Societatea de Ştiințe Matematice din România
Filiala Caraş-Severin

REVISTA DE MATEMATICĂ

RMCS

A ELEVILOR ŞI PROFESORILOR

DIN JUDEȚUL CARAŞ-SEVERIN

Nr. 41, An XIII – 2012

Acest număr al revistei are avizul Comisiei pentru publicații a SSMR

Editura „Neutrino”
Reşița, 2012

© 2012, Editura „Neutrino”
Titlul: Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din judeţul Caraş-Severin
I.S.S.N. 1584-9481

Redactor şef
Lucian Dragomir

Secretar general de redacţie
Ovidiu Bădescu

Redactori principali

Antoanela Buzescu, Iulia Cecon, Adriana Dragomir, Heidi Feil, Mariana Mitrică, Mihai Monea

Comitetul de Redacţie

Membri:

Irina Avrămescu, Costel Bolbotină, Vasile Chiş, Ioan Dăncilă, Delia Dragomir, Mariana Drăghici, Mihael Lazarov, Petrişor Neagoe, Pavel Rîncu, Nicolae Stăniloiu, Marius Şandru, Lăcrimiora Ziman

Membri onorifici:

Tudor Deaconu, Marius Golopenţa, Mircea Iucu, Adrian Lascu, Lavinia Moatăr, Ion Dumitru Pistrilă, Dan Dragoş Popa, Vasilica Gîdea

© 2012, Editura „Neutrino”
Toate drepturile rezervate
Mobil: 0741017700
www.neutrino.ro
E-mail: contact@neutrino.ro

CUPRINS

● Proverbe chinezeşti .... pag. 4

● Chestiuni metodice, note matematice (şi nu numai)

■ Matematica...altfel (partea a X-a)
Numărul 10 (Ioan Dăncilă).. pag. 5

■ Asupra unei probleme de numărare (Nicolae Stăniloiu) ..... pag. 7

■ Asupra unei probleme de concurs
(Nicolae Stăniloiu)... pag. 9

■ Cronică ieşeană (Mihai Lazarov) pag.12

■ A XVI-a Conferință Anuală a SSMR
(Mihai Monea).......................... pag.14

■ Tabăra Râul Alb 2012
(Antoanela Buzescu, Ovidiu Bădescu)................ pag.15

● Probleme rezolvate din RMCS nr. 37.. pag.19

● Probleme propuse ……………………………………............... pag. 38

● Probleme alese .... pag. 57

● Rubrica rezolvitorilor .... pag. 58

● Poşta redacţiei.. pag. 58

● Miniconcursul revistei .... pag. 59

Proverbe chinezeşti

● Rubinul nu poate fi şlefuit fără frecare şi nici omul nu poate fi perfecționat fără mai multe încercări.

● Învățătorii îți deschid uşa, însă tu însuți trebuie să treci prin ea.

● Cel care întreabă este prost pentru 5 minute, dar cel care nu întreabă rămâne prost pentru totdeauna.

● Trebuie făcut repede ceea ce nu ne presează pentru a putea face încet ceea ce ne presează.

● Viitorul unui an depinde de primăvară; viitorul unei zile, de ora 5 dimineața.

● Țiglele care feresc de ploaie au fost făcute pe vreme bună.

● Un cuvânt pornit din inimă ține cald trei ierni.

● A deschide un magazin este uşor, a-l păstra deschis este o artă.

● Dacă vrei să zbori ca un fluture, nu te zbate ca un cocoş!

● Gloria nu este a celor neînvinşi, ci a celor care se ridică după fiecare lovitură.

● Iubeşte-mă când o merit cel mai puțin; atunci am nevoie cel mai mult.

● A-ți stăpâni o clipă de mânie înseamnă a evita un secol de regrete.

● Ne trebuie doi ani să învățăm să vorbim şi întreaga viață să învățăm să tăcem.

Matematica...altfel (partea a XI-a)

Ioan Dăncilă, Bucureşti

Numărul 10

Binecuvântează-ne, număr divin, tu care i-ai zămislit pe zei şi pe oameni! O sfânt, sfânt tetraktis, tu care cuprinzi rădăcina şuvoiului veşnic al creației!

Aşa recunoşteau pitagoreicii importanța numărului 10. Reprezentat ca un număr triunghiular, sumă a primelor patru numere naturale, interpretat ca o cifră, pentru antici, decada sacră – tetraktis – înseamnă totalitatea, desăvârşirea, finalitatea. Un canon pentru tot.

Prima dată i-am bănuit importanța atunci când mama fericită i-a spus entuziasmată unei vecine, şi ea mamă: Al meu ştie să numere până la zece!

Tocmai îmi răspunsesem la întrebarea:

Câte degete am la ambele mâini?

Bază în sistemul de numerație utilizat astăzi de toți locuitorii planetei, număr tetraedral (de forma $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$), coeficient binomial, numărul 10 are o proprietate tipică: $10 \times N = \overline{N0}$.

Între multiplii şi submultiplii unităților de măsură, în aproape toate cazurile, unicul pasaj utilizează scara zecimală. Utilizarea prefixelor greceşti *deca, hecto, kilo* pentru multipli şi cele latine *deci, centi, mili* pentru submultipli vrea să sublinieze universalitatea sistemului metric, sistem ce se conjugă în aerul lui 10.

Ne amintesc de zece intervalul de 10 ani *decada,* proba masculină de atletism *decatlon,* cele *zece* porunci ale lui Moise, un *decalog,* ordinul *decapodelor* (crabii, crevetii, homarii care au câte 5 perechi de picioare).

Atunci când romanii au numit-o, *decembrie* era a zecea lună.

Decagon este numit poligonul cu 10 laturi, *decaedrul* poliedrul cu zece fețe.

Cartea ta de identitate are valabilitate un deceniu, numărul popicelor la bowling este 10, utilizăm 10 tipuri de rețele de comunicație (rutieră, fluvială, feroviară, aeriană, distribuitoare de apă, de gaz, de electricitate, telefonie, neuronală şi internet). Mitica Atlantidă avea zece regiuni, zece regi. În cugetările oamenilor, zece reprezintă suficient de mult (mai jos urmează cele zece cugetări).

Există o regulă a lui 10 I în marketing (învățare, integrare, interactivitate, promptitudine, interconexiune, informație, intermediere, individualizare, iterație, invitație).

Lucrării flamandului Simon Stevinus *La Disme* (zecimea) îi datorăm utilizarea generalizată a numerelor cu virgulă în lumea europeană.

Zece în înțelepciunea popoarelor

1. Unul slab trăieşte mai mult decât *zece* graşi.
2. *Zece* justificări sunt mai puțin convingătoare ca una singură.
3. O singură pasăre în mână valorează mai mult decât *zece* păsări pe gard.
4. *Zece* deştepți nu pot să dezlege ceea ce a legat un prost.
5. Ferice de cel căruia îi spui o vorbă şi pricepe *zece* şi vai de cel căruia îi spui *zece* şi nu pricepe niciuna.
6. Dă una ca să ți se dea *zece*.
7. O faptă bună valorează mai mult decât *zece* consolări.
8. Dacă vara te plimbi o zi, iarna flămânzeşti *zece*.
9. Un singur inamic face mai mult rău decât fac bine *zece* amici.
10. Un dascăl adevărat valorează mai mult decât *zece* cărți.

Asupra unei probleme de numărare

Nicolae Stăniloiu, Bocşa

REZUMAT. *În această notă prezentăm două soluții (instructive credem) şi o generalizare ale unei probleme de numărare. Problema a constituit subiect de concurs la o olimpiadă din Polonia şi în [1] este oferită o soluție.*

Problemă. Fie $n \in \mathrm{N}^*$ şi mulțimea $A = \{1, 2, ..., 2 \cdot n\}$. Să se găsească numărul submulțimilor mulțimii *A* în care ecuația $x + y = 2 \cdot n + 1$ nu are soluție.

Vom da două soluții acestei probleme, ambele diferite de cea prezentată în [1] (care are şi mici erori de tehnoredactare) şi apoi vom enunța câteva variante similare schimbând condiția din enunț.

Soluția 1. Să considerăm submulțimile $A_k = \{k, 2 \cdot n + 1 - k\}$, $k = \overline{1...n}$.

Vom număra, folosind principiul includerii şi al excluderii, numărul de submulțimi în care ecuația respectivă are soluție. O astfel de submulțime trebuie să conțină cel puțin o submulțime A_k, $1 \le k \le n$. Dacă notăm cu B_k, $k = \overline{1...n}$, mulțimea tuturor submulțimilor care conțin A_k şi dacă $n(X)$ este numărul de elemente ale mulțimii *X*, atunci $n\left(B_{k_1}\right) = 2^{2n-2}$, $n\left(B_{k_1} \cap B_{k_2}\right) = 2^{2n-4}$, $n\left(B_{k_1} \cap B_{k_2} \cap ... \cap B_{k_p}\right) = 2^{2n-2p}$, unde $1 \le p \le n$. Conform cu principiul includerii şi al excluderii avem:

$$n\left(B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n\right) = C_n^1 \cdot 2^{2n-2} - C_n^2 \cdot 2^{2n-4} + C_n^3 \cdot 2^{2n-6} - ... + (-1)^{n-1} C_n^n$$

Numărul submulțimilor mulțimii *A* în care ecuația $x + y = 2 \cdot n + 1$ nu are soluție va fi egal cu: $2^{2n} - n\left(B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n\right) =$

$$= 2^{2n} - C_n^1 \cdot 2^{2n-2} + C_n^2 \cdot 2^{2n-4} - C_n^3 \cdot 2^{2n-6} + ... + (-1)^n C_n^n = (4-1)^n = 3^n$$

Soluția 2. Să considerăm submulțimile $A_k = \{k, 2 \cdot n + 1 - k\}$, $k = \overline{1...n}$.

O submulțime oarecare a mulțimii *A* care are proprietatea din enunț preia din submulțimile A_k cel mult un element.

Submulțimile cu p elemente având proprietatea din enunț se formează din p submulțimi A_k care pot fi alese în C_n^p moduri, $1 \leq p \leq n$. Un set de p submulțimi A_k produce însă 2^p submulțimi cu proprietatea cerută, deoarece un element din A_k se poate alege în două moduri. Prin urmare numărul total de submulțimi care au această proprietate este:

$$N = C_n^0 \cdot 2^0 + C_n^1 \cdot 2^1 + C_n^2 \cdot 2^2 + ... + C_n^n \cdot 2^n = (2+1)^n = 3^n$$

Să ne punem acum următoarea întrebare:

Ce se întâmplă dacă schimbăm condiția dată cu aceea prin care ecuația $x - y = n$ nu are soluție într-o submulțime a mulțimii A?. Soluția a doua funcționează perfect însă pentru submulțimile $A_k = \{k, n+k\}$, $k = \overline{1...n}$, rezultatul fiind același. Această observație ne duce cu gândul la următoarea

Generalizare. Fie $n \in \mathrm{N}^*$ şi mulțimea $A = \{1, 2, ..., k \cdot n\}$. Să se găsească numărul submulțimilor mulțimii A în care diferența $x - y$ nu se divide cu n, oricare ar fi x şi y din acea submulțime.

Soluție:

Se consideră submulțimile $A_i = \{i, n+i, 2 \cdot n + i, ..., (k-1)n + i\}$, $k \geq 2$, $k, i \in \mathrm{N}$, $i = \overline{1...n}$. Este clar că $\bigcup_{i-1}^{n} A_i = A$ şi că o submulțime cu proprietatea din enunț nu poate conține două elemente din aceeaşi submulțime A_i. Cum un set de p submulțimi A_i produce k^p submulțimi cu proprietatea cerută (deoarece un element dintr-o submulțime A_i se poate alege în k moduri), deducem că numărul submulțimilor cu p elemente având proprietatea din enunț va fi $C_n^p k^p$ şi deci numărul tuturor submulțimilor cu proprietatea din enunț va fi:

$$N = C_n^0 \cdot k^0 + C_n^1 \cdot k^1 + C_n^2 \cdot k^2 + ... + C_n^n \cdot k^n = (k+1)^n.$$

Bibliografie

[1] A. Dragomir, L. Dragomir, O. Bădescu, I.D. Bîrchi – Exerciții şi probleme de matematică pentru clasa a IX –a (şi nu numai), Ed. Bîrchi, 2010

Asupra unor probleme de concurs

Nicolae Stăniloiu, Bocşa

REZUMAT. *În cele ce urmează vom da soluții alternative la câteva probleme de concurs.*

Problema 2, clasa a VII-a, ONM 2011.

În patrulaterul convex *ABCD* avem $m(\angle BCD) = m(\angle ADC) \geq 90^0$. Bisectoarele unghiurilor *BAD* şi *ABC* se intersectează în *M*. Demonstrați că dacă $M \in CD$, atunci *M* este mijlocul lui $[CD]$.

Soluție: Vom construi conform cu figura de mai jos următoarele: $[AE] \equiv [AD]$, $E \in [AB]$ şi $[BF] \equiv [BC]$, $F \in [AB]$. Din congruența triunghiurilor *ADM* şi *AEM* rezultă uşor următoarele:

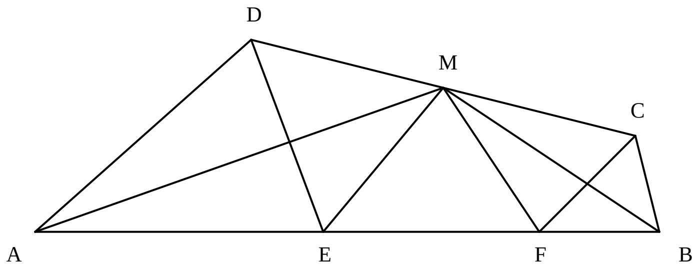


Fig. 1.

$$[DM] \equiv [ME] \text{ şi } \angle ADM \equiv \angle AEM \qquad (1)$$

şi analog din congruența triunghiurilor BCM şi BFM rezultă următoarele:

$$[MC] \equiv [MF] \text{ şi } \angle MCB \equiv \angle MFB \;. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă că $\angle MEF \equiv \angle MFE$ şi deci triunghiul *MEF* este isoscel şi de aici folosind din nou (1) şi (2) rezultă că $[MD] \equiv [MC]$

Problema 4, clasa a VII-a, ONM 2011.

Se consideră triunghiul *ABC* în care $m(\angle ABC) = 60^0$. Punctele *M* şi *D* sunt situate pe laturile (AC), respectiv (AB) astfel încât $m(\angle BCA) = 2 \cdot m(\angle MBC)$ şi $BD = MC$. Determinați $m(\angle BMD)$.

Soluție:

Construim figura de mai jos, în care triunghiul *DBM* a fost rotit cu 60^0 în sensul acelor de ceasornic, având ca centru de rotație punctul *B*.

În această rotație, corespondentul punctului *D* este punctul $E \in [BC]$, corespondentul lui *M* este punctul *F*.

Deasemenea bisectoarea unghiului *C* intersectează dreapta *BM* în punctul *G*. Evident triunghiul *GBC* este isoscel şi, dacă notăm $m(\angle MBC) = x$, atunci: $m(\angle MGC) = 2 \cdot x$.

Se observă că triunghiurile *BEG* şi *CMG* sunt congruente şi va rezulta că $[GE] \equiv [GM]$, deci triunghiul *GME* este isoscel;

cum $m(\angle EGB) = 2 \cdot x$ deducem că $m(\angle GME) = x$, aşadar triunghiul *BME* este isoscel.

Se arată acum uşor că triunghiurile *BFE* şi *MFE* sunt congruente şi, cum triunghiul *BFM* este echilateral, va rezulta că *FE* este bisectoarea unghiului *BFM*, care are măsura de 60^0.

Se observă mai departe că triunghiurile *DBM* şi *EBF* sunt congruente ceea ce duce la concluzia că $m(\angle DMB) = m(\angle BFE) = 30^0$

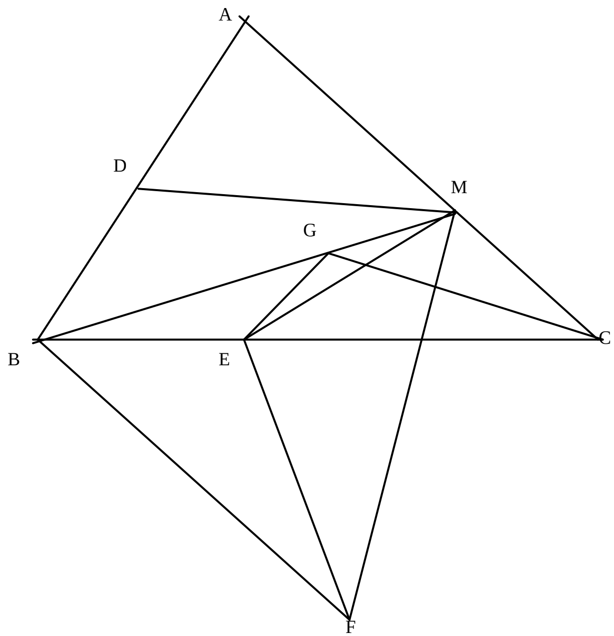


Figura 2.

Problema 2. Balcaniada pentru juniori 2012 (OBMJ 2012)

Cercurile k_1 şi k_2 se intersectează în *A* şi *B*. Dreapta t este tangenta cercurilor k_1 şi k_2 în *M* şi respectiv *N*. Dacă $t \perp AM$ şi $MN = 2 \cdot AM$, determinaţi $m\left(\angle NMB\right)$.

Soluție: Problema este una din categoria celor mai simple dar merită să vedem o alternativă de rezolvare bazată pe cunoştințe extrem de simple. Soluția se rezumă la următoarele observații: Dacă notăm cu *r* raza cercului k_1, atunci $MN = 2r$, $AT = TN = 5r$ (rezultă din triunghiul *APT* cu teorema lui Pitagora) şi folosind asemănarea triunghiurilor *EKM* şi *ETN* se deduce $EM = r$, ceea ce arată că triunghiul *KEM* este dreptunghic isoscel şi, cum $MB \| ET$ (ambele fiind perpendiculare pe *AB*), va rezulta că $m\left(\angle NMB\right) = 45^0$.

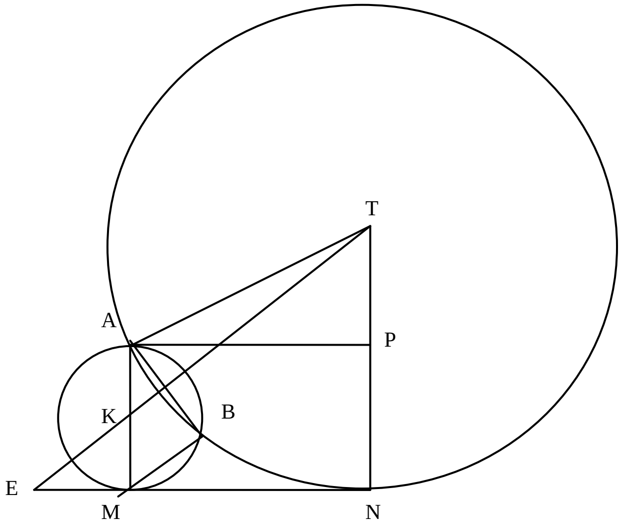


Figura 3.

Bibliografie:

[1] A 62-a Olimpiadă Națională de Matematică – Supliment al revistei Gazeta Matematică

[2] Maria Mihet – Asupra unei probleme de la ONM 2011 (articol publicat în RMT 3/2011

Cronica ieşeană (se întoarce...)

„ Ai grijă ce-ți doreşti, că s-ar putea să ți se întâmple...”.

În urmă cu un an, impresionat de frumusețea inegalabilă a Iaşului, trecând pe la Mitropolie - acasă la Sf. Cuvioasa Parascheva - mi-a trecut o dorință prin gând, aceea de a reveni pe aceste „uliți”, poate chiar însoțit şi de apropiați. Aşa că, între două concursuri, „cineva de-acolo, de sus” mi-a îndeplinit dorința - am mai fost de două ori...

Cel de-al patrulea drum la Iaşi (din toată existența mea), a debutat la Oravița, de unde am „pescuit-o” pe **Iasmina**, adusă din Moldova-Nouă – „capătul celălalt” al „diagonalei” (evident, imaginară) ce uneşte două dintre „colțurile” României. Până la Reşița, printre vreo două melodii ale unor formații sârbeşti (muzica din timpul copilăriei mele), am urmat norii de ploaie (sau ei pe noi...). La municipiu, am „completat” cele două locuri disponibile ale maşinii mele cu Daniel şi Oana. Într-una din benzinăriile de la ieşirea spre Caransebeş am făcut "joncțiunea" cu maşina care aducea pe Raluca şi Monica. Echipa s-a întregit la Lugoj, unde ne aştepta Roxana.

Cine zicea că CFR-ul nu e punctual ? La ora scrisă pe bilet, trenul era „fix” pe peron. Ne-am despărțit încercând inevitabilele emoții părinteşti şi nelipsitul „Să fiți cuminți...!” De data aceasta, la îndemnul Roxanei (viitoarea şefă de la Regionala de Căi Ferate, nu peste mult timp - am mai scris în cronica trecută), am cumpărat bilete la cuşetă, aşadar, timp de 17 ore am avut timp şi de somn, dar şi de ceva matematică... „Admiratoarele Hannei Montana” mi-au propus un pariu: pentru fiecare premiu luat la concurs, eu îmi voi vopsi câte o unghie cu ojă de la fiecare (10 degete împărțit la 5 fete este egal cu... 2 degete vopsite - numai bine, măcar le voi vopsi simetric; în grup nu erau două cu aceeaşi culoare la ojă).

Printre funcții surjective, câteva integrale şi vreo două seturi de „cruce”, ascultând „glasul roților de tren”, am ajuns în frumoasa gară a Ieşilor. Pe peron ne-a aşteptat domnul profesor de matematică de la Cotnari (cum o fi petrecut „Săptămâna altfel" pe acolo ?). De această dată am fost cazați în „buricul târgului” - la Colegiul de Artă „Octav Băncila”.

Nici acum nu ştim dacă noi am adus ploaia sau ea ne-a urmat... Cu ecusoanele în piept (la fel de mândri că pe ele scrie Caraş-Severin), am „pus o vorbă” la Sf. Parascheva pentru toți cei care au nevoie de ajutor şi am pornit pe urmele lui Eminescu. Ca ofițer (în rezervă) ce sunt (am făcut armata în urmă cu vreo 15 ani), am învățat că, înainte de bătălie soldatul trebuie să mănânce pe săturate, aşa că am „dovedit” o porţie zdravănă de tochitură moldovinească cu murături (oare şi răzeşii făceau la fel ?)...

Ploaia ne urmărea, precum turcii pe Ştefan... „Bătălia” cu picăturile de ploaie avea să se dea după ce am văzut parcul Copou. Deşi ne-am luat uscător de păr, nu am mai avut loc de umbrele sau şapcă în multitudinea de bagaje, aşa că ne-am retras „strategic” (întocmai ca Ştefan la Daniil Sihastrul) într-un magazin, de unde ne-am „înarmat” cu umbrele. Uscătoarele de păr s-au dovedit utile, totuşi...

Seara am servit masa la cantina internatului, după care, noi, profesorii am fost la şedinţa tehnică de la „cartierul general” stabilit la Colegiul Tehnic „G. Asachi”. Am avut prilejul de a sta de vorbă cu venerabilul academician Radu Miron, un fost student al profesorului A. Haimovici, care ne-a povestit cu nostalgie şi mult umor întâmplări cu şi despre matematicieni.

A doua zi - concursul ! Emoţii inevitabile, fiori, „eu nu mai ştiu nimic”, etc.

Ne-am trezit devreme şi viteji precum răzeşii, nu am mai aşteptat ghidul care urma să ne ducă la locul celeilalte „bătălii”, matematice de această dată. Ne-am urcat în tramvaiul 13 (ghinion) şi am ocolit o bună parte din Iaşi, deşi erau altele care ajungeau mai repede... Cu ajutorul unor doamne respectabile, am găsit Facultatea de TCM, locul în care se desfăşura cea de-a 16 ediţie a concursului, la cea de-a 100-a aniversare a naşterii lui A. Haimovici.

Timp de 4 ore, cei aproape 650 de participanţi au avut cu ce să se lupte... Subiectele au fost „frumoase”, jumătate din ele fiind de matematică aplicată. De remarcat este efortul organizatorilor care au „suportat”, alături de acest concurs, încă două olimpiade concomitent. După ce au servit masa, concurenţii au fost invitaţi la un tur al oraşului, împreună cu ghizi de la o agenţie de turism... Fie ploaie, fie vânt, în Iaşi ai ce vedea (cele aproape 500 de poze făcute cu camerele de fotografiat nu pot surprinde chiar tot)... A urmat misiunea noastră - de a corecta. De această dată, am corectat la clasa a 9-a Servicii, împreună cu colegul meu din Braşov. Subiectele au fost nu prea uşoare, mai ales că mulţi dintre concurenţi au încercat "tradiţionala" inducţie, chiar dacă cei care au propus subiectele au oferit o soluţie „clasică”...

Seara, am înţeles superstiţia fetelor în legătură cu numărul 13 - ne-au despărţit puţine puncte de ultima menţiune (1 punct Monica, 1,5 puncte Mădălina). Graba, oboseala, stresul Bacalaureatului care nu e departe, tramvaiul 13... Noi să fim sănătoşi...! O nouă experienţă a fost trecută în „CV"-ul personal... Cel mai câştigat a fost „cronicarul", care nu a mai fost nevoit să îşi vopsească unghiile.

Sâmbăta am petrecut-o în splendidul parc botanic din dealul Copoului, la Bojdeuca lui Creangă şi la „shopping". Cu bagajele „obeze" ne-am urcat în tren, bucurându-ne că am fost primii, măcar în ordinea sosirii la concurs, ultimii care au plecat din Iaşi şi că ne-am situat pe un loc „de mijloc" în concurs.

Am fost, precum Chiriţa din „provincie" la Iaşi: **Monica Epure** şi **Mădălina Goian** de la Liceul Teoretic "General Dragalina" din Oraviţa, **Oana Roşu** de la Liceul Teoretic „Tata Oancea" din Bocşa, **Roxana Margan** de la Liceul Pedagogic "C.D. Loga" din Caransebeş, **Iasmina Ilievici** de la Grup Şcolar Industrial din Moldova Nouă şi **Daniel Guia** de la Colegiul Naţional „Traian Lalescu" din Reşiţa.

În rolul „cronicarului" - subsemnatul.

Prof. Mihai Lazarov - Liceul Teoretic General Dragalina Oraviţa

A XVI-a Conferinţă Anuală a SSMR

Mihai Monea, Deva

Societatea de ştiinţe matematice din România, în colaborare cu filialele din regiunea Prahova, a organizat, la Universitatea de Petrol – Gaze din Ploieşti, a XVI a Conferinţă anuală a SSMR, în perioada 19.10 – 21.10. 2012. Evenimentul din acest an a fost dedicat celei de-a 70-a aniversări a Domnului Profesor Univ. Dr. Ioan Tomescu, membru corespondent al Academiei Române (printre altele şi Preşedinte al Comisiei Naţionale de Matematică în perioada 1984 – 1993).

Au fost susţinute câteva conferinţe în plen, apoi lucrările conferinţei s-au desfăşurat pe următoarele secţiuni:

(1) Cercetare matematică
(2) Problem solving
(3) Didactică matematică. Istoria matematicii.

Credem că merită amintite câteva dintre titluri şi autorii lor, unii dintre ei personalităţi absolut
marcante ale şcolii matematice româneşti:

○ Conferinţe în plen:

● *Prof. Univ. Dr. Preda Mihăilescu, Universitatea Göttingen, Germania* – Ecuații diofantice clasice şi aportul lor la istoria matematicii

● *Prof. Univ. Dr. Viorel Barbu, Universitatea Al. I. Cuza, Iaşi* – Determinism, haos şi auto organizarea stărilor critice

● *Prof. Univ. Dr. Ioan Tomescu, Universitatea Bucureşti* – Câteva aplicații ale grafurilor în chimie; indici topologici

○ Lucrări prezentate pe secțiuni:

● *Prof. Univ. Dr. Ion D. Ion, Universitatea Bucureşti* – O variantă polinomială a cifrului RSA

● *Cercetător şt, Mihai Cipu* – Variațiuni pe o problemă de olimpiadă

● *Prof. Univ. Dr. Radu Gologan* – Reprezentări grafice şi combinatorică

● *Prof. Dr. Dan Marinescu, Prof. Mihai Monea, Prof. Mihai Opincariu, Prof. Marian Stroie* – Caracterizări ale funcțiilor convexe

● *Cercetător şt. C.M. Cazacu* – Teoria de control în viața reală

● *Prof. Univ. Dr. Cristinel Mortici* – O abordare naturală a raportului lui Wallis

● *Lector Univ. Dr. Mihai Chiş* – Aplicații ale metodei coordonatelor baricentrice

● *Prof. Dr. Manuela Prajea, Prof. Marius Mâinea* – Stabilirea unor inegalități integrale

● *Prof. Roxana Soare, Prof. Constantin Soare* – Ecuații diofantice

Mai multe informații puteți găsi pe site-ul conferinței: http://www.ssmprahova.ro/confmath.html.

Nu putem încheia fără a remarca organizarea de excepție a manifestării, eforturile deosebite ale gazdelor pentru reuşita deplină a Conferinței (şi absența profesorilor din Caraş – Severin).

Tabăra Râul Alb 2012

Antoanela Buzescu, Ovidiu Bădescu

Şi anul acesta, ca în fiecare an, s-a desfăşurat în Caraş-Severin „Tabăra de matematică şi nu numai”, ediția a IV-a. Față de anii trecuți, locația s-a schimbat puțin, Tabăra de la Râul Alb fiind ideală pentru asemenea activități. Nu credeam să trăesc vremurile când aceste cabane părăsite să renască, şi asta doar datorită doamnei Liliana Dacica.

Ideea de a fi o tabără *nu numai de mate* a fost ciocolata cu care olimpicii noştri au fost convinşi şi anul acesta să participe şi să le fie drag să facă matematică şi în vacanță. Şi-au dezvoltat gândirea, şi-au îmbunătățit logica matematică, au ascultat şi poveşti din frumoasa istorie a matematicii. Iar cei cărora matematica le părea seacă şi imposibilă, discuțiile în miez de noapte sper să le fi schimbat puțin stilul de gândire.

Noi, profesorii organizatori, Antoanela Buzescu şi Ovidiu Bădescu, mulțumim profesorilor-lectori a căror calitate profesională nu mai este necesar să o subliniem aici: Marius Şandru, Irina Avrămescu, Mirela Rădoi, Mariana Drăghici, Ramona Călin, Ciprian Călin şi nu în ultimul rând celui mai bun rezolvitor de probleme din judeţ, Nicu Stăniloiu, nimeni altul decât cel care are timp să fie şi inspectorul de mate al județului.

Mulțumim elevilor prezenți acolo, aşa cum am spus de fiecare dată, ei au făcut tabăra, aşa cum tot ei ar trebui să continue acest articol. Şi...le dăm cuvântul, în ordinea primirii mailurilor de la ei:

Îmi amintesc şi de înviorarea de dimineață (care nu mi-a plăcut deloc, recunosc), meciul de fotbal cu domnu' Bădescu, drumeția în pădure, printre copaci şi cărări, frunzele şi aerul proaspăt. Era să uit: nopțile lungi, cu poveşti la care copiii nu adormeau.

Epuraş Georgian,
clasa a VIII-a, Liceul Bănățean Oțelu – Roşu

Dincolo de problemele de mate, mi-au rămas vii în amintire momentele în care ne amuzam cu jocurile de autocunoaştere, cu numerele de iluzionism sau Karaoke, atelierele de fotografie şi regie de film…Ar fi multe de spus, îmi las prietenii din tabără să-mi continue povestea…

Buzescu Mălina, Caransebeş

Dorința de a ajunge în tabăra de matematică m-a impulsionat, de altfel, să muncesc mai mult. Pentru mine, tabăra de matematică a fost o nouă şi plăcută experiență, prima tabără din viața mea..

Bălănoiu Ana Maria

Drumeții prin pădure, seri târzii şi înviorări matinale, amenzi şi versuri de melodii, foc de tabără şi cel mai important…extraordinare prietenii. Aşa aş caracteriza, în minimul de cuvinte, ultima mea ediție a Taberei de Matematică de la Râul Alb.

Îmi rămâne să ofer un simplu mulțumesc pentru această tabără şi pentru tot ce s-a realizat prin ea.

Georgi Vernicu
Colegiul Național "Traian Lalescu" Reşița

Multă culoare, chipuri vesele, distracție, cunoaştere şi, evident, competiție...sunt momente pe care le-am împletit cu drag, în câteva zile, la Râul Alb, toate îmbrăcând veşmintele unui început de vacanță aşa cum îmi place mie, îmbinând utilul cu plăcutul.

Arta de a căuta, a născoci şi a te juca cu cifrele a fost la rang înalt în aceste zile. Ne-am întrecut cu toții, elevi şi profesori, cu ajutorul raționamentului deductiv, reuşind să făurim un Univers exact, Universul nostru!

Teodora Aura Potocean
Clasa a VI-a B, Şcoala Gimnazială Nr.2 Reşița

O provocare plăcută a fost problema zilei, o problemă de logică, a cărei rezolvare ne-a dat de multe ori mari bătăi de cap dar şi satisfacția găsirii răspunsului corect.

Partea cea mai frumoasă şi mai interesantă a fost partea "şi nu numai…".

Atelierele de psihologie, comunicare, fotografie dar şi de realizare a unui reportaj, ne-au învățat să ne descoperim într-un mod nou chiar şi pentru noi. Am ajuns să ne cunoaştem mai bine, să ne facem prieteni deosebiți, să colaborăm într-un mod plăcut.

Oana Rădoi
Clasa a VIII-a, Şcoala Gimnazială Nr.2 Reşița

M-am distrat, am luat parte la numeroase ateliere cum ar fi: magie, fotografie, documentar, psihologie, jocuri de cunoaştere şi am învățat multe lucruri interesante, nu numai în domeniul matematicii.

Ultima seară a ajuns repede, seara în care am avut concursul de talente şi ne-am strâns în jurul focului de tabără vorbind până târziu.

Îmi va lipsi atmosfera, glumele, înviorarea, până şi matematica. A fost frumos, o săptămână departe de calculator, internet, alături de oameni extraordinari.

Mereu imi voi aminti cu mare drag de tabără de matematică, locul în care am legat prietenii şi am pătruns în lumea matematicii.

Adina Linţa
Colegiul Naţional “Traian Lalescu” Reşiţa

În ediţia anului acesta, am avut ocazia, bineînţeles, de a ne aminti ce am învăţat în anul şcolar ce tocmai se încheiase şi de a ne exersa în continuare cunoştinţele, însă şi de a învăţa foarte multe lucruri noi şi de a ne dezvolta ca şi caractere.

Mie mi-au plăcut atât cursurile de fotografie şi montaj video, cât şi jocurile care ne-au ajutat să ne cunoaştem unii pe ceilalţi încă din prima zi.

Azap Denisa
Colegiul Naţional “Traian Lalescu” Reşiţa

În vacanţă...

Şase zile fără semnal, 3 ore pe zi matematică, adică matematică timp de 18 ore, 1080 de minute de calcule, 64800 de secunde în care creierul a înregistrat o activitate maximă.

Dar de ce? De ce în vacanţă? De ce chiar matematică? De ce nu orice altceva?

Tocmai pentru că noi, cei care au participat în vara anului 2012 la Tabăra de Matematică şi nu numai de la Râul Alb sunt cei care doresc răspunsuri, care pun întrebări şi nu citesc soluţiile de la sfârşitul paginii, ci le caută cu propria minte.

Dolot Nicole
Colegiul Naţional “Traian Lalescu” Reşiţa

Am avut ocazia sa învăţ lucruri foarte interesante cu profesori îndeletniciţi. Cine s-ar fi gândit că Teorema lui Thales a fost inventată pentru a măsura înălţimea unei piramide?

Nu am să uit tabăra de matematică şi cu siguranţă ceea ce am învăţat mă va ajuta mult, iar amintirile vor rămâne mereu.

Oana Fara
Clasa a VIII-a, Şcoala Gimnazială Nr.2 Reşiţa

Probleme rezolvate din RMCS nr. 37

Clasa a V-a

V.230 Determinați numerele prime p şi q pentru care $p^2 - q^2 = 16 + p$

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu Roşu

Soluție:

Metoda I: Dacă p şi q sunt impare, atunci $p^2 - q^2$ este număr par, absurd ($16 + p$ este impar); aşadar p şi q au parități diferite. Imediat se ajunge astfel la $q = 2$, apoi $p(p-1) = 20 \Rightarrow p = 5$.

Metoda II: (care depăşeşte tehnica de lucru a unui elev de clasa a V-a). Înmulțind egalitatea cu 4 şi avem:

$4p^2 - 4p + 1 - 4q^2 = 65 \Rightarrow (2p-1)^2 - 4q^2 = 65$ sau

$(2p-1-2q)(2p-1+2q) = 1 \cdot 65 = 5 \cdot 13$

Avem astfel $\begin{cases} 2p-1-2q=1 \\ 2p-1+2q=65 \end{cases}$ sau $\begin{cases} 2p-1-2q=5 \\ 2p-1+2q=13 \end{cases}$ etc.

V.231 a) Arătați că dintre oricare trei numere naturale putem alege două astfel încât suma lor să fie un număr par.

b) Dacă avem la dispoziție şapte numere naturale, arătați că putem alege patru dintre ele astfel încât suma lor să fie divizibilă cu 4.

Prof. Cristian Lazăr, Iaşi

Soluție:

a) Conform principiului cutiei, fiind date trei numere, cel puțin două din ele au aceeaşi pariate, aşadar suma acestora este un număr par.

b) Alegând la întâmplare trei numere dintre cele şapte, există două cu suma S_1, număr par. Luăm acum trei dintre cele cinci numere rămase şi există două cu suma S_2, număr par; dintre aceste trei rămase în final, două au suma S_3, număr par. Numerele S_1, S_2, S_3 sunt de forma $4k$ sau $4k+2$, aşadar există două de aceeaşi formă, deci suma lor este divizibilă cu 4.

V.232 Determinați cifrele a şi b pentru care $\overline{abb}+\overline{baa}+\overline{aaa}=777$

Olimpiadă, Caraş-Severin

Soluție:

Se ajunge imediat la $2a+b=7$ şi astfel $(a,b)\in\{(1,5),(2,3),(4,1)\}$

V.233 O sală de spectacole are 400 de locuri. Pentru un spectacol care începe la ora 20:00 se deschid uşile sălii la ora 19:00. În primul minut intră un spectator, în al doilea minut intră trei spectatori şi, tot aşa, în fiecare minut intră cu doi mai mulți spectatori decât au intrat în minutul anterior. Aflați la ce oră s-a umplut sala.

Prof. Iulia Cecon, Oțelu Roşu

Soluție:

$1+3+5+...+(2n-1)=n^2=400\Rightarrow n=20.$

Ora căutată este aşadar $19:20$ (adică înainte cu 40 de minute de începerea spectacolului!)

V.234 Determinați numerele naturale a, pătrate perfecte mai mici decât 100, ştiind că restul împărțirii lui 2003 la numărul natural a este egal cu $403-6a$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu Roşu

Soluție:

Folosind teorema împărțirii cu rest, obținem $a>50$; aşadar $a\in\{64,81\}$.

Imediat ajungem la $a=64$

Clasa a VI-a

VI.230 La un moment dat, într-o parcare, numărul autoturismelor roşii reprezintă 25% din numărul total al autoturismelor parcate. După o oră, se constată că numărul total de autoturisme a crescut cu o unitate, iar procentul celor roşii a devenit 12% din numărul total. Arătați că, în intervalul de o oră scurs, au plecat din parcare cel puțin 3 autoturisme roşii.

Olimpiadă, Braşov

Soluție:

Notăm cu $r \in \mathbb{N}^*$ numărul inițial de autoturisme roşii; numărul total de autoturisme aflate inițial în parcare este astfel $4r$, iar după o oră acesta este $4r+1$, din care $\frac{12(4r+1)}{100} = \frac{3(4r+1)}{25}$ sunt de culoare roşie.

Dacă v este numărul autoturismelor roşii venite în parcare, p numărul autoturismelor roşii care au plecat, atunci, pentru $y = v - p$, avem:

$$r + y = \frac{3(4r+1)}{25} \Rightarrow 13r + 25y = 3 \Rightarrow 13(r+2y) = y+3.$$

Deducem astfel: $y + 3 = 13k, k \in \mathbb{Z}$;

Cum însă $p - v > 0 \Rightarrow y = v - p < 0 \Rightarrow y + 3 < 0(!)$; deducem acum: $-y = p - v > 3 \Rightarrow p > v + 3$, deci $p \geq 3$.

VI.231 Se consideră mulțimile

$A = \{1, 2, 3, ..., 2011\}$, $B = \{n \in \mathbb{Z} | n = x - y, x \in A, y \in A\}$ şi

$C = \{m \in \mathbb{Z} | m = a \cdot b, a \in A, b \in B\}$.

a) Calculați card B.

b) Calculați suma elementelor mulțimii C

Prof. Mircea Fianu, Bucureşti

Soluție:

a) Se deduce imediat că $B = \{0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm 2010\} \Rightarrow$ card $B = 4021$

b) Observăm că, dacă $x \in B$, atunci şi $-x \in B$; ajungem astfel că, pentru orice $ax \in C$ şi $-ax \in C \Rightarrow$ suma cerută este egală cu 0.

VI.232 Arătați că dacă $x, y, z \in \mathbb{Z}$ şi $3x - 8y - 6z = 0$, atunci $\frac{y(x+2z)}{12} \in \mathbb{Z}$.

Concurs, Giurgiu

Soluție:

$3(x - 2z) = 8y \Rightarrow 3/y \quad (1) \quad 3(x+2z) = 4(2y+3z) \Rightarrow 4/(x+2z) \quad (2)$

Din (1) şi (2) concluzia e evidentă.

Clasa a VII-a

VII.230 Arătaţi că, dacă $a,b\in\mathbb{Z}$ şi 9 divide numărul $c=a^2+4ab+b^2$, atunci 3 divide numărul $d=2011\cdot a+201\cdot b.$

* * *

Soluţie:

$c=(a+2b)^2-3b^2$ şi $9/c\Rightarrow 3/(a+2b)$, de unde $9/(a+2b)^2\Rightarrow$ $9/3b^2\Rightarrow 3/b.$ Cum $3/(a+2b)$ şi $3/c\Rightarrow 3/a$, aşadar $3/(x\cdot a+y\cdot b)$, $\forall x,y\in\mathbb{Z}.$ E suficient să luăm $x=2011, y=201.$

VII.231 Se consideră un triunghi ABC dreptunghic în A, în care M este mijlocul lui $[BC]$ şi $BD\perp AM, D\in[AC].$ Arătaţi că $m(\sphericalangle ACB)=30°$ dacă şi numai dacă $BD=2\cdot MD.$

* * *

Soluţie:

Dacă $m(\sphericalangle ACB)=30°$, deoarece $MA=MB=MC$ şi $m(\sphericalangle ABC)=60°$, deducem că triunghiul ABM este echilateral.

Cum $BD\perp AM\Rightarrow BD$ (fiind înălţime în triunghiul ABM) este bisectoarea unghiului ABC; triunghiul ABD este astfel dreptunghic, cu $m(\sphericalangle ADB)=30°\Rightarrow 2AD=BD.$

Cum ΔADM este isoscel $(!)\Rightarrow AD=MD$, aşadar $BD=2\cdot AM$

VII.232 Se consideră un triunghi ABC în care $AB\neq AC$, iar $D\in BC$ astfel încât AD este bisectoare exterioară a unghiului $\sphericalangle BAC.$ Perpendiculara din *B* şi *C* pe *AD* intersectează dreapta *AC* în *E*, respectiv dreapta *AB* în *F*. Arătaţi că punctele D, E şi F sunt coliniare.

Concurs, Sibiu

Soluţie:

În triunghiul AEB avem $AD\perp EB$; cum AD este bisectoare deducem că AD este mediatoarea lui (BE); avem astfel $AE=AB.$ Analog, avem că AD este mediatoarea lui $(FC)\Rightarrow AF=AC.$ Se ajunge acum la $\Delta ABC\equiv\Delta AEF\,(L.U.L.)\Rightarrow EF=BC$.

De asemenea, D se află pe mediatoarea lui (BE), de unde $DB = DE$; cum D se află pe mediatoarea lui $(FC) \Rightarrow DF = DC$. Cum D, B, C sunt coliniare şi, de exemplu, $DC = DB + BC \Rightarrow DE + EF = DF \Rightarrow D, E, F$ coliniare.

VII.233 Calculaţi câte numere de zece cifre au proprietatea că suma pătratelor cifrelor sale este egală cu suma cifrelor.

Prof. Sorin Rădulescu, Bucureşti

Soluţie:

Dacă a este cifră, atunci $a^2 \geq a$, cu egalitate pentru $a \in \{0,1\}$. Căutăm aşadar numere de forma $\overline{a_1 a_2 ... a_{10}}$ pentru care $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{10}^2 \geq a_1 + a_2 + ... + a_{10}$; conform observaţiei iniţiale, avem că $a_1, a_2, ..., a_{10} \in \{0,1\}$.

Prima cifră nu poate fi 0, aşadar (cu principiul produsului) există $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 2^9 = 512$ numere cu proprietatea din enunţ(frumoasă problemă, potrivită pentru un concurs).

VII.234 Arătaţi că pentru orice $a, b, c \in [0, \infty)$ este adevărată inegalitatea: $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$.

Dorij Grindberg

Soluţie:

Trebuie remarcat pentru început că, dintre cele trei numere, două au aceeaşi poziţie faţă de 1(sunt fie ambele subunitare, fie ambele supraunitare!);

De exemplu, cele două numere sunt b şi c, aşadar $(b-1)(c-1) \geq 0$ (cu egalitate pentru $b = 1$ sau $c = 1$).

Deoarece inegalitatea propusă se mai poate scrie:

$(a-1)^2 + (b-1)^2 + 2a(b-1)(c-1) \geq 0$, având în vedere remarca iniţială (absolut subtilă), aceasta este evidentă.

Desigur, egalitate se obţine pentru $a = b = c = 1$.

Clasa a VIII-a

VIII.230 Se consideră mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,x=a^2+b^2,a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

Arătați că: (1) dacă $x,y\in A,$ atunci $x\cdot y\in A$

(2) $10^{10}\in A$

(3) dacă $x\in A,$ atunci $x^{10}\in A$

* * *

Soluție:

(1) Dacă $x,y\in A,$ atunci există $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x=a^2+b^2$ şi $y=c^2+d^2$.

Cum, $x\cdot y=...=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ şi $ac+bd\in\mathbb{Z},ad-bc\in\mathbb{Z}$ rezultă $x\cdot y\in A.$

(3) Dacă $x\in A$ (folosind cele demonstrate anterior) deducem $x^2\in A$, apoi $x^3=x\cdot x^2\in A\Rightarrow x^9=\left(x^3\right)^3\in A$ şi $x^{10}=x\cdot x^9\in A$

Pentru $x=10$ se obține şi (2).

Observație: Pentru (2), fără a rezolva aşadar (3), se poate şi astfel:

$10^{10}=10^8\cdot\left(6^2+8^2\right)=\left(6\cdot10^4\right)^2+\left(8\cdot10^4\right)^2\in A$

VIII.231 Determinați perechile (x,y) de numere naturale pentru care

$$x\cdot(x-y)=5(y-1).$$

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu Roşu

Soluție:

Se obține imediat $y=\dfrac{x^2+5}{x+5}=x-5+\dfrac{30}{x+5}\in\mathbb{N}\Rightarrow$

$x+5\in\{5,6,10,15,30\}$ (x este natural!).

Perechile cerute sunt:

$(0,1),(1,1),(5,3),(10,7),(25,21).$

Verificare!

VIII.232 Arătați că nu există numere naturale nenule x şi y pentru care numerele $a = x^2+2y$ şi $b = y^2+2x$ sunt simultan pătrate perfecte.

Prof. Maria Pop, Cluj Napoca

Soluție:

Presupunem că a şi b sunt pătrate perfecte. Cum $a = x^2+2y > x^2$, rezultă $x^2+2y \geq (x+1)^2 \Rightarrow y > x$; analog se deduce că $x > y$, contradicție.

VIII.233 Determinați tripletele (a,b,c) de numere reale strict pozitive pentru care $a^2-2b=1, b^2-2c=1, c^2-2a=1.$

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu Roşu

Soluție:

Primele două egalități conduc la

$a^2-2b-b^2+2c=0 \Rightarrow (a-b)(a+b)=2(b-c).\quad (1).$

Analog se obține $(a-c)(a+c)=2(b-a)$ (2) şi $(b-c)(b+c)=2(c-a)$ (3).

Dacă $a \neq b \Rightarrow b \neq c$ şi $c \neq a$. Înmulțind membru cu membru egalitățile $(1),(2),(3)$ în această ipoteză, obținem:

$(a+b)(b+c)(c+a)=8 \geq 8abc$ (Cesaro) $\Rightarrow abc \leq 1$.

Pe de altă parte, $a^2=1+2b>1 \Rightarrow a>1;$ analog $b>1$ şi $c>1 \Rightarrow abc>1$, contradicție.

Aşadar, $a=b,$ apoi $b=c$ şi $c=a$, de unde $a^2-2a-1=0 \Rightarrow$ $a=b=c=1+\sqrt{2}$

Există deci un singur triplet care verifică enunțul: $\left(1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right)$

VIII.234 Se consideră trei drepte a,b,c incluse într-un plan α şi se notează $a \cap b \cap c = \{O\}$. Prin O se duce o dreaptă m care formează, de aceeaşi parte a planului α, cu dreptele a,b respectiv c, unghiuri congruente.

Arătați că $m \perp \alpha$.

* * *

Soluție:
Considerăm $A \in a, B \in b, C \in c$ şi $M \in m$ astfel încât $OA = OB = OC$.
Din $\Delta OAM \equiv \Delta OBM \equiv \Delta OCM$ rezultă $AM = BM = CM$.
Dacă P şi Q sunt mijloacele segmentelor (BC), respectiv (AB), din faptul că $\Delta MBC \equiv \Delta OBC$ sunt isoscele, deducem $MP \perp BC, OP \perp BC \Rightarrow$ $OM \perp BC$. Analog, obținem $OM \perp AB$, de unde $OM \perp \alpha$.

Clasa a IX-a

IX. 200 Arătați că, dacă $x, y, z \in (0, \infty)$ şi $xyz = 1$, atunci:

$$\frac{1+xy}{1+z} + \frac{1+yz}{1+x} + \frac{1+xz}{1+y} \geq 3.$$

Olimpiadă, Iaşi, 2007

Soluție:
Suma din stânga inegalității propuse se poate scrie

$$S = \sum \frac{1+\frac{1}{z}}{1+z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x};$$

folosind inegalitatea mediilor obținem $S \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} = 3$

IX. 201 Un număr real x verifică egalitatea $x^9 - x^7 + x^5 - x^3 + x = 13$. Demonstrați că: $5 < x^5 < 13$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu Roşu

Soluție:
Cum $x \neq 0$, egalitatea din enunț poate fi scrisă

$x^5\left(x^4 - x^2 + 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) = 13$ sau, cu $x^2 + \frac{1}{x^2} = u > 2$;

$x^5\left(u^2 - u - 1\right) = 13$

Deoarece $u^2 - u - 1 = u(u-1) > 1 \Rightarrow \frac{13}{x^5} > 1 \Rightarrow x^5 < 13$.

Pe de altă parte,

$$x^{10}+1=\left(x^2+1\right)\left(x^8-x^6+x^4-x^2+1\right)=\frac{x^2+1}{x}\cdot 13=\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot 13>26\Rightarrow$$

$x^{10}>25\Rightarrow x^5>5$

IX. 202 Se consideră şirul $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$, definit prin $x_n=a\cdot 4^n+b\cdot n+c,$ $\forall n\geq 1,$ unde a,b,c sunt numere întregi date.

a) Arătaţi că, dacă primii doi termeni ai şirului sunt divizibili cu 3, atunci orice termen al şirului este divizibil cu 3.

b) Demonstraţi că, în cazul $b=0,$ şirul nu conţine trei termeni în progresie aritmetică.

Prof. Lucian Dragomir, Oţelu Roşu

Soluţie:

1) $x_1=4a+b+c, x_2=16a+2b+c$. Cum 3 divide $x_2-x_1=12a+b\Rightarrow b\vdots 3$; deoarece 3 divide $x_1=3a+b+\left(a+c\right)\Rightarrow 3$ divide $a+c$ şi astfel $x_n=a\cdot\left(4^n-1\right)+\left(a+c\right)+b\cdot n$ este divizibil cu 3, pentru $\forall n\in\mathbb{N}^*$

2) Presupunem că există $x_m,x_n,x_p\left(m<n<p\right)$ în progresie aritmetică, rezultă $2\left(a\cdot 4^n+c\right)=a\cdot 4^m+c+a\cdot 4^p+c\Rightarrow 2\cdot 4^n=4^m+4^p$ sau $2\cdot 4^{n-m}=1+4^{p-m}$, ceea ce e imposibil(din motive de paritate).

IX. 203 Determinaţi funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care au proprietatea că

$$f\left(x^3+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y^3\right),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Prof. Maria Pop, Cluj Napoca

Soluţie:

pentru $x=y=0\Rightarrow\ f\left(0\right)=0$; pentru $y=0\Rightarrow f\left(x^3\right)=f\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}.$

Relaţia funcţională din enunţ devine: $f\left(x^3+y\right)=f\left(x^3\right)+f\left(y\right),$ $\forall x,y\in\mathbb{R}$, de unde (!) $f\left(u+v\right)=f\left(u\right)+f\left(v\right),\forall u,v\in\mathbb{R}.$. Această ecuaţie funcţională(care face parte sau ar trebui să facă parte din cultura matematică a unui olimpic) conduce la $f\left(nx\right)=nf\left(x\right),\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R}.$

Avem acum $f\left(8x^3\right)=f\left(2x\right)$ sau încă $8f\left(x^3\right)=f\left(2x\right)=2f\left(x\right)\Rightarrow$ $8f\left(x\right)=2f\left(x\right)\Rightarrow f\left(x\right)=0,\forall x\in\mathbb{R}$.(frumoasă problemă de tehnică).

IX. 204 Se ştie că $\{x\}$ este notația pentru partea fracționară a numărului real x. Determinați numerele naturale n pentru care

$$\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right\}=0,08(3).$$

Concurs, Bacău

Soluție:

Un elev obişnuit ar trebui să facă câteva încercări pentru a calcula partea fracționară a numărului $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$.

Avem astfel $\{x_1\}=0,\{x_2\}=0,5,\{x_3\}=0,83$ (simțim că ne apropiem), apoi $\{x_4\}=0,08(3)$.

Mai găsesc şi alte valori pentru n? . Bunul simț matematic ar trebui să îmi spună că nu. Cum demonstrez că unica soluție a problemei este $n=4$? (E bine şi ce am făcut până aici, avem cel puțin 1 punct din cele 7).

Ar trebui acum să ştim, să observăm, să intuim că pentru $m<n$, numărul $\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+...+\frac{1}{n}$ nu poate fi întreg (Dacă răsfoiți revistele noastre din urmă, veți găsi şi justificări). Hai să vedem totuşi...

Dacă ar exista $a\in\mathbb{N}$ pentru care $\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+...+\frac{1}{n}=a$, atunci notăm cu p cel mai mare număr prim aflat printre factorii numitorilor. Prin înmulțire cu $\frac{(m+1)(m+2)...\cdot n}{p}$ ajungem la o contradicție...

Nu există deci $m\neq n$ pentru care $\{x_m\}=\{x_n\}$ şi astfel numărul $n=4$ este unica soluție a problemei.

Clasa a X-a

X. 200 Rezolvați ecuația:

$$\cos^2 x + 4\sin x\cos x - 2\sin^2 x = 2.$$

Admitere Politehnică, 1988

Soluție:

Membrul drept este egal cu $2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$ (ce idee !!!) şi astfel ecuația se poate scrie:

$$4\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0 .$$

Dacă $\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$, absurd, aşadar prin împărțire cu $\cos x \neq 0$ obținem $4\mathrm{tg}^2 x - 4\mathrm{tg}\, x + 1 = 0 \Rightarrow \mathrm{tg}\, x = \frac{1}{2}$ şi astfel $x \in \left\{ \mathrm{arctg}\frac{1}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$.

X. 201 Arătați că, dacă în triunghiul ABC are loc egalitatea $BC = \sqrt{2} \cdot AC,$ atunci mediana (AM) formează cu latura (BC) un unghi congruent cu unghiul $\sphericalangle BAC$.

Admitere facultate, 1987

Soluție:

Notăm $AB = c, AC = b, BC = a \Rightarrow BC = b\sqrt{2}$.

Deducem astfel:

$$\cos(\sphericalangle A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{c^2 - b^2}{2bc}.$$

În ΔAMC avem $\cos(\sphericalangle AMC) = \dfrac{AM^2 + MC^2 - b^2}{2AM \cdot MC}$.

Cu teorema medianei avem:

$$AM^2 = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{2bc} \Rightarrow \cos(\sphericalangle AMC) = \frac{c^2 - b^2}{2bc} \Rightarrow \sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle BAC$$

X. 202 Se consideră un triunghi ABC în care $\mathrm{tg}A = 3$ şi $\mathrm{tg}B = 2.$ Arătați că ortocentrul triunghiului coincide cu mijlocul înălțimii (AD).

Admitere Institutul Politehnic, 1987

Soluție:
Cum $A+B+C=\pi$, avem imediat

$$\mathrm{tg}C=-\mathrm{tg}\left(A+B\right)=-\frac{\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B}{1-\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{tg}B}=1\Rightarrow C=\frac{\pi}{4}.$$

Dacă H este ortocentrul, atunci $\sphericalangle HBD=\frac{\pi}{4}\Rightarrow HD=BD.$

Din $\mathrm{tg}B=\frac{AD}{BD}$ deducem $AD=2BD=2HD.$

X. 203 Arătați că, dacă $a,b,c\in\left(0,1\right)$, atunci

$$\frac{1}{2+\log_a b}+\frac{1}{2+\log_b c}+\frac{1}{2+\log_c a}\le 1.$$

Olimpiadă Caraş-Severin, 2008

Soluție:
Notăm $\log_a b=x,\log_b c=y,\log_c a=z$ şi avem $x,y,z>0,x\cdot y\cdot z=1$.

Inegalitatea propusă este echivalentă cu $\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z}\le 1$ sau $xy+yz+zx\ge 3$. Această ultimă inegalitate poate fi obținută, de exemplu, din inegalitatea mediilor pentru xy,yz,zx .

X. 204 Determinați numerele naturale distincte $x_1,x_2,...,x_n$ şi $y\in\mathbb{N}$ pentru care are loc egalitatea: $2^{x_1}+2^{x_2}+...+2^{x_n}=2^y-1.$

Olimpiadă Suceava

Soluție:
Presupunem(fără a restrânge generalitatea problemei) că $x_1<x_2<...<x_n$; evident $y\in\mathbb{N}^*$ (membrul stâng este strict pozitiv).
Cum membrul drept este număr impar rezultă $x_1=0.$
Egalitatea devine: $2^{x_2}+2^{x_3}+...+2^{x_n}=2^y-2$, rezultă
$2^{x_2-1}+2^{x_3-1}+...+2^{x_n-1}=2^{y-1}-1$.
Procedând analog, obținem $x_2-1=0\Rightarrow x_2=1.$
În final: $x_k=k-1,\forall k=\overline{1,n}$ şi $y=n.$

Clasa a XI-a

XI. 200 Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \text{ este pătrat perfect} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Se notează $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

Arătaţi că şirurile $\left(\frac{s_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ şi $\left(\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ sunt convergente.

Concurs, Arad

Soluție: Se observă că $s_n = k, \forall n \in \left\{k^2, k^2+1, ..., (k+1)^2 - 1\right\}$ şi astfel $s_n = \left[\sqrt{n}\right], n \in \mathbb{N}^*$. Cum $0 \leq \frac{s_n}{n} = \frac{\left[\sqrt{n}\right]}{n} \leq \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{\infty} \frac{s_n}{n} = 0 \in \mathbb{R}$, deci $\left(\frac{s_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ este convergent.

Pe de altă parte, $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} \leq \frac{s_n}{\sqrt{n}} \leq 1 \Rightarrow \lim\limits_{\infty}\left(\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right) = 1$

XI. 201 Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, dat prin $x_1 > 0, x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n}, \forall n \geq 1.$

a) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \infty$

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$

c) Determinaţi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x_n}{n^2}$

Olimpiadă, Braşov

Soluție: a) $x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n} > 0 \Rightarrow$ şirul este crescător, deci există $L = \lim\limits_{\infty} x_n$. Prin trecere la limită în relația de recurență obținem $L = 0$ (contradicție) sau $L = \infty$.

b) Din lema lui D'Alembert deducem

$$\lim_{\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{x_n}}{x_n}\right) = 1$$

c) Folosind lema lui Cesaro-Stolz avem:

$$\lim_{\infty} \frac{x_n}{n^2} = \lim_{\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{2n+1} = \lim_{\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{2n+1} = \lim_{\infty} \frac{\sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n}}{2} =$$

$$\frac{1}{2} \lim_{\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}} = \frac{1}{2} \lim_{\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}} = \frac{1}{2} \lim_{\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{x_{n+1}}{x_n}}} = \frac{1}{4}$$

XI. 202 Determinați numerele naturale x, y, z știind că triunghiul determinat de punctele $A(x, y), B(y, z), C(z, x)$ are aria egală cu $\frac{3}{2}$, iar centrul de greutate al triunghiului ABC este $G(2, 2)$.

Olimpiadă, Caraş-Severin

Soluție:

Pentru $\Delta = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ y & z & 1 \\ z & x & 1 \end{vmatrix}$ avem $A = \frac{3}{2} = \frac{1}{2}|\Delta| \Rightarrow \sum (x - y)^2 = 6$. Folosind $G(2, 2)$, deducem $x + y + z = 6$, apoi $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, $xy + yz + zx = 11 \Rightarrow$ $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ și permutările acesteia.

XI. 203 Se consideră $A \in M_3(\mathbb{R}^*)$ astfel încât $A \cdot {}^t A = I_3$. Calculați $\det(A^2 - I_3)$.

* * *

Soluție:

$$\det(A^2 - I_3) = \det(A^2 - A \cdot {}^t A) = (\det A)(\det(A - {}^t A)).$$

Deoarece $\det(A - {}^t A) = \det {}^t(A - {}^t A) = \det({}^t A - A) = (-1)^3 \cdot \det(A - {}^t A) =$ $= -\det(A - {}^t A) \Rightarrow \det(A^2 - I_3) = 0$

XI. 204 Se consideră $A \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $\det A = tr(A) = 1$. Calculați câte elemente are mulțimea $H = \left\{ A^n \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$.

* * *

Soluție:

Folosind relația Cayley-Hamilton avem că:

$A^2 = A - I_2 \Rightarrow A^3 = -I_2, A^4 = -A, A^5 = -A^2, A^6 = A.$ Aşadar, $\text{card}\, H = 6.$

Clasa a XII-a

XII. 200 Demonstrați că $0 < x \cdot (\ln x)^2 < \frac{2}{3}, \forall x \in (0,1).$

Admitere Universitate Bucureşti, 2000

Soluție:

Considerăm funcția derivabilă $f : (0,1) \to \mathbb{R}, f(x) = x \cdot (\ln x)^2 \Rightarrow$ $f'(x) = (\ln x)(\ln x + 1)$. Avem $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-2}$. În plus, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$ (folosind l'Hopital pentru cazul $\frac{\infty}{\infty}$), iar $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

Studiind variația funcției f, avem că $x = e^{-2}$ este punct de maxim şi, imediat, obținem $0 < f(x) \leq f\left(e^{-2}\right) = \frac{4}{e^2} < \frac{4}{6} = \frac{3}{2}, \forall x \in (0,1)$.

XII.201 Determinați funcțiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică egalitatea $f(arctgx) = \left(1 + x^2\right) \cdot f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$

Alexandru Gabriel Mîrşanu, Iaşi

Soluție:

Deoarece f ese continuă, f admite primitive; notăm cu F o primitivă a sa şi deducem că $F(arctgx) = F(x) + c$. Se obține imediat că $c = 0 \Rightarrow F(arctgx) = F(x), \forall x \in \mathbb{R}.$

Considerând $g:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right), g(x)=\operatorname{arctg} x$ se arată că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0\in\mathbb{R}^*, x_{n+1}=g(x_n)$ este convergent şi are limita egală cu 0. Ajungem astfel la $F(x_n)=F(x_0)\Rightarrow$ $F(0)=F(x_0)\Rightarrow$ $F(x)=F(0), \forall x\in\mathbb{R}$ şi deci $f(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$

XII. 202 Se consideră un grup G cu 10 elemente în care există $a,b\in G\setminus\{e\}$, distincte, astfel încât $a^2=b^2=e.$ Arătați că G nu este abelian.

Olimpiadă, Caraş-Severin

Soluție:

Presupunem, prin reducere la absurd, că G este abelian. Se arată astfel că $H=\{e,a,b,ab\}$ este subgrup al lui G. Conform teoremei lui Lagrange avem: $ord(H)/ord(G)$, deci $4/10$, fals. Aşadar G nu este abelian.

XII. 203 Arătați că nu există funcții strict crescătoare $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care admit o primitivă F pentru care $F(1-x)\cdot F(x)=F\left(x^2\right), \forall x\in\mathbb{R}.$

Olimpiadă, Caraş-Severin

Soluție:

Metoda 1: Presupunem, prin reducere la absurd, că există o astfel de funcție. Facem $x\to(1-x)$ şi obținem $F(x)\cdot F(1-x)=F\left((1-x)^2\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Pentru $x=0\Rightarrow F(0)=F(1)$ şi, conform teoremei lui Rolle, există $c\in(0,1)$ cu $F'(c)=f(c)=0$; pentru $x=-1\Rightarrow F(1)=F(4)$ şi deci există $d\in(0,1)$ cu $F'(d)=f(d)=0$. Aşadar există $c\neq d$ cu $f(c)=f(d)$, deci f nu e injectivă, aşadar f nu e strict monotonă.

Metoda 2: Presupunând că există astfel de funcții, derivând egalitatea din enunț, obținem $-f(1-x)\cdot F(x)+F(1-x)\cdot f(x)=f\left(x^2\right)\cdot 2x, \forall x\in\mathbb{R}$.

Pentru $x=0$ avem $F(1)\cdot f(0)-F(0)\cdot f(1)=0$, iar pentru $x=1$ avem $F(0)\cdot f(1)-F(1)\cdot f(0)=2\cdot f(1)$, de unde se deduce că $f(1)=0$, apoi $F(1)\cdot f(0)=0$. Dacă f este strict descrescătoare $\Rightarrow f(0)\neq 0 \Rightarrow F(1)=0$. Pentru $x=0$ în inegalitatea din enunț, obținem astfel $F(0)=0$. Folosind teorema lui Rolle, deducem că există $c\in(0,1)$ cu $F'(c)=f(c)=0$. Cum însă $f(1)=0$, avem că f nu e injectivă.

XII. 204 Se consideră un grup $(G,\cdot)$ şi $a,b\in G$ astfel încât suma dintre numărul elementelor lui G care comută cu a şi numărul elementelor lui G care comută cu b este un număr prim. Determinați numărul elementelor care comută şi cu a şi cu b.

Marian Andronache, Bucureşti

Soluție:

Pentru $x\in G$, notăm $C(x)=\{y\in G \mid xy=yx\}$.

Cum $e\in C(x), \forall x\in G \Rightarrow C(a)$ şi $C(b)$ sunt finite, nevide, iar $|C(a)|+|C(b)|=p\geq 2$, p prim.

Deoarece $C(a)$ şi $C(b)$ sunt subgrupuri ale lui $G \Rightarrow C(a)\cap C(b)$ are aceeaşi proprietate. Folosind teorema lui Lagrange

$\Rightarrow ord(C(a)\cap C(b))/ord(C(a))$ şi $ord(C(a)\cap C(b))/ord(C(b))$

$\Rightarrow ord(C(a)\cap C(b))\,/\,(ord(C(a))+ord(C(b)))=p$.

În plus, $|C(a)\cap C(b)|\leq |C(a)|+|C(b)|<p$, deci $|C(a)\cap C(b)|=1$.

Aşadar, singurul element care comută şi cu a şi cu b este e.

Probleme alese

A 13. Dacă f este o funcție reală continuă, definită pe circumferința C a unui cerc, arătați că există o pereche (P_1,P_2) de puncte diametral opuse pe C pentru care $f(P_1)=f(P_2)$.

Alexandru Froda

Soluție:

Ecuațiile parametrice ale lui C sunt : $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}; t \in [0, 2\pi]$.

Considerăm funcția contiună $F:[0,2\pi] \to \mathbb{R}$ definită prin $F(t) = f(r\cos t, r\sin t)$. Problema revine la a arăta că există $t_0 \in [0,\pi]$ astfel încât $F(t_0) = F(t_0 + \pi)$.

Cum $F(0) = F(2\pi)$, avem pentru $g(x) = F(x) - F(x-\pi)$; $g(0)\cdot g(\pi) = [F(0) - F(\pi)][F(\pi) - F(0)] \le 0$.

Concluzia este imediată.

A 14. Demonstrați că dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, atunci

$$\frac{a}{a+2b+c} + \frac{b}{b+2c+a} + \frac{c}{c+2a+b} \ge \frac{3}{4}.$$

Gheorghe Eckstein

Soluție:

Notăm $x = \sqrt{\dfrac{a}{a+2b+c}}$, $y = \sqrt{\dfrac{b}{b+2c+a}}$, $z = \sqrt{\dfrac{c}{c+2a+b}}$ şi $\alpha = \sqrt{a(a+2b+c)}$, $\beta = \sqrt{b(b+2c+a)}$, $\gamma = \sqrt{c(c+2a+b)}$.

Folosind $(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \le (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2)$ obținem $(a+b+c)^2 \le (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$.

E suficient astfel să arătăm că $(a+b+c)^2 \ge \dfrac{3}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$.

Calculele destul de rapide conduc la inegalitatea $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$, care este echivalentă cu $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0$, evident adevărată.

A 15. Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}, n > 3$, există un poligon convex cu n laturi, nu toate egale, cu proprietatea că suma distanțelor de la orice punct interior la laturi este constantă.

Dan Schwarz

Soluție:
Remarcăm că triunghiul echilateral are proprietatea că suma distanțelor de la un punct interior la laturi este constantă; laturile sale sunt însă egale, aşadar $n > 3$.

Enunțul invită la o abordare inductivă.

Pentru $n = 4$, dreptunghiul este poligonul care verifică enunțul.

Pentru $n = 5$, tăiem un triunghi echilateral cu două drepte paralele, care nu sunt paralele cu nicio latură.

Obținem astfel pentagonal $ABCDE$; suma distanțelor unui punct interior acestuia la laturi este egală cu suma distanțelor la laturile triunghiului echilateral (care este constantă) plus suma distanțelor la cele două noi laturi apărute (acestea sunt paralele, deci distanța dintre ele este constantă).

Aşadar, adcă afirmația este adevarată pentru un poligon cu n laturi, atunci pentru un poligonul cu $n+2$ laturi neegale se foloseşte aceeaşi construcție: se duc două paralele (neparalele cu nicio latură) care taie poligonul convex cu n laturi astfel încât niciun vârf nu este îndepartat şi se raționează ca şi în cazul trecerii de la $n = 3$ la $n = 5$.

A 16. Arătați că în orice poliedru convex există cel puțin două fețe care au acelaşi număr de laturi.

Kőmal

Soluție:
Alegem fața cu cele mai multe muchii; aceasta este un poligon cu, de exemplu, n laturi. Deoarece poliedrul este convex, fiecare muchie este situată pe două fețe. Cum numărul de muchii pentru poligoanele (fețele) poliedrului este cuprins între 3 şi n, conform principiului Dirichlet, avem că există cel putin două fețe cu acelaşi număr de laturi.

Probleme propuse

(Se primesc soluții **până în data de 17 decembrie 2012**, nu mai târziu!. Pe plic scrieți clasa în care sunteți, vă rugăm DIN NOU !)

Clasa a II-a

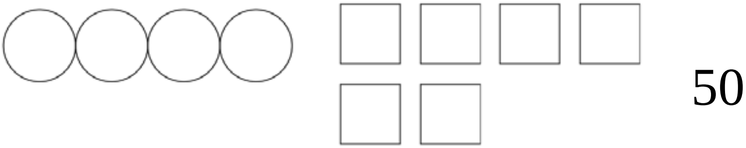
II. 141. După ce a parcurs cu bicicleta, dintr-un drum, în prima zi 19 kilometri, iar în a doua zi cu 5 kilometri mai mult, Alex a observat că mai are de străbătut o distanță mai mică cu 8 kilometri decât cea parcursă în a doua zi. Ce lungime are drumul?

Mariana Mitrică, Reşița

II. 142. În 3 zile Daniela a citit un sfert din paginile unei cărți. Aflați câte pagini are cartea dacă în prima zi a citit 15 pagini, iar în următoarele zile un număr dublu de pagini față de ziua precedentă.

Neta Novac, Reşița

II. 143. Compuneți şi rezolvați o problemă pornind de la următorul desen:



Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

II. 144. Familiile Adam, Bona şi Chiş au numerele de telefon următoare: 514 624, 532 853, respectiv 541 211; dacă numărul familiei Duma respectă aceeaşi regulă ca şi celelelalte şi este de forma 52a 9b6 , puteți găsi numărul de telefon al familiei Duma?
(Explicați ! Acest ultim îndemn nu ar trebui dat, ar trebui să ştiți că orice rezultat trebuie, într-un fel sau altul, justificat)

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

II. 145. Mama, tata, Alina şi Petrişor sunt în sufragerie şi dau drumul la televizor. Pe un canal sportiv, se transmite un meci de tenis la care participă patru sportivi. Câte persoane sunt acum în sufragerie?

* * *

II. 146. La un concurs al tăietorilor de lemne organizat la Băile Herculane, una dintre probe a constat în tăierea unui trunchi de brad lung de 10 metri în bucăți de câte 2 metri.

Cât timp i-a luat această probă câștigătorului, dacă pentru fiecare tăietură a avut nevoie doar de 2 minute?

* * *

II. 147. Puneți semnul + sau − în fiecare dintre următoarele egalități pentru a obține propoziții matematice adevărate:

(1) $10 = 8 \square\ 6 \square\ 1 \square\ 9$;

(2) $100 = 83 \square\ 15 \square\ 18 \square\ 30$;

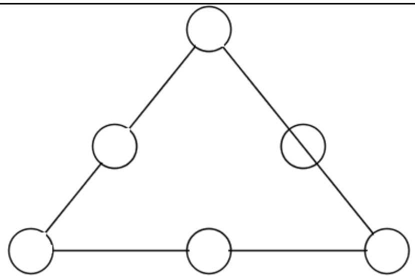
(3) $200 \square\ 45 \square\ 38 = 300 \square\ 105 \square\ 12$.

* * *

II. 148. Care cuvânt credeți că ar trebui tăiat din următoarea înşiruire (aşa cum am mai spus, explicați de ce): pădure, şcoală, lumină, toamnă, crater?

* * *

II. 149.



Completați cerculețele cu numere de la 1 la 6 astfel încât să obțineți aceeaşi sumă pe fiecare dintre laturile triunghiului.

Compuneți şi rezolvați o problemă asemănătoare legată de un pătrat.

* * *

II. 150. Moş Opincă de la Deva are 12 litri de must şi vrea să-i dăruiască nepotului său Mihai jumătate. Bunicul are numai trei vase: cel de 12 litri în care ține mustul, unul de 8 litri şi unul de 5 litri. Poate măsura bunicul cantitatea pe care vrea să i-o dăruiască nepotului?

* * *

Clasa a III-a

III. 141. Rilă-Iepurilă are vârsta egală cu sfertul treimii numărului 36 mărit cu produsul „vecinilor” numărului 3. Ce vârstă are el?

Mariana Mitrică, Reşița

III. 142. Pentru o oră de lucru, un muncitor primeşte 6 euro.Ştiind că se lucrează 8 ore pe zi, află ce sumă va primi o echipă formată din 5 persoane în 10 zile.

Mariana Mitrică, Reşița

III. 143. Pentru rezolvarea unei probleme, Armin trebuie să înmulțească un număr cu 6 şi apoi să adune la rezultat 9. În loc să facă aceste operații, el înmulțeşte numărul dat cu 9 şi scade din rezultat numărul 6. Cu toate acestea, rezultatul final obținut este cel aşteptat (corect). Care a fost numărul dat?

* * *

III. 144. Raul are de rezolvat într-o săptămână de şcoală câteva probleme de matematică. În fiecare zi, Raul rezolvă cu o problemă mai puțin decât în ziua precedentă. Câte probleme a rezolvat Raul în total, dacă miercuri a rezolvat 11 probleme?

* * *

III. 145. Cristi a citit într-o săptămână de şcoală o carte. În fiecare zi, Cristi a citit cu 10 pagini mai mult decât în ziua precedentă. Dacă vineri a citit exact o treime din întreaga carte, aflați câte pagini are cartea.

* * *

III. 146. Armin, Raul, Cristi şi Dani au împreună 25 de creioane. Adunând numărul de creioane pe care le au oricare trei dintre prieteni se obține unul dintre numerele 16, 19 şi 20.

a) Arătați că doi dintre prieteni au un acelaşi număr de creioane.

b) Care este numărul maxim de creioane deținute de unul dintre cei patru prieteni?

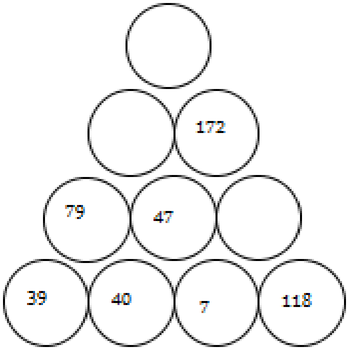
* * *

III. 147. Compuneți și rezolvați o problemă pornind de la următorul exercițiu:

$$a \times 8 = b\,,\ b \times 5 = c\,,\ c + 40 = a \times 50\,.$$

* * *

III. 148. Completați cercurile goale cu numere potrivite (explicați):



* * *

III. 149. Completați căsuța liberă din următorul tabel (așa cum am mai repetat, explicați!):

247	**346**	**135**	**432**	
158	**157**	**169**	**366**	**287**
900	**800**	**700**	**600**	**500**

* * *

III. 150. Într-o cutie sunt jetoane de 1 leu, 5 lei, 10 lei și 25 lei. Iau 13 jetoane, iar suma lor este 100 lei.

Stabiliți dacă afirmațiile de mai jos sunt adevărate sau false:

a) Printre cele 13 jetoane sunt și jetoane de 10 lei.

b) Printre cele 13 jetoane nu sunt jetoane de toate cele 4 valori.

Ioan Dăncilă, București

Clasa a IV-a

IV. 141. Calculați câte autocare de câte 48 de locuri sunt necesare pentru a transporta un grup de 170 de copii pe litoral.

* * *

IV. 142. Andrei va vizita un oraş, iar Bogdan alt oraş. Andrei are de ales între Oradea şi Cluj – Napoca. Dacă alege Clujul, atunci Bogdan va merge la Sibiu. În final, niciunul dintre ei nu ajunge la Sibiu. Stabiliți care dintre următoarele afirmații este adevărată:

a) Bogdan merge la Cluj – Napoca .
b) Bogdan merge la Oradea.
c) Andrei nu merge la Oradea.
d) Bogdan merge la Sibiu.
e) Andrei merge la Oradea.

*** * ***

IV. 143. Un sfert din cantitatea de ulei dintr-un butoi se pune în şase bidoane a câte 10 litri fiecare, astfel încât acestea devin pline.
a) Ce cantitate de ulei a fost la început în butoi ?
b) Dacă un litru de ulei costă 7 de lei, cât costă o treime din cantitatea de ulei din butoi?

Elisaveta Vlăduț, Reşița

IV. 144. Un număr a este de 3 ori mai mare decât un număr b. Dacă din numărul mai mare se scade numărul 12 se obține un nou număr, pe care îl notăm cu c. Dacă numerele b şi c sunt egale, aflați numărul a.

Elisaveta Vlăduț, Reşița

IV. 145. Doi frați au împreună 120 timbre. Ca să aibă acelaşi număr de timbre, fratele mare îi dă celui mic un sfert din numărul său de timbre. Câte timbre a avut fiecare copil la început?

IV. 146. Aflați cinci numere naturale consecutive ştiind că suma a două dintre ele este 2012.

Constantin Saraolu, Rm. Vâlcea

IV. 147. Diana a primit de la tatăl său o sumă de bani; din aceasta, ea a dat câte 300 de lei fiecăruia dintre cei 3 copii ai săi, rămânând astfel cu o treime din suma inițială. Ce sumă de bani a primit Diana de la tatăl său?

*****

IV. 148. Calculați de câte ori se foloseşte cifra 0 pentru a numerota o carte până la pagina 203.

Concurs Ploieşti

IV. 149. Mama avea 32 de ani când s-a născut fiica sa şi 35 de ani când i s-a născut băiatul. Ştiind că acum toți trei au împreună 59 de ani, aflați vârsta fiecăruia.

Concurs Drăgăşani

IV. 150. Aflați patru numere naturale, ştiind că suma lor este 2012 şi, dacă din fiecare scădem un acelaşi număr, obținem 3, 5, 7, respectiv 9.

*****

Clasa a V-a

V. 261. Dacă a,b,c sunt numere naturale astfel incât $a+2b+c=59$ şi $3a+4b+7c=169$, arătați că există un număr natural k astfel încât, dacă $d=2a+3b+4c$, atunci $d=57\cdot k$.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

V. 262. Se consideră mulțimea $A=\{4n+3 / n\in\mathbb{N},\ 0<n\leq 167\}$.

Arătați că:

a) Mulțimea *A* conține cel puțin trei numere prime, cel puțin două cuburi perfecte şi nu conține niciun pătrat perfect;

b) Nu se pot alege trei numere diferite din mulțimea *A* astfel încât suma lor să fie egală cu 2012.

Variantă a unei probleme de la OJM Caraş – Severin

V. 263. Dacă îi dau lui Andrei două ciocolate, el îmi împrumută bicicleta sa pentru trei ore, iar dacă îi dau şase mere, mi-o împrumută pentru două ore. Mâine îi voi da o ciocolată şi două mere; pentru cât timp îmi va împrumuta bicicleta ?

*****

V. 264. Determinați ultima cifră a numărului

$$n = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{99}.$$

* * *

V. 265. Dați câte un exemplu de două mulțimi A şi B cu câte trei elemente pentru fiecare dintre situațiile următoare:
a) $A \cap B$ are exact două elemente.
b) $A \cup B$ are exact patru elemente.
c) $A \setminus B$ are exact două elemente.
d) Dacă $x \in A$, atunci $(x-2) \in B$

* * *

V. 266. Scriem, pe rând, 2009 numere naturale distincte astfel încât suma oricăror două numere vecine să fie un număr par. Arătați că oricum am alege şapte dintre aceste numere, există cel puțin două a căror diferență este divizibilă cu 12.

* * *

V. 267. Într-o gospodărie sunt găini şi iepuri, în total 95 de capete şi 260 de picioare. Câți iepuri şi câte găini sunt în gospodărie?

* * *

V. 268. Trei stilouri şi două creioane costă 40 de lei. Aflați prețul unui stilou şi cel al unui creion, ştiind că un stilou se poate cumpăra cu prețul a şase creioane.

* * *

V. 269. Împărțind patru numere naturale de câte trei cifre prin acelaşi număr natural nenul, se obțin resturile 1, 2, 3, respectiv 4 şi câturile numere naturale consecutive. Aflați cele patru numere, ştiind că suma lor este 626.

Olimpiadă Bistrița – Năsăud

V. 270. Considerăm numărul natural $a = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot 2009 + 2$.
Determinați restul împărțirii lui a la 8.

Daniela Chiteş, Bucureşti

Clasa a VI-a

VI. 261. Un grup de prietene se numeşte *frumos* dacă media notelor obținute de ele la un test de matematică este cel puțin egală cu 9. La un prim test , Alina a luat nota 10, Diana nota 9 şi astfel Alina, Diana şi Ionela au ajuns să formeze un grup *frumos.* Aflați ce notă a luat la test Ionela, ştiind că Mirela a luat nota 8, Anamaria a luat nota 9 şi Ionela, Mirela, Anamaria constituie un grup *frumos*.

Ionela Radu, elevă, Oțelu – Roşu

VI. 262. Un număr natural *n* dă restul 5 la împărțirea cu 9 şi restul 8 la împărțirea cu 12.

a) Arătați că 2012 satisface condițiile din enunț şi aflați cel mai mic număr natural care îndeplineşte aceste condiții;

b) Ce resturi obținem când împărțim numerele *3n* şi *4n* la 36?

c) Ce rest se obține prin împărțirea lui *n* la 36?

Ina Dicu, Cornel Moroti – Rm. Vâlcea

VI. 263. Aflați numărul de pagini ale unei cărți, ştiind că cifra 3 s-a folosit la numerotarea paginilor sale de 71 de ori.

Concurs Călăraşi

VI. 264. Spunem că o mulțime de numere naturale este *puternică* dacă suma elementelor ei plus o unitate este egală cu o putere a lui 2, iar produsul elementelor este deasemenea putere a lui 2. De exemplu, mulțimea $\{1,2,4\}$ este o mulțime *puternică*. Demonstrați că pentru fiecare număr natural $n \geq 3$ există o mulțime *puternică* având *n* elemente.

Concurs Tg. Mureş

VI. 265. Dați un exemplu de două numere naturale p şi q care au câte 4 divizori (numere naturale) astfel încât numărul $p \cdot q$ să aibă 9 divizori naturali.

* * *

VI. 266. Într-o bibliotecă sunt cărți de istorie, de matematică şi de geografie. Copertile cărților sunt roşii, verzi şi albastre. Cele de istorie nu au coperți albastre, cele de matematică au coperțile sau verzi sau albastre, iar cele de geografie nu le au nici roşii, nici verzi. Ce culaore au coperțile cărților de istorie ?

Concurs Suceava

VI. 267. Arătați că 19 divide numărul $4^{5n}-5^{4n}$ pentru orice număr natural n .

* * *

VI. 268. Pentru aniversarea Dianei, mama (şi tata) a pregătit în curte o masă festivă. În ultimul moment şi-au mai anunțat participarea încă 4 prieteni, astfel că numărul scaunelor necesare a crescut cu 20% față de numărul celor aranjate inițial. Câți prieteni vor fi la aniversare ?

Alina Adam, elevă, Oțelu – Roşu

VI. 269. Alina şi-a propus să citească o carte în 4 zile. În prima zi a citit un sfert din carte, în a doua zi a citit jumătate din paginile rămase, în a treia zi a citit 75 de pagini şi a constatat astfel că în ultima zi mai are de citit exact a şasea parte din numărul paginilor cărții.

Câte pagini are cartea?

Diana Băilă, elevă, Oțelu – Roşu

VI. 270. În triunghiul dreptunghic DAC $\left(m\left(\sphericalangle ADC\right)=90^{o}\right)$, bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACD$ intersectează latura $\left(AD\right)$ în E.

a) Dacă $EM\perp AC$, unde $M\in\left(AC\right)$, arătați că triunghiul DEM este isoscel;

b) Demonstrați că $CE\perp DM$.

Concurs Reghin

Clasa a VII-a

VII. 261. în triunghiul *ABC* latura cea mai mare este *BC* şi are lungimea *a*, iar $AB = c, AC = b$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle B$ intersectează *AC* în *D*, iar bisectoarea unghiului $\sphericalangle C$ intersectează *AB* în *E*. Fie *M* piciorul perpendicularei din *A* pe *BD*, iar *N* piciorul perpendicularei din *A* pe *CE*. Demonstraţi că $MN = \dfrac{b+c-a}{2}$.

Maria Miheţ, Timişoara

VII. 262. Doi elevi extrag pe rând bile dintr-o urnă cu 2009 bile. Ştiind că ei au voie să extragă de fiecare dată cel puţin o bilă şi cel mult 10 bile, câştigând cel care a extras ultima bilă, să se arate că există o strategie de joc care să stabilească învingătorul.

Manuela Prajea, Drobeta Tr. – Severin

VII. 263. Numerele $x+y, y+z, z+x$ sunt direct proporţionale cu 3, 4 şi 5. Determinaţi numărul raţional a pentru care $3x^2 - 2y^2 = az^2$.

Concurs Cluj

VII. 264. Determinaţi numerele naturale nenule care au proprietatea că produsul lor este de 3 ori mai mare decât diferenţa lor.

Antoanela Buzescu, Caransebeş

VII. 265. Daţi un exemplu de două numere reale strict pozitive a şi b cu proprietatea că media lor aritmetică este mai mare cu 1 decât media lor geometrică.

* * *

VII. 266. Triunghiul *ABC* este isoscel de bază $[BC]$ cu $m(\sphericalangle A) > 90^o$. Fie *FD* şi *GE* mediatoarele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$ cu $D \in (AB)$ şi $E \in (AC)$, $F, G \in BC$ iar $DF \cap GE = \{H\}$. Fie T mijlocul laturii $[BC]$. Arătaţi că:

a) ΔHDE este isoscel;

b) $HT \perp BC$;

c) HT este mediatoarea segmentului $[DE]$.

Ştefan Smărăndoiu – Rm. Vâlcea

VII. 267. Determinați numerele naturale nenule şi distincte a,b,c pentru care numărul $S=\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$ este natural.

Mitică Dudău, Galați

VII. 268. Demonstrați că, dacă $n\in\mathbb{N}$, atunci $\frac{49^n+16\cdot 7^n+55}{2\cdot 7^n+22}$ este număr natural.

Concurs Giurgiu

VII. 269. Arătați că nu există numere întregi x şi y pentru care $x^2-3y^2=2012$.

* * *

VII. 270. Pe un cerc avem 21 de puncte albe şi un punct roşu. Considerăm toate poligoanele determinate de aceste puncte. Care dintre poligoane sunt mai multe: cele care au toate vârfurile albe sau cele care au şi un vârf roşu ? Cu cât diferă numărul celor două categorii de poligoane?

Concurs Rm. Vâlcea

Clasa a VIII-a

VIII. 261. Un cub de lemn este vopsit complet în albastru,apoi este tăiat în 216 cubulețe identice. Calculați câte cubulețe au cel puțin o față vosită în albastru.

* * *

VIII. 262. Determinați numerele întregi m pentru care mulțimea $S(m)=\{x\in\mathbb{Z}/m(mx-2)=x+2\}$ este nevidă.

* * *

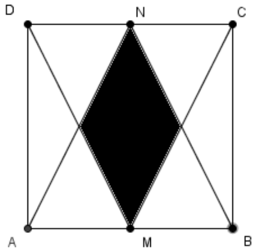
VIII. 263. Pentru orice număr real x se notează $E(x)=10x^2-x^4$ şi se consideră numărul real $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

a) Arătați că $E(a)$ este un număr natural.

b) Determinați valoarea maximă a expresiei $E(x)$.

* * *

VIII. 264. Pătratul $ABCD$ din figura de mai jos are aria egală cu 400. Punctele M şi N sunt mijloacele laturilor (AB), respectiv (CD).



Calculați aria porțiunii haşurate.

* * *

VIII. 265. Dați un exemplu de triplet (a,b,c) de numere reale pentru care $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$.

* * *

VIII. 266. Demonstrați că, pentru orice $a,b>\frac{1}{2}$, este adevărată inegalitatea $a+b\geq\sqrt{(2a+1)(2b-1)}$.

Arătați că există o infinitate de perechi $(a,b), a,b>\frac{1}{2}$ pentru care se obține egalitatea.

* * *

VIII. 267. a) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $x(x+5)=84$.

b) Avem un pătrat care este împărțit în 5 patrulatere cu interioarele disjuncte: 4 dreptunghiuri având aceleaşi dimensiuni şi un pătrat mic. Dacă se ştie că aria pătratului mic este egală cu 25, iar aria fiecărui dreptunghi este egală cu 84, aflați perimetrul pătratului inițial şi realizați un desen care să arate modul de împărțire a pătratului inițial.

Marcel Teleucă, Chişinău

VIII. 268. Determinați numerele întregi a, b, c pentru care

$$a+b\sqrt{2}=c\sqrt{3}.$$

* * *

VIII. 269. Demonstrați că, dacă $a,b,c\in(0,+\infty)$ şi $abc=1$, atunci

$$\frac{1}{a^2+b^2c^2}+\frac{1}{b^2+c^2a^2}+\frac{1}{c^2+a^2b^2}\le\frac{3}{2}.$$

* * *

VIII. 270. Determinați numerele întregi n pentru care există numere prime p şi q astfel încât

$$p(p+1)-q(q+2)=n(n+3).$$

Lista scurtă ONM 2012, Adriana şi Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Clasa a IX-a

IX. 221. Stabiliți care dintre următoarele numere este mai mare: $a=\sqrt{7}-\sqrt{2}$ sau $b=\sqrt{13}-\sqrt{8}$.

* * *

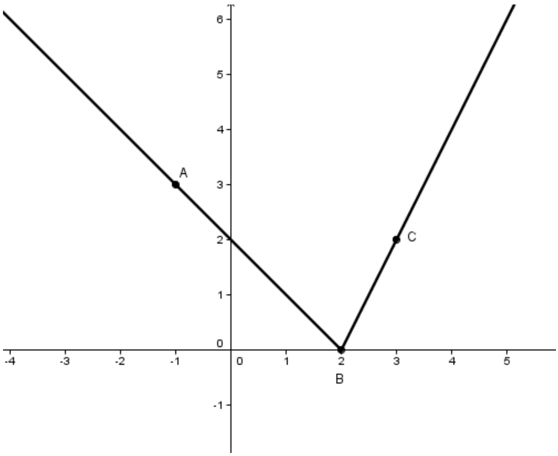
IX. 222. O piesă metalică în formă de disc cu diametrul de 20 cm cântăreşte 3,6 kg. Din această piesă se taie o piesă mai mică,de aceeaşi grosime, în formă de disc cu diametrul de 10 cm. Calculați cât cântăreşte piesa mai mică.

* * *

IX. 223. Dați un exemplu de funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care este strict crescătoare pe $(-\infty,0)$şi strict crescătoare pe $[0,+\infty)$, dar nu este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

* * *

IX. 224. Se consideră punctele $A(-1,3), B(2,0), C(3,2)$. Determinați funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ al cărei grafic este reprezentat în figura de mai jos,



IX. 223. Determinați numerele reale a pentru care ecuațiile $x^2-4x+a=0$ şi $x^2-7x+2a=0$ au o soluție comună.

* * *

IX. 226. Arătați că, dacă $a,b\in\mathbb{R}$, atunci cel puțin una dintre ecuațiile $x^2-4ax+2b-1=0$ şi $x^2-4bx+2a-1=0$ are soluții reale.

* * *

IX. 227. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $\sqrt{x}+\sqrt{y}=32$.

* * *

IX. 228. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\left[\frac{1}{1-x}\right]=\frac{1}{1-[x]}$.

Neculai Stanciu, Sibiu

IX. 229. Demonstrați că $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k(k+1)}}{2k+1}<\frac{n}{2},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$.

* * *

IX. 230. Se consideră o funcție $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ cu proprietatea că

$$f(x+f(y))=y+f(x+2012),\quad \forall x,y\in\mathbb{Z}.$$

a) Arătați că funcția $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $g(x)=f(x)-2012$ este aditivă.

b) Demonstrați că există exact două funcții cu proprietatea din enunț.

Lista scurtă ONM 2012, Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Clasa a X-a

X. 221. Există numere reale x pentru care $\log_2(x+2)\in\mathbb{Z},\log_3(x+3)\in\mathbb{Z}$ şi $\log_4(x+4)\notin\mathbb{Z}$?

* * *

X. 222. Pentru orice numere strict pozitive x,y se notează $E(x,y)=\sqrt[m]{x\cdot\sqrt{y}}\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt[n]{y}}$.

Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $E(3,4)=6.$

* * *

X. 223. Rezolvați ecuația $4^{\sqrt{x-1}}+3^{\sqrt{x^2-4x+3}}=2.$

* * *

X. 224. Arătați că nu există numere întregi x pentru care

$$2x\cdot 2^x+9=3\cdot\left(2x+2^x\right).$$

* * *

X. 225. Dați un exemplu de numere a şi b iraționale pentru care $a^b\in\mathbb{Q}$.

* * *

X. 226. Determinați mulțimea

$$A=\left\{a\in\mathbb{R},a\neq -1/\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2+1)>1,\forall x\in\mathbb{R}\right\}.$$

* * *

X. 227. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, este adevărată inegalitatea

$$\log_{n!}^2 n + \log_{n!}^2 (n-1) + \log_{n!}^2 (n-2)! > \frac{1}{3}.$$

* * *

X. 228. Arătați că dacă $z \in \mathbb{C}$, $\left|z^2+1\right| = 2 \cdot \left|z+1\right|$, atunci $|z| \leq \sqrt{7}$.

Virgil Nicula , București

X. 229. Fie $a, b \in \mathbb{C}^*$ cu $|a+b| = |a| = |b|$. Calculați $\frac{b}{a}$.

Bogdan Enescu , Buzău

X. 230. Pentru orice număr natural nenul *n* se notează $A_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ și U_n numărul funcțiilor $f : A \to \mathbb{N}$ care au proprietatea că

$$\left[\log_2 f(1)\right] + \left[\log_2 f(2)\right] + ... + \left[\log_2 f(k)\right] = \frac{k(k+1)}{2}, \ \forall k \in A_n.$$

a) Determinați cel mai mic număr natural *n* pentru care $U_n > 2012$.

b) Determinați numerele naturale *m* pentru care

$$U_m = 4^{m+1} + \log_2 \frac{4}{m}.$$

(numărul $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *a*).

Lista scurtă ONM 2012, Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

Clasa a XI-a

XI. 221. Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^{2012} = \begin{pmatrix} 1 & 2012 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

* * *

XI. 222. Rezolvați în S_5 ecuația $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

* * *

XI. 223. Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, atunci $\det(A+I_2)=\det(A-I_2)$ dacă şi numai dacă $tr(A)=0$.

* * *

XI. 224. Determinați numerele naturale nenule *n* pentru care, dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, atunci $\det\left({}^tA+iA\right) \in \mathbb{R}^*$.

Gheorghe Alexe, Brăila

XI. 225. Dați un exemplu de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care

$$rang A = 2 \text{ şi } rang(A+I_3)=3.$$

* * *

XI. 226. Determinați limita şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ pentru care $x_1=1$ şi

$$2n \cdot x_{n+1}=(n+1)\cdot x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

* * *

XI. 227. Arătați că ecuația $X^3-7X+6I_2=O_2$ are cel puțin trei soluții în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

* * *

XI. 228. Se consideră $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ cu $\alpha^3=1$ şi mulțimea

$$M(H)=\left\{A \in \mathcal{M}_2(H) \mid A^2+\alpha A+\alpha^2 I_2=O_2\right\}.$$

a) Arătați că, dacă $X \in M(\mathbb{C})$, atunci *X* este inversabilă şi $X^{-1}=X^2$.
b) Demonstrați că $M(\mathbb{R})$ conține un singur element.

* * *

XI. 229. Se consideră un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ de numere reale pentru care $x_o=1, x_1=2$ şi cu proprietatea că $2x_{n+1}=3x_n-x_{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Calculați limita şirului $(x_n)_{n\geq 0}$.

* * *

XI. 230. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left[\ln\left(e+\frac{1}{n}\right)-1\right]$.

Olimpiadă Hunedoara

Clasa a XII-a

XII. 221. Arătați că nu există funcții continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care să admită o primitivă F cu proprietatea că $F(x)\cdot F(1-x)=x,\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$

* * *

XII. 222. Pe o mulțime nevidă M se consideră o lege de compoziție asociativă notată multiplicativ şi pentru care $xy^2=yx$, $\forall x,y\in M$. Să se arate că legea este comutativă.

Concurs Gh.Lazăr, Sibiu

XII. 223. Să se arate că nu există niciun morfism de grupuri $f:(\mathbb{R},+)\to\left(\mathbb{R}^*,\cdot\right)$ pentru care $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0.$

Dumitru Buşneag, Craiova

XII. 224. Fie $(G,\cdot)$ un grup pentru care există $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$ astfel încât $x^n y^n = yx,\ \forall x,y\in G$ .Să se demonstreze că grupul este abelian.

Gheorghe Andrei, Constanța

XII. 225. Dați un exemplu de funcție $f:D\to\mathbb{R}$ derivabilă, pentru care $f'(x)>f(x),\ \forall x\in D.$

* * *

XII. 226. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ şi $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ o primitivă a sa. Să se calculeze: a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{F^{-1}(x)}$.

Olimpiadă Arad

XII. 227. Să se găsească primitivele funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\dfrac{x\cdot e^{x}}{\sqrt{1+e^{x}}}$.

Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

XII. 228. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu următoarele proprietăți:

a) funcția $f\circ f$ admite primitive;

b) $\left|f(x)-f(y)\right|\geq\left|x-y\right|$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Demonstrați că funcția *f* admite primitive.

Cristinel Mortici, Tîrgovişte

XII. 229. Arătați că funcția $f:\left(-1,+\infty\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1+x)$ are o singură tangentă la grafic care trece prin origine.

Ovidiu Bădescu, Reşița

XII. 230. Stabiliți în care dintre următoarele figuri este reprezentarea geometrică a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-x^{3}$.

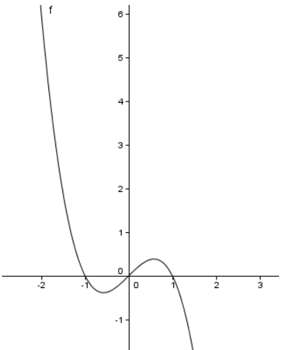


Figura 1.

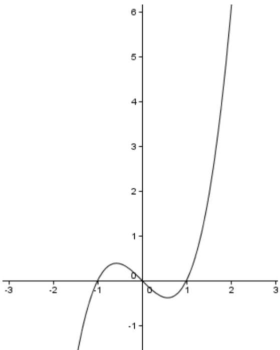


Figura 2.

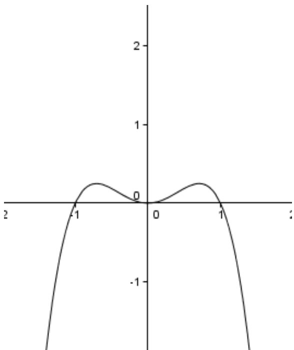


Figura 3.

Probleme alese

A. 29 Să se rezolve ecuația

$$\left(x+a-b-c\right)(x-a)^2+(x+b-c-a)(x-b)^2+(x+c-a-b)(x-c)^2-$$
$$-(x+a-b-c)(x+b-c-a)(x+c-a-b)=0$$

Gheorghe Țiteica, 1903

A. 30 Să se demonstreze că expresia $3^{2n+2}-32n^2-40n-9$, în care $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, este divizibilă cu 512.

Gheorghe Țiteica, 1904

A. 31 Se dă o dreaptă *OL* pe care avem punctul fix *O* şi un punct *A* în plan. Se duce prin *A* o secantă variabilă, care întâlneşte pe *OL* în *B*. Cercul tangent în *B* dreptei *OL* şi având centrul pe *OA* taie secanta în un al doilea punct *C*. Să se demonstreze că tangenta în *C* dusă cercului precedent trece printr-un punct fix.

Gheorghe Țiteica, 1903

A. 32 Se ia un punct *D* pe înălțimea AA' a unui triunghi ABC. Dreapta *EF* care uneşte mijlocul *E* al lui *AC* taie pe *AB* în *M* şi pe *CD* în *N*. Să se demonstreze că dacă unghiul $MA'N$ este drept, atunci punctul *D* este punctul comun înălțimilor triunghiului ABC.

Gheorghe Țiteica, 1904

Rubrica rezolvitorilor

Înainte de a scrie aici ceva, trebuie să vă rugăm din nou ca, atunci când trimiteți rezolvările problemelor, **să scrieți pe plic**, jos în stânga, **clasa** în care sunteți !!!

Aşa cum anunțam în RMCS nr. 39, la pagina 21, punctajelor obținute în urma evaluării soluțiilor trimise pe adresa noastră li se adună cele publicate în Gazeta Matematică (sau pe www.viitoriolimpici.ro pentru participanții la concursul Gazetei), precum şi punctajul ponderat obținut (dacă e cazul) la ediția anterioară a Concursului RMCS.

Reamintim că punctajele cumulate le puteți găsi (atunci când comisia de evaluare finalizează această activitate) pe pagina www.neutrino.ro, la secțiunea CS MATE, 2012 – 2013, Concursuri, tabere, Rezolvitori _ concurs RMCS 2013.

Poşta redacției

Printre atâtea plicuri completate corect(în primul rând cu indicarea clasei!), pline cu soluții corecte, unele chiar originale, am primit unul care ne-a încântat, de la elevul *Andrei Popa* din Băile Herculane (care nu a uitat să îşi laude profesorul şi dirigintele). Pe lângă câteva probleme propuse, Andrei ne scrie: *Să ştiți că ediția a VII-a a acestui concurs a ieşit carte. Eu şi colegii mei din Băile Herculane suntem bucuroşi că încercați să ne luminați mintea. Vă cer iertare pentru scris, ştiu că este urât.*

Dragă Andrei, în primul rând trebuie să îți spunem că scrisul tău nu e nici pe departe aşa cum spui; nu e într-adevăr ca la carte, dar înțelegem mult mai bine ce scrii tu decât ce scriu unii dintre elevii de clasa a XII-a; aşadar, chiar dacă e perfectibil, dă-i înainte cu rezolvările şi propunerile ! În al doilea rând, trebuie să mărturisim că rândurile, şi deci gândurile tale, ne-au bucurat: deşi sunt puține de acest gen care ajung la noi, sunt dintre cele care ne fac să continuăm, sunt dintre cele care ne susțin, care ne întăresc convingerea că poate, ceea ce încercăm, an de an, merită continuat. Nu putem decât să îți mulțumim aşadar!

Miniconcursul revistei

Problema 4.

Dintr-o bucată dreptunghiulară de carton cu dimensiunile de $7\ \text{cm} \times 16\ \text{cm}$, realizează desfăşurarea unui tetraedru cu un volum cât mai mare posibil.

Dacă ai obținut un tetraedru cu un volum mai mare de $73\ \text{cm}^3$, trimite un desen cu liniile după care ai îndoit cartonul ca să realizezi tetraedrul.

Elevul care trimite primul soluția corectă la problema propusă va primi din partea autorului cartea *Matematică distractivă pentru clasele VII – VIII,Editura Art, 2012, autor I. Dăncilă.*

(N.red. : Pe lângă forma absolut superbă de prezentare – prezentare grafică de excepție, cartea reprezintă o apariție inedită, atractivă, incitantă, aşa cum de fapt ne-a obişnuit autorul; nu putem fi decât bucuroşi şi onorați că se numără printre colaboratorii noştri).

Rezolvarea trebuie trimisă pe adresa :

Ioan Dăncilă, str. Drumul Taberei nr. 67, bl. TD 44, ap. 42
Sector 6, Bucureşti, cod poştal 061 366

Să vedem acum ce s-a mai întâmplat la miniconcursul revistei:

Problema 2. (RMCS 39)

Am câteva creioane colorate şi am constatat că:
○ toate creioanele, mai puțin 3, sunt roşii;
○ toate creioanele, mai puțin 4, sunt verzi;
○ toate creioanele, mai puțin 5, sunt albastre.
Câte creioane colorate am?

Solutia problemei 2 şi comentariile autorului:

Insistența cu care s-a solicitat răspunsul corect şi complet ar fi trebuit să pună pe gânduri. Problema *pare* doar comună şi de fapt are o altă soluție decât cea trimisă de toți rezolvitorii: 6 creioane colorate.

În enunț nu se precizează că sunt creioane colorate **numai** în culorile roşu, verde, albastru.

Considerăm că x este numărul de creioane de alte culori (decât roşu, verde, albastru) şi atunci , dacă n este numărul de creioane colorate, atunci sunt:

(n - 3) creioane roşii;
(n - 4) creioane verzi şi
(n - 5) creioane albastre

asa că avem ecuația , de unde $2n + x = 12$.

Evident x este par şi :

○ pentru $x = 0$, avem $n = 6$ *;*
○ pentru $x > 2$ nu există un numar natural n (necesar mai mare sau egal cu 5);
○ pentru $x = 2$, obtinem $n = 5$, de unde rezultă că am două creioane roşii, un creion verde, 0 creioane albastre şi două creioane de altă culoare (decât roşu, verde sau albastru).

Cu regret, la problema nr. 2 nu am primit nicio soluție corectă şi completă!

Ioan Dăncilă