Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Caraş-Severin

REVISTA DE MATEMATICĂ

A ELEVILOR ŞI PROFESORILOR

DIN JUDEŢUL CARAŞ-SEVERIN

Nr. 42, An XIII – 2012

Acest număr al revistei are avizul Comisiei pentru publicaţii a SSMR

Editura „Neutrino”
Reşiţa, 2012

© 2012, Editura „Neutrino”
Titlul: Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din judeţul Caraş-Severin
I.S.S.N. 1584-9481

Mobil: 0741017700
www.neutrino.ro
E-mail: contact@neutrino.ro

CUPRINS

- Citate celebre ……. .... pag. 4

- Chestiuni metodice, note matematice (şi nu numai)
  - ■ Matematica...altfel (partea a XI-a) Numărul 11 (Ioan Dăncilă)... pag. 5
  - ■ Matematica universalis (Dan Ştefan Marinescu) .... pag. 6
  - ■ Asupra unor identități trigonometrice condiționate (Lucian Dragomir).. pag. 11
  - ■ Un cadru unitar de rezolvare a unor probleme de geometrie plană (Lucian Dragomir) .... pag. 13
  - ■ Metoda reducerii la absurd (I) (Ovidiu Bădescu, Lucian Dragomir) .... pag. 21

- Probleme rezolvate din RMCS nr. 38...................................... pag. 25

- Probleme propuse …………………………………….............. pag. 41
- Probleme alese .... pag. 57

- Rubrica rezolvitorilor .... pag. 58

- Miniconcursul revistei .... pag. 59

Citate celebre

○ “Nu înceta niciodată să zâmbeşti, nici chiar atunci când eşti trist, pentru că nu se ştie cine se poate îndrăgosti de zâmbetul tău.”

Gabriel José García Márquez

○ "Nu plânge pentru că s-a terminat, zâmbeşte pentru că s-a petrecut."

Gabriel Jose Garcia Marquez

○ „Poate că pentru lume eşti o singură persoană, dar pentru o anumită persoană, eşti întreaga lume.”

Gabriel Garcia Marquez

○ „Peste douăzeci de ani vei fi dezamăgit din cauza lucrurilor pe care nu le-ai făcut, nu din cauza celor pe care le-ai făcut.”

Mark Twain

○ "Spune adevărul şi atunci nu va trebui să ții minte nimic."

Mark Twain

○ "Cele mai importante două zile din viața ta sunt ziua în care te-ai născut şi cea în care afli de ce."

Mark Twain

○ „Dă şansa fiecărei zile să fie cea mai frumoasă din viața ta.”

Mark Twain

○ „Un copil poate oricând să învețe un adult trei lucruri: cum să fie mulțumit fără motiv, cum să nu stea locului niciodată şi cum să ceară cu insistență ceea ce îşi doreşte.”

Paulo Coelho

○ "Nu sunt deştept, dar când privesc în jur prind curaj."

Ion Creangă

○ „Nu spune niciodată nu se poate, ci începe cu să vedem.”

Nicolae Iorga

○ “Există succese care te coboară şi înfrângeri care te înalță.”

Nicolae Iorga

Matematica...altfel (partea a XII-a)

Ioan Dăncilă, Bucureşti

Numărul 11

Cel mai mic număr prim de două cifre, cel mai mic număr *palindromic*. Mai mult, numerele $11^2, 11^3, 11^4$ sunt şi ele numere *palindromice*. Numerele palindromice cu un număr par de cifre sunt toate divizible cu ... 11. În teoria numerelor, un număr prim p se numeşte *număr prim Sophie Germain* dacă şi $2p+1$ este număr prim; printre primele numere de acest fel se regăseşte şi 11: 2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, ... (care este următorul ?). Deasemenea, o pereche de numere prime se numeşte *sexy prime pair* dacă este de forma $(p, p+6)$ şi astfel 11 face parte din două astfel de perechi.

Istoria ne aminteşte de numărul 11, în primul rând poate pentru că primul război mondial s-a încheiat la ora 11, în ziua a 11-a a lunii 11 a anului 1918 (după ce a făcut 11 milioane de victime!). Apoi, primul zbor cu un aparat mai greu decât aerul, a lui Orville (unul dintre frații Wright), a durat 11 secunde; primul echipaj uman a ajuns pe Lună cu nava spațială Apollo 11.

Numărul 11 este obsesiv legat de simbolurile Canadei: 11 vârfuri are frunza de arțar de pe drapelul Canadei, 11 muchii are moneda de un dolar canadian, orologiul de pe biletele emise de banca Canadei indică ora 11. Numărul 11 este şi un număr cheie în *Divina Comedie*, într-o echipă de fotbal sunt 11 jucători, ciclul de activități magnetice ale Soarelui durează 11 ani, există vitamina B_{11} (vitamina apetitului).

Să revenim însă la matematică: Există 11 tipuri de desfăşurare a unui cub. Poligonul regulat cu 11 laturi nu poate fi construit numai cu rigla şi compasul. Deoarece $11 = 2+3+6$ şi $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$, numărul 11 este considerat *bun*. Numărul 11 face parte din seria lui n : 2, 5, 11, 17, 41 pentru care $x^2 - x + n$ are valori numere prime pentru orice x natural de la 0 la $n-1$.

Numărul 11 deschide seria de numere naturale alcătuite numai din cifre de 1: $\underbrace{111...1}_{n \text{ cifre}}$ şi care sunt numere prime: $n \in \{11, 19, 23, 317, 1031, ...\}$.

Chestiuni poate interesante şi generatoare de idei poate pentru propuneri de probleme:

$1\ ^{2} = 13^{o} + 3^{1} + 3^{2} + 3^{3} + 3^{4}$ şi $11^{3} = 5! + 1$. Iar când autorul acestor rânduri a numărat literele numelui său ....

Matematica universalis
(probleme rezolvate şi comentate din reviste străine)

Prof. Dr. Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

Când i-am propus profesorului Dragomir, un admirabil propunător de probleme şi „făuritor de reviste”, o rubrică cu acest titlu, nu ştiam la ce sarcină ingrată şi dificilă m-am angajat. Dificultățile provin din multitudinea de reviste de matematică elementară care există în acest moment în lume şi, ca pasionat de matematică, nu ştii asupra căreia să zăboveşti cu lectura. Sarcina mi s-a părut ingrată pentru că trebuie să împac gustul cititorilor, dacă vor fi, şi al editorului cu slăbiciunile celui care scrie aceste rânduri.

Rubrica de față va conține rezolvarea şi comentarea a trei probleme publicate în reviste din străinătate. Problemele vor fi distribuite pe grupe de clase. Orice sugestie din partea cititorilor este bine venită şi mărturisesc că îmi doresc un schimb de mesaje la adresa marinescuds@gmail.com.

Clasa a VII-a şi clasa a VIII-a.

Problema B. 4484 din revista KöMal (Math. anal.Phisical Journal for secondary Schools, Nov. 2012)

Să se arate că nu există numere naturale nenule x, y, z *cu* $z > 1$ *astfel ca* $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^x = y^z$.

Soluție : Cu ajutorul unei egalități cunoscute egalitatea revine la $2^{x+1} - 1 = y^z$ (1)

(În cazul în care egalitatea amintită nu face parte din arsenalul nostru de luptă împotriva problemelor, atunci, notând $S = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^x$ avem că $S = 2S - S = 2 + 2^2 + ... + 2^{x+1} - 1 - 2 - 2^2 - ... - 2^x = 2^{x+1} - 1$, adică egalitatea pomenită).
În mod cert, din (1) deducem că y este un număr impar. Dacă z este par, atunci $z \geq 2$ şi avem că $y^z = (2k+1)^{2p} = 4s+1$ şi astfel egalitatea (1) revine la $2^{x+1} = 4s+2$, adică $2^x = 2s+1$ egalitate imposibilă pentru că $x \geq 1$. În concluzie, z şi y sunt impare şi în consecinţă egalitatea (1) devine $2^{x+1} = (y+1)(y^{z-1} - y^z + ... - y + 1)$. Cum, în ultima egalitate a doua paranteză a membrului drept este un număr impar (ca o sumă cu un număr impar de numere impare), deducem că $y+1 = 2^{x+1}$ şi atunci $y^z \leq y = 2^{x+1} - 1 = 1 + 2 + ... + 2^x$, de unde $y = 1$. Deoarece pentru $y = 1$ egalitatea este imposibilă, concluzia problemei se impune.

Câteva comentarii se impun a fi făcute legat de această problemă. În primul rând, problema nu strălucește prin originalitate. Astfel de probleme au apărut şi în revistele de specialitate din România. Ceea ce face din ea o problemă instructivă şi atractivă este raționamentul aritmetic şi algebric la care trebuie apelat pentru soluționarea ei. Sperăm că cititorii vor găsi motive de satisfacție după lecturarea soluției propuse de noi.

Clasa a IX-a şi clasa a X-a.

Problema 981 din The College Mathematics Journal Vol. 43 No. 4 September 2012
(autor Michel Bataille, Rouen, Franța)

Găsiți cel mai mare număr real λ astfel ca inegalitatea

$$\frac{1}{r} > \lambda\left(\frac{1}{\min(a,b,c)} - \frac{1}{\max(a,b,c)}\right)$$

să aibă loc pentru orice triunghi cu laturile a,b,c şi r raza cercului înscris.

Soluție: Să remarcăm de la bun început că problema este “frumoasă”. De altfel, autorul acesteia este unul dintre cei mai redutabili rezolvitori şi propunători de probleme elementare din lume. În orice revistă de prestigiu din domeniu, numele lui Michel Bataille apare cu o constanță de invidiat. Cum atacăm o astfel de problemă? În mod cert că aflarea lui λ se va obține pe calea particularizării triunghiului de laturi a,b,c. În astfel de probleme, în general, se alege un triunghi special, adică, de exemplu, $b=c=1$ şi $a=x\in(0,1)$. Atunci inegalitatea din enunț devine $\frac{2(2+x)}{x\sqrt{4-x^2}}>\lambda\frac{1-x}{x}$ (am folosit faptul că $r=\frac{S}{p}$, unde S este aria triunghiului, iar p semiperimentrul său).

Ultima inegalitate conduce la $\frac{2(2+x)}{(1-x)\sqrt{4-x^2}}>\lambda$ pentru orice $x\in(0,1)$, adică $\frac{2\sqrt{2+x}}{(1-x)\sqrt{2-x}}>\lambda$. Cum $2\sqrt{2+x}\geq 2(1-x)\sqrt{2-x}$ pentru orice $x\in[0,1]$ deducem că $\lambda\leq 2$. Vom arăta acum că $\lambda=2$ este valoarea cea mai mare. Inegalitatea $\lambda\leq 2$ a fost obținută mai sus.

Acum să arătăm că are loc inegalitatea

$$\frac{1}{r}>2\left(\frac{1}{\min(a,b,c)}-\frac{1}{\max(a,b,c)}\right).$$

Această inegalitate nu este de tip standard. O vom soluționa însă cu o idee destul de uzuală. O idee care o transformă într-o inegalitate algebrică. Se ştie, în caz contrar se poate apela la cărțile din domeniul inegalităților geometrice (O. Botema, D.S. Mitrinovič, …), că există $x,y,z>0$ astfel ca $a=y+z;\quad b=z+x;\quad c=x+y$.

Atunci $r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$.

Admițând că $a\leq b\leq c$, atunci $z\leq y\leq x$ şi avem de arătat că $\frac{\sqrt{x+y+z}}{\sqrt{xyz}}>2\left(\frac{1}{z+y}-\frac{1}{x+y}\right)$ pentru orice $x,y,z>0$ cu $z\leq y\leq x$, adică $(y+z)(y+x)\sqrt{x+y+z}>2\sqrt{xyz}(x-z)$ ceea ce este echivalent cu $(xz+y(x+y+z))\cdot\sqrt{x+y+z}>2\sqrt{xyz}(x-z)$, inegalitate care este adevărată deoarece $xz+y(x+y+z)\geq 2\sqrt{xyz}\cdot\sqrt{x+y+z}$ şi $x+y+z>x-z$. În concluzie problema este soluționată.

Deşi nu sunt adeptul problemelor în care apar inegalităţi stricte, trebuie să fim de accord că problema de faţă este o reuşită.

Clasa a XI-a şi clasa a XII-a.

Problema 1967 din revista Mathematics Magazine Nr. 2/2011.
(autori : Ángel Plaza şi César Rodríguez, Las Palmas, Spania)

Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *o funcţie continuă astfel ca* $\int_0^1 f(x)dx=1$ *şi* n *un număr natural nenul. Arătaţi că :*

1. *există* $c_1,c_2,...,c_n\in(0,1)$ *distincte astfel ca* $f(c_1)+f(c_2)+...+f(c_n)=n.$

2. *există* $c_1,c_2,...,c_n\in(0,1)$ *distincte astfel ca* $\frac{1}{f(c_1)}+\frac{1}{f(c_2)}+...+\frac{1}{f(c_n)}=n..$

Soluţie : De remarcat că problema nu este nouă. Prima parte a ei este banală de-a dreptul. A doua parte a constituit, într-o formă mai generală, subiect la etapa finală a Olimpiadei de Matematică din anul 1989, autorul acelei probleme fiind T. Precupanu. În 2004, autorul acestor rânduri a publicat în Recreaţii Matematice, o excelentă revistă care apare la Iaşi, următorul rezultat :

Propoziţia 1. Fie $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ două funcţii care verifică următoarele proprietăţi:

(i) f,g continue pe $[0,1]$;

(ii) f,g derivabile pe $(0,1)$;

(iii) $f(1)\neq f(0)$ şi $g'(x)\neq 0,\forall x\in(0,1)$.

Atunci, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi orice $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n>0$ cu $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=1$, există $x_1,x_2,...,x_n\in(0,1)$ cu $x_1<x_2<...<x_n$ astfel ca $\sum\alpha_i\cdot\frac{g'(x_i)}{f'(x_i)}=\frac{g(1)-g(0)}{f(1)-f(0)}$. Demonstraţia acestui rezultat foloseşte teorema lui Cauchy. În mod cert, problema de mai sus este un caz particular al rezultatului nostru.

O problemă înrudită cu aceasta a apărut în The College Math. Journal cu numărul 956, avându-l ca autor pe Duong Viet Thong, Hanoi, Vietnam, şi al cărei enunţ este următorul:

Dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcţie strict monotonă şi continuă, iar $\int_0^1 f(x)dx=1$, atunci există $\alpha,\beta,\chi\in(0,1), \alpha<\beta<\chi$, astfel ca $f(\alpha)f(\beta)f(\chi)=1$. De fapt, pentru cele două probleme se poate arăta un rezultat de următorul tip.

Dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă, astfel ca $\int_0^1 f(x)dx\neq 0$, atunci pentru orice număr natural nenul n există

a) $x_1<x_2<\ldots<x_n\in(0,1)$ cu $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}=\int_0^1 f(x)dx$.

b) $y_1<y_2<\ldots<y_n\in(0,1)$ cu $f(y_1)\cdot f(y_2)\cdot\ldots\cdot f(y_n)=\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^n$.

c) $z_1<z_2<\ldots<z_n\in(0,1)$ cu $\dfrac{n}{\dfrac{1}{f(z_1)}+\dfrac{1}{f(z_2)}+\ldots+\dfrac{1}{f(z_n)}}=\int_0^1 f(x)dx$.

Asupra unor identități trigonometrice condiționate

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

REZUMAT. *Propunem în nota de față obținerea unor cunoscute identități trigonometrice pe o altă cale decât cea obişnuită, anume folosind proprietăți geometrice ale triunghiului şi astfel poate o modalitate mult mai instructivă sau cel puțin mai atractivă.*

Identitățile despre care este vorba (dealtfel binecunoscute) sunt cele de mai jos:

(1) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$

(2) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$

(3) $\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C = \mathrm{tg}A \cdot \mathrm{tg}B \cdot \mathrm{tg}C$

adică egalități adevărate în orice triunghi ABC (deci $A + B + C = \pi$).

O bună cunoaştere a formulelor trigonometrice şi deprinderea de a le aplica conduce la obținerea acestor identități pe cale “ standard “, aşa cum sunt prezentate, de exemplu, în [1], pag. 205 sau în [3], pag. 196 şi 228 .

În cele ce urmează vom folosi binecunoscuta proprietate geometrică:

Dacă M este un punct în interiorul unui triunghi ABC , iar x , y , z sunt distanțele de la M la laturile acestuia (care au lungimile a , b , respectiv c) , atunci

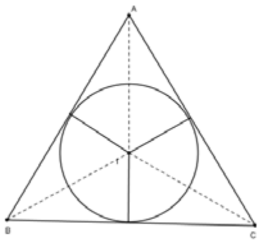
$$(*) \qquad ax + by + cz = 2 \cdot S ,$$

unde S este aria triunghiului .

Particularizând poziția punctului M în relația precedentă vom obține, pe rând, identitățile anunțate:

● Dacă $M = I$ (adică M este centrul cercului înscris), folosind notațiile uzuale, avem evident :

$$x = y = z = r = 4R \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$$



Egalitatea (*) devine succesiv, folosind şi teorema sinusurilor:

$$(a + b + c) \cdot r = 2 \cdot 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$$

sau $8R^2(\sin A+\sin B+\sin C)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=$

$=32R^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

Doar o simplificare conduce acum la identitatea (1). □

● Dacă $M=O$ (centrul cercului circumscris), atunci avem :

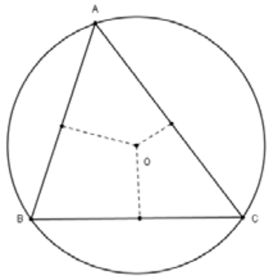
$x=R\cos A, y=R\cos B, z=R\cos C$

Egalitatea (*) conduce astfel la :

$R\left(a\cdot\cos A+b\cdot\cos B+c\cdot\cos C\right)=$

$=4R^2\cdot\sin A\sin B\sin C$,

de unde, cu teorema sinusurilor, obținem imediat identitatea (2). □



● Dacă $M=H$ (ortocentrul triunghiului *ABC*) şi D , E , F sunt picioarele înălțimilor din *A*, *B*, respectiv *C*, avem:

$x=DH=2R\cdot\cos B\cdot\cos C$,

$y=EH=2R\cdot\cos C\cdot\cos A$,

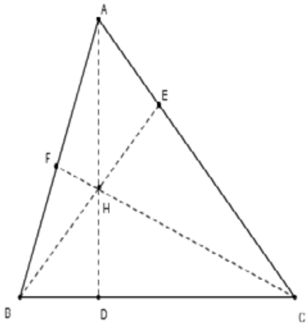
$z=FH=2R\cdot\cos A\cdot\cos B$.

Aceeaşi relație (*) conduce la :

$\sin A\cdot\cos B\cdot\cos C+\sin B\cdot\cos C\cdot\cos A+$

$+\sin C\cdot\cos A\cdot\cos B=\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$

de unde, prin împărțire cu $\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C\neq 0$, ajungem la $\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C=\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{tg}B\cdot\mathrm{tg}C$, adică (3) . □



Bibliografie :

[1] Becheanu Mircea , Enescu Bogdan –Manual pentru clasa a X a , Ed. Teora , 1999

[2] Lalescu Traian – Geometria triunghiului , Ed.Tineretului , 1958

[3] Panaitopol Laurențiu , Bălună Mihai , Enescu Bogdan – Manual pentru clasa a X a , Ed. Gil , 2000

[4] Vodă Viorel Gh. – Vraja geometriei demodate , Ed. Albatros , 1983

Un cadru unitar de rezolvare a unor probleme de geometrie plană – metoda ariilor

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

REZUMAT. *În această lucrare, începută în aprilie 1988, regăsită zilele trecute printre hârtii şi apoi completată, prezentăm câteva probleme frumoase de geometrie plană cu soluții simple bazate pe considerații de arii. Chiar dacă majoritatea problemelor sunt cunoscute şi admit şi alte soluții, dorim să evidențiem astfel eleganța şi eficiența acestei metode în abordarea multor probleme. Am ales în acest sens probleme în al căror enunț* **nu** *apare noțiunea de arie.*

Ca idei esențiale în acest cadru remarcăm:

● Folosirea simultană sau separată a binecunoscutelor formule pentru aria unui triunghi *ABC:*

(1) $2\cdot\mathcal{S}(ABC)=a\cdot h_a=b\cdot h_b=c\cdot h_c$.

(2) $2\cdot\mathcal{S}(ABC)=ab\sin C=bc\sin A=ca\sin B$.

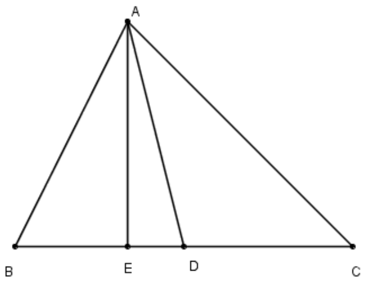
(3) $\mathcal{S}(ABC)=pr$.

(4) $\mathcal{S}(ABC)=\dfrac{abc}{4R}$.

(5) $\mathcal{S}(ABC)=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

(notațiile sunt cele uzuale)

● Descompunerea convenabilă a suprafețelor poligonale şi folosirea proprietății de aditivitate a ariei. De subliniat aici este proprietatea absolut remarcabilă a unei mediane într-un triunghi de a împărți triunghiul în două suprafețe de arii egale.



Într-adevăr, dacă în triunghiul *ABC* avem $AE\perp BC$, $E\in(BC)$ şi

D este mijlocul laturii (BC) $\Rightarrow \mathcal{S}(ABD) = \frac{1}{2} BD \cdot AE = \frac{1}{2} DC \cdot AE = \mathcal{S}(ACD)$.

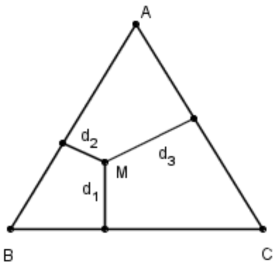
Se poate merge şi mai departe:

Mediana (AD) este locul geometric al punctelor M din interiorul unui triunghi ABC pentru care $\mathcal{S}(ABM) = \mathcal{S}(ACM)$.

○ Cu observaţia că, dacă $\alpha + \beta = 180^o$, atunci $\sin\alpha = \sin\beta$, vă prezentăm problemele promise:

Problema 1. Suma distanţelor de la un punct *M* oarecare din interiorul unui triunghi echilateral *ABC* la laturile acestuia este constantă.

Soluţie:



Dacă d_1, d_2, d_3 sunt distanţele de la M la laturile triunghiului, atunci
$\mathcal{S}(ABC) = \mathcal{S}(MAB) + \mathcal{S}(MBC) + \mathcal{S}(MCA)$,

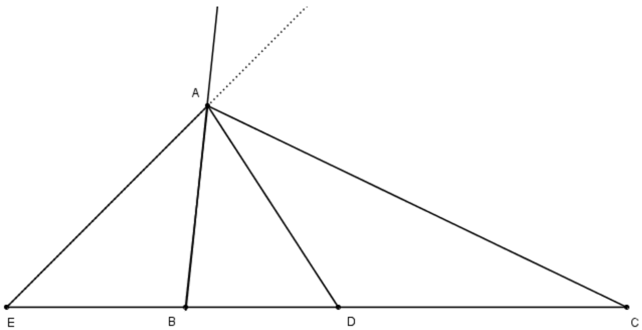
de unde $\mathcal{S}(ABC) = \frac{l}{2} \cdot (d_1 + d_2 + d_3)$ şi

$d_1 + d_2 + d_3 = \frac{2 \cdot \mathcal{S}(ABC)}{l} = \text{const.}$

(evident, l reprezintă lungimea laturii triunghiului echilateral).

Problema 2. Dacă $(AD$ este bisectoarea interioară, iar $(AE$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle BAC$ a unui triunghi ABC, atunci $\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$. (Teorema bisectoarei)

Soluţie:



$$\frac{\mathcal{S}(ABD)}{\mathcal{S}(ADC)}=\frac{AB\cdot AD\cdot\sin\left(\sphericalangle BAD\right)}{AC\cdot AD\cdot\sin\left(\sphericalangle DAC\right)}=\frac{BD\cdot h_a}{DC\cdot h_a}\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}\qquad(1)$$

Pe de altă parte avem:

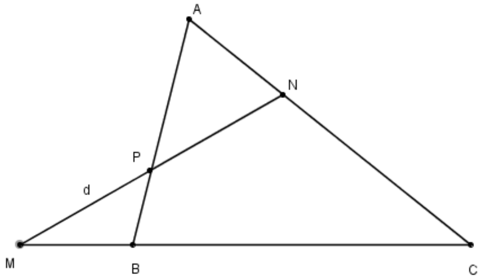
$$\frac{\mathcal{S}(ABE)}{\mathcal{S}(ACE)}=\frac{AB\cdot AE\cdot\sin\left(\sphericalangle BAE\right)}{AC\cdot AE\cdot\sin\left(\sphericalangle EAC\right)}=\frac{EB\cdot d(A,BE)}{EC\cdot d(A,BE)}\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{EB}{EC}\qquad(2)$$

Din (1) şi (2) se obține concluzia dorită.

Problema 3. Dacă *ABC* este un triunghi, iar *d* o dreaptă care nu trece prin niciunul dintre vârfurile acestuia, dar intersectează dreptele *BC*, *CA*, *AB* în *M*, *N*, respectiv *P*, atunci $\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=1.$

(Teorema lui Menelaus)

Soluție:



Soluție:

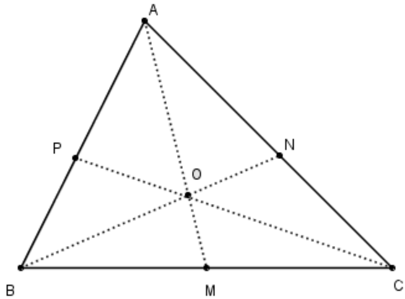
$\frac{\mathcal{S}(ANP)}{\mathcal{S}(BPM)}=\frac{PA\cdot PN\cdot\sin\left(\sphericalangle APN\right)}{PB\cdot PM\cdot\sin\left(\sphericalangle BPM\right)}=\frac{PA\cdot PN}{PB\cdot PM}$.La fel se ajunge la $\frac{\mathcal{S}(BPM)}{\mathcal{S}(CMN)}=\frac{MB\cdot PM}{MC\cdot MN}$ şi $\frac{\mathcal{S}(CMN)}{\mathcal{S}(ANP)}=\frac{NC\cdot MN}{NA\cdot PN}$. Înmulțind membru cu membru cele trei relații anterioare se obține concluzia dorită.

Observație: Reciproca teoremei lui Menelaus oferă un criteriu de coliniaritate a trei puncte, anume: Dacă *ABC* este un triunghi şi

$M \in BC \setminus \{B, C\}, N \in AC \setminus \{A, C\}, P \in AB \setminus \{A, B\}$ astfel încât $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$, atunci punctele *M*, *N*, *P* sunt coliniare.

Problema 4. Dacă *ABC* este un triunghi şi *AM, BN, CP* $(M \in BC, N \in CA, P \in AB)$ **sunt concurente, atunci** $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$. **(Teorema lui Ceva)**

Soluție:



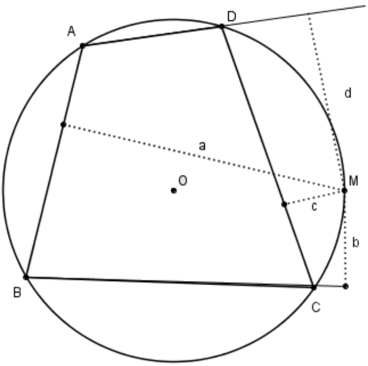
Notăm cu *O* punctul de concurență şi avem (1): $\frac{\mathcal{S}(BOM)}{\mathcal{S}(COM)} = \frac{MB \cdot MO}{MC \cdot MO} = \frac{MB}{MC}$, $\frac{\mathcal{S}(AOP)}{\mathcal{S}(BOP)} = \frac{PA}{PB}$ şi $\frac{\mathcal{S}(CON)}{\mathcal{S}(AON)} = \frac{NC}{NA}$. Pe de altă parte avem (2): $\frac{\mathcal{S}(AOP)}{\mathcal{S}(COM)} = \frac{AO \cdot OP}{CO \cdot OM}$, $\frac{\mathcal{S}(BOM)}{\mathcal{S}(AON)} = \frac{BO \cdot OM}{AO \cdot ON}$ şi $\frac{\mathcal{S}(CON)}{\mathcal{S}(BOP)} = \frac{CO \cdot ON}{BO \cdot OP}$. Prin înmulțirea, membru cu membru, a egalităților din (1), apoi a celor din (2), se ajunge la

$$\frac{\mathcal{S}(BOM) \cdot \mathcal{S}(AOP) \cdot \mathcal{S}(CON)}{\mathcal{S}(COM) \cdot \mathcal{S}(BOP) \cdot \mathcal{S}(AON)} = \frac{MB \cdot PA \cdot NC}{MC \cdot PB \cdot NA} = 1.$$

Observație: Reciproca teoremei lui Ceva oferă un criteriu de concurență a trei ceviene.

Problema 5. Dacă un patrulater este înscris într-un cerc, atunci produsul distanțelor unui punct de pe cerc la două laturi opuse este egal cu produsul distanțelor la celelalte două laturi opuse. (Teorema lui Pappus)

Soluție:



Considerăm patrulaterul inscriptibil *ABCD* din enunț şi *M* punctul de pe cerc ale cărui distanțe la laturile $[AB],[BC],[CD],[DA]$ sunt respectiv a,b,c şi d .

Deoarece $\dfrac{\mathcal{S}(MAB)}{\mathcal{S}(MAD)}=\dfrac{AB\cdot a}{AD\cdot d}=\dfrac{AB\cdot MB\cdot \sin\sphericalangle ABM}{AD\cdot MD\cdot \sin\sphericalangle ADM}$, deducem

$\dfrac{a}{d}=\dfrac{MB}{MD}$ (1) ; pe de altă parte avem şi

$$\frac{\mathcal{S}(MCD)}{\mathcal{S}(MBC)}=\frac{CD\cdot c}{BC\cdot b}=\frac{CD\cdot MD\cdot \sin\sphericalangle MDC}{BC\cdot MB\cdot \sin\sphericalangle MBC}$$

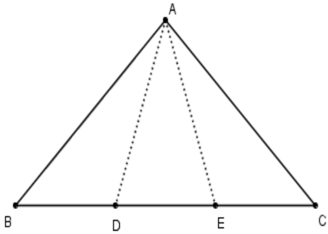
Se ajunge astfel la $\dfrac{c}{b}=\dfrac{MD}{MB}$ (2). Din (1) şi (2) se obține $\dfrac{a}{d}=\dfrac{b}{c}\Rightarrow ac=bd$.

Remarcă: Aşa cum probabil se ştie, se cunosc demonstrații prin considerații de arii şi ale altor teoreme fundamentale ale geometriei plane, cum ar fi teorema lui Pitagora, teorema catetei, teorema înălțimii, teorema lui Pitagora generalizată, teorema lui Steiner, etc.

Problema 6. Se consideră triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$ şi punctele $D, E \in (BC)$ astfel încât $(BD) \equiv (DE) \equiv (EC)$. Demonstrați că $m(\sphericalangle DAB) < m(\sphericalangle EAD)$.

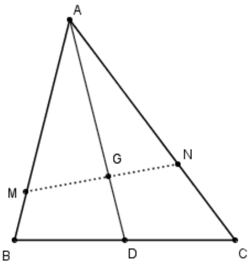
Concurs Arad, 1984

Soluție: Deoarece $(BD) \equiv (DE)$ deducem imediat că $\mathcal{S}(ABD) = \mathcal{S}(ADE)$, de unde $AB \cdot AD \cdot \sin \sphericalangle DAB = AE \cdot AD \cdot \sin \sphericalangle EAD$, adică $AB \cdot \sin \sphericalangle DAB = AE \cdot \sin \sphericalangle EAD$. Deoarece $\Delta ABD \equiv \Delta ACE$ se ajunge la $(AD) \equiv (AE)$ şi, din construcție, $AB > AD$, de unde $AB > AE$.
Se obține astfel $\sin \sphericalangle DAB < \sin \sphericalangle EAD$, deci $m(\sphericalangle DAB) < m(\sphericalangle EAD)$.



Problema 7. Pe laturile $[AB],[AC]$ se consideră punctele *M*, respectiv *N* astfel încât $\frac{MB}{AM} + \frac{NC}{AN} = k$. Arătați că dreapta *MN* trece prin centrul de greutate al triunghiului *ABC* dacă şi numai dacă $k = 1$.

Soluție: Reamintim faptul că, dacă AD este mediană, atunci $\mathcal{S}(ABD) = \mathcal{S}(ACD)$. Notând $AD \cap MN = \{G\}$, ne propunem să studiem în ce condiții avem $\frac{AG}{AD} = \frac{2}{3}$.



Avem imediat $\frac{2\mathcal{S}(AGN)}{\mathcal{S}(ABC)} = \frac{AG \cdot AN}{AD \cdot AC}$ şi $\frac{2\mathcal{S}(AGM)}{\mathcal{S}(ABC)} = \frac{AG \cdot AM}{AD \cdot AB}$;

totodată avem şi $\frac{\mathcal{S}(AMN)}{\mathcal{S}(ABC)} = \frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC}$. Evident însă că este adevărată egalitatea $\frac{2\mathcal{S}(AMN)}{\mathcal{S}(ABC)} = \frac{2\mathcal{S}(AGN)}{\mathcal{S}(ABC)} + \frac{2\mathcal{S}(AGM)}{\mathcal{S}(ABC)}$ de unde, ținând cont de egalitățile anterioare, deducem:

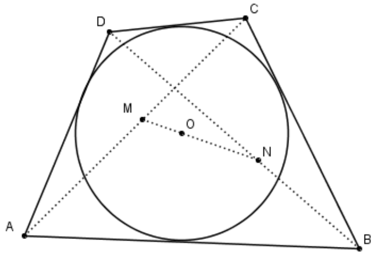
$$\frac{2AM \cdot AN}{AB \cdot AC} = \frac{AG \cdot AN}{AD \cdot AC} + \frac{AG \cdot AM}{AD \cdot AB} = \frac{AG}{AD}\left(\frac{AN \cdot AB + AM \cdot AC}{AB \cdot AC}\right).$$

Deducem acum $\dfrac{AG}{AD}=\dfrac{2AM\cdot AN}{AN\cdot AB+AM\cdot AC}=\dfrac{2}{\dfrac{AB}{AM}+\dfrac{AC}{AN}}$; în aceste condiții avem $\dfrac{AB}{AM}+\dfrac{AC}{AN}=3$ sau $\dfrac{AM+MB}{AM}+\dfrac{AN+NC}{AN}=3 \Leftrightarrow k+2=3$ şi deci G este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă şi numai dacă $k=1$.

Problema 8. Se consideră un patrulater convex *ABCD* circumscris unui cerc $\mathcal{C}(O,r)$. Arătați că mijloacele diagonalelor patrulaterului şi cu *O* sunt coliniare.

Soluție: Cazul în care toate laturile opuse sunt paralele este trivial (patrulaterul este romb); vom studia astfel cazul în care există două laturi opuse neparalele.

Fie *M* şi *N* mijloacele diagonalelor *[AC],* respectiv *[BD]*.



Putem evident scrie

$$\mathcal{S}(AMB)+\mathcal{S}(CMD)=\frac{1}{2}\mathcal{S}(ABC)+\frac{1}{2}\mathcal{S}(ACD)=\frac{1}{2}\mathcal{S}(ABCD).$$

Analog: $\mathcal{S}(ANB)+\mathcal{S}(CND)=\dfrac{1}{2}\mathcal{S}(ABCD)$; ne propunem să arătăm că avem şi $\mathcal{S}(AOB)+\mathcal{S}(COD)=\dfrac{1}{2}\mathcal{S}(ABCD) \quad (*)$.

Într-adevăr, din egalitatea tangentelor duse din vârfuri, obținem $AB+CD=BC+AD$ (relație ce caracterizează patrulaterele circumscriptibile), de unde avem:

$$\mathcal{S}(AOB)+\mathcal{S}(COD)=\frac{1}{2}r\cdot AB+\frac{1}{2}r\cdot CD=$$

$$=\frac{1}{2}r\left(AB+CD\right)=\frac{1}{2}r\left(BC+AD\right)=\mathcal{S}(BOC)+\mathcal{S}(AOD)$$

şi astfel rezultă egalitatea $(*)$.

În sfârşit, să mai arătăm că locul geometric al punctelor L cu proprietatea $\mathcal{S}(ALB)+\mathcal{S}(CLD)=\frac{1}{2}\mathcal{S}(ABCD)$ (**) este o dreaptă (ceea ce ar conduce la coliniaritatea punctelor *M, O, N*). Fie $AB\cap CD=\{P\}$ (*AB* şi *CD* fiind laturile presupuse neparalele) şi $Q\in PA, R\in PD$ astfel încât $PQ=AB, PR=CD$. Rezultă $2\mathcal{S}(PQL)=PQ\cdot d(L,PA)=AB\cdot d(L,PA)=2\mathcal{S}(ABL)$, deci $\mathcal{S}(PQL)=\mathcal{S}(ABL)$; analog se ajunge la $\mathcal{S}(PRL)=\mathcal{S}(CDL)$. Fie acum *L* care îndeplineşte condiția (**). Cum însă, conform celor anterioare, avem $\mathcal{S}(PLQ)+\mathcal{S}(PLR)=\mathcal{S}(ALB)+\mathcal{S}(CLD)=$ $=\mathcal{S}(PQLR)=\mathcal{S}(PQR)+\mathcal{S}(LQR)$, rezultă $\mathcal{S}(LQR)=\frac{1}{2}\mathcal{S}(ABCD)-\mathcal{S}(PQR)=$constant; deoarece *Q* şi *R* sunt puncte fixe, obținem că punctul *L* se deplasează pe o dreaptă paralelă cu QR care trece deci prin *O, M, N.*

Bibliografie:
[1] Bogdan Enescu – Arii, Editura Gil, 2006
[2] M.E. Panaitopol, L. Panaitopol – Probleme calitative de geometrie plană, Editura Gil, 1996
[3] Ion Pătraşcu – Probleme de geometrie plană, Ed. Cardinal, 1996
[4] S. POpa, M. Pimsner – Probleme de geometrie elementară, EDP, 1979
[5] Viorel Gh. Vodă – Vraja geometriei demodate, Ed. Albatros, 1983

Metoda reducerii la absurd (I)

Ovidiu Bădescu, Lucian Dragomir

REZUMAT: *Această notă este o încercare de a prezenta diverse probleme şi soluțiile lor folosind o metodă de demonstrație foarte cunoscută elevilor mai mari,metodă care utilizează un rezultat important al logicii matematice.*

Încă din clasele mici ne întâlnim cu probleme *de demonstrat* în care ni se dă o afirmație, o propoziție adevărată p (care constituie *ipoteza)* şi trebuie să demonstrăm (să arătăm, să dovedim) că o altă propoziție q (numită *concluzie*) este adevărată. O importantă clasă de astfel de probleme se poate aborda cu succes folosind metoda anunțată; aceasta constă, pe scurt, în: presupunem că propoziția q este falsă şi, printr-un şir de raționamente logice, ajungem la o contradicție cu afirmația p sau cu un adevăr matematic cunoscut. În concluzie, presupunerea făcută este falsă, deci propoziția q este adevărată.

Nu insistăm aici cu justificarea logică a metodei, vom trece la câteva exemple, credem sugestive, nu înainte de a cita din DEX: *Reducere la absurd = metodă de demonstrare a unui adevăr, arătând că punctul de vedere contrar duce la absurd (adică ceva care contrazice gândirea logică, care nesocoteşte legile naturii şi ale societății, contrar bunului simț).*

E_1. **Suma a zece numere naturale nenule este 54. Arătați că printre aceste numere se află cel puțin două egale.**

Soluție: Presupunem că ar exista zece numere naturale nenule diferite cu suma 54; dacă luăm pe cele mai mici, suma lor este $S = 1 + 2 + 3 + ... + 10 = 55$. Deoarece suma aceasta este mai mare decât suma din enunț, adică 54, rezultă că presupunerea făcută este falsă, aşadar printre numerele considerate există cel puțin două egale.

E_2. **Suma a zece numere naturale nenule distincte este 108. Arătați că printre aceste numere se află cel puțin două numere impare.**

Soluție: Presupunem că toate cele zece numere naturale nenule sunt numere pare. Dacă le luăm pe cele mai mici dintre acestea, atunci suma lor este egală cu $S = 2+4+6+...+20 = 110$, ceea ce însă contrazice ipoteza. Deducem că printre cele zece numere există cel puțin unul impar; dacă însă unul singur este impar, atunci suma tuturor celor zece numere este un număr impar. Cum suma este 108, rezultă că de fapt cel puțin două numere sunt impare.

E_3. **Arătați că nu există numere naturale care împărțite la 5 să dea restul 1, iar împărțite la 10 să dea restul 5.**

Soluție: Presupunem că există un număr natural n astfel încât $n = 5q+1,\ q \in \mathbb{N}$ şi $n = 10p+5,\ p \in \mathbb{N}$. Am ajunge astfel la $5q+1 = 5(2p+1)$, egalitate evident (!) absurdă, aşadar presupunerea făcută este falsă şi problema este rezolvată.

E_4. **Demonstrați că nu există numere naturale nenule x şi y astfel încât $2007 \cdot x + 2008 \cdot y = 2007 \cdot 2008$.**

Soluție: Presupunem că există numere care verifică egalitatea din enunț; deducem astfel imediat: $2008 \cdot y = 2007 \cdot 2008 - 2007 \cdot x$ sau $2008 \cdot y = 2007 \cdot (2008 - x)$. Rezultă de aici că 2007 divide numărul y (2007 şi 2008 sunt prime între ele), aşadar $y = 2007 \cdot k,\ k \in \mathbb{N}^*$. Se ajunge acum imediat la $2008 \cdot k = 2008 - x$, ceea ce este imposibil deoarece în membrul stâng al egalității avem un număr mai mare sau egal cu 2008, pe când în cel drept avem evident unul mai mic decât 2008. Aşadar presupunerea făcută nu poate fi acceptată, deci concluzia dorită este adevărată.

E_5. **Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul *n*, numerele $a_n = 2n-1$ şi $b_n = 2n+1$ sunt prime între ele.**

Soluție: Presupunem că există
$(2n-1, 2n+1) = d \geq 2 \Rightarrow d \mid (2n+1-2n+1) = 2 \Rightarrow d = 2,$ absurd, deoarece $2n+1$ este impar. Numerele a_n şi b_n sunt aşadar prime între ele pentru orice număr natural nenul n.

E_6. **Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul n, numărul $\sqrt{n+\sqrt{n}}$ este irațional.**

Soluție: Presupunem, prin reducere la absurd, că $\sqrt{n+\sqrt{n}} = a \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow a \in \mathbb{N}^*$ şi $\sqrt{n} = a^2 - n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n = m^2,\ m \in \mathbb{N}^*,$ de unde: $m^2 + m = a^2 \Rightarrow 4m^2 + 4m + 1 = 4a^2 + 1,$ apoi $(2m+1-2a)(2m+1+2a) = 1 \Rightarrow 2m+1-2a = 2m+1+2a = 1 \Rightarrow a = 0,$ contradicție.

E_7. **Demonstrați că un poligon convex nu poate avea decât cel mult trei unghiuri ascuțite.**

Soluție: Se ştie (!) că suma măsurilor unghiurilor interioare ale unui poligon cu n laturi este $S_n = 180^o \cdot (n-2) \Rightarrow$ suma măsurilor unghiurilor exterioare este $n \cdot 180^o - S_n = 360^o.$ Dacă prin absurd, poligonul ar avea cel puțin 4 unghiuri ascuțite, am aveam 4 unghiuri exterioare obtuze, cu suma mai mare decât 360^o. Contradicție.

E_8. **Arătați că nu există niciun triunghi în care lungimile înălțimilor sunt egale cu 1, 2, respectiv 3.**

Soluție: Presupunem că există un astfel de triunghi, cu lungimile laturilor *a*,*b*,*c*. Aria sa se poate exprima atunci astfel: $S = \frac{a \cdot 1}{2} = \frac{b \cdot 2}{2} = \frac{c \cdot 3}{2} \Rightarrow b + c = \frac{a}{2} + \frac{a}{3} < a,$ absurd!

E_9. **Demonstrați că nu există niciun poliedru cu 7 muchii.**

Soluție: Prin absurd presupunem că există un poliedru cu 7 muchii şi astfel toate fețele sunt triunghiulare. Într-adevar, dacă ar exista o față cu m muchii, $m \geq 4,$ deoarece din fiecare vârf al acestei fețe mai pleacă cel puțin încă o muchie, numărul muchiilor ar fi cel puțin 8, contradicție!

Dacă n este numărul fețelor, numărul muchiilor este $\frac{3n}{2}=7$ (deoarece fiecare față are 3 muchii şi fiecare muchie aparține la două fețe) $\Rightarrow n=\frac{14}{3}$, absurd!

E_{10}. **Pot fi aşezate numerele naturale 1, 2, 3, ..., 20 în vârfurile şi în mijloacele muchiilor unui cub astfel încât numerele situate în mijloacele muchiilor să fie egale cu semisuma numerelor situate la extremitățile acelei muchii ?**

Soluție: Răspunsul este negativ. Presupunând că este posibil, ar trebui ca numerele situate pe vârfuri vecine să aibă aceeaşi paritate (semisuma lor fiind un număr întreg), deci toate numerele situate în vârfuri au aceeaşi paritate. Numerele 1 şi 20 nu pot fi semisume pentru nicio pereche de numere din $\{1,2,...,20\}$, deci trebuie să fie situate în vârfuri; ele sunt însă de parități diferite!. Concluzia credem că este imediată !

Remarcă: După cum ați observat din titlu, aceasta este o primă încercare în paginile revistei noastre asupra temei. Vă invităm să continuați cu partea a II-a ! (elevi, profesori, orice om de fapt pasionat de matematică, deci de căutări).

Bibliografie selectivă:
[1] Eduard Dăncilă, Ioan Dăncilă – Matematica pentru învingători, clasele V – VI , Editura Erc Press, 2008
[2] Lucian Dragomir, Adriana Dragomir, Ovidiu Bădescu – Probleme de matematică pentru clasa a IX – a , Editura Paralela 45, 2012
[3] Ion Vîrtopeanu, Olimpia Vîrtopeanu – Metode de rezolvare a problemelor de aritmetică elementară, Editura Sitech, 1998

Probleme rezolvate din RMCS nr. 38

Clasa a V-a

V. 235 a) Suma a cinci numere naturale, diferite, este egală cu 10. Determinați produsul acestor numere.

b) Suma unor numere naturale este egală cu 12. Ştiind că produsul lor este egal tot cu 12, determinați aceste numere

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Soluție :

a) Dacă vom calcula suma primelor cinci numere naturale , obținem $a=\dfrac{b-3}{2b-1}\in\mathbb{Z}$. Oricare alte cinci numere dau o sumă mai mare decât 10; deci, cele cinci numere, trebuie să fie : 0, 1, 2, 3, 4.

Deducem că produsul lor este egal cu 0, unul dintre factori fiind 0.

b) Ştiind că $2a\in\mathbb{Z}$ sau $\left(1-\dfrac{5}{2b-1}\right)\in\mathbb{Z}$ sau $12=2\cdot 2\cdot 3$, vom avea următoarele cazuri :

1) $12=2+6+\underbrace{1+\cdots+1}_{4\ termeni}=2\cdot 6\cdot\underbrace{1\cdot\ldots\cdot 1}_{4\ factori}$; deci, numerele sunt : 2, 6, $\underbrace{1,\ldots,1}_{4\ numere}$

2) $12=3+4+\underbrace{1+\ldots+1}_{5\ termeni}=3\cdot 4\cdot\underbrace{1\cdot\ldots\cdot 1}_{5\ factori}$; deci, numerele sunt ; 3, 4, $\underbrace{1,\ldots,1}_{5\ numere}$

3) 12=..............

V. 236 Determinați numărul x cu proprietatea că, în sistemul zecimal, este adevărată egalitatea $x^4=\overline{1aabaab}$.

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

Soluție: Cum $31^4=923521$ şi $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{p(p-a)}\cdot\sqrt{(p-b)(p-c)}<$, rezultă $\dfrac{p+p-a}{2}\cdot\dfrac{p-b+p-c}{2}=\dfrac{(b+c)a}{4}$; Calcule nu foarte complicate conduc la $p\neq p-a$

V. 237 La un concurs de matematică au participat 100 de elevi. Concurenților li s-au propus spre rezolvare patru probleme. După evaluarea lucrărilor, s-a constatat că 85 de elevi au rezolvat corect prima problemă, 80 de elvi au rezolvat corect a doua problemă, 75 de elvi au rezolvat corect a treia problemă şi 70 a patra. E adevărat că există 10 elevi care au rezolvat corect toate cele patru probleme ?

Ioan Dăncilă, Bucureşti

Soluție : 10 elevi **nu** au rezolvat corect prima problemă, 15 elevi **nu** au rezolvat a doua problemă, 20 **nu** au rezolvat a treia problemă şi 25 **nu** au rezolvat ultima problemă ; aşadar maxim 90 de elevi **nu** au rezolvat câte o problemă, deci cel puțin $S<\frac{(c+a)b}{4}, S<\frac{(a+b)c}{4}$ de elevi au rezolvat corect toate problemele.

V. 238 Suma unor numere naturale consecutive este egală cu 42. Aflați numerele.

OL Caraş – Severin, 1986

Soluție: $a+(a+1)+(a+2)+...+(a+n)=(n+1)a+\frac{n(n+1)}{2}=42$. Din $\frac{n(n+1)}{2}\leq 42$ deducem $n\leq 8$; se analizează imediat cazurile posibile şi se ajunge la mai multe soluții ale problemei : $\{13.14,15\}$, $\{9,10,11,12\}$ şi $\{3,4,5,6,7,8,9\}$.

V. 239 Arătați că, dacă n este un număr natural par nenul, atunci numărul $A=3^n+63$ este divizibil cu 72.

OL Caraş – Severin, 1995

Soluție : $A=3^{2^k}+63=9^k+63=9\cdot\left(9^{k-1}+7\right)$ sau

$A=9\cdot\left[\left(8+1\right)^{k-1}+8-1\right]=9\cdot\left(8m+1+8-1\right)=72(m+1), m\in\mathbb{N}$.

V. 240 Găsiți două numere naturale a căror sumă este egală cu 234, ştiind că unul dintre ele este egal cu produsul cifrelor celuilalt.

OJ Caraş – Severin, 2001

Soluție : Trebuie să remarcăm pentru început că numerele nu pot fi decât : unul de trei cifre, celălat de două cifre (Justificare !). Aşadar : $\overline{abc}+\overline{de}=234$. Cum $d\cdot e\leq 81$, avem doar posibilitatea $a\cdot b\cdot c=\overline{d}$ ‹. Obținem astfel $100a+10b+c+10d+e=234$, $abc=10d+e$, de unde $a=2,10(b+d)+c+e=34$. Deducem că $2\leq b+d\leq 3$, de unde ajungem la câteva cazuri posibile ; în final, numerele căutate sunt 218 şi 16 sau 178 şi 56, precum şi 186 , 48.

Clasa a VI-a

VI. 235 Într-un triunghi dreptunghic, măsura unui unghi este de patru ori mai mare decât măsura altui unghi. Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Soluție :Fie triunghiul *ABC* cu $A=90^o$.

Vom deosebi două cazuri : a) $A=4B \Rightarrow 90^o=4B \Rightarrow$

$B=\dfrac{90^o}{4}=22^o30'$. Din $B+C=90^o \Rightarrow C=90^o-22^o30'=67^o30'$

Deci măsurile unghiurilor triunghiului sunt : 90^o ; $22^o30'$; $67^o30'$
Acelaşi rezultat îl obținem dacă vom considera $A=4C$.

b) $B=4C$. Din $B+C=90^o$, $\Rightarrow 4C+C=90^o \Leftrightarrow 5C=90^o \Leftrightarrow$

$C=\dfrac{90^o}{5}=18^o \Rightarrow B=4\cdot 18^o=72^o$. Deci, măsurile unghiurilor triunghiului sunt : 90^o ; 72^o ; 18^o . Acelaşi rezultat îl obținem dacă vom considera $C=4B$.

VI. 236 Determinați mulțimile A şi B de numere naturale nenule care verifică simultan proprietățile:

a) pentru orice $a,b\in A\Rightarrow(a+b)\in B$.
b) $A\cap B=\{2,3\}$.
c) $card\left(A\right)=3$.
d) elementele mulțimii B sunt mai mici decât 14.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: $2\in A\Rightarrow(2+2)=4\in B$; $3\in A\Rightarrow(3+3)=6\in B$ şi $(2+3)=5\in B$; aşadar $\{2,3,4,5,6\}\subset B$. Dacă $4\in A$, cum $4\in B\Rightarrow 4\in A\cap B$, contradicție cu b). La fel se ajunge la $5\notin A, 6\notin A$.

Dacă $x\in A, x\geq 7\overset{a)}{\Rightarrow}(x+x)=2x\in B$, dar $2x\geq 14$, contradicție cu d). Avem aşadar , folosind c), că $\mathbb{Z}$ (care verifică astfel şi a)). În final avem $A=\{1,2,3\}, B_1=\{2,3,4,5,6\}\subseteq B$. Aşadar o soluție este perechea de mulțimi (A,B_1); pentru mulțimea B avem evident mai multe posibilități, respectând condiția d). Puteți determina câte soluții are problema ?

VI. 238 Determinați numerele naturale x şi y ştiind că sunt verificate simultan condițiile:

a) $\overline{yx}-\overline{xy}$ este pătrat perfect;

b) $3y^2-7\cdot 2^x=19$.

Prof. Alfred Eckstein, Prof. Viorel Tudoran, Arad

Soluție: Prima condiție conduce la $9(y-x)=k^2$, deci $y-x\in\{1,4,9\}$. Pe de altă parte, avem, notând cu $u(n)$ ultima cifră a numărului n:

$u(3y^2)\in\{2,3,5,7,8\}$, $u\left(7\cdot 2^x\right)\in\{2,4,6,8\}$, de unde

$u\left(19+7\cdot 2^x\right)\in\{1,3,5,7\}$. Analizăm imediat cazurile posibile şi ajungem la $y=9, x=5$.

VI. 239 Determinați numerele a,b,c ştiind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

1) $\overline{abc}$ este cub perfect;

2) numărul $\overline{23abc}$ este divizibil cu 7.

Prof. Alfred Eckstein, Prof. Viorel Tudoran, Arad

Soluție: $\overline{23abc}=17\cdot 1353+\overline{abc}-1$ şi $\overline{abc}\leq 998=17\cdot 58+12$ conduc la $\dfrac{\overline{abc}-12}{17}\leq 58$, de unde $\overline{abc}\in\{216,420,624,828\}$. Folosind condiția (1) deducem $a=2, b=1, c=6.$ Acestea nu verifică însă condiția din enunț, deci nu există numere care verifică enunțul !

VI. 240 Determinați numerele naturale n pentru care $\frac{4}{15}<\frac{n}{10}<\frac{11}{12}$ şi $\frac{2}{7}<\frac{3}{n}<\frac{4}{9}$.

OJ Caraş – Severin, 1991 (enunț modificat)

Soluție: $\frac{16}{60}<\frac{6n}{60}<\frac{55}{60}\Rightarrow n\{3,4,5,6,7,8,9\}$ şi $\frac{12}{42}<\frac{12}{4n}<\frac{12}{27}$, de unde $n\in\{7,8,9,10\}$ şi astfel, în final, avem $n\in\{7,8,9\}$.

Clasa a VII-a

VII. 236 Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația :

$$\frac{x+14}{3}+\frac{x+35}{10}+\frac{x+56}{17}+...+\frac{x+140}{45}=21.$$

Prof. Constantin Apostol, Rm. Sărat

Soluție : Fără dificultate, stabilim că în membrul stâng sunt şapte termeni. Ecuația se scrie, echivalent, astfel ;

$$\frac{x+14}{3}-3+\frac{x+35}{10}-3+\frac{x+56}{17}-3+...+\frac{x+140}{45}-3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+14-9}{3}+\frac{x+35-30}{10}+\frac{x+56-51}{17}+...+\frac{x+140-135}{45}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+5}{3}+\frac{x+5}{10}+\frac{x+5}{17}+...+\frac{x+5}{45}=0 \Leftrightarrow$$

$(x+5)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+...+\frac{1}{45}\right)=0$. Deoarece al doilea factor este nenul deducem că $x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$.

VII. 237 Salariul mediu lunar al unei categorii de muncitori dintr-o întreprindere, pe cele 4 trimestre ale anului 2011, a fost de 850, 910, 930, respectiv 980 lei/lună, iar fondul total de salarii corespunzător celor 4 trimestre a fost de 170 000, 227 500,
241 800, respectiv 284 200 lei/trimestru.

Calculați salariul mediu lunar al unui muncitor de la acea întreprindere în cursul anului 2011.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: Salariul căutat este $s = \dfrac{\text{fondul de salarii anual}}{\text{nr.de salariati}}$, adică
$s = \dfrac{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}{\dfrac{s_1}{l_1} + \dfrac{s_2}{l_2} + \dfrac{s_3}{l_3} + \dfrac{s_4}{l_4}}$, unde s_k reprezintă fondul de salarii din trimestrul k, iar l_k salariul lunar mediu al unui muncitor în trimestrul k. Se ajunge astfel la $s = 923,5$ lei/lună.

VII. 238 Două oraşe A şi B sunt situate la 10 km, respectiv 20 km de un râu care poate fi considerat o dreaptă d, iar proiecția segmentului $[AB]$ pe dreapta d are lungimea de 48 km. Cele două oraşe trebuie alimentate cu apă de la o uzină care urmează a fi construită pe marginea râului. Determinați poziția de amplasare a uzinei astfel încât costul construcției conductelor care vor lega oraşele de uzină să fie minim.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: Notăm cu C şi D proiecțiile pe d ale punctelor A şi B, iar cu $U \in (CD)$ poziția uzinei de apă. Dacă $AC = a, BD = b, CD = c$ şi $CU = x$, considerând E simetricul lui A față de CD, avem:
$AU + BU = EU + BU$; aceasta este minimă dacă E, U, B sunt coliniare.
Deoarece $\Delta CEU \sim \Delta DBU$, avem $\dfrac{CE}{DB} = \dfrac{CU}{DU}$ sau
$\dfrac{AC}{DB} = \dfrac{CU}{DU} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{x}{c-x}$, de unde $x = \dfrac{ac}{a+b} = 16(km)$. Aşadar, uzina trebuie construită pe marginea râului, la 16 km de proiecția lui A pe d.

VII. 239 a) Dați un exemplu de numere $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care $(a + b - 2ab) \in \mathbb{Z}$.

b) Determinați perechile (a, b) de numere întregi pentru care $a + b - 2ab = 3$.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

Soluție: a) Este dificil, credem, să „nimerim” direct o pereche de astfel de numere; fixăm aşadar unul dintre ele, de exemplu $a = \dfrac{1}{5}$ şi impunem,

pentru a oferi un exemplu „bun”, ca rezultatul $a+b-2ab$ să fie egal , de exemplu, cu 3; ajungem imediat la $b=\frac{14}{3}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$. Un astfel de exercițiu e chiar nimerit pentru un test, mai ales că e greu de crezut că mulți elevi (dintre cei care au înțeles ce trebuie să facă) vor găsi acelaşi exemplu. b) se ajunge imediat la $a=\frac{b-3}{2b-1}\in\mathbb{Z}$; o condiție necesară, nu şi suficientă, este $2a\in\mathbb{Z}$, de unde $\left(1-\frac{5}{2b-1}\right)\in\mathbb{Z}$, apoi $(2b-1)\in\{-5,-1,1,5\}$. Se obține astfel $b\in\{-2,0,1,2\}$; corespunzător obținem valorile lui a ; după verificări necesare, se ajunge la perechile cerute:
$(a,b)\in\{(1,-2),(3,0),(-2,1)\}$.

VII. 240 Se notează cu S aria oricărui triunghi cu lungimile laturilor a,b,c . Demonstrați că $S<\frac{ab+bc+ca}{6}$.

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

Soluție: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{p(p-a)}\cdot\sqrt{(p-b)(p-c)}<\frac{p+p-a}{2}\cdot\frac{p-b+p-c}{2}=\frac{(b+c)a}{4}$; inegalitatea este stictă deoarece $p\neq p-a$. Analog se arată că $S<\frac{(c+a)b}{4},S<\frac{(a+b)c}{4}$. Adunând, membru cu membru, aceste trei inegalități, se ajunge la inegalitatea propusă.

Clasa a VIII-a

VIII. 235 Determinați numerele naturale n de două cifre pentru care fiecare dintre numerele $\left[\frac{n}{4}\right]$ şi $\left[\frac{4n+25}{7}\right]$ este un număr natural format din două cifre egale .

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție : $10 \le n \le 99 \Rightarrow \left[\frac{n}{4}\right] \in \{11;22\}$ şi, pe de altă parte,

$\left[\frac{4n+25}{7}\right] \in \{11;22;33;44;55\}$

Se analizează imediat cazurile posibile şi se ajunge la $n \in \{90,91\}$.

VIII. 236 Determinați perechile (x, y) de numere întregi pentru care $x^2 - y^2 = 26 - x$.

Prof. Alfred Eckstein, Prof. Viorel Tudoran, Arad

Soluție: Prin înmulțirea cu 4 a ecuației date ajungem la $2y^2 - (2x+1)^2 = 103$ sau $(2y-2x-1)(2y+2x+1) = 103$. Deosebim astfel mai multe cazuri, primul fiind $\begin{cases} 2y+2x+1=103 \\ 2y-2x-1=1 \end{cases}$, cu soluția $(x, y) = (25, 26)$; se ajunge analog la $(x, y) \in \{(-26,26);(-26,-26);...\}$.

VIII. 237 Pentru orice număr întreg n se notează $F(n) = n^2 + n + 1$ şi $G(n) = n^3 + 2n^2 + 2n + 4$.

a) Determinați numerele n pentru care $\sqrt{F(n)} \in \mathbb{Q}$.

b) Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care $\frac{G(n)}{F(n)} \in \mathbb{N}$.

Prof. Alfred Eckstein, Prof. Viorel Tudoran, Arad

Soluție: a) $n^2 < n^2 + n + 1 \le n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$; $n \in \{-1;0\}$; b)

$\frac{G(n)}{F(n)} = \frac{(n^2+n+1)(n+1)+3}{n^2+n+1}$ şi astfel ajungem la

$\frac{3}{n^2+n+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \{0,1\}$.

VIII. 238 Arătați că, dacă $x, y, z \in (0, +\infty)$ şi $x + y + z = 19$, atunci $\frac{9}{x} + \frac{49}{y} + \frac{81}{z} \geq 19$.

Prof. Alfred Eckstein, Prof. Viorel Tudoran, Arad

Soluția autorilor:

$(x-3)^2 \geq 0 \Rightarrow 9 - 6x + x^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{9}{x} \geq 6 - x$. Analog se ajunge la $\frac{49}{y} \geq 14 - y$ şi $\frac{81}{z} \geq 18 - z$; prin însumarea celor trei inegalități se ajunge la cea propusă.

Soluție a II-a: Folosind inegalitatea Cauchy – Schwarz avem:

$$\left(\frac{3}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} + \frac{7}{\sqrt{y}} \cdot \sqrt{y} + \frac{9}{\sqrt{z}} \cdot \sqrt{z}\right)^2 \leq \left(\frac{9}{x} + \frac{49}{y} + \frac{81}{z}\right) \cdot (x + y + z) \text{ şi}$$

finalizarea este imediată.

VIII. 239 Se consideră mulțimile $A = \{0, 1, 2, 3, ..., 50\}$ şi $B = \{-1, 0, 1\}$.

a) Determinați câte funcții se pot defini pe A cu valori în B.

b) Dați un exemplu de funcție neconstantă $f : A \to B$ pentru care $f(1) + f(2) = 0$ şi $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + ... f(50) = 0$.

c) Arătați că, dacă $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot ... \cdot f(50) \neq 0$, atunci $f(0) + f(1) + f(2) + ... + f(50) \neq 0$.

OL CS 1986, enunț modificat

Soluție: a) Cum fiecare dintre numerele $f(0), f(1), f(2), ..., f(50)$ poate lua oricare dintre cele 3 valori din codomeniu, folosind principiul produsului, obținem că numărul cerut este 3^{51};

b) $f(0) = 0, f(2k+1) = -1, f(2k) = 1$ … sau orice alt exemplu corect… să zicem, $f(0) = 0, f(1) = -1, f(2) = 1,$ în rest, $f(k) = 0, \forall k = \overline{3, 50}$.

c) ipoteza conduce la concluzia că $f(0), f(1), f(2), ... f(50) \in \{-1, 1\}$. O sumă cu un număr impar de termeni, numerele fiind impare, este un număr impar, deci nu poate fi egală cu 0.

VIII. 240 Pentru orice $a,b\in\mathbb{R}, a>b,$ se notează $F(a,b)=\dfrac{a^2+b^2}{a-b}.$

a) Determinați numerele întregi x pentru care $F(x,1)\in\mathbb{Z}.$

b) Arătați că, dacă $a\cdot b=1$, atunci $F(a,b)\geq 2\sqrt{2}.$

OL Caraş – Severin , 1997, enunț modificat

Soluție:

a) $F(x,1)=\dfrac{x^2+1}{x-1}=\dfrac{x^2-1+2}{x-1}=x+1+\dfrac{2}{x-1},$ cu $x>1$;

din $(x-1)\in\{-2,-1,1,2\}$ şi $x>1$ ajungem la $x\in\{2;3\}$. Verificare ? b) După calcule foarte abil conduse , inegalitatea propusă este echivalentă cu $\left(a-b+\sqrt{2}\right)^2\geq 0.$

Clasa a IX-a

IX. 205 Pentru $k, j\in\mathbb{Z}$ se consideră mulțimile

$A(k)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+2x+3k=0\right\}$ şi $B(j)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-4x-5j=0\right\}.$

Arătați că, pentru orice număr întreg m , mulțimea $A(m)\cup B(m)$ are cel mult trei elemente.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

Soluție: $\Delta_A=4-12m\geq 0\Leftrightarrow m\leq\dfrac{1}{3}$ şi $\Delta_B=16+20m\geq 0\Leftrightarrow m\geq-\dfrac{4}{5}$.

Pentru $m\in\mathbb{Z}, m\leq -1$, A are două elemente, iar $B=\varnothing$, pentru $m=0$ avem $A(0)\cup B(0)=\{-2,0,4\}$, iar pentru $m\in\mathbb{Z}, m\geq 1$, avem $A=0, card(B)=2.$

IX. 206 Se consideră un paralelogram $ABCD$ şi punctele M, N pentru care $\overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{DN}=p\cdot\overrightarrow{NM}$. Determinați numerele naturale k şi p pentru care punctele A, N, C sunt coliniare.

Prof. Ovidiu Bădescu, Reşița, Caraş – Severin

Soluție: $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{p+1}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{p}{p+1}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{1}{p+1}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{p}{p+1}\cdot\frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}$;

deoarece $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$, se ajunge la condiția de coliniaritate:
$k+1=kp$ sau $1=k(p-1)\Rightarrow k=1, p=2.$

IX. 207 Determinați numerele reale x pentru care

$$x\cdot[x]=x+2.$$

Carina Atinge, studentă, Timişoara

Soluție: Notăm $[x]=k\in\mathbb{Z},\{x\}=\alpha\in[0,1)$ şi astfel ajungem la $k^2+(a-1)k-a-2=0.$ Această ecuație de gradul al doilea în k are discriminantul $\Delta=a^2+2a+9$; o condiție necesară pentru $k\in\mathbb{Z}$ este ca Δ să fie pătrat perfect. Cum $9\le a^2+2a+9<12$, deducem $\Delta=9\Rightarrow a=0$. Imdeiat se ajunge la $k\in\{-1;2\}$ şi $x\in\{-1;2\}$.

Metoda a II-a. Evident, 0 nu este soluție a ecuației. Din $[x]=\frac{x+2}{x}=1+\frac{2}{x}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{2}{k},k\in\mathbb{Z}$.

Pentru $k\ge 3$ ecuația conduce la $0=\frac{2}{k}+3$, absurd; pentru $k\le -3$ avem $x\cdot[x]>0$ şi $x+2<0$, deci nu avem soluții. Avem aşadar de analizat doar $k\in\{-2,-1,1,2\}$. Se ajunge imediat la $x\in\{-1;2\}$.

IX. 208 Arătați că, dacă $x<1$ şi $y>1$, atunci $8+\frac{x^2+3}{x-1}-\frac{y^2+3}{y-1}\le 0$.

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

Soluție: Notăm $x-1=a,y-1=b\Rightarrow x=1+a,y=1+b$, cu $a<0,b>0.$

Inegalitatea propusă devine astfel $\frac{(a+2)^2}{a}-\frac{(b-2)^2}{b}\le 0.$

IX. 209 Arătați că, dacă $x,y\in(0,+\infty)$ şi $x^2y+y^2x+x^2+y^2=18xy$, atunci $xy\le 64.$

Prof. Alfred Eckstein, Prof. Viorel Tudoran, Arad

Soluție: $18 = x + y + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \ge x + y + 2$, de unde $0 < x + y \le 16$. Cum $16 \ge x + y \ge 2\sqrt{xy}$, deducem că $\sqrt{xy} \le 8 \Rightarrow xy \le 64$.

IX. 210 Arătați că, dacă $a, b \in (0, +\infty)$, atunci $\frac{a^3}{a+b} \ge \frac{5a^2 - b^2}{8}$.

Prof. DM. Bătinețu – Giurgiu , Bucureşti

Soluție: Inegalitatea propusă se reduce la $(3a + b) \cdot (a - b)^2 \ge 0$.

Clasa a X-a

X. 206 . Determinați mulțimea M a numerelor reale strict pozitive x pentru care $[\log_4 x]$, $[\log_3 (x+1)]$ şi $[\log_2 (x+2)]$ sunt, în această ordine, numere naturale consecutive ($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a).

Prof. Nicolae Stăniloiu, Bocşa,
Prof. Lucian Dragomir, Oțelu - Roşu

Soluție:

Condiția din enunț conduce la : $\begin{cases} k \le \log_4 x < k+1 \\ k+1 \le \log_3 (x+1) < k+2 \\ k+2 \le \log_2 (x+1) < k+3 \end{cases}$, unde $k \in \mathbb{N}$.

Deducem astfel:

$$\begin{cases} 4^k \le x < 4^{k+1} \\ 3^{k+1} \le x+1 < 3^{k+2} \\ 2^{k+2} \le x+2 < 2^{k+3} \end{cases} \qquad (1)$$

Se demonstrează imediat prin inducție matematică inegalitatea $4^n > 2^{n+3} - 2,\ \forall n \ge 3$. Se deduce astfel că pentru $k \ge 3$ avem $x \ge 4^k > 2^{k+3} - 2 > x$

Se ajunge aşadar la $k \in \{0,1,2\}$; notăm cu $M_k, k=\overline{0,2}$, mulțimea soluțiilor sistemului (1) şi se obțin
$M_o = [2,4), M_1 = [8,14), M_2 = [26,30) \Rightarrow M = M_o \cup M_1 \cup M_2$.

X. 207 Rezolvați ecuația $1^x + 2^x + 3^x + ... + 2011^x = 2011 \cdot (1005x+1)$.

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

Soluție: Observăm că $x=0$ şi $x=1$ sunt soluții ale ecuației. Cum $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2011\cdot(1005x+1)$ este o funcție de gradul întâi, aşadar graficul ei este o dreaptă, iar $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = 1^x + 2^x + 3^x + ... + 2011^x$ este o funcție strict convexă, deducem că ecuația $f(x) = g(x)$ are cel mult două soluții (un mic desen poate e de mare ajutor). Ecuația dată are deci doar soluțiile observate inițial.

X. 208 Arătați că, pentru orice număr complex z şi orice numere complexe z_1, z_2, z_3, z_4, este adevărată inegalitatea

$$|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_4| + |z_4 - z_1| \le$$
$$\le 2\cdot(|z - z_1| + |z - z_2| + |z - z_3| + |z - z_4|).$$

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

Soluție: Dacă într-un sistem xOy de coordonate considerăm punctele $A(z_1), B(z_2), C(z_3), D(z_4), M(z)$, atunci, folosind inegalitatea triunghiului, avem: $AB \le MA + MB, BC \le MB + MC,$
$CD \le MC + MD, DA \le MD + MA$; însumând aceste inegalități ajungem la $\sum AB \le 2\cdot \sum MA$, adică inegalitatea propusă (!).

X. 209 Dacă z_1, z_2, z_3 sunt numere complexe nenule astfel încât $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$, arătați că numărul $z = \dfrac{z_1^6 + z_2^6 + z_2^6}{z_1^2 z_2^2 z_3^2}$ este real.

Olimpiadă Buzău

Soluție: Notăm $a = z_1^2, b = z_2^2, c = z_3^2$ şi astfel
$a+b+c=0 \Rightarrow c = -a-b$, de unde imediat se ajunge la $z = 3 \in \mathbb{R}$.

X. 210 Se notează cu O centrul cercului circumscris unui triunghi ABC şi $\{A_1\} = AO \cap BC,\ \{B_1\} = BO \cap CA, \{C_1\} = CO \cap AB.$ Exprimați în funcție de raza R a cercului circumscris suma $\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1}.$

Concurs Academician Radu Miron

Soluție: Folosim teorema sinusurilor în triunghiul AA_1B şi celelalte omoloage, apoi $tg(A+B+C)=0$ şi astfel

$tgA + tgB + tgC = tgA \cdot tgB \cdot tgC.$ Suma dată este egală cu $\frac{2}{R}.$

Clasa a XII-a

XII. 205 a) Dați un exemplu de funcție continuă neconstantă $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\int_0^1 f(x)dx = \frac{4k+1}{4}$ şi $\int_1^2 f(x)dx = \frac{4k+15}{4}.$

b) Dați un exemplu de funcție continuă neconstantă $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $4 \cdot \int_0^1 x \cdot f'(x)dx = 3.$

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție : a) Pare normal să căutăm o funcție de gradul al treilea, ținând cont mai ales de apariția în dreapta a numărului $\frac{1}{4} = \int_0^1 x^3 dx$; un exemplu este $f(x) = x^3 + k, k \in \mathbb{Z}$.

b) Folosind metoda integrării prin părți poate ne vin idei, dar nu e obligatoriu... Un exemplu este în final $f(x) = x^3.$

XII. 206 Determinați ultimele trei cifre ale numărului $a = 179249^{2011}.$

Prof. Alfred Eckstein, Prof. Viorel Tudoran, Arad

Soluție: $179249 \equiv 249 (\mathrm{mod} 1000)$; cum $249^2 = 62001$ şi

$62001 \equiv 1 (\mathrm{mod} 1000)$, avem $\left(249^2\right)^{1005} \cdot 249 \equiv 249 (\mathrm{mod} 1000)$.

XII. 207 1) Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, se notează $F(a,b) = 2 + (a-2)(b-2)$. Arătați că, dacă $a, b \in [1,3]$, atunci $F(a,b) \in [1,3]$.

2) Demonstrați că, dacă $x, y, z \in [1,3]$, atunci $\left(xyz - 2(xy + yz + zx) + 4(x + y + z) - 6\right) \in [1,3]$.

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

Soluție: a) Dacă $a, b \in [1,3]$, atunci

$|a-2| \le 1, |b-2| \le 1 \Rightarrow |(a-2)(b-2)| \le 1$, de unde $-1 \le (a-2)(b-2) \le 1$, apoi $F(a,b) \in [1,3]$.

b) Definind pe $\mathbb{R}$ legea de compoziție "$*$" prin $x * y = 2 + (x-2)(y-2)$, avem că $H = [1,3]$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu această lege; se verifică imediat că legea este asociativă, deci $\left(x * y\right) * z \in H$.

Probleme alese

A 17. Dacă n numere prime formează o progresie aritmetică, atunci rația progresiei se divide cu orice număr prim $p < n$.

Cantor

Soluție: Considerăm progresia $a, a+r, a+2r, ..., a+(n-1)r$. Pentru $r = 0$, problema e banală. Considerăm astfel $r \ge 1$; se obține imediat că $a \ge n$ (dacă $a \le n-1$, atunci $a + ar = a(1+r)$ este termen al progresiei şi, evident, nu este număr prim). Aşadar $a \ge n$ şi, pentru p număr prim, $p \le n-1$, considerăm numerele $a, a+r, a+2r, ..., a+(p-1)r$; cum $a \ge n$, rezultă că aceste numere sunt prime şi mai mari decât p, aşadar la împărțirea cu p, niciunul dintre ele nu dă restul 0. Există deci două dintre aceste p numere care dau acelaşi rest la împărțirea cu p. Aşadar $p \mid \left(a+hr\right) - (a+kr)$, unde $0 \le k < h \le p-1$; cum $p \mid r(h-k)$ şi $0 < h-k < p$, avem că p nu divide $(h-k)$, deci $p \mid r$.

A 18. Arătați că, pentru orice număr natural n, numărul $x_n = 78557 \cdot 2^n + 1$ este compus.

Selfridge

Soluție: Dacă n este număr par, atunci $x_n \vdots 3$; dacă $n = 4k+1$, atunci $x_n \vdots 5$; dacă $n = 12k+7$, atunci $x_n \vdots 7$; dacă $n = 12k+11$, atunci $x_n \vdots 13$. Pentru cazul $n = 12k+3$, deosebim următoarele subcazuri posibile: (1) $n = 36p+3 \Rightarrow x_n \vdots 73$; (2) $n = 36p+15 \Rightarrow x_n \vdots 19$; (3) $n = 36p+27 \Rightarrow x_n \vdots 37$.

A 19. Arătați că un număr scris în baza 10, cu $n \geq 2$ cifre egale, nu este pătrat perfect.

Oblath

Soluție: Se ştie că orice pătrat perfect este de forma $\mathcal{M}4$ sau $\mathcal{M}4+1$, aşadar numerele $n = \overline{aa...a}$ nu sunt pătrate perfecte pentru $a \in \{1,2,5,6,9\}$; pentru $a \in \{3,7,8\}$ numărul nu este pătrat perfect deoarece pătratele perfecte nu se termină în 3, 7 sau 8. În final , numărul $44...4 = 4 \cdot 11...1$ nu este pătrat perfect.

A 20. Demonstrați că, pentru orice număr întreg k , există un număr natural n şi o alegere a semnelor "$+$" sau "$-$", astfel încât $k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm ... \pm n^2$.

Erdös – Surany

Soluție: Este suficient să facem demonstrația pentru $k \in \mathbb{N}$, deoarece prin înmulțirea cu -1 se obține scrierea pentru $-k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}^*$. Primele patru cazuri se verifică imediat:

$0 = 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2$;

$1 = 1^2$;

$2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$;

$3 = -1^2 + 2^2$.

Deoarece $4 = (n+1)^2 - (n+2)^2 - (n+3)^2 + (n+4)^2$, se poate da o demonstrație prin inducție de tipul $P(k) \Rightarrow P(k+4)$, deoarece primele patru cazuri au fost verificate şi, dacă $k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm ... \pm n^2$, atunci $k+4 = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm ... \pm n^2 + (n+1)^2 - (n+2)^2 - (n+3)^2 + (n+4)^2$.

Probleme propuse

(Se primesc soluții **până în data de 12 februarie 2013**, nu mai târziu!. Pe plic scrieți clasa în care sunteți, vă rugăm DIN NOU !)

Clasa a II-a

II. 151 Aflați numărul a ştiind că 53 este mai mare decât $a - 42$ cu 31.

* * *

II. 152 Care dintre următoarele numere credeți că nu respectă regula pe care o respectă celelalte: 12241, 23463, 44885, 33663, 19385, 27543 ?

* * *

II. 153 De la apartamentul meu cobor 4 etaje, apoi urc 6 etaje şi observ că sunt la etajul 7. La ce etaj locuiesc ?

* * *

II. 154 În trei coşuri sunt în total 60 de mere. Dacă din primul coş se iau 4 mere şi din al doilea se iau 2 mere şi se pun în al treilea coş, atunci în fiecare coş va fi acelaşi număr de mere. Câte mere au fost la început în fiecare coş ?

* * *

II. 155 Aflați vârsta tatălui meu ştiind că este un număr cuprins între 35 şi 40, dublul lui este între 70 şi 75, iar triplul lui este cuprins între 105 şi 110.

* * *

II. 156 Să se afle un număr de trei cifre, ştiind că: suma cifrelor sale este 20, suma primelor două cifre este 15, iar diferența ultimelor două cifre este 3.

Aurica Nițoiu, Reşița

II. 157 Găsiți numărul de două cifre care este egal cu dublul sumei cifrelor sale.

Aurica Nițoiu, Reşița

II. 158 Puneți câte un număr în fiecare dintre pătrățelele de mai jos astfel încât să obțineți o egalitate adevărată.

În câte feluri se poate face acest lucru ?

$$\square+\square+\square=6.$$

* * *

II. 159 Andrei şi Ioana au primit de la bunici un număr egal de portocale. Dacă Ioana îi dă fratelui său două portocale, atunci Andrei va avea de două ori mai multe portocale decât sora sa. Câte portocale au dăruit bunicii celor doi nepoți ?

* * *

II. 160 Pentru a ajunge la şcoală, Andrei şi Ioana merg o porțiune din drum pe jos, apoi cu autobuzul. Andrei merge către şcoală 10 minute pe jos, apoi 5 minute cu autobuzul. Ioana merge de două ori mai repede decât Andrei. În cât timp ajunge Ioana la şcoală ?

* * *

Clasa a III-a

III. 151 Suma a două numere naturale este 135. Dacă îl dublăm pe primul şi îl triplăm pe al doilea, suma devine 357. Care sunt numerele ?

* * *

III. 152 Doamna învățătoare le-a propus copiilor să rezolve un număr de probleme şi le-a sugerat să rezolve câte 4 pe zi. Alexandru a lucrat însă mai mult cu 2 probleme pe zi şi a terminat de rezolvat cu 5 zile mai devreme. Câte probleme au avut de rezolvat copiii ?

* * *

III. 153 Compuneți şi rezolvați o problemă plecând de la egalitățile $a+b=150$ şi $b+c=350$.

* * *

III. 154 Un număr se adună cu el însuşi, apoi cu jumătatea lui, cu sfertul lui, cu întreitul lui, iar final i se mai adună numărul 5 şi se obține 51. Care este numărul inițial ?

Andrei Popa, elev, Băile Herculane

III. 155 În timpul vacanţei de iarnă, Andrei, Alexandra şi Aurel au cheltuit împreună, la munte, 952 lei. Dacă Alexandra a cheltuit de două ori mai mult decât Andrei şi jumătate din suma cheltuită de Aurel, aflaţi câţi bani a cheltuit fiecare dintre cei trei prieteni.

Andrei Popa, elev, Băile Herculane

III. 156 Care numere de două cifre sunt egale cu de 4 ori suma cifrelor?

Eufemia Jurca, Reşiţa

III. 157 Ana, Maria şi Daniela au împreună 360 de serveţele. Dacă Ana i-ar da Mariei 15 şerveţele şi Danielei 35 de şerveţele, atunci Ana ar avea de trei ori mai puţine decât Daniela şi de două ori mai puţine decât Maria. Câte şerveţele a avut fiecare?

Eufemia Jurca, Reşiţa

III. 158 Un penar costă cu 14 lei mai mult decât 3 stilouri de acelaşi fel. Cât costă împreună două penare şi un stilou, dacă preţul unui stilou este egal cu cel mai mic număr scris cu două cifre pare?

Eufemia Jurca, Reşiţa

III. 159 Armin şi Răzvan au câteva mere. Dacă Răzvan îi dă un măr prietenului său, atunci cei doi vor avea acelaşi număr de fructe. Dacă Armin îi dă lui Răzvan un măr, atunci Răzvan va avea de două ori mai multe mere decât prietenul său. Câte mere are fiecare ?

Alina Adam, elevă, Oţelu – Roşu

III. 160 Lungimea laturii unui pătrat este de 30 m. O persoană pleacă dintr-un vârf al pătratului şi, mergând în acelaşi sens pe laturile acestuia, parcurge o distanţă de 375 m. Din punctul în care a ajuns se întoarce şi parcurge 855 m. Aflaţi la ce distanţă se va situa în final persoana faţă de punctul de plecare.

* * *

Clasa a IV-a

IV. 151 Se dau două numere naturale. Primul este cu 30 mai mare decât sfertul celuilalt număr. Împărțind cele două numere, se obține câtul 1 şi restul 12. Aflați numerele.

Elisaveta Vlăduț, Reşița

IV. 152 De Ziua Copilului, la şcoala noastră s-a organizat un concurs de biciclete şi triciclete. S-au aliniat la start 35 de vehicule, având în total 80 roți.

Câți copii au participat la concurs cu bicicleta?

Elisaveta Vlăduț, Reşița

IV. 153 Se dă expresia: $a : a + a - a : a = 408$.
Determinându-l pe "a" vei afla o pătrime din numărul "b".
Calculați diferența dintre jumătatea lui "b" şi dublul lui "a".

Elisaveta Vlăduț, Reşița

IV. 154 Numărul „a" din expresia $4 \times (a \times 5 + 5) + 6 \times (a \times 5 + 5) = 150$ este mărit de 1000 de ori, apoi rezultatul se măreşte cu „n" pentru a obține 2013. Care este valoarea lui „n" ?

Elisaveta Vlăduț, Reşița

IV. 155 Suma a două numere este 1032. Dacă primul număr se înjumătățeşte, atunci suma devine 900. Aflați cele două numere.

Eufemia Jurca, Reşița

IV. 156 Suma a două numere este 658. Dacă primul număr se dublează, suma devine 942. Aflați cele două numere.

Eufemia Jurca, Reşița

IV. 157 Suma a trei numere naturale este 1865. Dacă suma dintre primul şi al doilea număr este 1165, iar diferența dintre al treilea şi al doilea număr este 177, să se afle numerele.

Aurica Nițoiu, Reşița

IV. 158 Adunând descăzutul cu scăzătorul şi cu restul (diferența) se obține numărul 6 000. Află cei trei termeni : descăzutul, scăzătorul şi restul, ştiind că scăzătorul este dublul restului.

Aurica Nițoiu, Reşița

IV. 159 Bogdan are de cinci ori mai mulți bani decât Vlad (din economii!). Dacă i-ar da lui Vlad 53 de lei şi el ar cheltui 62 de lei, cei doi frați ar avea sume egale.

Câți bani are fiecare?

Aurica Nițoiu, Reşița

IV. 160 Deasupra copacilor ruginii zboară către țările calde un stol de păsări. Dacă mai vin tot pe atâtea şi încă jumătate din câte sunt şi încă un sfert şi încă o pasăre, atunci vor fi în total 100 de păsări. Câte păsări sunt în stol ?

* * *

Clasa a V-a

V. 271 Se împart două numere naturale. Dacă împărțitorul, câtul şi restul sunt trei numere consecutive cu suma 24, aflați deîmpărțitul.

* * *

V. 272 Determinați numerele prime *p, q, r* pentru care

$$p+2q+3r=123.$$

* * *

V. 273 Arătați că $7^{51}>3^{88}$.

* * *

V. 274 Moş Crăciun are 2012 cadouri pe care vrea să le împartă în 5 localități de pe Valea Bistrei. Arătați că în cel puțin o localitate Moşul va împărți cel puțin 403 cadouri.

Lorena Țolea, Răzvan Toader, elevi, Oțelu – Roşu

V. 275 Determinați cifrele *a, b, c, d* pentru care este adevărată egalitatea

$$\overline{abcd}+3\cdot\overline{bcd}+2\cdot\overline{cd}+2d=2012.$$

Andrei Eckstein, Timişoara

V. 276 Determinați numărul natural nenul *n* pentru care numărul $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n + 1272$ este pătrat perfect.

Aurel Doboşan, Lugoj

V. 277 Determinați cel mai mare număr de patru cifre divizibil cu 120.

Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

V. 278 Se dau numerele $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 23$ şi $b = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 21$. Arătați că numerele a şi b dau acelaşi rest la împărțirea cu 101.

Olimpiadă Dâmbovița

V. 279 Fie a, b, c numere naturale. Arătați că, dacă $2^{a-b}, 2^{b-c}, 2^{c-a}$ sunt numere naturale, atunci $a = b = c$.

Olimpiadă Dâmbovița

V. 280 Determinați toate perechile ordonate de numere naturale distincte care au proprietatea că împărțind primul număr din fiecare pereche la al doilea şi apoi pe al doilea la primul obținem, de fiecare dată, aceeaşi sumă dintre cât şi rest, anume 3.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Clasa a VI-a

VI. 271 Arătați că, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{N}$, numerele $ab+1, bc+1$ şi $ca+1$ nu pot fi simultan pătrate perfecte pare.

Concurs Călăraşi

VI. 272 Arătați că, dacă $61 | (6x+5y)$, $x, y \in \mathbb{Z}$, atunci $61 | (6y-5x)$.

Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

VI. 273 Se dau punctele A, B, C, D coliniare, în această ordine, astfel încât $AB + 2BC + 3CD = 2AD$. Arătați că $AB = CD$.

Olimpiadă Constanța

VI. 274 Fie a, b numere naturale astfel încât

$$(a-3)(b+5) = ab.$$

Determinați valoarea maximă a raportului $r = \frac{a}{b}$.

Olimpiadă Dâmbovița

VI. 275 În exteriorul triunghiului ABC se consideră triunghiurile AMB şi ANC astfel încât $AM = AN, BM = CN$, iar segmentul (MN) intersectează segmentele (AB) şi (AC). Arătați că, dacă $AB = AC$, atunci $BN = CM$.

Olimpiadă Gorj

VI. 276 Arătați că nu există numere naturale m, n pentru care

$$m^2 - 2 = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^n.$$

Olimpiadă Neamț

VI. 277 Determinați numerele naturale nenule a, b, c pentru care $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{3c+7}{2c+1}$.

Olimpiadă Iaşi

VI. 278 Se consideră n unghiuri $(n \geq 4)$ în jurul unui punct cu proprietatea că printre oricare trei dintre acestea există două unghiuri suplementare. Determinați măsurile lor ştiind că două dintre acestea au măsurile de 30^o şi 60^o.

Mircea Constantinescu, Tg. Jiu

VI. 279 Arătați că $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + ... + \frac{1}{30} > \frac{5}{6}$.

* * *

VI. 280 Arătați că, dacă a şi b sunt numere naturale astfel încât $(2a+b) | (2b+a)$, atunci $a = b$ sau $a = 0$.

Andrei Eckstein, Timişoara

Clasa a VII-a

VII. 271 Determinați numerele întregi m şi n pentru care

$$3m^2 - 7mn + 4n^2 = 1.$$

* * *

VII. 272 Determinați numerele întregi a şi b pentru care

$$\frac{a}{b+1}+\frac{a+1}{b}=\frac{a}{b}.$$

Concurs RMCS 2006

VII. 273 Determinați numerele naturale $\overline{abc}$ cu cifrele distincte pentru care $\sqrt{\overline{abc}}=a+b+c-2$.

Aurel Doboşan, Lugoj

VII. 274 Determinați numerele naturale m,n pentru care

$$7n^2+16n+7=(2n+1)(m^3+2).$$

Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

VII. 275 Arătați că, dacă $x,y\in\mathbb{R}$ şi $x+y=10$, atunci $x^2+y^2\geq 50$.

Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

VII. 276 Arătați că nu există numere întregi k pentru care

$$k^3-15k+7=0.$$

* * *

VII. 277 Arătați că, dacă $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ şi $\dfrac{a\sqrt{2}+b}{b\sqrt{2}+c}$ este număr rațional, atunci ac este pătrat perfect.

Olimpiadă Iaşi

VII. 278 Pentru orice număr natural n se notează

$$E(n)=\frac{2n+1+\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Arătați că $S=E(1)+E(2)+...+E(120)$ este număr natural.

Olimpiadă Grecia

VII. 279 Se consideră un triunghi isoscel ABC cu $AB=AC$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle B$ intersectează AC în D. Dacă $BC=BD+AD$, determinați măsura unghiului $\sphericalangle A$.

Olimpiadă Canada

VII. 280 Arătați că, dacă $x, y \in \mathbb{Z}^*$ şi p este un număr prim astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$, atunci $\frac{x}{y}$ este un număr întreg.

Olimpiadă Spania

Clasa a VIII-a

VIII. 271 Determinați numărul elementelor mulțimii

$$A = \left\{ x \mid x = \frac{3m+4}{5m^2+6}, m \in \{1, 2, 3, ..., 100\} \right\}.$$

* * *

VIII. 272 a) Determinați valoarea minimă a expresiei

$$E(y) = 4y^2 + 3y + 3,\ y \in \mathbb{R}.$$

b) Determinați numerele naturale x, y care verifică egalitatea $x^2 = 4y^2 + 3y + 3$.

Concurs RMCS 2006

VIII. 273 Rezolvați în $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ ecuația $4x^2 - 3xy - y^2 = 0$.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

VIII. 274 Calculați suma primelor *3n* zecimale ale numărului $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{10n}$.

Concurs Călăraşi

VIII. 275 Determinați minimul expresiei

$$E = x^1 + x^{29} + x^3,\ x \in \mathbb{R}.$$

Aurel Doboşan, Lugoj

VIII. 276 Se consideră un triunghi *ABC* dreptunghic în *A*, cu $AB = c, BC = a, CA = b$. Exprimați suma $b + c$ în funcție de raza *r* a cercului înscris şi raza *R* a cercului circumscris triunghiului.

* * *

VIII. 277 Determinați numerele reale x, y pentru care

$$y + 4x = 4\sqrt{xy} \text{ şi } \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 1.$$

Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

VIII. 278 Determinați tripletele (x, y, z) de numere reale pentru care

$$\begin{cases} xy = z - x - y \\ yz = x - y - z \\ zx = y - x - z \end{cases}.$$

Olimpiadă Canada

VIII. 279 Se consideră triunghiurile *ABC* şi *ADE* dreptunghice cu $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 90^o$ şi $AB = AD.$ Dacă *F* este proiecția lui *B* pe *AC* şi *G* proiecția lui *D* pe *AE*, arătați că punctele *B, F, E* sunt coliniare dacă şi numai dacă punctele *D, G, C* sunt coliniare.

Concurs Iaşi

VIII. 280 Se consideră succesiunea de numere $a_1, a_2, a_3, \ldots$, unde $a_1 = 3,\ a_2 = a_1 + a_1^2,\ a_3 = a_2 + a_2^2, \ldots,\ a_{n+1} = a_n + a_n^2, \ldots$. Determinați ultimele două cifre ale numărului a_{2012}.

Olimpiadă Spania

Clasa a IX-a

IX. 231 Rezolvați ecuația $\left[\sqrt{x}\right] = \frac{x+1}{2}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *a*.

* * *

IX. 232 Se consideră numerele reale *a* şi *b* pentru care $b = 3a - a^2$. Arătați că există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $2b = 5c - c^2$.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

IX. 233 Se consideră mulțimea $A_m = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-m| + |x+m| \leq 2m\}$, cu $m \in \mathbb{R}$.

a) Determinați cel mai mic număr întreg m pentru care A_m conține cel puțin patru numere întregi.

b) Determinați mulțimea $\bigcap_{k=1}^{2012} A_k$.

***

IX. 234 Se consideră ecuația $x^2 + (m^2 - 4)x - m^2 = 0$ şi se notează cu $x_2(m)$ cea mai mare soluție a sa. Determinați valoarea maximă a lui $x_2(m)$ atunci când m parcurge $\mathbb{R}$.

OL Bistrița-Năsăud

IX. 235 Rezolvați inecuația $x \cdot [x] \leq 1 - \{x\}$.

OL Argeş

IX. 236 Se consideră mulțimile $A = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y - 1 = 0\}$ şi $B = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^3 + y^3 - 2x^2 - 2y^2 - xy + 2x + 2y - 1 = 0\}$

Determinați $A \setminus B$ şi $B \setminus A$.

OL Hunedoara

IX. 237 Suma cifrelor unui număr natural n este, în baza 10, egală cu 100, iar a numărului $44n$ este egală cu 800. Determinați suma cifrelor numărului $3n$.

Olimpiadă Rusia

IX. 238 Arătați că, dacă $a, b, c > 0$ şi $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, atunci $\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}$.

Olimpiadă Belarus

IX. 239 Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} \dfrac{4x^2}{1+4x^2} = y \\ \dfrac{4y^2}{1+4y^2} = z \\ \dfrac{4z^2}{1+4z^2} = x \end{cases}$.

Olimpiadă Canada

IX. 240 Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Numărul A este format din $2n$ cifre de 4, iar numărul B este format din n cifre de 8. Arătați că $A + 2B + 4$ este pătrat perfect.

Concurs Turcia

Clasa a X-a

X. 231 Determinați numărul rațional r pentru care $\text{arctg } 3 - \text{arctg } 2 = \text{arctg } r$.

* * *

X. 232 Demonstrați că egalitatea

$C_n^0 - 3 \cdot C_n^2 + 3^2 \cdot C_n^4 - 3^3 \cdot C_n^6 + ... = 2^n \cdot \cos\dfrac{n\pi}{3}$ este adevărată pentru orice număr natural nenul n.

* * *

X. 233 Arătați că, dacă $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și $z \in \mathbb{C}, z \neq -1, z^{n-1} \neq -1$, iar $z^n = 1$, atunci numărul $w = \dfrac{1}{1+z} + \dfrac{1}{1+z^{n-1}}$ este întreg.

* * *

X. 234 Determinați funcțiile strict crescătoare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x + f(y)) = f(x + y) + 1,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

* * *

X. 235 Arătați că, dacă *M* este o mulțime finită de numere reale şi $f : M \to M$ este o funcție bijectivă cu proprietatea că $f(x) + f^{-1}(x) = 2x, \forall x \in M$, atunci $f = \mathbf{1}_M$. Afirmația este adevărată şi dacă *M* nu este finită ?

OL Sibiu

X. 236 Se consideră o funcție $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pentru care există $\alpha \in (0,1)$ astfel încât $|f(x) - f(y)| \le \alpha \cdot |x - y|,\ \forall x, y \in [a,b]$. Demonstrați că $g : [a,b] \to \mathbb{R},\ g(x) = x + f(x)$ este injectivă.

OL Argeş

X. 237 Determinați $a \in \mathbb{R}$ şi $A \subset \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R}^* \to A$, $f(x) = \dfrac{ax^2 - 1}{x}$ să fie bijectivă.

OL Timiş

X. 238 Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} x^3 + x = y + 8 \\ y^3 + y = z + 8 \\ z^3 + z = x + 8 \end{cases}$.

* * *

X. 239 Arătați că, dacă $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o funcție injectivă şi $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o funcție surjectivă astfel încât $f(n) \le g(n), \forall n \in \mathbb{N}$, atunci $f = g$.

Gheorghe Eckstein, Timişoara

X. 240 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{9^x}{3 + 9^x}$. Calculați suma

$$S = f\left(\frac{1}{2012}\right) + f\left(\frac{2}{2012}\right) + f\left(\frac{3}{2012}\right) + \ldots + f\left(\frac{2011}{2012}\right).$$

Olimpiadă Canada, enunț modificat

Clasa a XI-a

XI. 231 Arătați că, dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ este o matrice inversabilă cu $\det\left(A + A^{-1}\right) < 0$, atunci $\det A \leq -1$.

Concurs RMCS 2006

XI. 232 Demonstrați că dacă $A \in \mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$ satisface egalitatea $\frac{tr(A^3)}{tr(A)} = tr\left(A^2\right)$, atunci A este singulară.

Andrei Eckstein, Timişoara

XI. 233 Se consideră şirul $\left(x_n\right)_{n\geq 0}$ definit prin $x_n = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos nx}{x^2}$.

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{n^3}$.

* * *

XI. 234 Fie $A, B \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$, $n \geq 2$, cu $AB + \varepsilon A + \varepsilon^2 B = O_n$, unde $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Demonstrați că $AB = BA$.

OL Arad

XI. 235 Calculați $\lim\limits_{x\to 0} \frac{30^x - 15^x - 10^x - 6^x + 5^x + 3^x + 2^x - 1}{x^3}$.

Aurel Doboşan, Lugoj

XI. 236 Calculați $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(2k+3)^2}{n^3}$.

Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

XI. 237 Se consideră $A, B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu $A+B+C=I_3$. Arătați că $\det(AB+C)(BC+A)(CA+B) \geq 0$.

Aurel Doboşan, Lugoj

XI. 238 Se consideră funcția $f:\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(A)=\det A$. Studiați injectivitatea şi surjectivitatea funcției considerate.

Amitere colegiu informatică Iaşi, 1991

XI. 239 Determinați funcțiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care $f(3x) \leq f(x) \leq f(2x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

* * *

XI. 240 Se consideră o funcție continuă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică următoarele proprietăți:

(1) $f(1000)=999$ şi (2) $f(x)\cdot f(f(x))=1, \ \forall x\in\mathbb{R}.$

Calculați $f(500)$.

Concurs Italia

Clasa a XII-a

XII. 231 Determinați $\int \frac{1+x}{x(1+x+\ln x)}dx, \ x>1$.

* * *

XII. 232 a) Arătați că ecuația $1+x+\ln x=0$ are o unică soluție reală $a\in(0,1)$;

b) Demonstrați că orice primitivă a funcției $g:(a,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=1+x+\ln x$ este strict crescătoare.

* * *

XII. 233 Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \ f(x)=\frac{9^x}{3+9^x}$.

Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

* * *

XII. 234 Calculați $\int_0^1 \frac{2x^3}{x^4+x^2+1}dx$.

* * *

XII. 235 Determinați cel mai mic număr natural nenul n ştiind că inversul lui $\hat{7}$ în grupul multiplicativ $\left(\mathbb{Z}_n^*,\cdot\right)$ este $\hat{8}$.

* * *

XII. 236 Determinați ordinul elementului $\widehat{27}$ în grupul aditiv $\left(\mathbb{Z}_{720},+\right)$.

* * *

XII. 237 Se consideră un polinom $f \in \mathbb{R}\left[X\right]$ cu proprietatea că $Xf(X+3)=(X+2)f(X)-2$. Calculați $f(2020)$.

Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

XII. 238 Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$.

Admitere Politehnică Bucureşti, 1991

XII. 239 Calculați $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}dx$.

Concurs Putnam 2005

XII. 240 Dacă a,b,c sunt soluțiile ecuației $x^3-x-1=0$, arătați că numărul $A=\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}$ este întreg.

Olimpiadă Canada

Probleme alese

A. 29 Să se rezolve ecuația

$$\left(x+a-b-c\right)(x-a)^2+(x+b-c-a)(x-b)^2+(x+c-a-b)(x-c)^2-$$
$$-(x+a-b-c)(x+b-c-a)(x+c-a-b)=0$$

Gheorghe Țiteica, 1903

A. 30 Să se demonstreze că expresia $3^{2n+2}-32n^2-40n-9$, în care $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, este divizibilă cu 512.

Gheorghe Țiteica, 1904

A. 31 Se dă o dreaptă *OL* pe care avem punctul fix *O* şi un punct *A* în plan. Se duce prin *A* o secantă variabilă, care întâlneşte pe *OL* în *B*. Cercul tangent în *B* dreptei *OL* şi având centrul pe *OA* taie secanta într-un al doilea punct *C*. Să se demonstreze că tangenta în *C* dusă cercului precedent trece printr-un punct fix.

Gheorghe Țiteica, 1903

A. 32 Se ia un punct *D* pe înălțimea $AA^{/}$ a unui triunghi ABC. Dreapta *EF* care uneşte mijlocul *E* al lui *AC* taie pe *AB* în *M* şi pe *CD* în *N*. Să se demonstreze că dacă unghiul $MA^{/}N$ este drept, atunci punctul *D* este punctul comun înălțimilor triunghiului ABC.

Gheorghe Țiteica, 1904

Rubrica rezolvitorilor

Înainte de a scrie aici ceva, trebuie să vă rugăm din nou ca, atunci când trimiteți rezolvările problemelor, **să scrieți pe plic**, jos în stânga, **clasa** în care sunteți !!!

Aşa cum anunțam în RMCS nr. 39, la pagina 21, punctajelor obținute în urma evaluării soluțiilor trimise pe adresa noastră li se adună cele publicate în Gazeta Matematică (sau pe www.viitoriolimpici.ro pentru participanții la concursul Gazetei), precum şi punctajul ponderat obținut (dacă e cazul) la ediția anterioară a Concursului RMCS.

Reamintim că punctajele cumulate le puteți găsi (atunci când comisia de evaluare finalizează această activitate) pe pagina www.neutrino.ro, la secțiunea CS MATE, 2012 – 2013, Concursuri, tabere, Rezolvitori _ concurs RMCS 2013.

Miniconcursul revistei

Problema 5

În momentul în care, în acea dimineață, Fantoma a intrat în biblioteca din castel, acele bătrânei pendule au început să se rotească cu aceeaşi viteză în sens invers; astfel, când Sir John a intrat, ca deobicei, la ora 5 după amiază fix, să îşi bea ceaiul, pendula arăta 7^{30}. La ce oră a vizitat, în acea dimineață, Fantoma castelul ?

Rezolvarea trebuie trimisă pe adresa:
Ioan Dăncilă, str. Drumul Taberei nr. 67, bl. TD 44, ap. 42, Bucureşti, cod poştal 061366

Elevul care trimite primul soluția corectă va primi din partea autorului cartea *Învață din greşelile altora,* autori Eduard şi Ioan Dăncilă, editura Erc Press, 2011.

Revenind la un număr anterior al revistei noastre, să vedem ce s-a întâmplat cu **Problema 3.** Enunțul acesteia este:

Rezultatul înmulțirii de mai jos nu este 209.

$$
\begin{array}{r}
** \times \\
** \\
\hline
*** \\
** \\
\hline
*09
\end{array}
$$

Dacă nu este 209, atunci care este rezultatul înmulțirii ?

Soluție :
Deoarece produsul este diferit de 209, acesta ar putea fi 109, 309, 409, 509, 609, 709, 809 sau 909. Cum însă 109 este număr prim, $309 = 3 \cdot 103$ (cu 103 număr prim, deci fără divizori de două cifre), 409

este număr prim, 509 la fel, $609 = 3 \cdot 7 \cdot 29$, 709 este număr prim, 809 este număr prim, $909 = 3 \cdot 3 \cdot 101$, cu 101 număr prim (deci fără divizori de două cifre), rămâne :

$$\begin{array}{r} 21\times \\ 29 \\ \hline 189 \\ 42 \\ \hline 609 \end{array}$$

Aşadar rezultatul înmulțirii este 609.

Impecabila soluție de mai sus aparține domnului profesor Aurel Doboşan din Lugoj, un permanent colaborator al revistei noastre. Domnia sa a primit din partea autorului, aşa cum v-ați obişnuit, un premiu pentru bibliotecă şi studiu; de data aceasta este vorba despre, aşa cum s-a promis dealtfel, cartea *Matematică distractivă pentru clasele V – VI, Editura Art, 2012, autor I. Dăncilă.*