	7	Şcoala Gen. 2 Reşița	I
Balmez Andrada	7	Şc. R. Ladea Oravița	II
Neațu Monica	7	Şcoala Gen. 2 Reşița	III
Vernicu Georgiana	7	Şcoala Gen. 2 Reşița	m
Dolot Nicole	7	Lic. Traian Lalescu	m
Ştefănescu Nicolae Andrei	8	Şc. Gen. 1 Oțelu Roşu	I
Dinulică Septimiu	8	Lic. Ped. Caransebeş	II
Ciulu Miruna	8	Şcoala Gen. 6 Reşița	III
Dinulică Augustin	8	Lic. Ped. Caransebeş	m
Avram Maria	8	Şcoala Gen. 7 Reşița	m
Lazăr Silviu	9	Lic. Traian Lalescu	I
Țeudan Adina	9	Lic. Traian Lalescu	II
Ban Ioana	9	Lic. Traian Doda	III
Timaru Sorin	9	Lic. Hercules	m
Ştefănescu Andrei	9	Lic. Traian Doda	M
Krokoş Lorena	10	Lic. Bănățean O.Roşu	I
Dumitraşcu Andreea	10	Lic. Traian Doda	II

Milu Nicoleta	10	Lic. Traian Doda	III
Moț Ioana	10	Lic. Traian Lalescu	m
Popa Andreea	10	Lic. Traian Doda	m
Mocanu Ioana	11	Lic. Traian Doda	I
Semenescu Anca	11	Lic. Ped. Caransebeş	II
Duma Andrei	11	Lic. Bănățean O. Roşu	III
Szabo Cristian	11	Lic. Traian Doda	m
Nemeş Adina	11	Lic. Traian Lalescu	m
Zanfir Cristian	12	Lic. Traian Doda	I
Cococeanu Oana	12	Lic. Bănățean O. Roşu	II
Marta Marian	12	Lic. Ped. Caransebeş	III
Galescu Dan	12	Lic. Traian Doda	m
Grecu Dinu	12	Lic. Traian Doda	m

În final, elevii care vor reprezenta județul nostru la faza finală a concursului de matematică aplicată Adolf Haimovici:

Mărgan Anuța Roxana	10	Lic. Traian Doda	uman
Bulată Paula Evelina	11	Colegiul Economic Reşița	Servicii
Epure Monica	11	Lic.Gen.Dragalina Oravița	Ştiințe
Goian Raluca	11	Lic.Gen.Dragalina Oravița	Ştiințe
Pană Alexandra	11	Lic.Gen.Dragalina Oravița	Ştiințe

Felicitări tuturor elevilor şi profesorilor care i-au îndrumat, succes la confruntările următoare şi, nu uitați, poate că mai important e să participi decât să câştigi...fiecare eşec sau succes de azi trebuie să încercăm să îl transformăm mâine într-o victorie, cel puțin asupra noastră.

Probleme rezolvate din RMCS nr. 32

Clasa a V-a

V.181 Se ştie că într-un săculeț sunt bile roşii şi bile albe, care cântăresc în total 100 g.

Dacă o bilă roşie cântăreşte 5 g, iar o bilă albă cântăreşte 7 g, puteți calcula câte bile sunt în săculeț ?

Prof. Marius Şandru, Reşița

Soluție: Notăm cu *r* numărul bilelor roşii, iar cu *a* numărul bilelor albe şi avem: $5r+7a=100$. Deoarece $5/5r$ şi $5/100$, deducem că $5/7a \Rightarrow 5/a \Rightarrow a=5k, k\in\mathbb{N}$. Egalitatea inițială devine: $5r+35k=100, k\le 2$. Dacă $k=1$, atunci $r=13, a=5$, iar dacă $k=2$, atunci $r=6, a=10$.

V.182 Numărul 7 poate fi scris ca sumă de două şi de trei numere prime ($7=2+5=2+2+3$). Aflați cel mai mic număr natural care poate fi scris ca sumă de două, trei, patru, cinci, şase şi şapte numere prime.

Concurs G. Moisil

Soluție: Cel mai mic număr prim este 2 şi, cum numărul căutat se poate scrie ca sumă de 7 numere prime, rezultă că acesta este cel puțin egal cu 14. Verificăm începând cu 14 care număr îndeplineşte condițiile date şi avem că: $14=2+2+2+2+2+2+2$, $14=2+2+2+2+3+3$, $14=2+2+2+3+5$, $14=2+2+5+5$, $14=2+5+7, 14=3+11$, aşadar 14 este numărul căutat.

V.183 Denis s-a trezit noaptea şi s-a uitat la ceas; arăta ora 2,00. Denis şi-a dat seama imediat: ceasul era oprit ! după ce i-a dat drumul, a adormit din nou. Când s-a trezit, la radio s-a anunțat ora 7,00, în timp ce ceasul de pe noptiera lui Denis arăta ora 5,30. La ce oră s-a trezit Denis noaptea ?

Concurs Iaşi

Soluție: între două treziri au trecut $5,30-2=3$ ore şi 30 minute, iar diferența dintre timpul real şi cel arătat de ceas este de $7-5,30=1$ oră şi 30 minute, aşadar prima trezire a lui Denis a fost la ora $2+1,30=$ ora 3 şi 30 minute.

V.184 Un număr de zece cifre are exact 9 cifre egale cu 7. Arătați că numărul nu poate fi pătrat perfect.

Prof. Cristinel Mortici, Târgovişte

Soluție: Dacă a zecea cifră diferită de 7 nu este cifra unităților, atunci cifra unităților este 7, deci numărul nu poate fi pătrat perfect. Să vedem ce se întâmplă dacă numărul este de forma $n=\overline{77...7a}$. Dacă n este pătrat perfect, deducem: $a\in\{0,1,4,5,6,9\}$. Dacă $a=0$, atunci $10/n$, dar 10^2 nu divide n. Dacă $a=1$, n este de forma $8k+3$, deci nu poate fi pătrat perfect (!). Dacă $a=4$, avem $2/n$, dar 2^2 nu divide pe n. Dacă $a=5$, $5/n$, dar pătratele perfecte nu nu se termină în 75. Dacă $a=6$, avem că $3/n$, dar 3^2 nu divide pe n. Dacă $a=9$, numărul n este de forma $8k+3$.

V.185 Patru prieteni au fiecare câte unul dintre următoarele animale: o pisică albă, un câine negru, un peşte roşu şi un papagal galben. Se ştie că:

1) Denis nu suportă culorile alb şi galben;
2) Nicu are un animal cu blană;
3) Alex şi Mircea nu suportă culorile roşu şi negru;
4) Dacă Alex are un animal cu patru picioare, atunci şi Mircea are un animal cu patru picioare.

Găsiți ce animal are fiecare dintre cei patru prieteni.

Prof. Adriana Dragomir şi Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție:

● Dacă Denis are câinele negru, atunci (2) : Nicu are pisica albă, iar din (3) am avea că Alex şi Mircea au papagalul galben, imposibil (fiecare are câte un alt animal).

● Dacă **Denis are peştele roşu**, avem două posibilități:
(I) Nicu are pisica albă, deci Mircea are (3) papagalul galben şi deci Alex rămâne cu negru, contradicție cu (3) ; (II) **Nicu are câinele negru**. Dacă Alex are pisica, atunci din (4) avem că Mircea are pisică sau câine, imposibil... Aşadar **Alex are papagalul**, iar **Mircea are pisica.** *Se verifică imediat că situația aceasta satisface condițiile din enunț (Denis –are peştele, Nicu –are câinele,Alex –are papagalul, Mircea – are pisica).*

V.189 Determinați cel mai mare număr natural d care divide, pentru orice număr natural n , numărul $a_n=n(n+1)(2n+1)$.

Olimpiadă Moldova

Soluție : Deoarece $a_1 = 6$, rezultă că $d \le 6$. Demonstrăm că numărul căutat este chiar 6. Se ştie că pentru orice număr natural *n*, $b_n = n(n+1)$ este număr par, deci $2/a_n$.Dacă $n = 3k, k \in \mathbb{N}$, atunci $3/a_n$, dacă $n = 3k+1, k \in \mathbb{N}$, atunci $3/(2n+1)$, iar dacă $n = 3k+2, k \in \mathbb{N}$, avem că $3/(n+1)$. Oricum, deducem că $3/a_n$; cum $(2,3) = 1 \Rightarrow 6/a_n$.

Clasa a VI-a

VI.180 Într-o urnă sunt 100 de bile numerotate de la 1 la 100. Câte bile trebuie extrase din urnă pentru a fi siguri că cel puțin un număr din cele extrase, împărțit la 27, dă câtul de cinci ori mai mic decât restul ?

Concurs Târgovişte

Soluție: Cu teorema împărțirii cu rest avem: $D = I \cdot C + R,\ R < C$ şi $C = \frac{R}{5} \Rightarrow D = 27 \cdot \frac{R}{5} + R$, de unde $D = \frac{32R}{5} \Rightarrow 32/D \Rightarrow D \in \{32, 64, 96\}$. Aşadar, trebuie extrase din urnă $100 - 3 + 1 = 98$ de numere.

VI.182 Se consideră un triunghi *ABC* şi se notează cu *D* piciorul perpendicularei din *B* pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$. Arătați că *D* se află pe dreapta care uneşte mijloacele laturilor *(AB)* şi *(BC)*.

* * *

Soluție : $DN = \frac{AB}{2} = AN$, aşadar triunghiul *AND* este isoscel cu $\sphericalangle NAD \equiv \sphericalangle NDA$, unde *N* este mijlocul lui *(AB)*. Deducem astfel $\sphericalangle NAD \equiv \sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle NDA$, deci $DN \,//\, AC$. Cum şi $MN \,//\, AC$ (linie mijlocie, *M* fiind mijlocul lui *(BC)*), ajungem la : *N,D,M* coliniare.

Metoda a doua: Fie $BD \cap AC = \{E\}$, Atunci $\triangle ABE$ este isoscel pentru că AD este bisectoare şi înălțime, deci D este mijlocul lui BE şi de aici concluzia.

VI.183 Arătați că dintre 18 numere naturale consecutive formate din trei cifre, cel puțin unul se divide la suma cifrelor sale.

* * *

Soluție: Din cele 18 numere consecutive exact unul, pe care îl notăm cu A, se divide cu 18, deci se divide şi cu 9, aşadar suma cifrelor sale se divide cu 9. Singurul număr de trei cifre cu suma cifrelor sale 27 este 999, care nu se divide la $18 \Rightarrow$ suma cifrelor lui A este 9 sau 18.

VI.184 a) Putem împărți în două grupe primele 30 de numere naturale nenule astfel încât prima grupă să conțină 20 de numere, iar suma elementelor din cele două grupe să fie aceeaşi ?;

b) Aceeaşi problemă pentru primele 100 de numere naturale nenule, iar prima grupă să conțină 70 de numere.

* * *

Soluție: $a) 1+2+3+...+30=15\cdot 31,$ număr impar, deci răspunsul este negativ, deoarece, în condiția din enunț, suma totală ar trebui să fie $s_1+s_2=2s,$ număr par; b)deoarece $1+2+3+...+100=5050,$ suma din fiecare grupă ar trebui să fie $2525.$ Cum $1+2+3+...+70=2485,$ iar $2525-2485=40,$ putem considera $A=\{1,2,3,...,39,41,...,70,a\}$ şi $B=\{40,71,72,...,100\}\setminus\{a\}$.Găsim imediat $a=80.$ Perechea (A,B) este singura care satisface enunțul?

VI.185 La fiecare oră, din Timişoara spre Bucureşti pleacă un tren. În acelaşi timp, din Bucureşti spre Timişoara pleacă un alt tren. Pentru a parcurge distanța dintre cele oraşe, un tren are nevoie de 7 ore. Se ştie că trenurile se mişcă uniform şi că se întâlnesc numai în stații. Determinați numărul minim de stații dintre Timişoara şi Bucureşti.

Prelucrare problemă olimpiadă Moldova

Soluție: Trenul care pleacă din Timişoara, de exemplu la ora 7, întâlneşte trenurile care pleacă din Bucureşti la orele 0, 1, 2, 3, 4, 5, …, 14, aşadar întâlneşte 15 trenuri. Deoarece evident că prima întâlnire are loc la Timişoara, iar ultima la Bucureşti, numărul minim de stații (situate la distanțe egale) dintre cele două oraşe este 13.

VI.188 Arătați că dacă *n* este un număr natural impar, atunci numărul divizorilor naturali ai lui *n* divide numărul divizorilor naturali ai numărului $s=1+2+3+...+n$.

Prof. Andrei Eckstein, Timişoara

Soluție: $1+2+3...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. Cum n este impar, deducem că $n+1=2k$ şi suma este nk, număr care are un număr de divizori egal cu numărul divizorilor lui n înmulțit cu numărul divizorilor lui k deoarece k şi n sunt prime între ele.

VI.189 Determinați cel mai mic număr natural n pentru care fracția $\dfrac{n+5}{20n+11}$ se poate simplifica.

Prof. Andrei Eckstein, Timişoara

Soluție: Presupunem că fracția se poate simplifica cu $p\geq 2$ număr prim ; deducem astfel că $p/(n+5)$ şi $p/(20n+11)$, de unde $p/20(n+5)$ şi $p/(20n+11)$, apoi $p/89$. Aşadar $p=89\Rightarrow 89/(n+5)$. Numărul căutat este astfel $n=84$.(într-adevăr, fracția este în acest caz $\dfrac{89}{1691}=\dfrac{1}{19}$)

Clasa a VII-a

VII.180 Determinați numerele întregi x şi y pentru care $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{xy}=8$.

Prof. Dana Heuberger, Baia Mare

Soluție: Evident, se impun condițiile: $x,y\in\mathbb{N}\cap[0,64]$. Ajungem la $\sqrt{x}+\sqrt{y}=8-\sqrt{xy}$ şi prin ridicare la pătrat avem : $18\sqrt{xy}=64+xy-x-y\in\mathbb{N}\Rightarrow xy$ este pătrat perfect.Notând $\sqrt{x}+\sqrt{y}=k\in\mathbb{N}$, ajungem la $\sqrt{x}=k-\sqrt{y}\Rightarrow 2k\sqrt{y}\in\mathbb{N}$, deci y este pătrat perfect, apoi analog obținem că şi x este pătrat perfect. Aşadar avem: $x=a^2, y=b^2, a,b\in\mathbb{Z}$ (putem considera chiar $a,b\in\mathbb{N}$!) şi avem: $a+b+ab=8\Rightarrow(a+1)(b+1)=9$ .Analizăm imediat cazurile posibile şi obținem perechile (x,y): $(0,64),(4,4),(64,0)$.

VII.181 Arătați că un număr de n $(n\geq 2)$ cărți diferite pot fi distribuite la două persoane, astfel încât fiecare să primească cel puțin o carte, în $2\cdot(2^{n-1}-1)$ feluri.

Concurs Ungaria, 1895

Soluție: Fiecare dintre cele *n* cărți poate fi distribuită în două moduri şi astfel, cu principiul produsului, obținem $\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{n\ ori}=2^n$ feluri; din acest număr trebuie scăzut însă 2, corespunzător celor două situații în care toate cărțile sunt oferite aceleeaşi persoane. De remarcat că problema poate fi privită în cadrul mai general al aranjamentelor cu repetiție.

VII.182 În interiorul unui triunghi echilateral de latură 20 cm se pun cinci furnici. Arătați că în orice moment există două furnici care se află la o distanță mai mică decât 10 cm.

Prof. Florica Banu, Bucureşti

Soluție : Notăm cu *M,N,P* mijloacele laturilor *(BC),(AC),*respectiv *(AB).*Se formează astfel triunghiurile echilaterale *ANP, BMP, CNM, MNP,* cu lungimea laturii de 10 cm. Folosind principiul lui Dirichlet (al cutiei), deducem că există unul dintre aceste triunghiuri care conține în interiorul său sau pe laturile sale cel puțin două dintre cele cinci furnici (puncte). Evident, aceste două puncte (furnici) au distanța dintre ele cel mult egală cu 10 cm.

VII.183 Se consideră numerele naturale nenule *a,b,c* pentru care $a\cdot b<c$. Demonstrați că : $a+b\le c.$

Concurs Baia Mare, 1989

Soluție : $a,b\in\mathbb{N}^*\Rightarrow a\ge 1, b\ge 1\Rightarrow (a-1)(b-1)\ge 0$ şi astfel : $ab+1\ge a+b.$Cum $c>ab$, deducem : $a+b<c+1.$ Deoarece *a,b,c* sunt naturale se ajunge la: $a+b\le c.$

VII.184 Pentru fiecare număr natural *n* se notează $x_n=n^3+n^2+n+a$, unde $a\in\mathbb{Z}$ este fixat.

a) Arătați că, dacă x_3 sau x_4 este divizibil cu 3, atunci x_6 este divizibil cu 3 ;
b) Determinați numerele întregi *a* pentru care x_2 şi x_3 sunt pătrate perfecte.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: a) $x_3=39+a$ şi $x_4=84+a$; dacă 3 divide oricare dintre aceste numere, deoarece 39 şi 84 sunt multipli de 3, avem că şi *a* este multiplu de 3, de unde $x_6=258+a=3k+a$ are aceeaşi proprietate ; b)din $x_2=14+a=m^2$ şi $x_3=39+a=n^2$ obținem : $n^2-m^2=25$ şi astfel

$(n-m)(n+m)=25=25\cdot 1=5\cdot 5$. Analizând cazurile posibile, ajungem la $|m|=13, |n|=12$ sau $|m|=5, n=0$, de unde $a\in\{-14,30\}$.

VII.185 Se consideră un pătrat 8×8, format din 64 de pătrățele 1×1, în care scriem cele mai mici 64 de numere prime distincte.

a) Arătați că nu putem face în aşa fel încât suma numerelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană să fie aceeaşi.

b) Arătați că nu putem face în aşa fel încât produsul numerelor de pe fiecare diagonală să fie acelaşi.

Prof. Gabriel Popa, Iaşi

Soluție : a) Cel mai mic dintre cele 64 de numere prime distincte este 2, toate celelalte fiind impare şi astfel pe linia şi coloana lui 2 suma numerelor va fi un număr impar, pe când pe oricare din celelalte linii sau coloane suma va fi un număr par (se adună un număr par de numere impare) ; b) trebuie observat de la început că diagonalele nu au căsuțe comune şi astfel, alegând un număr prim *p* de pe una dintre diagonale, avem că produsul numerelor de pe acea diagonală se divide cu *p*, pe când produsul numerelor de pe cealaltă diagonală nu are această proprietate, aşadar cele două produse nu pot fi egale.

VII.186 Ştiind că pentru numerele naturale x şi y restul împărțirii numărului x^2+y^2 la 10 este 7, aflați restul împărțirii lui x^2+y^2 la 20.

Prof. Andrei Eckstein, Timişoara

Soluție: În condițiile din enunț deducem că ultima cifră a lui x^2 este 1, iar a lui y^2 este 6, sau invers, dar din motive de simetrie analizăm doar un caz. Atunci x are ultima cifră 1 sau 9 iar y are ultima cifră 4 sau 6. Deducem că $x=10k\pm 1$, deci x^2 dă restul 1 la împărțirea cu 20. $10l+4$ sau $10l+6$ deci dă restul 16 la împărțirea cu 20, de unde deducem că restul căutat este 17.

VII.187 O căruță încărcată se mişcă cu viteza de 10 km/h la vale şi cu 6 km/h la deal. În aceste condiții, căruța a parcurs distanța de la satul *A* la satul *B* în două ore şi jumătate, iar de la satul *B* la satul *A* într-o oră şi jumătate. Determinați distanța dintre cele două sate, aflate pe două dealuri vecine.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție : Notăm cu d_1, respectiv d_2, distanța parcursă de căruță la vale, respectiv la deal. Avem astfel : $2,5 = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{6} = \frac{3d_1 + 5d_2}{30}$ şi $1,5 = \frac{d_1}{6} + \frac{d_2}{10} = \frac{5d_1 + 3d_2}{30} \Rightarrow 4 = \frac{8d_1 + 8d_2}{30} \Rightarrow d_1 + d_2 = \frac{120}{8} = 15$ km.

VII.188 Se consideră trei pătrate distincte *ABCD*, *BCEF* şi *EFGH*. Calculați $m(\sphericalangle EDF) + m(\sphericalangle HDG)$.

Concurs Traian Lalescu, 1986

Soluție: Notăm cu *a* lungimea laturii pătratelor şi, cu teorema lui Pitagora, obținem $DB = a\sqrt{2}, BF = a, DF = a\sqrt{5},\ DE = 2a, EG = a\sqrt{2}, DG = a\sqrt{1}$.

Deoarece $\frac{DB}{DE} = \frac{BF}{EG} = \frac{DF}{DG} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, deducem : $\Delta DBF \sim \Delta DEG$. De aici ajungem la : $m(\sphericalangle HDG) = m(\sphericalangle EDG) = m(\sphericalangle FDB)$

şi $m(\sphericalangle EDF) + m(\sphericalangle HDG) = m(\sphericalangle EDF) + m(\sphericalangle FDB) = m(\sphericalangle EDB) = 45^o$.

VII.189 Să se arate că în orice trapez dreptunghic cu diagonale perpendiculare are loc inegalitatea $S > h^2$, unde S, h reprezintă aria, respectiv înălțimea trapezului.

Prof.Mihai şi Steluța Monea – Deva

Soluție: Într-un astfel de trapez înălțimea este egală cu media geometrică a bazelor. Fie l linia mijlocie şi atunci $l > h$. Din egalitatea $S = lh$ obținem concluzia.

Clasa a VIII-a

VIII.181 Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de gradul întâi care satisfac simultan proprietățile:

a) $x \le f(x) \le x + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$

b) $f(a) \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{Z}.$

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

Soluție: Considerând $f(x) = mx + n$ cu $m, n \in \mathbb{R}$, avem: $x \le f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (m-1)x + n \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$, de unde ajungem la: $m = 1, n \ge 0.$ La fel, din $f(x) \le x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, obținem :

$(m-1)x+n-1 \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$, de unde $m=1, n \le 1$. Aşadar funcțiile care satisfac a) sunt de forma $f(x)=x+n,\ n \in [0,1]$. Folosind acum condiția b) deducem imediat soluțiile problemei : $f_1(x)=x,\ f_2(x)=x+1$, care satisfac condițiile din enunț (verificare !).

VIII.182 Se consideră în spațiu punctele *A,B,C,D* astfel încât $AC=BD=2$ şi $AB=BC=CD=DA=\sqrt{2}$. Demonstrați că punctele considerate sunt coplanare.

Prof. Mihai Bălună, Bucureşti

Soluție : Observăm că $AB^2+AD^2=BD^2$ şi $BC^2+CD^2=BD^2$, aşadar triunghiurile *BDA* şi *BDC* sunt dreptunghice şi isoscele.Notăm cu *E* mijlocul lui *(BD)* şi avem : $AE+EC=1+1=2=AC$, de unde deducem că *A,M,C* sunt coliniare şi deci *AC* şi *BD* au un punct comun, adică sunt coplanare.

VIII.183 Determinați numerele întregi *x* şi *y* pentru care $x^2=y(y+5)$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: Se ajunge imediat la: $4x^2=4y^2+20y$ sau $4x^2+25=(2y+5)^2$, adică o ecuație de forma $a^2+b^2=c^2$, care are soluțiile (!) $a=2mn, b=m^2-n^2, c=m^2+n^2$, de unde
$x=mn, m^2-n^2=5, m^2+n^2=2y+5$. Deducem acum :
$m-n=1, m+n=5 \Rightarrow m=3, n=2 \Rightarrow x=6, y=4.$

VIII.185 Demonstrați că există o infinitate de numere naturale distincte *a* şi *b* pentru care numerele $\sqrt{a+b}$ şi $\sqrt{a-b}$ sunt simultan raționale.

Prof. Steluța şi Mihai Monea, Deva

Soluție: Din $a+b=c^2$ şi $a-b=d^2$, cu $c,d \in \mathbb{N}$, ajungem la: $(a+b)(a-b)=(cd)^2$ sau $a^2=b^2+(cd)^2$, adică *a, b, cd* sunt numere pitagorice ; putem lua, de exemplu : $a=5k, b=4k, cd=3k$ şi astfel : $a+b=9k, a-b=k \Rightarrow k=j^2 \Rightarrow a=5j^2, b=4j^2$.

VIII.186 Se consideră un triunghi *ABC* dreptunghic în *A* şi se notează cu *D* proiecția lui *A* pe *BC*. Dacă *O* şi *Q* sunt centrele cercurilor înscrise în triunghiurile *ABD*, respectiv *ACD*, iar $BO \cap CQ = \{E\}$, demonstrați că $OQ \perp AE$.

Concurs Traian Lalescu, Reşița, 1995

Soluție : Notăm $AO \cap CE = \{M\}, AQ \cap BE = \{N\}$. Avem astfel în triunghiul $AMC : m(\sphericalangle ACM) = \frac{1}{2} m(\sphericalangle C)$ şi

$m(\sphericalangle MAC) = m(\sphericalangle MAQ) + m(\sphericalangle QAC) = 45^o + \frac{1}{2} m(\sphericalangle B)$. Deducem astfel :

$$m(\sphericalangle MAC) + m(\sphericalangle MCA) = 45^o + \frac{1}{2}\big(m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C)\big) = 45^o + \frac{1}{2}45^o = 90^o.$$

Rezultă că $m(\sphericalangle AMQ) = 90^o \Rightarrow QM \perp AO$. Analog, din triunghiul *ANB*, ajungem la : $m(\sphericalangle ANB) = 90^o \Rightarrow ON \perp AQ$. Avem astfel că în triunghiul *AOQ* punctul *E* este ortocentru şi deci $AE \perp OQ$.

VIII.187 Determinați numărul mulțimilor nevide *M* de numere reale care au proprietatea : $(x^2 + x) \in \{0, 2\}$, $\forall x \in M$.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

Soluție: Ecuația $x^2 + x = 0$ are soluțiile – 1 şi 1, iar ecuația $x^2 + x = 2$ are soluțiile – 2 şi 1; avem astfel că $M \subseteq \{-2, -1, 0, 1\}$; există astfel 15 mulțimi cu proprietatea din enunț (numărul submulțimilor nevide ale unei mulțimi cu *n* elemente este $2^n - 1$).

VIII.188 Arătați că, dacă *M* este un punct pe arcul $\overset{\frown}{BAC}$ al cercului circumscris unui triunghi isoscel *ABC*, cu $AB = AC$, atunci $MB + MC \le AB + AC$.

Prof. Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

Soluție : Considerăm punctul *D* pentru care $M \in (CD)$ şi $(DM) \equiv (BM)$. Cum patrulaterul *AMBC* este inscriptibil, avem :

$m(\sphericalangle AMB) = 180^o - m(\sphericalangle C) = 180^o - m(\sphericalangle B) =$

$180^o - \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{AC}) = 180^o - m(\sphericalangle AMC) = m(\sphericalangle AMD)$. Deducem astfel că :

$\Delta AMD \equiv \Delta AMB$ (LUL), iar de aici avem :

$DC \leq AD + AC \Rightarrow MB + MC \leq AB + AC.$

VIII.189 Se consideră un corp format dintr-o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu fețele laterale triunghiuri echilaterale de latură $L = 10cm$, iar sub piramidă se află cubul $ABCDA'B'C'D'$. O furnică parcurge pe fețele acestui corp un drum din V la A'. Determinați lungimea minimă a acestui drum.

***

Soluție: Drumul minim se obține în condițiile în care fețele VAB şi $ABB'A'$ ar fi coplanare şi se unesc printr-o linie dreaptă punctele V şi A'. În aceste condiții triunghiul VAA' ar fi isoscel de latură $AA' = 10cm$ şi unghiul $\sphericalangle VAA'$ de 150^0. Prin calul se obține lungimea segmentului $VA' = 10\sqrt{3}cm$.

Clasa a IX-a

IX.176 Se consideră un triunghi *MNP* şi punctele *T* şi *S* pentru care $\overrightarrow{NS} = 3 \cdot \overrightarrow{MS}$, $\overrightarrow{PT} = 3 \cdot \overrightarrow{MT}$. Se notează $PS \cap NT = \{Q\}$. Demonstrați că: $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$.

Prof. Gabriel Popa, Iaşi

Soluție: Din $\frac{MP}{MT} = \frac{MN}{MS} = 2$, deducem $ST \,//\, NP$ şi $NP = 2 \cdot TS$, de unde avem şi că *ST* este linie mijlocie în triunghiul *NPQ*, adică *S* şi *T* sunt mijloacele a două laturi. Cum *NS* şi *PT* sunt mediane, deducem că *MQ* este mediană, adică *M* este centrul de greutate al triunghiului *NPQ*. Dacă *R* este mijlocul lui *(NP),* avem astfel: $\overrightarrow{QM} = 2 \cdot \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MR}$.

IX.177 Determinați numerele naturale n pentru care $x_n = 1 + (n+1) \cdot 2^{n+1} + 4^n$ este pătrat perfect.

Prof. Lucian Dragomir

Soluție: $x_0 = 4$ este pătrat perfect şi $\left(2^n + n\right)^2 < x_n < \left(2^n + n + 1\right)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Aşadar x_n (situat între două pătrate perfecte consecutive) nu poate fi pătrat perfect pentru $n \geq 1$. Aşadar $n = 0$ este singurul număr cu proprietatea din enunț.

IX.179 Fiind date $2n+1$ numere reale distincte din intervalul $\left[1, 2^n\right]$, arătați că se pot alege trei dintre acestea: $b > a > c$, astfel încât ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ să nu aibă rădăcini reale.

Prof. Dan Ştefan Marinescu, Test tabără Băile Herculane 1987

Soluție: Considerăm următoarea partiție a intervalului închis $\left[1, 2^n\right]$: $d_k = \left[2^{k-1}, 2^k\right)$ pentru $k = \overline{1, n-1}$ şi $d_n = \left[2^{n-1}, 2^n\right]$. Deoarece avem $2n+1$ numere reale distincte, iar partiția este formată din n intervale, deducem că există un $k \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel încât trei elemente dintre toate să fie în d_k; fie acestea $b > a > c$; evident, avem astfel: $2^{k-1} < a < 2^k$, $2^{k-1} < b < 2^k$, $2^{k-1} < c < 2^k$. Ajungem acum la: $b^2 < 4^k$ şi $4ac > 4 \cdot 2^{k-1} \cdot 2^{k-1} > b^2$, concluzia fiind imediată.

Clasa a X-a

X.176 Găsiți o funcție de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neinjectivă, cu proprietatea că restricția sa la mulțimea numerelor raționale este injectivă.

Concurs Traian Lalescu, Deva, 1986

Soluție: Dacă $f(x) = x^2 - 2mx + n$, atunci pentru $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu $f(x_1) = f(x_2)$, ajungem la: $x_1 = x_2$ sau $x_1 + x_2 = 2m$, deci f nu este injectivă (sau , dacă $m \neq 0$, avem: $f(0) = f(2m) = n$). Pentru ca restricția lui f la $\mathbb{Q}$ să fie injectivă, trebuie ca alternativa $x_1 + x_2 = 2m$ să nu fie posibilă pentru $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$, deci este necesar şi suficient să avem $m \notin \mathbb{Q}$; un exemplu: $f(x) = x^2 - \sqrt{3} \cdot x$

X.178 Demonstrați că numărul $\left[\left(\sqrt{8}+3\right)^{1997}\right]$ este de forma $6k-1$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Prof. Mihai Chiş, Timişoara, Concurs Traian Lalescu

Soluție: Se arată că $\left(\sqrt{8}+3\right)^{1997}+\left(3-\sqrt{8}\right)^{1997}=6k$, apoi $0<\left(3-\sqrt{8}\right)^{1997}<1$ şi astfel : $6k-1<\left(\sqrt{8}+3\right)^{1997}<6k$; concluzia este imediată.

X.179 Fie x, y, z numere reale pozitive pentru care $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=2$. Demonstrați că: $8xyz\leq 1$.

Prof. Mircea Lascu, Zalău

Soluție: Calcule imediate transformă egalitatea dată în: $xy+yz+zx+2xyz=1$. (*) Notăm $xyz=a^3$ (asta e ideea, $a>0$) şi folosim $xy+yz+zx\geq 3\cdot\sqrt[3]{(xy)(yz)(zx)}=3\cdot(xyz)^{\frac{2}{3}}=3a^2$, astfel că egalitatea (*) conduce la: $1\geq 3a^2+2a^3$, de unde (observăm măcar o soluție a ecuației asociate..) ajungem la: $(2a-1)(a-1)^2\leq 0$, aşadar $a\leq\frac{1}{2}$. Concluzia chiar e imediată.

Clasa a XI-a

XI.175 Se consideră un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale , cu $x_1>0$ şi $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{x_1+2x_2+...+nx_n}, \forall n\geq 1$. Studiați convergența şirului considerat.

Prof. Emil Vasile, Ploieşti

Soluție: Deoarece $x_1>0$, se arată inductiv imediat că $x_n>0, \forall n\geq 1$, de unde $x_{n+1}-x_n>0, \forall n\geq 1$, aşadar şirul este strict crescător.Folosind acum $x_n>x_1, \forall n\geq 2$, ajungem la:

$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{x_1+2x_2+...+nx_n}\leq\frac{1}{x_1+2x_1+...+nx_1}=\frac{2}{x_1\cdot n(n+1)}$. De aici suntem conduşi la: $x_n - x_1 \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{x_1 \cdot k(k-1)} < \frac{2}{x_1}$ şi deci: $x_n < x_1 + \frac{2}{x_1}, \forall n \geq 1$, adică şirul este mărginit superior. Folosind teorema lui Weierstrass deducem că şirul este convergent.

XI.176 Fie $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ astfel încât $\det\left(A^2 - I_4\right) < 0.$ Demonstrați că există $\alpha \in \mathbb{R}, |\alpha| < 1$, astfel încât matricea $A + \alpha \cdot I_4$ să fie singulară.

Concurs Iaşi 2008

Soluție: Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \det(A - x \cdot I_4)$; fiind funcție polinomială, aceasta este continuă; deoarece relația din ipoteză se poate astfel transcrie: $f(-1) \cdot f(1) < 0$, deducem că există $\alpha \in (-1,1)$ cu $f(\alpha) = 0.$

XI.177 Demonstrați că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b,$ există o funcție continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care să admită ca asimptotă orizontală spre $+\infty$ dreapta de ecuație $y = a$, iar spre $-\infty$ dreapta de ecuație $y = b.$

Prof. Steluța şi Mihai Monea, Deva

Soluție: Folosim, de exemplu, faptul cunoscut că funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = arctgx$ are ca asimptote orizontale dreptele de ecuații $y = \frac{\pi}{2}$ şi $y = -\frac{\pi}{2}$. Căutăm astfel o funcție $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de gradul întâi, pentru care $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$ şi $h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = b$ (aceasta se găseşte imediat) şi se ajunge la: $f(x) = \frac{a-b}{\pi} \cdot arctgx + \frac{a+b}{2}.$

XI.178 Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi $A \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{C})$ şi $B \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{C})$ cu proprietatea că există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $(AB)^k = O_n$. Demonstrați că:

a) $(AB)^3 = O_n$; b) dacă $rang(AB) \neq 2$, atunci $(AB)^2 = O_n$.

Prof. Dorel Miheț, Timişoara

Soluție: a) din $(AB)^k = O_n$ deducem $B(AB)^k = O_2 \Rightarrow (BA)^{k+1} = O_2$, deci $(BA)^2 = O_2$; în continuare avem: $A(BA)^2 B = O_2$, deci $(AB)^3 = O_n$;
b) din $(AB)^k = O_n$ avem $tr(AB) = 0$; deoarece
$rang(AB) \le \min\{rangA, rangB\} \le 2 \Rightarrow rang(AB) \in \{0,1\}$.
Dacă $rang(AB) = 0$, rezultă $AB = O_n$, iar dacă $rang(AB) = 1$, atunci AB are liniile proporționale, deci $(AB)^2 = tr(AB)\cdot(AB) = O_n$.

Clasa a XII-a

XII.175 Determinați funcțiile $f:\mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_7$ pentru care: $f(x) + f(\hat{4}x) = \hat{3}x$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}_7$.

Prof. Alfred Eckstein, OL Satu Mare 2009

Soluție: pentru $x \to \hat{2}x$ obținem: $f(\hat{2}x) + f(x) = \hat{6}x$, iar pentru $x \to \hat{4}x$, avem: $f(\hat{4}x) + f(\hat{2}x) = \hat{5}x$. Notăm $f(x) = a, f(\hat{2}x) = b, f(\hat{4}x) = c$ şi rezolvând sistemul obținut, ajungem la: $f(x) = \hat{2}x$.

XII.177 Demonstrați că dacă $f:[0,\infty) \to (0,\infty)$ este o funcție continuă şi crescătoare, atunci este adevărată inegalitatea: $f(0)\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 f^2(x)dx.$

Concurs Deva 2008

Soluție: Inegalitatea propusă se poate scrie $I = \int_0^1 f(x)\cdot(f(x) - f(0))dx \ge 0$. Din teorema de medie avem însă că există $c \in (0,1)$ astfel încât $I = f(c)\cdot(f(c) - f(0))$. Este suficient acum să observăm că, deoarece funcția este crescătoare, avem: $f(c) > 0$ şi $f(c) \ge f(0)$.

XII.178 Determinați polinoamele $P \in \mathbb{C}[X]$ pentru care $P(z) + P(-z) = z^2 - P(iz)$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Prof. Gheorghe Eckstein, Concurs Oțelu – Roşu 1984

Soluție: Facem transformarea $z \to -z$ şi ajungem la $P(-z) + P(z) = z^2 - P(-iz)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Deducem astfel: $P(iz) = P(-iz)$, $\forall z \in \mathbb{C}$ sau $P(u) = P(-u)$, $\forall u \in \mathbb{C}$. Ecuația din enunț devine aşadar $2P(iz) = z^2 - P(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$ (1). Cu transformarea $z \to iz$ se ajunge la $2P(z) = -z^2 - P(iz)$, $\forall z \in \mathbb{C}$ (2). Eliminând din relațiile (1) şi (2) pe $P(iz)$, găsim $P(z) = z^2$, polinom care satisface relația din enunț.

XII.179 Demonstrați că dacă $(G, \cdot)$ este un grup cu $2n+1$ elemente, funcția $f : G \to G, f(x) = x^{n+1}$ este bijectivă.

Prof. Dan Ştefan Marinescu, test tabără Băile Herculane 1987

Soluție: Se arată imediat că $(n+1, 2n+1) = 1$ (în orice concurs, arătați... gimnaziu !); deducem că există $k, j \in \mathbb{Z}$ astfel încât: $k(n+1) + j(2n+1) = 1$. Pe de altă parte, deoarece G are $2n+1$ elemente, se ştie că $x^{2n+1} = e$, $\forall x \in G$. Arătăm acum că funcția f este injectivă: dacă $x, y \in G$ cu $f(x) = f(y)$, atunci

$x^{n+1} = y^{n+1} \Rightarrow x^{k(n+1)} = y^{k(n+1)} \Rightarrow x^{1-j(n+1)} = y^{1-j(n+1)}$, de unde:

$xy^{j(2n+1)} = yx^{j(2n+1)} \Rightarrow x\left(y^{2n+1}\right)^j = y\left(x^{2n+1}\right)^j$ şi $xe = ye \Rightarrow x = y$; aşadar funcția este injectivă şi, deoarece grupul este finit, este şi surjectivă, deci f este bijectivă.

Probleme propuse

(se primesc soluții până în data de 30 iunie 2011, nu mai târziu!)

Clasa a II-a

II. 81 Aflați suma a patru numere naturale consecutive impare, ştiind că unul dintre ele este egal cu 17. Câte variante poți găsi?

Aurica Nițoiu, Reşița

II. 82 Într-o cutie sunt bile albe, negre şi roşii. Ştiind că bile albe sunt 180 , adică cu 45 mai multe decât negre şi cu 36 mai puține decât roşii , să se afle câte bile sunt în cutie. Scrie rezolvarea sub forma unui exercițiu.

Georgeta Turcin, Moldova – Nouă

II. 83 Un ghiozdan cu 5 cărți cântăreşte două kilograme. Dacă se mai introduc în ghiozdan 10 cărți de acelaşi fel, el va cântări 4 kilograme.
Cât cântăreşte ghiozdanul gol?

Elisaveta Vlăduț, Reşița

II. 84 Suma a două numere este 77. Dacă se scade 12 din fiecare, unul dintre ele devine 30. Care sunt numerele?

Elisaveta Vlăduț, Reşița

II. 85 În trei coşuri sunt mai multe mere. Dacă din primul coş se iau 6 mere şi se pun în al doilea, iar din al treilea coş se iau 4 şi se pun în al doilea, atunci în fiecare coş vom avea număr egal de mere, 21. Câte mere au fost la început în fiecare coş?

Elisaveta Vlăduț, Reşița

II. 86 Diferența a două numere este 45. Dacă mărim cu 17 diferența, obținem scăzătorul. Care este descăzutul ?

Elisaveta Vlăduț, Reşița

II. 87 Eugen are 5 ani.Mama sa are de 7 ori vârsta lui Eugen.Câți ani va avea Eugen când mama lui va avea 40 de ani?

Desanca Tismănar, Moldova – Nouă

II. 88 Dacă Maria i-ar da lui Alin 15 timbre, atunci fiecare ar avea câte 30 de timbre.

Câte timbre are fiecare copil? Câte timbre au cei doi copii împreună?

Robertha Oprea, Reşiţa

II. 89 Scrieţi numărul 40 ca sumă de:

a) două numere egale;
b) patru numere egale;
c) cinci numere egale.

Neta Novac,Reşiţa

II. 90 La ora de educaţie fizică, elevii clasei I A se aşează în şir, mai întâi fetele, apoi băieţii. Dacă Ana are 11 fete în faţă şi ocupă penultimul loc, iar în spate are 13 elevi, poţi afla numărul fetelor şi al băieţilor din clasă? Dar al elevilor?

Inst.Mariana Mitrică, Reşiţa

Clasa a III-a

III. 81 Cinci copii mănâncă cinci îngheţate în cinci minute. Câţi copii mănâncă 30 de îngheţate în 15 minute?

Aurica Niţoiu, Reşiţa

III. 82 În două coşuri sunt acelaşi număr de mere.Dacă în primul coş se mai pun 15 mere , iar în al doilea 18 mere ,atunci cele două coşuri au împreună 53 de mere. Câte mere sunt în fiecare coş ?

Georgeta Turcin, Moldova - Nouă

III. 83 Ana şi Dragana rezolvă zilnic probleme de matematică. Într-o zi Ana rezolvă 3 probleme, iar Dragana, 4 probleme. În câte zile au rezolvat împreună 35 de probleme ?

Maria Vlasici, Vodnic

III. 84 Bunica are în ogradă păsări şi animale. Dacă numărul păsărilor este dublu faţă de numărul animalelor, iar numărul picioarelor este 56, aflaţi câte păsări şi câte animale are bunica în ogradă.

Inst.Mariana Mitrică, Reşiţa

III. 85 Este ziua de naştere a Biancăi . În camera ei au venit deja 3 băieți şi 4 fetițe . Deodată se deschide uşa şi intră un musafir surpriză. Câți ochi s-au îndreptat spre uşă ?

Maria Ciontu, Reşița

III. 86 Micşorează numărul 49 de 7 ori, apoi rezultatul micşorează-l cu 2. Numărul obținut măreşte-l de 9 ori, iar noul rezultat măreşte-l cu 8 .Ce număr ai obținut?

Maria Ciontu, Reşița

III. 87 Mama împarte celor 3 copii ai săi 30 de mere. Al treilea copil primeşte cu 6 mere mai mult decât primul copil, iar al doilea copil primeşte cu trei mere mai puțin decât al treilea copil. Câte mere primeşte fiecare?

Ozana Drăgilă, Reşița

III. 88 Diferența a două numere naturale este 114, iar unul dintre numere este de 4 ori mai mare decât celălalt. Să se determine numerele.

Ozana Drăgilă, Reşița

III. 89 Patricia are 10 ani, tata este mai în vârstă decât mama cu 2 ani, iar mama, dacă ar avea cu 2 ani mai mult, ar fi de 4 ori mai mare decât Patricia. Câți ani are tata?

Ana Modoran, Reşița

III. 90 Un fermier are 42 oi şi capre. Dacă ar vinde 5 oi şi ar cumpăra 3 capre, numărul oilor ar fi egal cu cel al caprelor. Câte oi şi câte capre are, în prezent, fermierul ?

Costa Moatăr, Reşița

Clasa a IV-a

IV. 81 La o fermă sunt găini şi porci. Ştiind că sunt , în total, 540 de capete şi 1720 de picioare, să se afle numărul găinilor şi al porcilor.

Georgeta Turcin, Moldova – Nouă

IV. 82 Mama a cumpărat 8 kg de fructe. O pătrime din ele sunt mere,o treime din rest sunt portocale, iar perele şi cireşele sunt în cantități egale. Care dintre fructe sunt mai multe : mere, pere, portocale sau cirese?

Ioan Dăncilă, Bucureşti

IV. 83 Aflați cât costă o carte şi cât costă un caiet, dacă 2 cărți costă mai mult decât 2 caiete cu 20 de lei, iar un caiet şi o carte costă 30 de lei.

Ozana Drăgilă, Reşița

IV. 84 Numărul aflat în mijlocul unui şir de 25 numere consecutive reprezintă anul naşterii marelui nostru poet, Mihai Eminescu.Determinați:
a) primul număr şi ultimul număr din şir;
b) suma numerelor din acest şir.

Inst.Mariana Mitrică, Reşița

IV. 85 Jumătatea triplului prețului unei imprimante este cu 250 lei mai mică decât sfertul prețului unui calculator.
Dacă prețul calculatorului este 2 452 lei, cât costă imprimanta?

Inst.Mariana Mitrică, Reşița

IV. 86 Aurel a cheltuit într-o zi 75 lei, a doua zi cu 15 lei mai mult decât dublul primei zile, iar a treia zi cu 20 lei mai mult decât triplul celei de-a doua zi. Câți lei a cheltuit Aurel în total ?

Neta Novac, Reşița

IV. 87 Când am scris adunarea $79\xi + 2\xi 6 + \xi 04 = \xi\xi\xi\xi$
nu am observat că maşina de scris avea una dintre tastele cu cifre defectă şi iată ce a ieşit ! Mă puteți ajuta să refac calculul ?

Ioan Dăncilă, Bucureşti

IV. 88 Vasile are o fermă de păsări în care creşte fazani şi 153 de prepelițe. După ce vinde un număr de fazani şi apoi vinde tot atâtea prepelițe câți fazani i-au rămas, constată că în fermă mai are de două ori mai multe prepelițe decât fazani. Mai poate onora Vasile o comandă de 100 de prepelițe ?

Ioan Dăncilă, Bucureşti

IV. 89 Dacă stabilim existența unei reguli într-o înşiruire de numere, cel care nu respectă această regulă este numit *intrus*. Doamna învățătoare a scris pe tablă, în ordine, numerele : 166, 334, 362, 525, 229.
Găsiți câte un motiv, o regulă, în fiecare caz, astfel încât, pe rând, fiecare dintre cele cinci numere să fie un *intrus*.

Ioan Dăncilă, Bucureşti

IV. 90 Pune paranteze în egalitățile $m = 30 \times 25 : 5 - 3$ şi $n = 25 + 5 \times 3 - 30$ astfel încât să obții $m = n$.

Ioan Dăncilă, Bucureşti

Clasa a V-a

V. 210 a) Calculați câte numere de trei cifre au exact două cifre egale.
b) Arătați că nu există numere naturale $a, b, c,$ cel mult egale cu 9, pentru care $\overline{abc} + \overline{cba} = \overline{aab}$.

Olimpiadă Canada, enunț modificat

V. 211 Arătați că numărul $A = 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{210}$ se divide cu 1302.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

V. 212 Calculați restul împărțirii la 5 a numărului $A = 132^{123} + 77^{77}$.

Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

V. 213 Şase copii vor să formeze două echipe de câtre trei jucători şi să dispute un meci de baschet. Calculați în câte feluri se pot forma cele două echipe.

Ioan Dăncilă, Bucureşti

V. 214 Într-o dimineață, veverița a lăsat în cuib, pentru cei patru pui ai săi, Alvin, Simon, Theodore şi Jason, o grămadă de alune. Fiecare pui, când s-a trezit, crezând că este primul, a luat un sfert din alunele aflate în cuib şi a plecat la joacă. După ce s-a trezit şi cel mai leneş, şi-a luat alunele după aceeaşi regulă, şi astfel au rămas în cuib 81 de alune. Câte alune a lăsat veverița în cuib ?

Adriana Dragomir, Oțelu – Roşu

V. 215 Un număr natural n împărțit la 15 dă restul 11, iar împărțit la 8 dă restul 3. Determinați restul împărțirii numărului $n+1$ la 12 .

* * *

V. 216 Suma tuturor resturilor împărțirii la 5 a n numere naturale consecutive este egală cu 86. Care este cel mai mic n posibil ?

* * *

V. 217 Determinați numărul maxim de numere care pot fi alese dintre numerele $1,2,3,...,50$, astfel incât suma oricăror două numere dintre cele alese să nu fie divizibilă cu 7.

* * *

V. 218 Toți Popeştii sunt Ioneşti (adică orice om care poartă numele Popescu face parte din marea familie a celor care poartă numele Ionescu), dar numai unii Ioneşti sunt Georgeşti. Stabiliți care dintre următoarele afirmații este adevărată:

a) Niciun Popescu nu poate fi Georgescu.
b) Dacă unul nu este Ionescu, el deasemenea nu este Georgescu.
c) Dacă unul nu este Georgescu, el nu poate fi Ionescu.

* * *

V. 219 Aflați cel mai mare număr natural par n astfel încât în mulțimea $\{1,2,3,...,n\}$ să existe exact 668 de numere care se divid cu 2, dar nu se divid cu 6.

Liliana Niculescu, Craiova

Clasa a VI-a

VI. 210 Determinați numerele naturale m şi n ştiind că există un număr natural impar $\overline{abcbc}$ astfel încât $\overline{abcbc} = 26^m - 26^n$.

Pavel Rîncu, Bozovici

VI. 211 Acum 30 de ani, vârstele lui Anton, Barbu şi Constantin erau direct proporționale cu 1, 2, respectiv 5. Astăzi, raportul vârstelor lui Anton şi Barbu este egal cu $\frac{6}{7}$. Ce vârstă are în prezent Constantin ?

Olimpiadă Canada, prelucrare

VI. 212 Biletul de intrare la un meci de fotbal costă 60 lei. Din lipsă de spectatori prețul biletului a fost redus şi numărul spectatorilor a crescut cu 50%, încasările mărindu-se în acest fel cu 20%. Cu ce procent s-a redus prețul biletului?

Mariana Drăghici, Reşița

VI. 213 Un organism are în momentul naşterii 2,5 kg. În prima lună de viață, organismul creşte în greutate cu 0,5 kg. Presupunând că procentajul de creştere se păstrează constant pentru primele şase luni de viață, calculați ce greutate va avea organismul după două luni.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

VI. 214 În acest semestru, Georgică are, la matematică, numai note de 7, 8, 9 şi 10, din fiecare cel puțin una şi cel mult două. Media notelor sale este 8,40. Care sunt notele pe care Georgică le-a primit de două ori ?

Ioan Dăncilă, Bucureşti

VI. 215 Aflați cel mai mic număr natural nenul *n* pentru care putem alege semnele $+$ şi $-$ astfel încât $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm ... \pm n = 16$.

Dan Comănescu, Timişoara

VI. 216 Arătați că mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, ..., 1234\}$ nu se poate împărți în două submulțimi disjuncte astfel încât suma sau produsul elementelor din cele două submulțimi să fie numere egale.

* * *

VI. 217 Arătați că fracția $\dfrac{2^n \cdot 5^{n+1} + 7}{2^{n+1} \cdot 5^n + 3}$ este , pentru orice număr natural *n*, ireductibilă.

Olimpiadă Vrancea

VI. 218 Determinați numerele naturale *a, b* şi *c* ştiind că $a + b + c$ este pătrat perfect şi $\overline{bc} = \dfrac{1}{6} \cdot \overline{abc}$.

Olimpiadă Caraş – Severin

VI. 219 Punctele *A,B,C,D* sunt situate, în această ordine, pe o dreaptă *d*, astfel încât *C* este mijlocul segmentului *(BD)*, $AB = 25\% \cdot BD$ şi $\dfrac{1}{5} \cdot CD = 5,2$ cm. Calculați distanța dintre mijloacele segmentelor *(AB)* şi *(CD)*.

Aurelia Voilovici, Moldova – Nouă

Clasa a VII-a

VII. 210 Arătați că 2011^{2011} nu se poate scrie că sumă a două pătrate perfecte.

Andrei Eckstein, Timişoara

VII. 211 Fie triunghiul ascuțitunghic ABC $(AB < AC)$ şi P un punct în interiorul acestuia astfel încât $\sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle PBC$ şi $\sphericalangle PAC \equiv \sphericalangle PCB$.

a) Demonstrați că dreapta AP trece prin mijlocul laturii (BC).

b) Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC şi $\{V\} = BP \cap CH$, atunci arătați că $VB \cdot VP = VC \cdot VH$.

Petrişor Neagoe, Anina

VII. 212 Pentru orice număr natural $n \geq 2$ se notează

$$A(n) = \frac{\sqrt{n+1}}{n} + \frac{\sqrt{n+4}}{n+3} + \frac{\sqrt{n+7}}{n+6} + \frac{\sqrt{n+10}}{n+9} + \frac{\sqrt{n+13}}{n+12} \text{ şi}$$

$$B(n) = \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+5}} + \frac{1}{\sqrt{n+8}} + \frac{1}{\sqrt{n+11}}.$$

a) Arătați că $A(2) < 3$.

b) Demonstrați că, pentru orice număr natural $n \geq 2$, este adevărată inegalitatea

$$A(n) < B(n).$$

Olimpiadă Ungaria, enunț modificat

VII. 213 Se consideră un paralelogram $ABCD$ în care $3AB = 2BC$. Bisectoarea unghiului $\widehat{BAD}$ intersectează (BC) în E. Se notează cu F simetricul punctului E față de D. Arătați că triunghiul AEF este isoscel.

Concurs Suceava

VII. 214 Se consideră numerele întregi nenule a, b şi . Arătați că numărul soluțiilor întregi ale ecuației $|ax + b| = c$ este par dacă şi numai dacă există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $k \cdot a = 2 \cdot c$.

* * *

VII. 215 Determinați numerele naturale n pentru care $\dfrac{2n^2+15}{3n+2} \in \mathbb{N}$.

** * **

VII. 216 Se consideră un patrulater $ABCD$ cu laturile AD şi BC paralele, pentru care există punctele $M \in (BC), N \in CD$, C între N şi D, astfel încât $AB = BM$ şi $DN = AD$. Demonstrați că, dacă punctele A, M, N sunt coliniare, atunci $ABCD$ este paralelogram.

Cristinel Mortici, Târgovişte

VII. 217 Se consideră un triunghi ABC cu $AB = 9, AC = 15$ şi în care se notează cu G centrul de greutate, iar cu I centrul cercului înscris . Calculați BC în cazul în care $IG \parallel BC$.

Constantin Apostol, Rîmnicu – Sărat

VII. 218 În prima ligă a campionatului național de fotbal al Rusiei sunt 16 echipe. Fiecare echipă joacă cu toate celelalte câte două meciuri, unul acasă şi altul în deplasare. Se acordă 3 puncte pentru victorie, un punct pentru meci egal şi nu se acordă niciun punct pentru înfrângere. Care poate fi diferența maximă de puncte dintre ocupantele primelor două locuri la sfârşitul campionatului ?

Monica Stanca, Craiova

VII. 219 Se consideră un trapez cu baza mare (AB). Demonstrați că bisectoarele unghiurilor $\widehat{BCD}$ şi $\widehat{ADC}$ se intersectează într-un punct situat pe (AB) dacă şi numai dacă $AB = AD + BC$.

Admitere Universitate 1985

Clasa a VIII-a

VIII. 210 Se consideră un număr real $a > 1$. Arătați că, dacă $x \in (1, a)$ şi $y \in \left(a, a^2\right)$, atunci $2xy - (1+a)(y+ax) + a\left(1+a^2\right) > 0$.

Ioan Dăncilă, Bucureşti

VIII. 211 Arătați că, dacă $a,b,c \in (-1,\infty)$ verifică relația
$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1$, atunci $a+b+c \geq 6$.

Andrei Eckstein, Timişoara

VIII. 212 Demonstrați că oricum am alege 9 puncte în interiorul unui cub cu lungimea muchiei 2 cm, există două puncte astfel încât distanța dintre ele să fie mai mică decât 1,74 cm.

Loreta Ciulu, Reşița

VIII. 213 Determinați numerele reale x şi y pentru care

$$x^2 - x = y^2 - 3y + 2 \text{ şi } x^2 + y^2 = 5.$$

Lucian Dragomir, Oțelu Roşu

VIII. 214 Determinați numerele reale x pentru care este adevărată egalitatea $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)=720$.

Olimpiadă Irlanda

VIII. 215 Într-un plan α se consideră un triunghi echilateral ABC şi un punct P astfel încât $PA = 2$ şi $PA = 3$. Demonstrați că $PA < 5$.

Admitere învățământ tehnic, lot olimpic, 1988

VIII. 216 O piramidă are toate muchiile egale. Arătați că baza ei nu poate fi un poligon cu 7 laturi.

Admitere Universitate 1988

VIII. 217 Arătați că semiplanul bisector al unui diedru într-un tetraedru împarte muchia opusă în segmente proporționale cu ariile fețelor alăturate.

Admitere Universitate Craiova 1991

VIII. 218 Fie *ABCD* un romb şi punctele *M*, *N* pe segmentele (AC), respectiv $(BC), N \neq B,$ astfel încât $DM = MN$. Se notează $\{P\} = AC \cap DN$ şi $\{R\} = AB \cap DM$. Demonstrați că $RP = PD.$

Test selecție OBMJ

VIII. 219 Arătați că în orice triunghi ABC dreptunghic în A este adevărată inegalitatea $(AB - AC)^2 \cdot \left(BC^2 + 4 \cdot AB \cdot AC\right)^2 \leq 2 \cdot BC^6$.

Test selecție OBMJ

Clasa a IX-a

IX. 190 Arătați că, dacă $a,b,c \in (0,+\infty)$ și $\frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c} = 1$, atunci $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq 3$.

Pavel Rîncu, Bozovici

IX. 191 Determinați funcțiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $f\left(\left[\frac{m}{n}\right]\right) = \frac{f(m)}{f(n)}, \forall m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

IX. 192 Ştiind că $\sin x + \sin y = b$ şi $\cos x + \cos y = a$, cu $a^2 + b^2 \neq 0$, calculați $\cos(x + y)$.

Admitere Universitate 1988

IX. 193 Un trapez cu lungimea diagonalelor d_1 și d_2 este circumscris unui cerc de rază r. Arătați că $d_1^2 + d_2^2 \geq 16r^2$.

Admitere Universitate 1988

IX. 194 Demonstrați că nu există poligoane convexe cu mai mult de 3 unghiuri ascuțite.

Admitere învățământ tehnic 1988

Clasa a X-a

X. 190 Punctele $A_0, A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ sunt vârfurile unui poligon regulat. Cercul circumscris acestui poligon are raza 1. Demonstrați că $A_0A_1 \cdot A_0A_2 \cdot ... \cdot A_0A_{n-1} = n$.

Admitere Universitate Craiova 1991

X. 191 Rezolvați inecuația $\sqrt{2-\log_2 x} \geq \log_2 x$.

Admitere Facultate Chimie 1990

X. 192 Fie $a,b,c,d \in \mathbb{C}^*$ afixele vârfurilor unui patrulater convex $ABCD$ în care $a \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot c$, $b \cdot \overline{d} = \overline{b} \cdot d$ şi $a+b+c+d=0$. Arătați că $ABCD$ este paralelogram.

Concurs Focşani 2010

X. 193 Determinați funcțiile $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică egalitatea $f(f(x)+y) = 3x + f(f(y)-2x),\ \forall x,y \in \mathbb{R}$.

Concurs Baia Mare 2010

X. 194 Demonstrați că pentru orice număr natural $n \geq 5$ este adevărată inegalitatea $2+\frac{2}{n} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k} < 2+\frac{4}{n}$.

Cristinel Mortici, Târgovişte

Clasa a XI-a

XI. 190 Se consideră şirul $(x_n)_{n\in N}$ cu $x_0 = \frac{1}{3}$ şi

$$x_n = \frac{x_{n-1}+1}{3} \quad \forall n \in N^*$$

a) Demonstrați că şirul este convergent şi calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

b) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(1+x_1)(2+x_2)...(n+x_n)}$

Stăniloiu Ovidiu, student Timişoara

XI. 191 Se consideră şirurile $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}...+\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $b_n = \{a_n\}$, unde $\{t\}$ reprezintă partea întreagă a numărului real t. Studiați convergența şirurilor considerate.

Admitere Universitate 1989

XI. 192 Dacă $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ este o funcție derivabilă cu $f(0)<0$ şi $f^{/}(x)\geq 1,\ \forall x>0,$ atunci există un unic $a>0$ cu $f(a)=0.$

Admitere Universitate 1990

XI. 193 Dintr-o foaie de tablă, care are forma unui pătrat de latură *a*, se taie la colțuri pătrate cu lungimea laturii *x* şi se îndoaie apoi marginile foii, astfel încât să se obțină o cutie paralelipipedică dreptunghiulară, cu baza un pătrat cu lungimea laturii egală cu $a-2x.$ Determinați x astfel încât cutia obținută să aibă volum maxim.

Admitere Arhitectură Bucureşti 1990

XI. 194 Se consideră o funcție $f:[0,1]\to[0,\infty)$ cu proprietățile :

a) $\forall a,b\in[0,1]$ cu $a+b\leq 1\Rightarrow f(a)+f(b)\leq f(a+b).$

b) $f(1)=1.$

Demonstrați că funcția are limite laterale finite în orice punct $x_0\in(0,1).$

Constantin Ursu, Galați

Clasa a XII-a

XII. 190 Fie *G* un grup cu 24 de elemente cu proprietatea că există *J* şi *H* două subgrupuri comutative ale sale pentru care se verifică proprietățile:

a) $|H|=4,\ |J|=6,\ \ H\cap J=\{e\}$

b) Dacă $x,y\in G$ şi $x\cdot y\in H\Rightarrow y\cdot x\in H$

c) Dacă $x,y\in G$ şi $x\cdot y\in J\Rightarrow y\cdot x\in J$

Arătați că:

(i) Pentru orice $x\in G$, există $h\in H$ şi $j\in J$ astfel încât $x=h\cdot j$

(ii) *G* grup abelian.

Stăniloiu Ovidiu, student Timişoara

XII. 191 Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=a_p x^p+a_{p-1}x^{p-1}+...+a_1x+a_0,$ unde $p\in\mathbb{N}^*,\ a_i>0, 0\leq i\leq p$. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}dx$.

Stăniloiu Ovidiu, student Timişoara

XII. 192 Determinați polinoamele $P \in \mathbb{R}[X]$ care îndeplinesc condițiile $P(0) = 0$ şi $P\left(X^2 + X + 1\right) = P^2(X) + P(X) + 1.$

Admitere Matematică, lot olimpic, 1990

XII. 193 Se consideră funcția

$$g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, g(x) = \int_0^x \ln(1 + tgx \cdot tgt)\,dt.$$

a) Calculați $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

b) Calculați $L = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^3}$.

Admitere Facultate Matematică – Fizică Timişoara, 1991

XII. 194 a)Dați un exemplu de funcție continuă şi neconstantă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ pentru care $\int_0^1 f(x)dx = 0.$

b) Arătați că există o infinitate de funcții continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ cu $\int_0^1 f(x)dx = 0.$

Admitere Facultate Matematică – Fizică Timişoara, 1990

Probleme alese

A. 5 Arătați că, pentru orice număr natural nenul n şi orice număr real x este adevărată egalitatea

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+...+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx].$$

Charles Hermite

A. 6 Demonstrați că, dacă $m \geq 6$ este un număr compus, atunci m este un divizor al numărului $(m-1)!$.

Joseph Liouville

A. 7 Arătați că pentru orice număr natural $n \geq 3$, există numere întregi impare a şi b astfel încât $a^2+7b^2=2^n$.

Leonhard Euler

A.8 Se consideră o mulțime M infinită în plan, cu proprietatea că distanța dintre oricare două puncte ale ei este un număr natural. Demonstrați că M este o submulțime a unei drepte.

Paul Erdös

Rubrica rezolvitorilor
(primul punctaj reprezintă ce s-a obținut pentru rezolvarea problemelor din numărul 34, în paranteză apare punctajul acumulat pentru ediția a VI-a a concursului)

Clasa I

Liceul Hercules Băile Herculane(înv. Maria Puşchiță, înv. Camelia Staicu) : Dina Emanuel 230(326), Murguleț Alexandru 136(252), Gavril Tania-Maria 136(254) , Stan Elena-Andreea 136(254), Popa Maria-Alexandra 138(252) (*scrie pe plic clasa în care eşti în momentul trimiterii)*, Bălţăţeanu Valentina 140(254).
Şcoala Romul Ladea Oravița (înv. Rozalia Arnăutu) Suru Bianca Alesia 50, Murgu Cosmina 90(140).
Liceul General Dragalina Oravița (prof. Livia Crețu) Țicu Bianca – Maria 40
Şcoala nr. 2 Reşița (înv. Ana Modoran, prof. Marioara Popescu): Florea Ioana-Patricia 130(200), Caraconcea Casian 70, Gavra Ana-Daria 70, Istvancsek Bianca 130(190), Bercea Cristiana-Raluca 70, Boc Alissia-Driada 170(240), Dumitru Ruth-Liliane 120(190), Rusu Adelin 170(240), Duşa Raul 70, Cioponea Andra-Cristina 130(200), Moldovan Denis-Lukas 70, Comănescu-Crîsciu Anamaria 120(190), Franț Antonia 130(200), Manole Alexandra 130(200), Neveanu Alexandra Elena 130(200), Uzoni – Gellert Raoul-Raphael 120(190), Gheju Iasmina-Mădălina 130(190), Voina Vanessa 130(190), Wolf Raul 90(90), Voina Alexandra 100(100), Simcelescu Alin 100(100), Gîrban Sebastian 100(100), Bălă Boştinaru Anca 100(100), Curescu Izabela 130(130), Zarcula Alexandru 130(130), Milcu Irina 130(130), Popescu Ariana 130(130), Paraschiv Mihai – Cornelius 130(130).
Şcoala nr. 9 Reşița (înv. Mariana Mitrică) Imbrescu Cosmin 130(250), Florea Andrada 120+117(237).

Clasa a II-a

Liceul Hercules Băile Herculane (înv. Alexa Gaiță, inst. Diana Grozăvescu) : Iliescu Camelia 100(258), Cuc Dorian 110(497), Grozăvescu Cristian 178(630), Papavă Laurențiu 138(692), Ghinea Vintilescu Irina 245(704), Călțun Adrian (255), Păuna Robert 248(645), Domilescu Gabriel 255(691), Viericiu Daniel 260(700), Cănicean Cristina 260(717), Ştefan-Brînzan Georgiana 258(702), Coman Alina 255(705), Sitaru Bianca 260(704), Rădoi Andrada 260(711), Bolbotină Iulia

215(701), Bolbotină Flavia 215(701), Hogea Patricia 260(711), Blidariu Mihai 248.
Liceul Teoretic Eftimie Murgu Bozovici (înv, Marius Băcilă) : Ignea Alina 240(450), Marin George 238(459), Mihoc Cristian 240(460), Oniga Nicoleta 185(263), Anton Iulia 238(458),Clipa Andrei 240.
Liceul Pegagogic C.D.Loga Caransebeş (inst. Patricia Maria Trion): Tufişi Alexandru (86).
Şc. Ciclova Română(înv. Cristina Lungu): Spârtic Florina Mădălina 200(484), Duma Bianca 30
Şcoala Lupac (Inv. Maria Muselin) Laoş Iandranca 130, Necula Daniel 100, Lațchici Ivana 148, Fafa Anca Maria 148, Sibii Stepan Adrian 78, Şera Gheorghe 110.
Şcoala nr.1 Moldova – Nouă (înv. Georgeta Turcin): Craiovan Eli Cosmina Maria 50(135), Constantin Cristiana 120(290).
Şcoala nr. 2 Reşița(înv.Elisaveta Vlăduț, înv. Robertha Oprea, înv. Maria Ciontu): Jula Diandra Melinda 220(742), Aruxandei Oana 200(550), Oşan Vlad(184), Drăgan Liliana 100(310), Marin Oana(98), Bîtea Iulia 200(598), Petrica Andra Elena (410), Boncaş Silvana (314), Stuparu Daniel 220(717), Boloca Mădălina 240(777), Mircea Antonia-Florina 116(582), Pinte Alexandru 230(685), Dumitru Maria Alexia 220(680), Bîrla Ştefan Alexandru 224(736), Popescu Nicoleta 240(752), Țucă-Willinger Andra Beatrice 230(760), Bălu Irina Alexia(275), Terfăloagă Mario-Andrei 225(662), Fara Eduard Petru (508), Bondoc Andrei Mihai(180), Doran Andrei 200(652), Blujdea Andrei Şerban (324), Lucacela Giulia 210(692), Călin Denis Andrei (508), Hamat Octavia Maria 220(700), Țibru Maria-Bianca 220(699), Cismaru George 200(562), Chira Ralf(75), Pană Bogdan (193), Giurescu Petre 268(684).
Şcoala Romul Ladea Oravița (înv.Constanța Chiriac, înv. Camelia Suru, înv.Claudia Mirabela Gavrilescu, înv. Felicia Roiban, înv. Rozalia Arnăutu) : Albert-Sterian Eduard-Dănuț 98(194), Gherovăț Anamaria 200(475), Diaconescu Mădălina 218(402), Tomici Bogdan 250(572), Iancu Eunice-Anastasia 238(431), Dumitru Ana Maria (331), Groszmuk Beatrice 210(460), Dobroi Ruxandra (225), Stângu Sara 96(292), Ivănuş Rareş 60(185), Fiştea Răzvan 60(148), Popescu Dennis Andrei(88), Novac Naomi(88), Mitreanu Andreia(88), Alexandru Alexandra-Florina 110(198), Ciocoi Ionela 215(506), Manda Flavian 100(377), Ogrin Mădălin(100), Micşa Laurențiu Gabriel(100),Țeicu Duşan Marius 193(470), Mincan Adrian 118(191), Dumitrescu Maria 140, Suru Bianca 120.

Liceul Gen.Dragalina Oravița (înv. Paulina Lăpuşnianu) : Goioane Mădălin-Iasmin(70), Vlad Marco-Ciprian(70), Lăpuşnianu Ştefan-Lucian(116), Blagoe Iustina(80).
Şcoala nr. 1 Oțelu – Roşu (înv. Luminița Orszari): Feil Nadia 250(709), Schelean Alexandra 316(706), Oancea George 130, Hegeş Adoriana 83.

Clasa a III-a

Liceul Hercules Băile Herculane(înv. Mirela Bolbotină, înv. Felicia Adriana Laitin): Staicu Ariana 265(903), Cionca Cosmin 300(498), Spătaru Iolanda Karina(192), Petcu Egon 180(592), Pervulescu Răzvan(195), Cîrdei Bogdan Antonio 205(668), Bohnsack Alexandru Walter 127(531), Vlădica Alexandra 200(719)(*problemele de la clasa a I a nu au fost luate în considerare*), Blidariu Mihai(176), Bârlan Florentin(98).
Liceul Pegagogic C.D.Loga Caransebeş(înv. Lidia Todor,inst. Adriana Leța, inst. Diana Gorczynski): Boncalo Sebastian 220(1038), Drăghin Alexia (376), Bogdan Alexandra 250(817), Vela Cristian Rusalin 136(941), Marghescu Radu (849), Iacob Rareş 218(1069), Bona Alin 67(460), Ghimboaşă Petronela 210(1062), Huian Cosmina 115.
Şcoala nr.1 Moldova – Nouă(prof. Desanca Tismănar, prof.Mirela Curea) Gruescu Gabriel Moisă 80(368)(*justificări deosebite*), Muntean Paul 73(323), Marişescu Nicolas(10), Străin Alexandra(10), Veselin Ioana(10).
Grup şcolar Moldova – Nouă(înv. Anastasia Stroia): Cristea Bianca(60), Răulea Alisa(126), Crenicean Georgiana (183), Bojici Ivana-Maia(364), Voicu Andreea(80), Cîrpean Flavius 195(376), Irimia Loredana 178(343).
Şcoala nr. 2 Reşița(înv.Florica Boulescu, înv.Mihaela Mregea, prof.Mariana Brebenariu): Cicortaş Raul Andrei (592), Adorjan Clara-Lorena 178(803), Datcu Goiceanu David(152), Blănariu Melisa(160), Racoceanu Rareş 180(563), Penzes Noemi 200(836), Pîrvu Cristina Florentina 200(781), Virag Roberta Izabela(363), Aruxandei Denisa Alexandra 200(719), Turcanu Iustina 197(613), Istvancsek Andreas 200(731), Milencovici Radoliub-Vlad 230(878), Rotariu Răzvan Ion 230(1030), Maletici Iasmina Noemi (196), Solomon Denisa(100), Burileanu Ana-Iulia 94(656), Pascu Eugen Cristian(96), Paulescu Patrick (648), Szazi Timeea 210(848), Ciobanu Elena 320(1219), Roescu Codruța 210(993), Crețu Cătălin(120).
Şcoala nr. 8 Reşița(înv.Maria Hristodoreanu, inst.Doina Dumitraşcu) Purdea Mădălina-Cristina 200(653), Sofronea Maria-Alexandra(180), Coandă Amelia Ioana 250(832).

Şcoala nr. 9 Reşiţa(înv. Lidia Adamescu, inst.Măriuţa Benga, prof.Costa Moatăr):Remo Tommy (365), Gîlcescu Denis-Alexandru(193), Novakovic Nikoleta 296(993), Negrea Alexandra 210(806), Rusu Melisa 100(193), Bârsan Paul 260(847), Bodnar Emanuela 290(1010), Păvălan Patricia 189(500), Voinea Nicoleta 288(1057), Mitru Casian 157(537), Borduz Flavius(200), Miu Panduru Alexandra 200(385), Davidescu Filip Olivia 280..

Liceul Traian Lalescu Reşiţa (înv. Alina Guţă, înv. Daniela Osman): Kovacs Iulia –Francesca 225(788), Pădurean Daniel 230(979), Lohon Ariana (396), Borca Giulia (298).

Liceul Gen.Dragalina Oraviţa(înv. Ildiko Stoenescu) : Petcu Ioana(90), Lazarov Andrei 270+120(930) , Miloş Mădălina(146), Boca Christiana(158).

Şcoala Romul Ladea Oraviţa(prof. Daniela Dorina Man, înv. Lăcrămioara Lungu, înv. Lăcrimioara Potoceanu): Mureşan Eliza 240(703), David Edward Petru(218), Marocico Denis 230+120(929), Stîngă Răzvan Andrei 250(915), Mărgan Oana Miruna(185), Gyorgy Maria-Cristina 190(613), Lungu Alexandru Andrei(95), Ciublea Amalia(195), Săvulesc Oana Daiana(185),Balmez Cristina-Maria 230(1013), Pardoş Daiana 260(444), Potoceanu Anamaria Larisa 110, Ţunea Sebastian 100.

Şcoala nr. 1 Oţelu – Roşu (înv.Nicoleta Doleanu, înv. Nicoleta Toader)
Pop Adrian(70), Janţu Lucian 200(510), Bărbulescu Florentina 180(319), Veţan Denis 180(544), Năstase Alexandra(110), Preda Sebastian(184), Ghenade Timeea(142), Meilă Denis Marian 210(640), Baderca Flavius 200(314), Boghian Tiberiu(184), Drăghici Mihail 200, Borca Delia 100.

Liceul Bănăţean Oţelu – Roşu (înv.Floare Homota) : Groza Adrian 150(542), Angheloni Denisa 150(569).

Clasa a IV-a

Liceul Hercules Băile Herculane(înv. Doina Zah, înv. Camelia Staicu,inst. Floarea Kuszay)
Negoiţescu Nicoleta 50(469), Agafiţei Cristian(476), Agafiţei Nichita(476), Sorescu Valentin 100(674),Ştefan-Brânzan Marian 100(576), Troacă Andrei 90(573), Ciobanu Antonia70(564), Dancău Maria-Ileana160(706), Stoican Anastasia 100(646), Nicoară Rebeca 91(600), Dorobanţu Maria (548), Bolbotină Gabriel 200(847).

Şcoala Bozovici(înv.Violeta Voin Stanec) : Pascariu Anda-Cristina(439), Ruva Patricia Mădălina(392).

Grup Şcolar Construcţii Maşini Caransebeş (înv. Liliana Ţuican, înv. Mihai Simona Gabriela)
Țuican Dan Alexandru 100(200).
Liceul Pegagogic C.D.Loga Caransebeş(înv. Ritta Ion) : Popa Nicuşor Alexandru(70), Miculescu Andreea(200), Lungu Lorena 60(300).
Şcoala nr.1 Moldova – Nouă(înv.Veronica Mărgărit) : Muntean Georgiana(20), Nistoran Alexandru 80.
Şcoala nr. 2 Reşița(înv.Eufemia Jurca,înv.Aurica Nițoiu, înv.Camelia Bălănescu, inst. Ozana Drăgilă) Muntean Anda 10+195(838), Badea Roxana(167), Marin Karla Ştefania 203(426), Khanbijan Alexandru 93(443), Nimirceag Vlad-Dan(172), Ciuşdic Milan Alexandru 90(635), Petrica Anca Ştefania 182(767), Onofrei Sara(193), Back Andreas 153+140(603)(*era trecut la clasa a III a în numărul anterior)*, Parfenie Alexandra 243(780),Potocean Teodora Aura 252(1119),Popescu Anisia(182), Bălănoiu Ana-Maria-Antonia 206(881), Buzatu Cătălina(150), Suteanu Sara 100(393), Velcsov Tania(208), Drăghici Liviu 150(270), Stoia Gabriela 172(172).
Şcoala nr. 8 Reşița(înv.Corina Nedelcu, înv.Rodica Moldovan) : Bugariu Andrei(283), Cenda Sabina 214(875), Marin Mădălin 192(827),Ştreng Flavius 224(887), Țeperdel Darius 156(816), Goian Tudor 196(770), Erceanu Andrei(387), Nica Elena Lorena (280), Colțescu Cătălin Emil(185), Popovici Naomi 183(526), Pătru Raplh Antonio(90), Ciupici Vlad(367), Pascal Roxana 215(747), Surugiu Dragoş 208(402).
Şcoala nr. 9 Reşița(înv.Margareta Filip) : Jumanca Patricia 189(911).
Şcoala Romul Ladea Oravița(înv.Merima Velcotă, înv.Viorica Totorean, înv. Georgeta Curea) Buzdug Ionuț 90, Scarlat Sara-Giulia (250), Dumitraşcu Bogdan-Andrei(292),Gherman Oana(70), Preda Damir 193(755),Popovici Antonia-Ştefania (280),Burcuşel Alex Paul 147(267) (*profesorul tău antrenor nu e Lucian Dragomir, dar mulțumim oricum)*, Dudilă Eduard (271) .
Liceul Gen.Dragalina Oravița(înv.Mirela Ana Nicolaevici) : Lazăr Denis(80), Mărilă Paul(80).
Şcoala nr. 1 Oțelu – Roşu(înv.Rodica Istrat) Voiț Iulia 170(834), Buță Jana Adina 170(306).
Şcoala cu clasele I-IV Cireşa, Oțelu – Roşu(prof. Carmen Dinu)Bărboi Natanael(60), Dinu Alexandra (60).
Şcoala nr. 3 Oțelu – Roşu(înv.Dorela Turcin,înv.Simona Țiru, prof. Adriana Găină) Butoi Drăghici Alina 100(534), Şulea Mariela 97(531), Savescu Andrei 100(318), Tamaş Patricia 100(526), Căldăraş Cristiana

(98), Simescu Antonio 100(198), Honciuc Raul 136(256), Vaszi Alexandru 97(197), Soare Alexandru 97(197).
Şcoala Sicheviţa(inst.Maria Popovici) Popovici Adelina-Florina(40)
Scoala Lupac (prof. Maria Muselin) Todor Marica Camelia 132, Beța Davida 106, Matein Maria 134.

Clasa a V-a

Colegiul Național Moise Nicoară Arad(inst.Lucian Trif): Bogdan Tudoran(160).
Liceul Hercules Băile Herculane(prof. Marius Golopența) : Tudor Oana(90), Golopența Mircea(100),Bujancă Georgiana(100).
Şcoala Berzasca(prof.Doina Milencovici) Gheorghe Alina Valentina (41), Schneider Emil Alois (63).
Liceul Pegagogic C.D.Loga Caransebeş(prof. Antoanela Buzescu, prof. Lavinia Moatăr): Balint Alina 68(293),Cernicica Andrei(100),Cherşa Adrian Octavian 151(320), Vuc Adelina(100), Lazăr Lavinia 35(105),Tunsoiu Oana Mihaela 59(278), Preda Claudia-Nicoleta(110),Nica Roberta (180),Boba Bianca Cristina 52(255), Pascotă Andreea 132(367), Urechiatu Blanca 99(165), Benec Ileana (90), Buzescu Mălina (100), Ciobanu Iulia Andreea (186), Iovanescu Iasmina (45), Lupu Andrei Cristian 117(205), Lungogea Amalia-Maria 98(211), Mluhlroth Otto (64), Ştefănigă Răzvan (84), Svaia Robert (44), Tirna Mihai Alexandru 70(155),Moga Bianca 64, Teregovan Nicoleta 79.
Liceul Traian Doda Caransebeş(înv.Margareta Ştefănuţi): Stanciu Ana-Zaira(200).
Grup şcolar Construcții Maşini Caransebeş (prof. Carina Corîci) Agape Maria 158, Nițu Nastasia 144, Pepa Georgiana 123.
Şc. Ciclova Română(prof. Geta Mîşcoi) : Mitreanu Andrei Mihai 34(228).
Şcoala nr.1 Moldova–Nouă(inst.Daniela Azamfirei-Marinca): Munteanu Adela(50), Nistoran Andreea-Daiana(50).
Şcoala Pojejena(prof. Cristina Iovanovici) Miloievici Ivana (17), Păunovici Lavinia 47(82).
Liceul Traian Lalescu Reşița(prof. Otilia Bejan) : Iacob-Mare Ionuț Radu (519), Regulschi Antonia(227), Catina Paula (480), Puşcaş Roberta(115), Puşcaş Antonia(125), Potocianu Rebecca 127(679), Freisz Patrick (736), Lucaci Cristiana (433), Cîrstea Denisa 99(707).
Şcoala nr. 2 Reşița(prof. Marius Şandru): Murariu Dumitru-Ciprian(88), Iuga Bianca-Teodora(176), Gligor Mădălina Georgiana(317), Cioponea Alexandru Mihai(336), Velcsov Flavia(376), Givoreanu Carmen-

Tabita(355), Mihai Andrei Flavian(113), Nicola Elena-Beatrice 86(566), Presnescu Bogdan(386), Dieaconu Dorel(260), Măciucă Răzvan(310), Călimănescu Oana(330), Branca Alexandru Ionuț (150).

Şcoala nr. 8 Reşița(înv.Laura Popa, prof. Simona Curescu) : Negrea Alexandru 115(185), Tiutiu Mădălin 168(237).

Şcoala nr. 9 Reşița(prof. Irina Avrămescu, prof. Vasile Chiş, prof. Ion Belci): Imbrescu Raluca 116(607),Remo Denis 163(518),Zaharia Flavia Cristiana 174(748),Şoavă Daniel Viorel 133(670), Vladu Andrei Damian(175), Țigănilă Ionuț(283), Gherasim Daniel 194(541), Burlacu Alexandru (22), Mănescu Anca (42).

Şcoala Rusca-Teregova(prof.Sorin Ciucă): Stepanescu Iuliana 40(67), Blaj Petru 39(184).(*probleme de geometrie de clasa a VI a şi a VII a !!!)*

Şcoala Romul Ladea Oravița(prof.Maria Iancu, prof. Nicolae Curea) Brădeanu Luciana(50), Palade Teodora 30(145), Şchiopu Alexandra(140), Nițu Flavius 208(352).

Şcoala nr. 1 Oțelu – Roşu(prof. Heidi Feil) : Racolța Annlee 112(434), Drăgan Lavinia 115(215), Drăghici Maria – Florina (98), Roşu Florina Nicoleta 59(118), Rusu Claudia Maria (68), Ştefan Carina Larisa 47(89).

Şcoala nr. 3 Oțelu – Roşu (prof. Felicia Boldea) Barbu Codin 92(176), Buzuriu Andreea 101(229), Jucos Giuliana 155(283), Olariu Nicoleta Daiana 104(206), Piess Claudiu (79), Stan Darius George 148(265), Zărnescu Gabriela 176(294).

Liceul Bănățean Oțelu Roşu(prof. Iulia Cecon): Filimon Ana 40(132), Lukacs Iosif Sebastian 70(161).

Şcoala Vîrciorova(prof.Ioan Liuba) Mihailescu Denisa(100).

Liceul Teoretic Mehadia (prof. Sabin Cosmin Iliescu) Dumbravă Marius 124.

Clasa a VI-a

Şcoala Berzasca(prof. Dana Emilia Schiha): Lăcătuş Cristian(90), Robescu Nicoleta 40.

Liceul Teoretic Eftimie Murgu Bozovici (prof.Pavel Rîncu) Melcescu Florina 70(130), Vodă Ana-Maria 63(123), Hotoc Roberta 73(131), Bain Oriana 70.

Liceul Hercules Băile Herculane (prof.Marius Golopența): Şulma Patricia(190).

Liceul Pegagogic C.D.Loga Caransebeş (prof.Lavinia Moatăr) Nicoară Daiana(60), Hotima Salome 29(139), Iovănică Sebastian(50), Făgăraş Cristina(70), Ciobanu Iulia 170(516), Jura Victor 95(305), Ardelean

Andra 90(370), Buligă Maria(100), Iovănescu Iasmina 52(162), Miculescu Adrian 100(159).
Liceul Traian Doda Caransebeş(prof.Adrian Dragomir) : Ionescu Robert 92(592), Florescu Andreea(50), Anderca Otilia Maria(100), Hehn Andreea(50), Zanfir Daniel(100).
Şcoala Ciclova Română(prof.Geta Mîşcoi): Sava Mădălina(50).
Şcoala nr.3 Moldova – Nouă(prof.Sânefta Vladu): Gabor Camelia(40).
Grup şcolar Moldova-Nouă(prof.Aurelia Voilovici) : Bonaț Bogoslav Gabriel (366).
Liceul Gen. Dragalina Oravița(prof. Aurica Lazarov) Lisa Jumanca 17(47), Braşoveanu Alex 29.
Şcoala Romul Ladea Oravița(prof.Camelia Pîrvu):
Cocar Lorena Melissa 134(456), Gagea Maria-Mirabela (110), Marocico Diana Andreea(130), Horniciar Andrei 52(83), Fuicu Cristina (109).
Şcoala nr. 1 Oțelu – Roşu(Prof.Heidi Feil) : Pănescu Sergiu(100), Moica Dan(90), Suciu Alexandra Georgiana 56(473), Firanda Denysa 60(200),Damian Patricia Cristina 57(127), Hrenyak Alexia Nadina 95(474), Cioarcă Adnana 116(473), Rus David Andrei 74(160), Janțu Petre Marin 146(422),Pietraru Andreea 49 .
Şcoala nr. 3 Oțelu – Roşu(Prof.Daniela Suciu) : Marin Băncilă Lucreția (156), Cornean Alexandru(114), Drăgan Andreea (36), Dănilă David (46).
Liceul Bănățean Oțelu Roşu(prof. Adriana Dragomir) :
Mihuț Casiana 135(254), Epuraş Georgian 130(411),Cojocaru Daria(155).
Şcoala Rusca Teregova(prof. Sorin Ciucă) : Gherga Zaharia 23(66), Stepanescu Larisa 36(91), Humița Dana 63(132), Codoşpan Alina 23(78)(*problemele de la clasa a IV a nu se iau în conciderare),* Gherga Ion 43(45), Andrei Petru 104(113), Raduia Elisaveta 7, Blaj Cristina 68 (*cu încercare de rezolvare a unei probleme de clasa a XII a !!!),* Brânzei Călina 6 *(11 probleme de la clasele I-IV, care nu se iau în considerare).*
Liceul Traian Lalescu Reşița(prof. Otilia Bejan) : Vunetu Patricia-Bianca(160).
Şcoala nr. 2 Reşița(prof. Mariana Drăghici) : Pinte Ana-Maria 38(357), Dacica Anca Cristina(70), Constantin Alexandra(60), Popa Radu Ciprian(100), Păuşan Leonard(70), Fara Oana Lorena(277), Mihancea Miruna (240), Rădoi Oana (394), Budimir Claudia (68), Teodorescu Iulia (120), Turturea Oana 135.
Şcoala nr. 6 Reşița(prof.Susana Simulescu) : Gale Roberta(120), Roşeți Teodora(100),Băroiu Carina(140), Jurca Andrei(120), Vizitiu Dorin(190), Țofei Anca(380).

Şcoala nr. 8 Reşiţa(prof.Mirela Rădoi, prof.Camelia Coandă) : Budimir Claudia 48(178), Cipu Cosmin(50),Belba Miruna(130), Pele George(90).
Şcoala nr. 9 Reşiţa(prof.Irina Avrămescu, prof.Vasile Chiş)
Şutilă Alexandra-Ionela 5(550), Muselin Mario Cristian(180), Călina Antonia (498), , Bălean Vlad 106(439), Moroti Cristina 23(95).
Liceul Traian Vuia Reşiţa(prof.Mircea Iucu): Vicol Alexandru(130), Epure Cosmin(50), Kiss Melisa(130).

Clasa a VII-a

Şcoala Berzasca(prof.Dana Emilia Schiha) Vîlceanu Izabela (29)
Liceul Hercules Băile Herculane(prof.Constantin Bolbotină) : Stanciu Ana-Maria 115(453)(*aceeaşi problemă pusă de două ori în plic ?)*, Moagă Alecsandru 126(450), Cernescu Maria(163), Popa Andrei 111(423), Cîrdei Alex-Cosmin 152(408), Tomescu Livia-Maria 96(393)(*problemă de geometrie rezolvată vectorial ? bravo !)*, Urdeş Florin 85(378), Radu Denisa 115(271), Urzică Ionuț Sorin 118(378), Stanciu Ana 155+128(408).
Liceul Teoretic Bozovici (prof. Pavel Rîncu) Românu Denisa 41, Marin Mihaela 41.
Liceul Pegagogic C.D.Loga Caransebeş (prof.Dorina Humiţa, prof.Mariţa Mirulescu) : Semenescu Raluca(170), Belciu Aida 83(269), Zamfir Andreea 40(103), Benec Emanuela(70).
Liceul Traian Doda Caransebeş(prof.Delia Dragomir, Janet Miuță Bocicariu, prof. Florin Ciocan) Neagoe Loredana(123),Nistor Răzvan (116),Iliescu Alexandru (213).
Grup şcolar Construcţii Maşini Caransebeş(prof.Carina Corîci) : Cornea Monica(70).
Şcoala nr.3 Moldova – Nouă(prof.Sânefta Vladu):Neculcea Evelina(90), Gabor Camelia 23(31).
Grup şcolar Moldova-Nouă(prof.Vasilica Gîdea)Popa Andreea(20), Truichici Adelina 40(68), Arini Michel 50(290) (*problemele de clasa a V a nu au fost luate în considerare).*
Şcoala Rusca-Teregova(prof.Sorin Ciucă) : Stepanescu Maria 5(99), Stepanescu Ecaterina(96), Humița Ionela(86), Banda Ioan Alexandru Ilia 8(238) (*problemele de clasa a V a nu au fost luate în considerare),* Stepanescu Alina 7(116), Ursulescu Ionel (2).
Liceul Gen. Dragalina Oraviţa(prof. Aurica Lazarov) Țibulca Andrei (41).
Şcoala Romul Ladea Oraviţa(prof.Camelia Pîrvu): Balmez Andrada 110(733), Murgu Teodora 93(403).

Şcoala nr. 1 Oţelu – Roşu(prof.Heidi Feil): Erdei Dorian Emeric 43(270), Honciuc Laura 68(301), Dinu Alexandru (37),Toader Răzvan 141(409), Szatmari Larisa 129(429), Szalma Eric (220), Oancea Roxana 66(158), Văran Alexandra (18), Ţolea Oana (32), Simescu Geanina (46).
Şcoala nr. 3 Oţelu – Roşu(prof. Felicia Boldea, prof. Daniela Suciu) Micşescu Cristian(50), Barbu Lidia(146), Carp Andreea-Camelia(120), Drăgan Alexandra Diana(146), Dănilă David(160), Piess Helmuth 47(177), Cornean Claudiu(70).
Liceul Traian Lalescu Reşiţa(prof.Otilia Bejan) : Malyar Cristina 20(281)(*e în regulă, soluţiile au ajuns la timp)*, Dolot Diana Nicole 100(490), David Mihai(160).
Şcoala nr. 2 Reşiţa(prof. Marius Şandru): Neaţu Monica 127(402), Ciobanu Anca 131(522).
Şcoala nr. 8 Reşiţa(prof.Mirela Rădoi) : Rus Daniel 74+68(512)
Şcoala nr. 9 Reşiţa(prof. Irina Avrămescu, prof.Vasile Chiş) : Gaiţă Nadine 181(424), Pupăzan Andreea(244), Muscu Dragoş (298), Costea Denis-Loren (70), Anănuţă Adela Marina(256)
Şcoala Vîrciorova(prof.Ioan Liuba) : Ivăniş Patricia 10(64), Dragomir Ana Patricia (60), Bănescu Ramona 30(156), Apolzan Alexandra (51), Anghel Alina Iuliana 18.

Clasa a VIII-a

Liceul Hercules Băile Herculane(prof.Constantin Bolbotină) : Gherghina Liviu-Nicu(148), Coman Petre Daniel(157), Dimcea Ana-Maria-Alexandra 135(406), Mihart Georgiana(165), Török Bogdan(75), Dancău Anca(168), Ferescu Liana-Maria 135(303),Vlaicu Daniela-Oana (275), Domilescu Manuel(157).
Şcoala Berzasca(prof.Dana Emilia Schiha) : Velicicu Alina 22(72), Vîlcu Cosmin(50),Vulpescu Emilia Iulia(60), Buga Ioana 47, Tundrea Petrişor 22 (*problemele rezolvate de la clasele a Va şi a VI a nu au fost luate în considerare ; regulamentul concursului diferă faţă de cel de la RMT).*
Liceul Pegagogic C.D.Loga Caransebeş(prof. Antoanela Buzescu,prof.Dorina Humiţa) : Rîcă Anda-Elena 27(57), Dinulică Ioan Septimiu 210(946), Bivolaru Mălina(120), Dinulică Petru Augustin 210(946) , Enăşoni Lavinia 70(209), Bogdan Roxana 90(436), Stepanescu Medina 46, Băzăvan Cătălina(30),Nica Hermina 28(108).
Şcoala Ciclova-Română(prof.Geta Mîşcoi) : David Melissa (68), Munteanu Andreea (65), Simion Silvia Anamaria (68).
Liceul Eftimie Murgu Bozovici (prof.Pavel Rîncu): Grădinariu Tatiana 65(245), Ruva Mihaela 70(299), Mitocaru Patricia 65(294), Negru Anca

Patricia 69(119), Iancu Mara Timea 70(116), Lopatiță Oana-Lia 64, Suveți Anca 70.
Grup şcolar Mihai Eminescu Jimbolia(Timiş) (prof.Sanda Nițoi): Popa Mădălina(80).
Grup şcolar Moldova Nouă (prof.Zoran Ocanovici, prof. Vasilica Gîdea) Mereu Mădălina(50), Mărculeț Marco 13.
Şcoala nr.3 Moldova – Nouă(prof.Sânefta Vladu) Olariu Alexandra(40), Chilnicean Ionela(20), Rujici Marina 80(140).
Şcoala Pojejena (prof. Cristina Iovanovici) Ciocea Geanina Beatrice (22), Firulovici Dalibor (36), Zaberca Melissa (16).
Şcoala nr. 6 Reşița(prof.Susana Simulescu) : Ciulu Miruna Dalila 225(795).
Şcoala nr. 9 Reşița(prof. Irina Avrămescu, prof.Ion Belci) :Rață Petrişoara(30), Moatăr Alina-Iasmina(80),Momin Alexandra(80),Todoran Adriana(30).
Şcoala Romul Ladea Oravița(prof.Camelia Pîrvu) : Trăilă Alexandra 156(443), Pîrvu Ancuța Iulia 190(706), Gheorghişan Călin 194(409).
Şcoala nr. 1 Oțelu – Roşu(prof.Heidi Feil): Dulan Ionița (30), Trica Alexandru(40), Ştefănescu Nicolae-Andrei 210(985), Baboniu Andreea (50), Buță Laurian 14(25), Necşa Adina 35(125).
Şcoala nr. 3 Oțelu – Roşu(prof.Daniela Suciu, prof.Felicia Boldea)Vladu Alina(60), Băilă Cristina(87), Barbu Daniel 15(115), Haba Beatrice 99(269), Românu Nicoleta(87), Preda Cristina 37, Manea Florina 54 (*problemele rezolvate de la clasele V-VI nu se iau în considerare, conform regulamentului)*
Şcoala Rusca-Teregova(prof.Sorin Ciucă, *spuneți elevilor să scrie pe plic clasa în care sunt !!!!):* Hurduzeu Ana (89), Blaj Ioan(20), Stepanescu Georgeta (92), Gherga Marinela 7(105), Banda Georgiana Violeta(94), Stepanescu Ana-Maria(98), Boşneag Maria 47, Codoşpan Oana 6.

Clasa a IX-a

Liceul Hercules Băile Herculane(prof.Constantin Bolbotină) Rădoi Iulia 37(115), Timaru Sorin 37(145), Moacă Nicoleta Adriana 73(157), Staicu Dumitru Alexandra 35(97), Cioban Daniela 73(160), Calotă Cristina 73(157).
Liceul Eftimie Murgu Bozovici(prof.George Pascariu) Pîrciu Viorel Damaschin 30(66).
Liceul C.D.Loga Caransebeş (prof. Marița Mirulescu) Stanciu Maria Georgiana (40).

Liceul Traian Doda Caransebeş (prof. Anişoara Dragotă, prof. Lavinia Moatăr) Tuştean Patricia 35(150), Szabo Ildiko 70(140).
Liceul Tehnologic Mehadia (prof. Mihaela Vasile) Vidale Flavius 66.
Grup şcolar Moldova Nouă (prof. Gheorghe Scorțan) Oprea Adelina Daria (12).
Şcoala Rusca-Teregova(prof.Sorin Ciucă): Humița Ileana Mirela(53), Boşneag Marinela Ionela(56), Ursulescu Ionela(83).
Şcoala Bozovici(prof.Pavel Rîncu) : Munteanu Mădălina(70), Hotac Adina(50), Ștefan Ana(80),Careba Denisa(80).
Liceul Traian Lalescu Reşița(prof. Pavel Ghimboaşă) Toc Teodora (324), Lazăr Silviu Ioan (190), Țeudan Adina (210).
Liceul Bănățean Oțelu-Roşu(prof. Lucian Dragomir) Pop Cristian 44(251),Radu Ionela 44(206), Cerbulescu Ribana (37), Băilă Diana 43(100), Preda Gabriela Dagmar 60(102), Fona Ionel 9(33), Butoi Armin (8), Banc Marius (17), Popescu Ana-Maria (8), Vărgatu Alina 41(83),Adam Alina 42, Ciama Mirela 27, Samfireag Anița 36, Bidilici Răzvan 43.

Clasa a X-a

Grup Şcolar Moldova Nouă (prof.Lăcrimioara Ziman): Vuletici Nikolia (113), Vizitiu Alexandra 46(239), Gîrjan Laura (123), Silaghi Marco(17), Sporea Ghiță Lucian(20), Herea Mihaela Camelia (120), Iorgovan Georgina 71(263), Crenicean Lorena Emanuela (120), Cîrpean Alexandra (82), Pop Dragana 18(100), Croitoru Alexandra 16(102), Rybar Mario (86), Vladisavlevici Iuliana 56(152), Păunovici Carlos Ramon (85), Mărculescu Mihaela (86), Bănescu Ramona (76), Cioancă Dorotea 56(152), Buşatovici Maia (78).
Liceul Eftimie Murgu Bozovici(prof.George Pascariu): Murgu Vlad(20), Surulescu Ilie (60), Curescu Elena Cristina(20), Borozan Flavius 23(91), Golîmba Lucia(20), Jarcu Lorena-Maria(39).
Liceul Traian Doda Caransebeş(prof. Adrian Dragomir): Copăceanu Oana(50), Agape Gabriela(60), Grozăvescu Ana(60), Răcăjdianu Sorana(70), Raiescu Dumitru(70), Ciobanu Raluca(60), Antonescu Nicoleta(80), Dumitraşcu Andreea 80(150), Milu Nicoleta 80(150), Faur Mihai Cosmin(60), Bona Caius(90),Geană Mihai(60), Ianoşel Petrică(70), Popa Andreea(20), Stoicănescu Gelu (170).
Liceul Nicolae Stoica de Hațeg Mehadia(prof. Mihaela Vasile) : Costescu Nicoleta Alexandra(67).
Liceul General Dragalina Oravița (prof. Mihael Lazarov) Dinu Andrei Mario 36.

Liceul Bănățean Oțelu-Roşu (prof. Lucian Dragomir**):** Krokoş Lorena 70(192), Gemănariu Traian (74), Kuhn Anne-Marie 63(154), Dumitresc Cecilia 63(152), Buzuriu Lukos 64(113), Dragomir Claudiu (27), Albai Cosmin (27), Grafenberger Andreas (37), Nasta Laura (45).

Clasa a XI-a

Liceul Teoretic *Eftimie Murgu* **Bozovici** (prof. George Pascariu)Borozan Florina (30), Derlean Pavel 65(95).

Liceul Traian Doda Caransebeş(prof. Lavinia Moatăr, prof. Delia Dragomir)Paşan Petru (207), Szabo Cristian 51(101), Mocanu Ioana-Dora 51(101), Tuştean Ionuț Claudiu 45(182), Buliga Denis 46(184), Orbulescu Dan (58), Ştefănescu Andrei (58).

Liceul Pegagogic C.D.Loga Caransebeş(prof. Dorina Humița, prof. Marița Mirulescu): Magu Georgiana(50), Semenescu Anca (210).

Grup şcolar Moldova Nouă(prof.Gheorghe Scorțan,prof.Cristina Iovanovici): Uță Robert (70), Radovan Cosmin(50), Ilievici Iasmina(50), Costea Semida(50), Buriman Amalia(50), Martinovici Ionela(50), Radoicovici Kethrin Ramona (88), Stoian Marius (47), Marta George Iulian (40).

Liceul Nicolae Stoica de Hațeg Mehadia(prof.Mihaela Vasile):Coconete Cosmina (175), Costescu Nicoleta 55(242).

Liceul Traian Lalescu Reşița (prof.Ovidiu Bădescu) Nemeş Adina (89),Ghițiu Cristina (64).

Liceul Bănățean Oțelu-Roşu (prof. Lucian Dragomir) : Bugariu Răzvan 48(192), Duma Andrei 48(148).

Clasa a XII-a

Grup Şcolar Moldova Nouă(prof.Lăcrimioara Ziman): Stoian Marius(8), Harabagiu Dragana 20(110), Pucă Alexandra Elena 20(110), Minea Neşa 28(48), Istudor Deian (70), Costea Liana Ileana (50), Buriman Nelu 57(103).

Liceul Pegagogic C.D.Loga Caransebeş(prof. Antoanela Buzescu)Marta Marian Sebastian 50(180).

Liceul Traian Doda Caransebeş(prof. Delia Dragomir) : Galescu Dan 57(187), Ciucă Cristian(50), Bona Petru(80), Zanfir Cristian 70(200) *(toată stima redacției)*.

Liceul Bănățean Oțelu-Roşu (prof. Lucian Dragomir): Cococeanu Oana 43(164), Atinge Carina 43(121).

Liceul Traian Lalescu Reşița(prof. Ovidiu Bădescu) Meşter Sergiu 35(117), Simion Larisa (48)