Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Caraş-Severin

REVISTA DE MATEMATICĂ

A ELEVILOR ŞI PROFESORILOR

DIN JUDEŢUL CARAŞ-SEVERIN

Nr. 40, An XIII – 2012

Acest număr al revistei are avizul Comisiei pentru publicaţii a SSMR

Editura „Neutrino”
Reşiţa, 2012

© 2012, Editura „Neutrino”
Titlul: Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din judeţul Caraş-Severin
I.S.S.N. 1584-9481

Mobil: 0741017700
www.neutrino.ro
E-mail: contact@neutrino.ro

CUPRINS

Despre prietenie

● Un prieten se găseşte într-o sută de ani, iar într-o zi poţi găsi o sută de duşmani.

Asadi Tusi

● Cel mai bun prieten este doar acela care, când ne doreşte binele, ni-l doreşte de dragul nostru, chiar dacă nimeni nu o află.

Aristotel

● Există un stadiu al prieteniei la care nu mai e nevoie să vorbeşti spre a te înțelege, nici să te sfătuieşti pentru a acționa în comun.

Nicolae Titulescu

● Numai prietenia găseşte privirea sau fraza foarte simplă care pune balsam pe rănile noastre.

Jean Cocteau

● Ceea ce este sublim în prietenie nu este atât a muri pentru prietenul tău într-o ocazie strălucită, cât a te sacrifica pentru el zilnic şi cu discreție.

Stendhal

● Nu va avea niciodată prieteni adevărați cel care se teme să-şi facă duşmani.

William Hazlitt

● Alături de prieteni nu trebuie neapărat să fii când au dreptate, trebuie să fii însă atunci când greşesc.

Andre Malraux

● Am învățat că indiferent cât de bun îți este un prieten, oricum te va răni din când ... Iar tu trebuie să îl ierți pentru asta.

Octavian Paler

● Nu rupe firul unei prietenii, căci chiar dacă îl legi din nou, nodul rămâne.

Octavian Paler

Matematica...altfel (partea a X-a)

Ioan Dăncilă, Bucureşti

Zero

Povestea lui *zero* este povestea uneia dintre cele mai rodnice şi controversate idei născocite de mintea omului. De la naşterea sa, acum mai bine de 16 secole, *zero* a străbătut trei etape: semn de marcaj, cifră şi, în fine, număr.

Semnul de marcaj, opera numerației figurate, a apărut ca o necesitate a scrierii poziționale. Era nevoie de eliminarea oricărei confuzii prin plasarea unui semn care, printr-o prezență, marca o absență.

S-a întâmplat precum în butada:

- *Sunteți toți ? Cine lipseşte să ridice mâna ?*

A fost răspunsul la ghicitoarea:

Cine-i acest rotogol,
Pus unde e locul gol ?
Cine spune adevărul
Că acolo... nu e mărul ?

<u>Trei zerouri istorice</u>

Pentru prima dată babilonienii au inventat, în scrierea numerelor, un semnn de separare, o veritabilă cifră *zero.*

A fost apoi rândul savanților maya să inventeze un semn particular, un oval orizontal, aducând o cochilie de melc, care juca rolul de separator eficace în scrierea, fără ambiguitate, a numerelor.

Indienilor le revine însă meritul de a-l fi inventat, prin secolul VI d.H., pe *zero* şi cele trei funcții ale sale.

Cum figurăm nimicul ? s-au întrebat indienii şi s-au gândit la un mic cerc, *sunya*, vid în sanscrită. Tradus în arabă, *sunya* devine *sifr,* care la rândul său a devenit în latină *zefrum*, apoi *zefro*, *zero.*

Astfel în numeroase limbi, ultimul venit în lumea cifrelor, *sifr*, oferă numele său întregii colecții de ... cifre.

Cum şi cifrele de la 1 la 9 sunt şi numere, de ce n-ar fi şi *zero* număr? Şi cum un nou venit în lumea matematicii are o definiție, numărul nul va fi definit ca rezultat al scăderii din el însuşi. Diferența dintre el şi el: $0-0=0$.

Se trece de la *zeroul* logic, la *zeroul* aritmetic care este “o valoare” şi ne permite să răspunde la întrebarea: Câți ?

Ce fel de număr este *zero ?*

Numărul zero este un număr natural par. Este element neutru pentru operaţia de adunare şi element absorbant pentru înmulţire. Este cardinalul mulţimii vide. Nu este nici pozitiv şi nici negativ. Cineva l-a asemănat cu o balama între mulţimea numerelor pozitive şi mulţimea numerelor negative. Împărţirea la 0 este prohibită!

Zero este dimensiunea punctului, reprezintă evenimentul imposibil, este una dintre valorile binare ale logicii. Este originea axelor de coordonate, originea unei măsurători. *Zerourile* unui polinom sunt rădăcinile sale. Funcţia constant *zero* ia valoarea 0 pe tot domeniul domeniul ei de definiţie. *Zero* participă în patru din cele şapte cazuri de nedeterminare din analiza matematică.

Cum spuneam, *zero* este considerat ca un punct de plecare în măsurători; se notează astfel cu $0^o C$ punctul de îngheţare al apei şi cu $0^o K$ *zeroul* absolut termodinamic; există un meridian *zero*, Ecuatorul determină latitudinea 0^o , există un nivel *zero* (cel al apei mării).

În chimie există elemente *zero*valente, deoarece nu se pot combina cu niciun alt element. Reglarea pe un instrument de măsură a lui 0 se numeşte zerotaj.

Ştiaţi că există şi o teoremă a zerourilor (Nullstellensatz), denumire dată de David Hilbert ? că a existat un avion (japonez) numit *zero*? că în stabilirea unor date există o mare problemă datorită lipsei anului 0 din calendarul creştin ? Isus Hristos s-a născut în anul 1!

Am putea să mai amintim şi de o pictură celebră a lui Jasper Johns, o creaţie din 1959, intitulată *Cifra zero* şi care a fost cumpărată de un colecţionar care a plătit pentru ea o sumă de dolari terminată în multe zerouri.

În fine, Delia Matache (N&D) declara în urmă cu ceva timp că s-ar tunde *zero* pentru 100 000 de euro; sigur sunt mulţi adolescenţi care fac asta pe gratis şi din convingeri profunde şi ascunse nouă: nicio problemă cu asta, poate că nu înţelegem noi influenţa matematicii în formarea propriei imagini.

Gânduri despre zero.

○ Nu există decât o singură manieră de a fi nul şi o infinitate de posibilităţi de a fi infinit.

G. Cantor

○ Zero nu este limita inferioară a caracterelor pozitive, ci limita superioară a celor negative.

I. Ionescu

○ Nu sunt de acord cu matematica. Consider că o sumă de zerouri este un număr înfiorător.

S.E. Lec

○ Cel care în viață a plecat de la zero pentru a ajunge în existența sa la nimic, nu trebuie să mulțumească nimănui.

Pierre Dac

○ Semnificația rezultatului $0^n = 0$, pentru orice număr natural *n* nu poate fi decât aceasta: o nulitate ridicată la orice putere tot nulitate rămâne.

Anonim

○ Există zerouri cărora li se par că sunt elipse şi că în jurul lor se înverte lumea.

S. E. Lec

○ În orice acțiune, risc zero nu există niciodată.

Anonim

○ Pe tripticul: unu, zero, infinit se bazează întregul imperiu al numerelor.

D. Guedj

○ Oh, dacă zerourile ar fi rămas numai în matematică...

V. Ghica

○ Se întâmplă des să încerce diferite zerouri să mă pună între paranteze sau chiar să mă raporteze la ei; nu pot decât să mă înalț atunci spre înălțimi, spre infinit, dincolo de mărginirea lor.

Aproape anonim

○ Din păcate, există parcă o infinitate de persoane publice care emană zilnic idei al căror şir de inteligențe e convergent către zero.

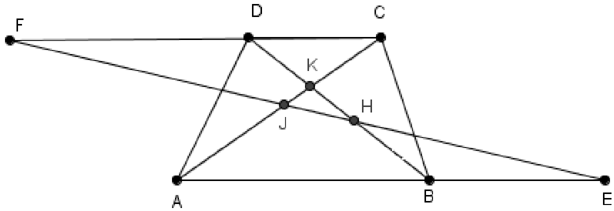
Aproape anonim

Unde este greşeala ?

Vă invităm acum să găsiţi greşeala din demonstraţia următoarei "teoreme" :

Suma lungimilor bazelor unui trapez este egală cu zero.

"Demonstraţie"



Considerăm trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ şi $AB = a, CD = b$, apoi considerăm E astfel încât $B \in (AE)$, $BE = b$ şi F astfel încât $D \in (FC)$, cu $DF = a$. Notăm $FE \cap DB = \{H\}, AC \cap DB = \{K\}$, iar $DK = x, HK = y$ şi $HB = z$. Din $\Delta DKC \sim \Delta BKA$ se ajunge la $\frac{b}{a} = \frac{x}{y+z}$, iar din $\Delta BHE \sim \Delta DHF$ deducem $\frac{b}{a} = \frac{z}{x+y}$.

Avem aşadar $y + z = \frac{a}{b} \cdot x$ (1) şi $x + y = \frac{a}{b} \cdot z$ (2).

Scădem, membru cu membru, relaţiile (1) şi (2) şi se ajunge la $x - z = \frac{a}{b} \cdot (x - z)$, de unde $\frac{a}{b} = -1 \Rightarrow a + b = 0$.

Inegalitatea lui Milne şi o aplicaţie în fizică

REZUMAT. În această notă vom pune în evidenţă o aplicaţie în fizică a unei inegalităţi algebrice.

Nicolae Bourbăcuţ – Sarmizegetusa, Hunedoara

1. INTRODUCERE. Scopul acestei scurte note este de a pune în evidenţă, dacă mai era cazul, legătura existentă între diferitele domenii ale ştiinţei, în cazul de faţă fiind vorba de fizică şi matematică. Rezultatul descris în titlu este cunoscut, dar este interesant modul în care a apărut şi apoi cum poate fi utilizat..

2. O PROBLEMĂ DE FIZICĂ. Ne propunem pentru început să prezentăm o problemă clasică de fizică, mai precis de electricitate. Enunţul este următorul:

Problema 2.1. *Se consideră circuitele electrice din figurile următoare:*

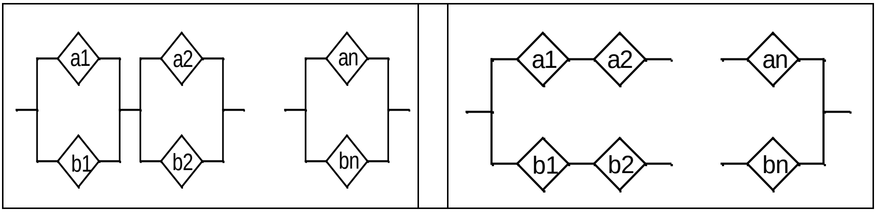


Figura A **Figura B**

Tensiunea în capete este aceeaşi pentru ambele circuite. Numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, ..., a_n$ *şi, respectiv* $b_1, b_2, ..., b_n$*, reprezintă valorile rezistenţelor inserate în cele două circuite. Dacă notăm cu* R_A *rezistenţa totală a întregului circuit din figura* A*, respectiv cu* R_B *rezistenţa totală a întregului circuit din figura* B *se pune problema comparării numerelor* R_A *şi* R_B.

Folosind considerente de natură algebrică vom demonstra în paragraful 4 rezultatul cuprins în propoziţia următoare:

Propoziția 2.2. *În condițiile descrise în problema 2.1., are loc inegalitatea*

$$R_A \le R_B,$$

cazul de egalitate fiind posibil dacă şi numai dacă $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$.

3. INEGALITATEA LUI MILNE. Pornind de la o problemă de astrofizică legată de studiul coeficienților de absorție, E.A. Milne a prezentat în 1925 o inegalitate integrală. Rezultatul este o interesantă rafinare a inegalității lui Cauchy şi este descris în propoziția 3.1.

Propoziția 3.1. *Fie* $f,g:[a,b]\to(0,\infty)$ *două funcții integrabile. Atunci*

$$\int_a^b\left(f(x)+g(x)\right)dx\cdot\int_a^b\frac{f(x)g(x)}{f(x)+g(x)}dx\le\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right).$$

Detaliile se pot găsi în [2]. Tot acolo putem găsi demonstrația acestei inegalități care are la bază un rezultat care a rămas cunoscut în literatura matematică ca **inegalitatea lui Milne**.

Propoziția 3.2. (***Inegalitatea lui Milne***) *Fie numerele reale strict pozitive* $a_1,a_2,...,a_n$ *şi respectiv* $b_1,b_2,...,b_n$. *Atunci :*

$$\sum_{i=1}^n\left(\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}\right)\sum_{i=1}^n\left(a_i+b_i\right)\le\sum_{i=1}^n a_i\sum_{i=1}^n b_i.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$.

Demonstrație: Sunt cunoscute mai multe demonstrații. Trei dintre ele pot fi găsite în [3]. Prezentăm în continuare o altă soluție. Pentru orice $k=\overline{1,n}$ notăm $s_k=\sum_{i=1}^n a_i\sum_{i=1}^n b_i-\sum_{i=1}^n\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}\sum_{i=1}^n\left(a_i+b_i\right)$. Evident $s_1=0$.

Vom demonstra că $s_{k+1}-s_k\ge 0,\forall k=\overline{1,n-1}$. Obținem astfel:

$$s_{k+1}-s_k=$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1}a_i\sum_{i=1}^{k+1}b_i-\sum_{i=1}^{k+1}\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}\sum_{i=1}^{k+!}\left(a_i+b_i\right)-\sum_{i=1}^{k}a_i\sum_{i=1}^{k}b_i+\sum_{i=1}^{k}\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}\sum_{i=1}^{k}\left(a_i+b_i\right)$$

$$= a_{k+1}\sum_{i=1}^{k} b_i + b_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_i - \frac{a_{k+1}b_{k+1}}{a_{k+1}+b_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}\left(a_i + b_i\right) - \left(a_{k+1}+b_{k+1}\right)\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i b_i}{a_i + b_i}$$

$$= a_{k+1}\sum_{i=1}^{k}\left(b_i - \frac{a_i b_i}{a_i + b_i}\right) + b_{k+1}\sum_{i=1}^{k}\left(a_i - \frac{a_i b_i}{a_i + b_i}\right) - \frac{a_{k+1}b_{k+1}}{a_{k+1}+b_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}\left(a_i + b_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\frac{a_{k+1}b_i^2}{a_i + b_i} + \sum_{i=1}^{k}\frac{b_{k+1}a_i^2}{a_i + b_i} - \sum_{i=1}^{k}\frac{a_{k+1}b_{k+1}\left(a_i + b_i\right)}{a_{k+1}+b_{k+1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\frac{a_{k+1}b_i^2\left(a_{k+1}+b_{k+1}\right) + b_{k+1}a_i^2\left(a_{k+1}+b_{k+1}\right) - a_{k+1}b_{k+1}\left(a_i + b_i\right)^2}{\left(a_{k+1}+b_{k+1}\right)\left(a_i + b_i\right)}$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\frac{\left(a_i b_{k+1} - a_{k+1}b_i\right)^2}{\left(a_{k+1}+b_{k+1}\right)\left(a_i + b_i\right)} \geq 0 .$$

Cazul de egalitate se deduce din calculul anterior.

4. DEMONSTRAȚIA PROPOZIȚIEI 2.2. Revenim acum la problema din paragraful 2. Vom utiliza două rezultate clasice din electricitate, legate de rezistență. Dacă avem un circuit in serie în care sunt inserate rezistențele cu valorile $r_1, r_2, ..., r_n$, atunci rezistența totală r a acestui circuit este dată de relația

$$r = r_1 + r_2 + ... + r_n \; .$$

În cazul unui circuit paralel, în care sunt inserate rezistențe cu aceleaşi valori, rezistența totală r va fi obținută din relația

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + ... + \frac{1}{r_n} .$$

Figura A conține n circuite paralele legate în serie. Atunci fiecare dintre ele are o rezistență $r_i = \dfrac{a_i b_i}{a_i + b_i}$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, iar de aici obținem

$$R_A = \frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} + \frac{a_2 b_2}{a_2 + b_2} + ... + \frac{a_n b_n}{a_n + b_n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i b_i}{a_i + b_i} .$$

Figura B conține două circuite în serie legate apoi în paralel. Primul circuit în serie are rezistența $r_1 = a_1 + a_2 + ... + a_n$, iar cel de al doilea are rezistența $r_2 = b_1 + b_2 + ... + b_n$. Atunci $R_B = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$, adică

$$R_B = \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n)}{(a_1 + a_2 + ... + a_n) + (b_1 + b_2 + ... + b_n)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i}{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)}.$$

Concluzia se obține acum prin aplicarea Propoziției 3.2.

5. CONCLUZIE. Deşi are caracter algebric, inegalitatea lui Milne se dovedeşte extrem de utilă şi în fizică. În aceeaşi situație se găsesc şi alte rezultate matematice mai mult sau mai puțin cunoscute, ceea ce dovedeşte că evoluția acestei discipline este strâns corelată de evoluția altor ramuri ale ştiinței. De aceea, la final, sugerăm cititorilor să caute şi alte exemple de acest gen.

BILIOGRAFIE

[1] H. ALZER, A. KOVACEC, *The inequality of Milne and its converse,* Journal of Inequalities and Applications 2002,Vol. 7(4), 603-611.

[2] E. A. MILNE, *Note on Rosseland's integral for the stellar absorption coefficient*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 85 (1925) 979–984.

[3] *** - *Solution to problem 2113,* Crux Mathematicorum, 23(1997), nr.2, 112-114.

Probleme rezolvate din RMCS nr. 36

Clasa a V-a

V. 220 Suma a şapte numere naturale este 2011; dacă trei dintre numere au suma egală cu 1234, arătați că produsul celor şapte numere se divide cu 4.

Mircea Fianu, Bucureşti

Soluție: Dacă cele şapte numere sunt $a_1, a_2, ..., a_7$, atunci $a_1 + a_2 + a_3 = 1234$ şi $a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 777$. Deducem că cel puțin un număr din mulțimea $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ este par şi cel puțin unul din mulțimea $B = \{a_4, a_5, a_6, a_7\}$ este par. Cum $A \cap B = \emptyset$, produsul celor 7 numere este divizibil cu 4.

V. 221 Arătați că, pentru orice număr natural nenul n, există $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{N}$ astfel încât $14^n = a_n{}^2 + b_n{}^2 + c_n{}^2$.

Olimpiadă Olt

Soluție : $14^1 = 1^2 + 2^2 + 3^2, 14^2 = 4^2 + 6^2 + 12^2$ şi astfel

$$14^{2k+1} = 14^{2k} \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right) = \left(14^k\right)^2 + \left(2 \cdot 14^k\right)^2 + \left(3 \cdot 14^k\right)^2, \text{ iar}$$

$$14^{2k+2} = 14^{2k} \cdot \left(4^2 + 6^2 + 12^2\right) = \left(2 \cdot 14^k\right)^2 + \left(6 \cdot 14^k\right)^2 + \left(12 \cdot 14^k\right)^2.$$

V. 222 Determinați numerele naturale nenule care împărțite la 4 dau câtul *a* şi restul *b*, iar împărțite la 10 dau câtul *b* şi restul *a*.

* * *

Soluție : Folosind teorema împărțirii cu rest avem $n = 4a + b, b \le 3$ şi $n = 10b + a, a \le 9$. Din $4a + b = 10b + a$ rezultă $3b = a \Rightarrow b = 1, a = 3$ sau $b = 2, a = 6$ sau $b = 3, a = 9$. Aşadar $n \in \{13, 26, 39\}$.

V. 223 Ovidiu şi Marius au plecat în acelaşi timp să se viziteze unul pe celălalt, mergând cu bicicleta. Neatenți, ei nu s-au observat unul pe celălalt în momentul întâlnirii. După întâlnire, Ovidiu a mai făcut 4 minute până acasă la Marius, iar Marius a mai făcut un minut până acasă la Ovidiu. Cât timp a mers fiecare dintre cei doi prieteni cu bicicleta ?

Olimpiadă Galați

Soluție : Ovidiu : 6 minute, Marius : 3 minute.

V. 225 Suma a cinci numere naturale nenule este 25. Aflați cel mai mare divizor comun al acestor numere, ştiind că cel puțin două dintre ele sunt distincte.

Dorel Miheț, Timişoara

Soluție: Dacă a,b,c,d,e sunt cele cinci numere şi k un divizor comun al lor, atunci $a=k\cdot x, b=k\cdot y, c=k\cdot z, d=k\cdot t, e=k\cdot u$, cu $x,y,z,t,u\in\mathbb{N}^*$. Deducem imediat $(x+y+z+t+u)\cdot k=25$, deci k este un divizor al lui 25, adică 1, 5 sau 25. Pentru $k=5$ sau $k=25$, fiecare dintre numerele a,b,c,d,e este un multiplu de 5, absurd (dintre 5 numere, nu toate egale, cu suma 25, cel puțin unul este mai mic decât 5). Aşadar $k=1$, deci c.m.m.d.c al numerelor este 1.

V. 226 Determinați ultima cifră a produsului tuturor numerelor impare de cinci cifre.

* * *

Soluție: Produsul tuturor acestor numere conține ca factor şi numărul $55555=5\cdot 11111$, aşadar produsul este un număr divizibil cu 5; în plus, acest produs este număr impar, aşadar ultima cifră este 5.

V. 227 Câte cifre se folosesc pentru a scrie toate numerele naturale de la 1 la 999 ?

* * *

Soluție : Există 9 numere de o cifră, $99-9=90$ numere de două cifre şi $999-100+1=900$ numere de trei cifre. Pentru scrierea tuturor acestor numere se folosesc astfel $9+2\cdot 90+3\cdot 900=2889$ cifre.

V. 228 Arătați că există un singur număr prim $n=\overline{abcd}$ cu suma cifrelor egală cu 25 şi pentru care cifrele d,c,b sunt, în această ordine, numere naturale consecutive.

Marius Golopența, Băile Herculane

Soluție : Deducem imediat că d este o cifră impară diferită de 5, deci $d\in\{1,3,7,9\}$. Dacă $d=9$, atunci $c=10$, care este însă un număr de două cifre !. Pentru $d=1\Rightarrow n=\overline{a321}$ şi pentru $d=3\Rightarrow n=\overline{a543}$; în fiecare dintre aceste cazuri n nu poate avea suma cifrelor 25. Avem aşadar doar $d=7\Rightarrow n=1987$, care verifică toate condițiile din enunț.

V. 229 Mulțimile A şi B au următoarele proprietăți :
a) Fiecare mulțime are câte 3 elemente (numere naturale).
b) Dacă a şi b sunt elemente diferite ale mulțimii A, atunci $(a+b)\in B$.
c) $1\in A, 2\in A$.
d) $A\cap B$ are un singur element.
Determinați mulțimile A şi B.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: Notăm cu a al treilea element al mulțimii A. Acesta nu poate fi 0, deoarece atunci $(0+1)\in B, (0+2)\in B$, contradicție cu d). Aşadar $a\geq 3$; în aceste condiții $B=\{1+2, 1+a, 2+a\}$ poate avea în comun cu $A=\{1,2,a\}$ doar pe $a=3$, deci $A=\{1,2,3\}, B=\{3,4,5\}$.

Clasa a VI-a

VI. 220 Aflați numerele de trei cifre care au proprietatea că sunt divizibile cu 11 şi au suma cifrelor divizibile cu 11.

Andrei Eckstein, Timişoara

Soluție : $\overline{abc}\,\vdots\,11 \Rightarrow a+c-b\,\vdots\,11$ dar cum şi $a+b+c\,\vdots\,11$, rezultă că $2b\,\vdots\,11$, deci $b=0$, de unde $a+c=11$.
Obținem: $\overline{abc}\in\{209, 308, 407, 506, 605, 704, 803, 902\}$.

VI. 221 Determinați perechile (a,b) de numere naturale pentru care

$$\frac{a+1}{a+3}=\frac{b^2+1}{b+2}.$$

Heidi Feil, Oțelu – Roşu

Soluție : $\frac{a+1}{a+3}<1 \Rightarrow b^2+1<b+2$, de unde $b(b-1)<1 \Rightarrow b=0$ sau $b=1$. Se obțin imediat perechile $(1,0)$ şi $(3,1)$.

VI. 222 Determinați numerele întregi x, y pentru care

$$\frac{5}{x+4}-\frac{3}{y+2}=1.$$

Adriana Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: $\frac{5}{x+4}=1+\frac{3}{y+2}=\frac{y+5}{y+2}\Rightarrow 5(y+2)=(x+4)(y+5)\Rightarrow (y+5)/(y+2)\Rightarrow$

$(y+5)/3$, de unde, imediat, avem $y\in\{-8,-6,-4,-2\}$. Se analizează cazurile posibile şi se ajunge la $(x,y)\in\{(6,-8),(16,-6),(-14,-4)\}$.

VI. 223 Dacă $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, pentru orice numere naturale $a_1,a_2,...,a_n$, $b_1,b_2,...,b_n$, se notează $a=\sum_{k=1}^{n}a_k$ şi $b=\sum_{k=1}^{n}b_k$. Determinați numărul natural n pentru care sunt verificate simultan condițiile :

a) $a_i-b_i=3,$ pentru orice $i\in\{1,2,...,n\}$;

b) Mulțimea $\{x\in\mathbb{N}/b<x<a\}$ are exact 2012 elemente.

Mircea Fianu, Bucureşti

Soluție : $a=b_1+3+b_2+3+...+b_n+3=b+3n;$ din $b<x<b+3n\Rightarrow 3n-1=2012$, deci $n=671.$

VI. 224 Numerele naturale de la 1 la 13 se scriu pe o dreaptă astfel încât fiecare număr divide suma numerelor scrise înaintea lui.

Dacă primul număr este 13 şi al doilea este 1, determinați al treilea număr ce trebuie scris.

Olimpiadă Dolj

Soluție : Suma numerelor scrise pe dreaptă este egală cu $\frac{13\cdot 14}{2}=91.$

Ultimul număr scris trebuie să fie un divizor al lui 91, pentru că trebuie să dividă suma numerelor scrise înaintea lui. Acesta nu poate fi decât 7. Deoarece $13+1=14=2\cdot 7$ şi ultimul număr scris este 7, rezultă că al treilea număr ce trebuie scris este 2. Există însă un astfel de şir de numere ? Răspunsul este afirmativ şi *trebuie* pus în evidență :
$13,1,2,8,12,4,10,5,11,6,9,3,7.$

VI. 225 Într-un triunghi ABC se notează cu I punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor interioare, iar $ID\perp AB, D\in AB$ şi $IE\perp AC, E\in AC.$ Se consideră $F\in(AB), G\in(AC)$ astfel încât $FG\,//\,BC.$ Demonstrați că : a) $(BD)\equiv(CE)$ dacă şi numai dacă $(AB)\equiv(AC)$; b) $FB+GC=FG.$

* * *

Soluție : a) Folosim proprietatea punctelor de pe bisectoare unui unghi de a fi egal depărtate de laturile acestuia şi obținem
$\Delta DAI \equiv \Delta EAI \Rightarrow AD = AE.$ Dacă $BD = EC$, atunci
$AD + BD = AB = AE + EC = AC.$ Reciproc, dacă $(AB) \equiv (AC)$, atunci
$AB - AD = BD = AC - AE = EC.$
b) $\sphericalangle CBI \equiv \sphericalangle FIB \equiv \sphericalangle FBI$ şi $\sphericalangle GIC \equiv \sphericalangle BCI \equiv \sphericalangle GCI$ conduc la concluzia că triunghiurile BFI şi CGI sunt isoscele, de unde
$FB + GC = FI + IG = FG.$

VI. 226 Se consideră un segment (AB) de lungime 1 m şi punctele $M_1, M_2, ..., M_n \in (AB)$ astfel încât
$$AM_1 = \frac{1}{2} \cdot AM_2 = \frac{1}{3} \cdot AM_3 = ... = \frac{1}{n} \cdot AM_n = \frac{1}{n+1} \cdot AB.$$
Determinați numărul natural n pentru care punctul M_{17} este mijlocul segmentului (AB).

Olimpiadă Iaşi

Soluție : Se obține $AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = ... = M_nB = \frac{1}{n+1}.$ M_{17} este mijlocul segmentului $(AB) \Rightarrow AM_{17} = \frac{1}{2}$, deci $\frac{17}{n+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow n = 33.$

VI. 227 În triunghiul ABC există egalitățile $BC = 2 \cdot AB$ şi $m(\sphericalangle B) = 2 \cdot m(\sphericalangle C).$ Stabiliți natura triunghiului.

* * *

Soluție : Considerăm $D \in (AC)$ astfel încât BD este bisectoare şi notăm cu M mijlocul lui (BC). Deoarece $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle DCB$, avem că BDC este triunghi isoscel şi deci $DM \perp BC.$ Din $\Delta BDM \equiv \Delta BDA$ (LUL),
deducem $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle M) = 90^o$, deci triunghiul ABC este dreptunghic.

VI. 228 Determinați numerele naturale a, b, c, d ştiind că $0 < a < b < c,$ a, b, c sunt direct proporționale cu 3, 4 şi d, iar $3a + 4b + c \leq 50.$

* * *

Soluție: $a=3k, b=4k, c=dk$, unde $k\in\mathbb{N}^*$ (justificare!). Din $3a+4b+c\leq 50$ rezultă $k(25+d)\leq 50$. Cum $25+d>25 \Rightarrow k=1$.
Aşadar $a=3, b=4, c=d>4$; din $25+d\leq 50$ deducem $d\in\{5,6,...,25\}$.

VI. 229 Pe laturile (AB) şi (AC) ale triunghiului echilateral ABC se construiesc în exterior triunghiurile dreptunghice isoscele BAD şi CAE, având unghiurile drepte în *A*.
Dacă $BD\cap CE=\{F\}$, arătați că $AF\perp DE$.

* * *

Soluție: $m(\sphericalangle CBF)=m(\sphericalangle BCF)=180^o-105^o=75^o$, deci $BF=CF$.
Triunghiurile ABF şi ACF sunt congruente, deci $\sphericalangle BFA\equiv\sphericalangle CFA$.
Triunghiul DFE este isoscel cu baza DE (deoarece $\Delta DAB\equiv\Delta EAC\Rightarrow BD=CE$);
AF este bisectoare, aşadar $AF\perp DE$.

Clasa a VII-a

VII. 220 Determinați perechile (x,y) de numere întregi pentru care $2x^2-2y\leq 15$ şi $2x^2+x(1-4y)-2y=15$.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție : Evident că începem cu a doua relație din enunț (!).
Aceasta se poate scrie $(2x+1)(x-2y)=15$.
De aici, continuarea e destul de facilă. Studiem 8 cazuri posibile (care durează cam 2 minute, maxim).
Cazul (I) : $2x+1=1, x-2y=15$, de unde $x=0, y\notin\mathbb{Z}$.
Cazul (II): $2x+1=3, x-2y=5$, de unde $x=1, y=-2$; deocamdată e în regulă.
Cazul (III) : $2x+1=5, x-2y=3\Rightarrow x=2, y\notin\mathbb{Z}$. Continuăm la fel si, ținând cont de prima condiție din enunț, ajungem la perechile $(-1,2)$ şi $(-1,7)$.

VII. 222 Notăm cu $s(n)$ suma cifrelor numărului natural n.

Arătați că $s\left(1^2\right)+s\left(2^2\right)+2\left(3^2\right)+...+s\left(2011^2\right)$ este divizibil cu 9

Andrei Eckstein, Timişoara

Soluție: Se ştie că $n-s(n)$ este divizibil cu 9 pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
Folosind acest lucru, avem
$1^2-s\left(1^2\right)+2^2-s\left(2^2\right)+3^2-s\left(3^2\right)+...+2011^2-s\left(2011^2\right)$ este divizibil cu 9, avem $\left(1^2+2^2+...+2011^2\right)-\left(s\left(1^2\right)+s\left(2^2\right)+s\left(3^2\right)+...+s\left(2011^2\right)\right)$ este divizibil cu 9.

Dar $1^2+2^2+...+2011^2=\dfrac{2011(2011+1)(2\cdot 2011+1)}{6}=2011\cdot 1006\cdot 1341$ este divizibil cu 9, de unde rezultă concluzia.

VII. 223 Fie *ABCD* un pătrat de arie *S*. Dacă E este mijlocul laturii (DC), BE intersectează latura AD în *F*, *M* este mijlocul laturii (EF) şi AM intersectează latura (DC) în *Q*, arătați că aria triunghiului *DQM* este egală cu $\dfrac{S}{24}$.

Irina Avrămescu, Reşița

Soluție: *E* este mijlocul laturii (DC), aşadar $A_{BEC}=\dfrac{S}{4} \Rightarrow A_{DEF}=\dfrac{S}{4}$;

cum *DM* este mediană, deducem că $A_{DEM}=\dfrac{S}{8}$.

Deoarece *Q* este centru de greutate în triunghiul *AEF*, ajungem imediat la

$A_{DQM}=\dfrac{S}{8}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{S}{24}$.

VII. 224 Se consideră un triunghi echilateral ABC cu lungimea laturii egală cu a. Se notează cu M şi N mijloacele laturilor (BC), respectiv (AC), iar cu S simetricul lui B față de dreapta AC.

Calculați: a) Perimetrul triunghiului AMN.

b) Lungimea segmentului (MS).

c) Minimul perimetrului triunghiului BMP, unde P este un punct oarecare situat pe (AC).

*** * ***

Soluție : a) $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$**,** $MN = \frac{a}{2}$**,** $P(AMN) = \frac{a}{2}\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)$**.**

b) $BS = a\sqrt{3}$**.** Dacă T este proiecția lui S pe BC, atunci $CT = \frac{a}{2}$.

Avem acum $ST = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ şi $MS = \frac{a\sqrt{7}}{2}$**.**

c) $BP + PM = PS + PM \geq MS$**.** Perimetrul minim se obține dacă M,P,S sunt coliniare.

Se ajunge acum imediat la $P_{\min}(BMP) = BM + MS = \frac{a}{2}\left(1+\sqrt{7}\right)$.

VII. 225 În triunghiul ABC cu $AC < 2\cdot BC$, BM este mediană, iar CN este bisectoare $(M \in AC, N \in AB)$. Demonstrați că, dacă $m(\sphericalangle BMN) = m(\sphericalangle CNM) = 30^o$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Ioan Caşu, Timişoara

Soluție: Dacă $P \in (BC)$ cu $CP = CM$ şi $CN \cap MP = \{Q\}, NP \cap BM = \{R\}$, atunci CQ este mediană şi înălțime în triunghiul CMP (fiind bisectoare), iar NQ are aceleaşi proprietăți în triunghiul NPM, deci $NP = NM$.

În plus, $m(\sphericalangle PNM) = 2\cdot 30^o = 60^o$, aşadar triunghiul PNM este echilateral.

Deoarece MR este bisectoarea unghiului $\sphericalangle NMP$, MR este şi mediană şi înălțime, aşadar triunghiul NBP este isoscel, iar BR este bisectoarea unghiului $\sphericalangle NBP$.
Deducem că BM este bisectoare şi mediană în triunghiul $ABC \Rightarrow c = a$.

Pe de altă parte, $BN = BP \Rightarrow \dfrac{ac}{a+b} = a - \dfrac{b}{2} \Rightarrow \dfrac{a^2}{a+b} = \dfrac{2a-b}{2} \Rightarrow a = b$,

aşadar $a = b = c$.

VII. 226 În triunghiul ABC, MA şi NB sunt mediane. Arătați că, dacă $AM = AC$ şi $BN = BC$, atunci triunghiul ABC este isoscel.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: Folosind notațiile uzuale, vom arăta că
$\left(m_a = b \text{ şi } m_b = a\right) \Rightarrow a = b$.

Deoarece $m_a{}^2 = \dfrac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$, din ipoteză ajungem la

$\begin{cases} 2\left(b^2+c^2\right)-a^2 = 4b^2 \\ 2\left(a^2+c^2\right)-b^2 = 4a^2 \end{cases}$. Scădem membru cu membru cele două relații şi

obținem $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$.

VII. 227 Arătați că în orice triunghi ABC este adevărată inegalitatea

$$b + c - a < 2b \cdot \cos\frac{A}{2}.$$

Dorel Miheț, Timişoara

Soluție: Considerăm pe dreapta AB un punct D astfel încât $A \in (BD)$ şi $AD = AC = b$. Deducem astfel că triunghiul ACD este isoscel şi $m\left(\sphericalangle BDC\right) = \dfrac{1}{2} m\left(\sphericalangle BAC\right)$. Avem astfel în triunghiul

$BCD: BD < BC + DC \Rightarrow AB + AD = c + b < a + 2b\cos\dfrac{A}{2}$, concluzia fiind imediată.

VII. 228 Pe catetele AC şi AB ale triunghiului dreptunghic ABC se construiesc în exterior pătratele $ABDE$ şi $ACFG$ şi se notează $DC \cap AB = \{U\}, BF \cap AC = \{V\}$.

a)Arătaţi că $UV \parallel DF$.

b)Dacă $UV \cap BD = \{P\}, UV \cap CF = \{Q\}$, arătaţi că $DF = PQ + UV$.

Dorel Miheţ, Timişoara

Soluţie: a) Deoarece $m(\sphericalangle DAB) = m(\sphericalangle CAF) = 45^o$, deducem că $m(\sphericalangle DAF) = 180^o$, aşadar punctele D, A, F sunt coliniare. Pentru a arăta că $UV \parallel DF$ este suficient să arătăm că $m(\sphericalangle AUV) = m(\sphericalangle AVU) = 45^o$ sau, echivalent, $AU = AV$. Deoarece $AU \parallel CF \Rightarrow \frac{AU}{CF} = \frac{DA}{DF}$. Analog avem şi $\frac{AV}{DB} = \frac{FA}{FD}$; deducem astfel că $AU = AV = \frac{AB \cdot AC\sqrt{2}}{FD}$. b) Din paralelogramele $AUQF$ şi $AVPD$ rezultă

$AF = UQ, AD = PV \Rightarrow DF = AF + AD = UQ + PV = PQ + UV$.

VII. 229 Se consideră un trapez $ABCD$ în care $AB \parallel CD$ şi $AB > CD$, iar M şi N sunt mijloacele laturilor (AD), respectiv (BC). Arătaţi că, dacă $P, Q \in (MN)$ astfel încât $MP = PQ = QN$, iar DP şi CQ se intersectează pe AB, atunci $AB = 2 \cdot CD$.

Traian Lalescu

Soluţie: Notăm $DP \cap CQ = \{S\}$. Deoarece MP şi PQ sunt linii mijlocii în ΔDAS, respectiv ΔDSC, deducem $MP = \frac{AS}{2}, PQ = \frac{DC}{2} \Rightarrow$

$AS = DC$ (1). Analog se arată că $SB = SC$ (2).

Prin adunarea relaţiilor (1) şi (2) se obţine egalitatea din concluzie.

Clasa a VIII-a

VIII. 220 Se consideră $x, y \in \mathbb{R}$ şi se notează $x - y = a$, $x^2 - y^2 = b \neq 0$. Fără a calcula *x* şi *y*, exprimaţi $x^3 + y^3$ în funcţie de *a* şi *b*.

Concurs Hunedoara, 1972

Soluție : $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = b \neq 0 \Rightarrow x+y = \frac{b}{a}$. Ridicăm la pătrat această ultimă egalitate, precum şi prima din ipoteză şi ajungem la $xy = \frac{b^2 - a^4}{4a^2}$. Folosind $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$, ajungem la $x^3 + y^3 = \frac{b^3 + 3a^4 b}{4a^3}$. De remarcat condiția $b \neq 0$ din enunț care conduce şi la $a \neq 0$.

VIII. 221 Arătați că unul şi numai unul dintre numerele $A = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$ şi $B = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$ se divide cu 5, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Ioan Caşu, Timişoara

Soluție : $A \cdot B = \left(2^{2n+1} + 1\right)^2 - 2^{2n+2} = 2^{4n+2} + 1 = 4^{2n+1} + 1$ Deoarece suma $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ se divide cu $a+b$, deducem că $A \cdot B$ se divide cu 5 pentru orice număr natural *n* şi astfel cel puțin unul dintre numere se divide cu 5. Dacă ambele numere s-ar divide cu 5, atunci şi $A - B = 2^{n+2}$ ar fi divizibil cu 5, fals.

VIII. 222 Determinați valoarea maximă a expresiei $A = \min\left\{x, y + \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right\}$, unde $x, y \in (0, +\infty)$.

Concurs Germania

Soluție: Avem evident $x \geq A$ (1), $y + \frac{1}{x} \geq A$ (2) şi $\frac{1}{y} \geq A$ (3). Din (1) deducem $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{A}$ şi, din (3): $y \leq \frac{1}{A}$, aşadar $A \leq y + \frac{1}{x} \leq \frac{2}{A} \Rightarrow A \leq \sqrt{2}$.

Valoarea maximă a lui A este $\sqrt{2}$ şi se obține pentru $x = \sqrt{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

VIII. 223 Determinați numerele naturale care au exact 6 divizori naturali şi pentru care suma inverşilor acestor divizori este egală cu 2.

Mircea Lascu, Zalău

Soluție : Folosim următorul rezultat (!) :
Dacă descompunerea numărului natural n *în factori primi este* $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, *unde* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *sunt numere prime, distincte două câte două, atunci numărul divizorilor lui* n *este* $\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$.

În cazul nostru avem $\tau(n) = 6$, de unde $k = 1, \alpha_1 = 5$ sau $k = 2, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$.
Aşadar, numerele naturale care au exact 6 divizori naturali sunt de forma $n = p^5$ (cu p număr prim) sau $n = pq^2$ (cu p, q numere prime distincte).
Studiem acum cele două cazuri posibile :

Cazul (1) $n = p^5$. Comform ipotezei avem
$1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^5} = 2$. Calcule imediate conduc la
$2p^5 - p^6 = 1$ sau $p^5 \cdot (2 - p) = 1 \Rightarrow p / 1,$ absurd.

Cazul (2) $n = pq^2$, aşadar $1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{pq} + \frac{1}{pq^2} = 2$. Calcule relativ simple, puțin mai laborioase totuşi, conduc la $p = 1 + \frac{2(q+1)}{q^2 - q - 1} \in \mathbb{N}$.

Deoarece $q^2 - q - 1 = q(q-1) - 1$ este impar, este necesar să avem $(q^2 - q - 1) / (q + 1).$ Observăm că pentru $q \geq 3$ avem $q + 1 \leq q^2 - q - 1$ (justificare !) ; rămâne aşadar de studiat cazul $q = 2.$ Se obține imediat $p = 7$ şi deci un singur număr are proprietățile din enunț, anume $n = 7 \cdot 2^2 = 28.$

VIII. 224 Se consideră numerele reale x_1, x_2, x_3 distincte două câte două. Arătați că dacă numerele reale y_1, y_2, y_3 satisfac simultan relațiile: $y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1) = 0$ şi $y_1(x_3^2 - x_2^2) + y_2(x_1^2 - x_3^2) + y_3(x_2^2 - x_1^2) = 0$, atunci $y_1 = y_2 = y_3$.

Andrei Eckstein, Timişoara

Soluție: Relațiile din enunț sunt echivalente cu
$\left(y_1-y_2\right)\left(x_3-x_2\right)=\left(x_2-x_1\right)\left(y_2-y_3\right)$ şi
$\left(y_1-y_2\right)\left(x_3^2-x_2^2\right)=\left(x_2^2-x_1^2\right)\left(y_2-y_3\right)$.
Dacă $\left(y_1-y_2\right)\left(x_3-x_2\right)=\left(x_2-x_1\right)\left(y_2-y_3\right)=z\neq 0$, împărțind cea de-a doua relație la *z* am obține $x_3+x_2=x_2+x_1$, adică $x_3=x_1$ ceea ce contrazice faptul că x_1,x_2,x_3 sunt distincte două câte două .
Rezultă că $z=0$ adică $y_1-y_2=0$ şi $y_2-y_3=0$ (pentru că $x_3-x_2\neq 0$ şi $x_2-x_1\neq 0$), de unde concluzia.

VIII. 225 Se consideră un cub $ABCDA'B'C'D'$ cu lungimea laturii de $6\ dm$ şi în care se notează $\{O\}=AC'\cap A'C$. Pentru vopsirea cubului se folosesc 180 *g* de vopsea. Se taie cubul vopsit în cubulețe cu latura de $2\ dm.$ Ce cantitate de vopsea este necesară pentru a vopsi suprafețele noi apărute, nevopsite ?

*** * ***

Soluție : Se obțin 27 de cubulețe. Acestea au în total 162 de fețe, dintre care 54 sunt vopsite. Rămân de vopsit 108 fețe. Cantitatea necesară vopsirii acestora este $108\cdot\frac{180}{54}=360\ g$

VIII. 226 Determinați numerele naturale x şi y pentru care $x^2+3=2^y$.

Mircea Lascu, Zalău

Soluție : Remarcăm de la început că x nu poate fi multiplu de 3, aşadar x e de forma $3p+1$ sau $3p+2, p\in\mathbb{N};$ în fiecare din aceste cazuri, restul împărțirii lui x^2 la 3 este 1. O condiție necesară pentru ca şi 2^y să dea restul 1 prin împărțire la 3 este $y=2k, k\in\mathbb{N}.$ Notăm $z=2^k$ şi ecuația din enunț conduce la $\left(z-x\right)\left(z+x\right)=3$. Se obține imediat $x=1, z=2\Rightarrow x=1, y=2.$

VIII. 227 Se consideră un triunghi ABC şi se notează cu G centrul său de greutate şi cu D punctul în care mediana din A intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC. Demonstraţi că $BGCD$ este paralelogram dacă şi numai dacă $BC^2 = \dfrac{AB^2 + AC^2}{2}$.

Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

Soluţie : Folosind puterea punctului M, mijlocul lui (BC), faţă de cerc avem $MA \cdot MD = \dfrac{BC^2}{4}$ (*). Patrulaterul $BGCD$ este paralelogram dacă şi numai dacă $MD = MG = \dfrac{m_a}{3}$, unde m_a este lungimea medianei din A.

Relaţia (*) devine $\dfrac{m_a{}^2}{3} = \dfrac{a^2}{4} \Leftrightarrow \dfrac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}$, adică $a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2}$.

VIII. 228 Arătaţi că nu există numere naturale nenule a şi b astfel încât $N = (15a + b)(a + 15b)$ să fie o putere a lui 3.

Olimpiadă Grecia

Soluţie : Presupunem că există $a, b \in \mathbb{N}^*$ şi $k \in \mathbb{N}^*$ **minim** pentru care $N = 3^k$.Deoarece $15a + b \geq 16, a + 15b \geq 16$, rezultă $k \geq 5$.

Cum $3/(15a + b) \Rightarrow 3/b$ şi, analog, $3/a$. Aşadar există $c, d \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a = 3c, b = 3d$ şi deci $(15c + d)(c + 15d) = 3^p$, unde $p = k - 2 \in \mathbb{N}^*$, ceea ce contrazice minimalitatea lui k.

VIII. 229 Se consideră un pentagon convex $ABCDE$ în care $\mathcal{A}(\Delta ABC) = \mathcal{A}(\Delta ABD) = \mathcal{A}(\Delta ACD) = \mathcal{A}(\Delta ADE) = s$. Exprimaţi, în funcţie de s, $\mathcal{A}(\Delta BCE)$.

Olimpiadă Austria

Soluţie : Cum pentagonul este convex şi $\mathcal{A}(\Delta ABC) = \mathcal{A}(\Delta ABD)$ deducem $CD // AB$. Analog $\mathcal{A}(\Delta ABD) = \mathcal{A}(\Delta ACD) \Rightarrow AD // BC$. Evident, $ABCD$ este astfel paralelogram. Deoarece $\mathcal{A}(\Delta ACD) = \mathcal{A}(\Delta ADE)$ rezultă că $d(E, AD) = d(C, AD) = d(D, BC)$ şi astfel $d(E, BC) = 2d(D, BC)$, de unde $\mathcal{A}(\Delta BCE) = 2s$.

Clasa a IX-a

IX. 196 Determinați numerele naturale nenule n pentru care numărul $N=\left[\dfrac{n^3+8n^2+1}{3n}\right]$ este prim.

Gabriel Popa, Iaşi

Soluție : Dacă $n=3k, k\in\mathbb{N}^*$, atunci $N=k(3k+8)$, care este prim doar pentru $k=1$, deci $n=3$. Dacă $(n,3)=1\Rightarrow 3/\left(n^2-1\right)$ şi

$$N=\frac{n^2-1}{3}+\left[\frac{8n+1}{3}+\frac{1}{3n}\right].$$

Dacă $n=3k+1$, atunci $N=(k+3)(3k+1)$, care este prim numai pentru $k=0\Rightarrow n=1$.

Dacă $n=3k+2$, atunci $N=3\left(k^2+4k+2\right)$, care este compus pentru orice *k*. Aşadar $n\in\{1,3\}$.

IX. 197 Determinați numerele reale pozitive x,y,z pentru care

$$(x+y)(1+z)=8 \text{ şi } xyz=4.$$

Antoanela Buzescu, Caransebeş

Soluție: Folosind inegalitatea mediilor avem

$8=(x+y)(1+z)\geq 2\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{z}=4\cdot\sqrt{xyz}=8$.

Egalitatea se obține pentru $x=y$ şi $z=1$, deci $x=y=2, z=1$.

IX. 199 Determinați numerele reale a şi b astfel încât ecuațiile $x^2-ax+b=0$ şi $x^2-bx+a=0$ să aibă soluțiile numere naturale distincte.

Gheorghe Andrei, Constanța

Soluție: Din ipoteza ca rădăcinile să fie naturale se ajunge la $a,b\in\mathbb{N}$; folosind tot relațiile lui Viete avem $x_1+x_2=a=x_3\cdot x_4$ şi $x_1\cdot x_2=x_3+x_4=b$, relații care conduc la

$(x_1-1)(x_2-1)+(x_3-1)(x_4-1)=2$.

Analizăm situațiile posibile şi obținem $a=6, b=5$.

Clasa a X-a

X. 196 Rezolvați ecuația $\left(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)\cdot\left(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)=1.$

Concurs Rîmnicu Sărat, 2011

Soluție: Avem succesiv $\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}=\dfrac{1}{\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}}$ sau

$\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}=\sqrt{1+\cos^2 x}-\cos x \Leftrightarrow$

$\sin x+\cos x=\sqrt{1+\cos^2 x}-\sqrt{1+\sin^2 x}$, de unde

$\sin x+\cos x=0 \Rightarrow \operatorname{tg} x=-1$ şi astfel $x\in\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}.$

X. 197 Fie $a,b,c\in\mathbb{C}^*$ cu $|a|=|b|=|c|.$

Arătați că $0\le(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\le 9.$

Gheorghe Andrei , Constanța

Soluție: Folosim următorul rezultat binecunoscut: $z\cdot\overline{z}=|z|^2=r^2, \forall z\in\mathbb{C}.$

$$(a+b+c)\left(\frac{\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}}{r^2}\right)=\frac{|a+b+c|^2}{r^2}\ge 0.$$ Pe de altă parte avem şi:

$$(a+b+c)\left(\frac{\overline{a+b+c}}{r^2}\right)= =\frac{|a+b+c|^2}{r^2}\le\frac{\left(|a|+|b|+|c|\right)^2}{r^2}=\frac{9r^2}{r^2}=9.$$

Clasa a XI-a

XI. 197 Determinați funcțiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea

$$x^2 f(x)=f(x^2), \forall x\in\mathbb{R}.$$

Concurs Rîmnicu Sărat, 2011

Soluție: Se fac transformări succesive $x\to x^2$, se adună, membru cu membru egalitățile obținute, se trece la limită pentru $n\to\infty$, folosind continuitatea funcției şi se ajunge la $f(x)=ax^2, \forall x\in\mathbb{R}$, cu $a=f(1)$. Problemă clasică.

XI.198 Fie $A\subseteq\mathbb{R}, A\neq\varnothing$ astfel încât

$$\left(x+r(y-x)\right)\in A,\quad \forall x,y\in A,\forall r\in\mathbb{Q}\cap[0,1].$$

Arătați că dacă pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent, cu $x_n\in A$, $\forall n\in\mathbb{N}$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\in A$, atunci A este interval.

Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

Soluție: $A\subseteq\mathbb{R}$ este interval dacă şi numai dacă $\forall x,y\in A$ şi $\forall a\in[0,1]$, avem: $(1-a)x+ay\in A.$ Pentru $a\in[0,1]$ avem însă că există un şir $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu $r_n\in\mathbb{Q}\cap[0,1]$ astfel încât $r_n\to a$. Cum $\left(x+r_n(y-x)\right)\in A,\forall n\in\mathbb{N}$ deducem că $x+r_n(y-x)\to x+a(y-x)=(1-a)x+ay\in A.$

XI. 199 Dacă $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, arătați că $(AB-BA)^2=O_2$ dacă şi numai dacă $\det[A(B+I_2)-B(A+I_2)]=\det(A-B)$

Florin Stănescu,Găeşti

Soluție. Pentru început demonstrăm următoarea echivalență: Dacă $X,Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ atunci:

$$Tr(X)\cdot Tr(Y)=Tr(X\cdot Y)\Leftrightarrow \det(X+Y)=\det X+\det Y \quad \textbf{(1).}$$

Demonstrație:

din $X^2-Tr(X)\cdot X+\det X\cdot I_2=O_2$ aplicând urma, obținem:

$$\det X=\frac{1}{2}\left[(TrX)^2-Tr\left(X^2\right)\right].$$

Folosind această relație, putem scrie:

$$\det(X+Y)-\det X-\det Y=\frac{1}{2}\left[\left(Tr(X+Y)\right)^2-Tr(X+Y)^2\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\left[(TrX)^2-TrX^2\right]-\frac{1}{2}\left[(TrX)^2-Tr\left(X^2\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\left[(TrY)^2-Tr\left(Y^2\right)\right]=TrX\cdot TrY-Tr(X\cdot Y)\Rightarrow$$

$$Tr(X)\cdot Tr(Y)=Tr(X\cdot Y)\Leftrightarrow \det(X+Y)=\det X+\det Y$$

Folosind proprietățile urmei unei matrice,avem:

$$Tr\left[(A-B)(AB-BA)\right]=Tr\left(A^2B\right)-Tr(ABA)-Tr(BAB)+Tr\left(B^2A\right)=$$

$$=Tr\left(A^2B\right)-Tr\left(A^2B\right)-Tr\left(B^2A\right)+Tr\left(B^2A\right)=0,$$

şi, cum

$$Tr\left[(AB-BA)\right]=0\Rightarrow Tr\left[(A-B)(AB-BA)\right]=$$

$$=Tr(A-B)\cdot Tr\left[(AB-BA)\right]$$

(amândoi termenii fiind 0), în continuare, aplicând **(1)**, avem:

$$\det(A-B+AB-BA)=\det(A-B)+\det(AB-BA)\Rightarrow$$

$$\det\left[A(B+I_2)-B(B+I_2)\right]=\det(A-B)+\det(AB-BA)(2)$$

Folosind **(2),** putem scrie:

$$\det\left[A(B+I_2)-B(A+I_2)\right]=\det(A-B)\Leftrightarrow$$

$$\det(A-B)+\det(AB-BA)=$$

$$\det(A-B)\Leftrightarrow\det(AB-BA)=0\Leftrightarrow(AB-BA)^2=O_2$$

(Am folosit relația Hamilton-Cayley pentru matricea $AB-BA\Rightarrow$

$$(AB-BA)^2-Tr(AB-BA)(AB-BA)+\det(AB-BA)\cdot I_2=O_2$$

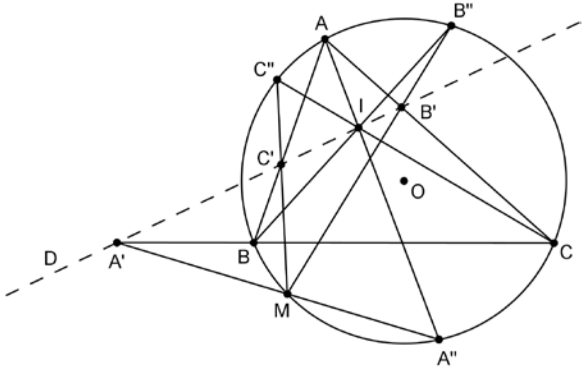
$$\Rightarrow(AB-BA)^2=O_2\Leftrightarrow\det(AB-BA)=0.$$

Probleme alese

A.11 Se dă un triunghi ABC înscris într-un cerc $\mathcal{O}$. O dreaptă D taie laturile triunghiului ABC în A', B', C'. Se uneşte un punct I al dreptei D cu vârfurile A, B, C; dreptele IA, IB, IC taie cercul $\mathcal{O}$ în A'', B'', C''. Arătați că dreptele $A''A'$, $B''B'$, $C''C'$ se întâlnesc într-un punct pe cercul $\mathcal{O}$.

Gheorghe Țițeica

Soluție :



Demonstrație:

Ne vom servi de teorema lui *Pascal*: laturile opuse ale unui hexagon înscris într-un cerc se întâlnesc în trei puncte situate pe o dreaptă.

Fie M punctul unde $A''A'$ taie din nou cercul $\mathcal{O}$.

Ne propunem să arătăm că atât $B''B'$, cât şi $C''C'$ trec prin punctul M. Să considerăm hexagonul $B''BCAA''M$ înscris în cercul $\mathcal{O}$. Perechile de laturi opuse ($B''B$ şi AA''), (BC şi $A''M$) şi (CA şi MB'') se întâlnesc, în virtutea teoremei amintite, în trei puncte aşezate în linie dreaptă. Însă, $B''B$ şi AA'' se taie în I, BC şi $A''M$ în A'; aşadar AC şi $B''M$ se întâlnesc pe dreapta IA', adică în punctul B', ceea ce arată că $B''B'$ trece prin M. În acelaşi mod se arată că $C''C'$ trece prin M considerând hexagonul $C''CABB''M$.

A.12 Se consideră trei cercuri $\mathcal{C}_1(O_1, r_1), \mathcal{C}_2(O_2, r_2), \mathcal{C}_3(O_3, r_3)$, exterioare două câte două şi având raze diferite. Notăm cu M_1 punctul de intersecție a tangentelor exterioare comune la cercurile $\mathcal{C}_2$ şi $\mathcal{C}_3$, cu M_2 punctul de intersecție a tangentelor exterioare comune la cercurile $\mathcal{C}_3$ şi $\mathcal{C}_1$ şi cu M_3 punctul de intersecție a tangentelor exterioare comune la cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$. Arătați că punctele M_1, M_2, M_3 sunt coliniare.

Jean le Rond d' Alembert.

Soluție (după o idee a Domnului Profesor Gheorghe Ekstein) :

În punctele O_1, O_2, O_3 ridicăm perpendiculare pe planul $(O_1O_2O_3)$, perpendiculare pe care considerăm , de aceeaşi parte a planului $(O_1O_2O_3)$, punctele P_1, P_2 şi respectiv P_3 astfel ca $O_1P_1 = r_1, O_2P_2 = r_2, O_3P_3 = r_3$. Vom arăta că punctele P_1, P_2, M_3 sunt coliniare. Deoarece $O_1P_1 \parallel O_2P_2$ şi $O_1P_1 = r_1 \neq r_2 = O_2P_2$, $O_1O_2P_2P_1$ este trapez. Fie $\{M\} = O_1O_2 \cap P_1P_2$. Avem $\dfrac{MO_1}{MO_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(1)$. Dacă M_3 este punctul de intersecție al tangentelor exterioare comune la cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$, atunci $M_3 \in O_1O_2$ şi $\dfrac{M_3O_1}{M_3O_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(2)$. Deoarece $M, M_3 \in O_1O_2 \setminus (O_1O_2)$ relațiile (1) şi (2) implică $M = M_3$, de unde $M_3 \in (P_1P_2P_3)$. Analog se arată că $M_1 \in (P_1P_2O_3)$ şi $M_2 \in (P_1P_2P_3)$, deci $M_1, M_2, M_3 \in (P_1P_2P_3) \cap (O_1O_2O_3)$. Planele $(P_1P_2P_3)$ şi $(O_1O_2O_3)$ se taie după o dreaptă care conține punctele $M_1, M_{2,} M_3$ de unde concluzia.

<u>*Observație:*</u>

Teorema rămâne adevărată şi dacă în loc de tangente exterioare comune considerăm: pentru două perechi de cercuri tangentele interioare comune, iar pentru cea de-a treia pereche tangentele exterioare comune. Demonstrația de mai sus se poate adapta uşor considerând două dintre punctele P_i de o parte a planului $(O_1O_2O_3)$, iar cel de-al treilea de cealaltă parte a planului.

Probleme propuse

(Se primesc soluții **până în data de 1 septembrie 2012**, nu mai târziu!.
Pe plic scrieți clasa în care sunteți, vă rugăm DIN NOU !)

Clasa a II-a

II.131. Timp de o săptămână, veverița Alvin a mâncat alune. Luni a mâncat 6 alune, apoi în fiecare dintre zilele următoare a mâncat cu 3 alune mai multe decât în ziua precedentă. Câte alune a mâncat Alvin ?

Nicoleta Toader, Oțelu – Roşu

II.132. O bucată de sfoară se taie în trei bucăți, apoi fiecare bucată se taie în câte patru bucăți. Câte tăieturi au fost făcute ?

* * *

II.133. În Săptămâna „Şcoala altfel”, piesa de teatru „Jack şi vrejul de fasole” a fost vizionată la Sala „Lira” din Reşița de către 56 elevi din clasele întâi şi cu 29 mai mulți elevi din clasele a doua. Ştiind că numărul elevilor din clasele a treia şi a patra a fost, în total, cu 18 mai mic decât al celor din clasele întâi şi a doua, află câți elevi au vizionat spectacolul.

Mariana Mitrică, Reşița

II. 134. Un bloc cu zece nivele (parter şi nouă etaje) are patru scări : *A*, *B*, *C* şi *D*. La fiecare nivel, pe fiecare scară, sunt trei apartamente. Apartamentele sunt numeroate, în ordine, cu numere naturale consecutive, începând cu 1 (primul apartament de la parterul scării *A*). La ce scară şi la ce nivel se află apartamentul cu numărul 100 ?

Dragoş Şerban, elev, Deva

II. 135. Suma a trei numere este 100. Primele două numere au suma 77, iar al treilea număr este cu 20 mai mic decât al doilea. Aflați cele trei numere.

Dragoş Şerban, elev, Deva

II. 136. Câte mere avea Emil dacă, după ce i-a dat lui Victor 12 mere şi a mai primit de la Crin 7 mere, a ajuns să aibă 13 mere ?

Dragoş Şerban, elev, Deva

II. 137. Emil s-a născut când Traian avea 15 ani; Emil are azi, în anul 2012, 46 de ani. În ce an s-a născut Traian ?

Dragoş Şerban, elev, Deva

II. 138. Se dă şirul de numere: 299, 587, 839, 695, 9623, 7831. Găsiți regula pe care o respectă doar 5 dintre numerele date şi precizați numărul care nu respectă regula.

Antoanela Buzescu, Caransebeş

II. 139. Zâna cea bună are două baghete *magice*, una albastră şi una galbenă. Într-o cutie sunt 28 de iepuraşi, iar în altă cutie sunt 20 de ursuleți. La o atingere cu bagheta albastră pe fiecare cutie, dispar 5 ursuleți şi 7 iepuraşi, iar la o atingere cu bagheta galbenă pe fiecare cutie apar 5 ursuleți şi 4 iepuraşi.

a) Câte atingeri cu bagheta albastră sunt necesare pentru ca fiecare cutie să rămână goală ?

b) Fără să fi folosit bagheta albastră, câte atingeri cu bagheta galbenă sunt necesare pentru ca în ambele cutii să avem acelaşi număr de jucării ?

Nicoleta Toader, Oțelu – Roşu

II. 140. Într-o livadă s-au plantat 32 peri, 23 meri şi un număr de cireşi cu 13 mai mic decât dublul numărului de meri.

Câți pomi mai puteau fi plantați, dacă pe terenul respectiv încăpeau 150 pomi ?

Neta Novac, Reşița

Clasa a III-a

III. 131. Suma vârstelor a şapte copii este egală cu 65 de ani. Peste câți ani suma vârstelor lor va fi egală cu 100 de ani ?

Antoanela Buzescu, Caransebeş

III. 131. Andrada a ales un număr, l-a înmulțit cu 5, la rezultat a adunat 6 şi suma obținută a împărțit-o la 7; Andrada a ajuns astfel la numărul 3. Silviu a ales un alt număr, l-a înmulțit cu 7, la rezultat a adunat 6, iar suma obținută a împărțit-o la 5, ajungând astfel la numărul 4. Care dintre cei doi prieteni a ales un număr mai mare ?

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

III. 133. Daniel pleacă de la şcoală spre casă cu viteza de 60 de metri pe minut, iar Ovidiu, tatăl său, pleacă în acelaşi moment de acasă spre şcoală cu viteza de 100 de metri pe minut. Care este distanța dintre cei doi cu două minute înainte de a se întâlni ?

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

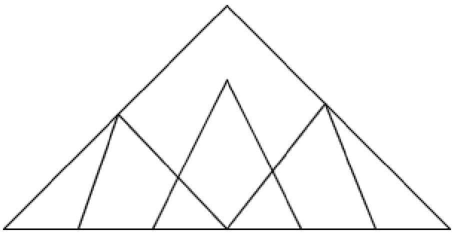
III.134. Pentru a cumpăra 5 caiete nu am bani suficienți: îmi lipseşte un leu. Cumpăr aşadar doar 4 caiete şi îmi mai rămân 2 lei. Ce sumă am avut şi cât costă un caiet ?

Mircea Cristian, inginer, Oțelu – Roşu

III. 135 . Bunica a cumpărat pentru cei doi nepoți ai săi câte o pereche de pantaloni şi o cămaşă. Ştiind că două cămăşi costă cât o pereche de pantaloni, iar cămaşa este mai ieftină decât pantalonii cu 5 lei, află câți lei a plătit bunica.

Neta Novac, Reşița

III. 136. Câte triunghiuri sunt în figura de mai jos ?



Ana Ciupală, elevă, Braşov

III. 137. Pe trei rafturi se găsesc 53 cărți. Să se afle câte cărți se găsesc pe fiecare raft, dacă pe al doilea raft sunt cu 3 cărți mai puține decât un sfert de pe primul, iar pe al treilea sunt de două ori mai puține decât pe primul raft.

Neta Novac, Reşița

III. 138 . Doi canguri vor să ajungă la ferma *C.* Cangurul Teddy, care face salturi de câte 4 metri, pleacă de la ferma *A*, iar cangurul Reddy, care face salturi de câte 2 metri, pleacă de la ferma *B.*

Se ştie că distanța dintre fermele *A* şi *B* este de 400 de metri, iar cea dintre fermele *B* şi *C* este de 360 de metri. Care dintre cei doi canguri face, în linie dreaptă, mai multe salturi pentru a ajunge la ferma *C* ?

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

III. 139 . Un număr natural de trei cifre se numeşte *frumos* dacă suma cifrelor sale este egală cu 12.

1) Arătați că există cel puțin şase numere *frumoase* pentru care produsul cifrelor este egal cu 18.

2) Calculați câte numere *frumoase* există.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

III. 140 . Un brad *minune* creşte în fiecare an cu 2 metri. De Ziua Pădurii, Ana, Dana şi Rozalia au plantat 21 de brazi *minune.* Ana a plantat de două ori mai mulți brazi decât Dana şi de patru ori mai mulți decât Rozalia.

a) Câți brazi *minune* a plantat fiecare dintre cele trei prietene ?

b) Dacă fiecare brad avea la început 2 metri, după câți ani se pot tăia brazii pentru a obține cel puțin 250 de metri de material lemnos ?

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Clasa a IV-a

IV 131. Pornind de la unul dintre numerele 3, 4 sau 5, numărând din 7 în 7, am ajuns la numărul 2012. Aflați numărul de la care am pornit.

Nicoleta Toader, Oțelu – Roşu

IV 132. Într-un tramvai erau 68 de călători. La prima stație a coborât un sfert din numărul călătorilor şi s-au urcat alți călători; la plecarea din prima stație au fost astfel 78 de persoane în tramvai. La a doua stație a coborât o treime din numărul celor care au urcat la prima stație şi nu a urcat nimeni. Câți călători au fost în tramvai la plecarea din a doua stație ?

Nicoleta Toader, Oțelu – Roşu

IV 133. La un concurs de matematică concurenții au avut de rezolvat 20 de probleme. Rezolvarea corectă a unei probleme a fost notată cu 7 puncte, iar pentru o rezolvare greşită sau pentru o problemă nerezolvată s-au scăzut 3 puncte. Câte probleme a rezolvat corect un concurent dacă în final a obținut zero puncte?

Nicoleta Toader, Oțelu – Roşu

IV 134. Adunând câte două dintre numerele a, b, c, d obținem sumele 114, 126, 134, 142 şi 154. Aflați numerele a, b, c, d **.**

Nicoleta Toader, Oțelu – Roşu

IV 135. La concursul de matematică *RMCS* participă 132 de elevi repartizați în mod egal în 12 săli. Aflați cel mai mic număr de băieți care ar trebui să participe la concurs astfel încât, indiferent cum se face repartizarea în săli, în fiecare sală să fie cel puțin un băiat.

Nicoleta Toader, Oțelu – Roşu

IV 136. Într-un coş sunt cu patru mere mai multe decât portocale.
De 1 iunie, Doamna învățătoare dăruieşte fiecăruia dintre cei 20 de elevi din clasă câte un măr şi câte o portocală. În coş au rămas de două ori mai multe mere decât portocale. Câte mere şi câte portocale au fost inițial în coş ?

Antoanela Buzescu, Caransebeş

IV 137. Cristi şi Gabi au strâns alune. Dacă Gabi îi dă o alună, atunci Cristi va avea de trei ori mai multe alune decât Gabi. Dacă Gabi primeşte o alună de la Cristi, atunci Cristi va avea de două ori mai multe alune decât Gabi. Câte alune a strâns fiecare dintre cei doi prieteni ?

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

IV 138. Alina, Bianca şi Cristina practică fiecare câte un sport (volei, baschet, tenis), altul decât cel practicat de prietenele sale şi fiecare vorbeşte cursiv câte o limbă străină (engleză, franceză, germană), alta decât cea cunoscută de prietenele sale. Se ştie că:
1) Bianca vorbeşte limba germană.
2) Cristina practică tenisul.
3) Fata care joacă volei cunoaşte limba engleză.

Ce sport practică şi ce limbă străină cunoaşte fiecare dintre cele trei prietene ?

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

IV 139. Un grup de trei numere naturale consecutive se numeşte *frumos de tip m* dacă suma celor trei numere este egală cu *m*.

1) Arătați că nu există niciun grup *frumos de tip 2012*.
2) Arătați că există un singur grup *frumos de tip 2013*.
3) Determinați pentru câte numere naturale *m* , cel mult egale cu 200, există câte un grup *frumos de tip m*.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

IV 140. Bogdan şi-a propus să studieze, în luna iulie, o carte de matematică. În prima săptămână a studiat o treime din paginile cărții, în a doua săptămână a studiat jumătate din paginile rămase, iar în a treia săptămână, obosit, a studiat doar un sfert din paginile rămase; a constatat astfel că mai are de parcurs 75 de pagini.

Câte pagini are cartea pe care şi-a propus Bogdan să o studieze ?

Marius Şandru, Reşița

Clasa a V-a

V 251. Calculați numărul perechilor (a,b) de numere naturale pentru care $B=\overline{ab3}+\overline{b3a}+\overline{3ab}$ este un număr natural de trei cifre.

Steluța şi Mihai Monea, Deva

V 252. Se consideră mulțimea $A=\{3n+1/n\in\mathbb{N},\ 0<n\leq169\}$.

Arătați că:

a) mulțimea *A* conține cel puțin trei numere prime, cel puțin două pătrate perfecte şi cel puțin un cub perfect;

b) nu se pot alege patru numere diferite din mulțimea *A* astfel încât suma lor să fie egală cu 2012.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

V 253. Determinați numărul de forma $\overline{xy}$ care îndeplineşte simultan condițiile:

a) $\overline{xy}+\overline{yx}=110$

b) numărul care reprezintă poziția sa în şirul numerelor prime este egal cu produsul cifrelor sale.

Iulia Cecon, Oțelu – Roşu

V 254. O pereche (m,n) de numere naturale se numeşte *deosebită* în cazul în care câtul împărțirii cu rest al lui n la m este egal cu 5. Determinați, în fiecare dintre următoarele două cazuri, perechile *deosebite* pentru care :

a) $m+n=51$;
b) $m \cdot n=51$.

Iulia Cecon, Oțelu – Roşu

V 255. Arătați că $7^{20}<33^{12}$.

Iulia Cecon, Oțelu – Roşu

V 256. Arătați că nu există numere naturale impare a,b,c pentru care

$$2^a+2^b+2^c=2010.$$

OL Hunedoara

V 257. Determinați mulțimile A şi B care verifică simultan condițiile:
a) $A \cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$.
b) Dacă $x \in A$, atunci $(x-1) \in B$.
c) Dacă $y \in B$, atunci $(y+1) \in A$.
d) $A \cap B=\varnothing$.

Iulia Cecon, Oțelu – Roşu

V 258. Se notează cu *M* mulțimea numerelor naturale care au câte 50 de cifre, iar suma cifrelor fiecăruia dintre ele este tot 50. a) Aflați cel mai mic element al mulțimii *M ;* b) Dacă $x \in M$ şi 10 cifre ale lui x sunt egale cu 4, arătați că x are cel puțin 30 de cifre egale cu 0.

Iulia Cecon, Oțelu – Roşu

V 259. Determinați câte numere naturale de forma $\overline{abc}$, scrise în baza 10, îndeplinesc simultan condițiile:
1) c este număr natural prim ;
2) $\overline{abc}+a+b+c$ este număr natural par.
3) $\overline{abc}$ este multiplu de 9.

Antoanela Buzescu, Caransebeş

V 260. Pentru orice numere naturale nenule a şi n se notează $S(a,n)=1+a+a^2+a^3+...+a^n$.

1) Arătați că $S(3,2012)$ este un număr divizibil cu 40 ;

2) Determinați numărul n pentru care $S(2,n)=7+2^n$;

3) Demonstrați că nu există $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $S(2,n)$ este pătrat perfect.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Clasa a VI-a

VI 251. Pe o dreaptă *d* se iau, în această ordine, punctele *A, B, C, D.* De aceeaşi parte a dreptei *d* se construiesc triunghiurile dreptunghice isoscele *MAB, NBC, PCD* cu $m(\sphericalangle AMB)=m(\sphericalangle BNC)=m(\sphericalangle CPD)=90^o$.

Demonstrați că, dacă $MA=PD$, atunci $NA=ND$.

Stabiliți dacă reciproca este adevărată.

* * *

VI 252. Arătați că, dacă numărul $n=\overline{abc}\times\overline{bac}$ este divizibil cu 6, atunci este divizibil cu 36.

Andrei Eckstein, Timişoara

VI 253. a) Arătați că ultimele două cifre ale numărului 2^n formează un număr divizibil cu 2^2 pentru orice valoare naturală nenulă a lui n mai mare sau egală cu 4.

b) Este adevărat că ultimele trei cifre ale numărului 3^n formează un număr divizibil cu 3^3 pentru orice valoare naturală nenulă a lui n mai mare sau egală cu 3? Argumentați!

Ovidiu Bădescu, Reşița

VI 254. Se consideră 20 puncte situate în plan.

a) Arătați că le putem aranja astfel încât ele să determine 190 de drepte.
b) Arătați că nu le putem aranja astfel încât să determine 200 de drepte
c) Arătați că le putem aranja astfel încât ele să determine 189 de drepte.

Ovidiu Bădescu, Reşița

VI 255. a) Daţi exemplu de două numere naturale nenule care sunt simultan şi pătrate perfecte şi cuburi perfecte.
b) Arătaţi că există o infinitate de numere naturale impare care sunt simultan şi pătrate perfecte şi cuburi perfecte.
c) Arătaţi că există doar două numere care verifică condiţiile de mai sus şi a căror diferenţă este mai mică decât 500.

Ovidiu Bădescu, Reşiţa

VI. 256 În urna *A* se află *n* bile albe numerotate de la 1 la *n*, iar în urna *B* se află *n* bile negre numerotate de la 1 la *n*. Din urna *B* se transferă o bilă în urna *A* şi astfel suma numerelor înscrise pe bilele din urna *A* devine 2012.
a) Arătaţi că $n > 60$;
b) Determinaţi *n*;
c) Care este cel mai mare număr de bile albe care trebuie transferate din urna *A* în urna *B* pentru ca suma numerelor înscrise pe bilele din urna *B* să fie 2012 ?

Mircea Fianu, Bucureşti

VI. 257 Valoarea unei acţiuni la bursă a crescut în luna februarie a anului 2012 cu 20%, apoi în luna martie a aceluiaşi an valoarea acţiunii s-a mai mărit cu 20%; în luna aprilie însă, valoarea acţiunii a scăzut cu 25%.

a) Cu cât la sută a crescut valoarea acţiunii în luna aprilie faţă de valoarea iniţială din ianuarie 2012 ?

b) Dacă valoarea acţiunii era în luna aprilie de 351 lei, care era valoarea acesteia la sfârşitul lunii februarie ?

Ovidiu Bădescu, Reşiţa

VI. 258 Arătaţi că, dacă a, b, c sunt numere naturale distincte, cel puţin egale cu 2, atunci $\frac{a^2}{1+a^2} \cdot \frac{b^2}{1+b^2} \cdot \frac{c^2}{1+c^2} > \frac{3}{5}$.

Ovidiu Bădescu, Reşiţa

VI. 259 Determinaţi perechile (m, n) de numere naturale pentru care

$$\frac{m+2}{n^2+3} = \frac{m+6}{n+5}.$$

Antoanela Buzescu, Caransebeş

VI. 260 Pentru orice numere naturale nenule m şi n se notează $F(m,n)=\dfrac{n^2+m}{n+3}$.

1) Determinați numerele n pentru care $F(4,n)\in\mathbb{N}$.
2) Determinați cel mai mic număr natural m pentru care
$$F(m,3)<F(2m,2).$$

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Clasa a VII-a

VII 251. În triunghiul ABC, dreptunghic în A, lungimile catetelor sunt egale cu 3, respectiv 4. Bisectoarele interioare ale unghiurilor ascuțite se intersectează în M. Calculați $BM\cdot CM$.

Mircea Iucu, Reşița

VII 252. Se consideră mulțimea $A=\left\{2^a\cdot k+1\,|\,k\in\mathbb{N}\right\}$, unde $a\in\mathbb{N}, a\geq 2$. Arătați că:

1) pentru orice $x,y\in A\Rightarrow x\cdot y\in A$;
2) mulțimea $\mathbb{N}\setminus A$ conține cel puțin 2012 numere prime.

Marius Dolcan, Deva

VII 253. Pentru orice număr întreg n se notează
$$F(n)=\frac{4n+3}{5n+4} \text{ şi } G(n)=\frac{3n+4}{4n+5}.$$

1) Arătați că fracția $F(n)$ este ireductibilă, oricare ar fi $n\in\mathbb{Z}$.
2) Determinați mulțimea $M=\left\{n\in\mathbb{Z}\,|\,F(n)\leq G(n)\right\}$.

Heidi Feil , Oțelu – Roşu

VII 254. Pentru orice numere raționale p şi q se notează $E(p,q)=3p+4q$.

1) Arătați că, dacă $p+q<6$ şi $pq+9\geq 3(p+q)$, atunci $E(p,q)\leq 21$.
2) Arătați că, dacă $p+q\geq 6$ şi $pq+9\geq 3(p+q)$, atunci
$$p^2+q^2\geq\frac{441}{25}.$$

Heidi Feil , Oțelu – Roşu

VII 255. Determinați perechile (x, y) de numere întregi pentru care $|2x-3|+|4y-5|=2$.

Heidi Feil , Oțelu – Roşu

VII 256. Se consideră un punct *M* pe mediana $AD,\ D\in(BC)$, a unui triunghi ABC şi se notează $BM \cap AC=\{N\}$, $CM \cap AB=\{P\}$.

Arătați că, dacă $(MP$ şi $(MN$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AMB$, respectiv $\sphericalangle AMC$, atunci $\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}=\frac{1}{MD}$.

Heidi Feil , Oțelu – Roşu

VII 257. Pentru orice numere reale x şi y se notează $E(x,y)=2xy-3x-4y-5$.

1) Arătați că, dacă $y\geq 2$ şi $E(x,y)=0$, atunci $x\leq 13$.
2) Determinați perechile (a,b) de numere întregi pentru care $E(a,b)=0$.

Heidi Feil , Oțelu – Roşu

VII 258. O pereche (a,b) de numere naturale se numeşte *pretențioasă* dacă numerele $\frac{a-1}{b+1}$, $\frac{a}{b}$ şi $\frac{a+1}{b-1}$ sunt naturale.

1) Arătați că există cel puțin trei perechi *pretențioase.*
2) Demonstrați că, dacă (a,b) este o pereche *pretențioasă*, atunci numărul $a+b$ este divizibil cu 2.

Marius Damian, Brăila

VII 259. Determinați numerele naturale nenule p şi q pentru care numărul $\frac{2^q+1}{2^p-1}$ este natural.

Concurs Traian Lalescu

VII 260. În patrulaterul inscriptibil $ABCD$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle DCA$ intersectează diagonala $[BD]$ în P, iar bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABD$ intersectează diagonala $[AC]$ în Q. Arătați că :

a) patrulaterul $PQBC$ este inscriptibil ;

b) $PQ \parallel AD$.

Olimpiadă Olt

Clasa a VIII-a

VIII 251. Determinați numerele reale x, y pentru care

$$x + y = 6 \text{ şi } \sqrt{x-1} + \sqrt{y-3} = 2 .$$

Costel Bolbotină, Băile Herculane

VIII 252. Determinați numerele naturale a şi b pentru care $a + b = 5$, iar valoarea sumei $s = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ este maximă.

Ovidiu Bădescu, Reşița

VIII 253. Arătați că, dacă $a, b, c > 0$ şi $a \cdot b \cdot c = 4$, atunci

$$\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ca} + \frac{1}{c+ab} < \frac{3}{4}.$$

Costel Bolbotină, Băile Herculane

VIII 254. Determinați numerele reale x, y pentru care

$$4x^2 + y^2 + 1 = 2x + 2xy + y .$$

Adriana Dragomir, Oțelu – Roşu

VIII 255. Se consideră o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relația $3 \cdot f(x) - 2 \cdot f(1-x) = 5x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Arătați că numărul $A = f(0) + f(1)$ este întreg.

Costel Bolbotină, Băile Herculane

VIII 256. Determinați numerele întregi x şi y pentru care $x^2 - 5^y = 8$.

Ovidiu Bădescu, Reşița

VIII 257. Unind mijloacele a câte trei muchii alăturate ale unui cub cu lungimea muchiei egală cu 1, se taie colțurile cubului, îndepărtând cele 8 mici piramide. Calculați volumul şi aria corpului rămas.

OL Caraş – Severin

VIII 258. Determinați numerele întregi m şi n pentru care

$$m^4 + m^2 + 1 = 2^n.$$

Antoanela Buzescu, Caransebeş

VIII 259. Se consideră mulțimea
$A = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x+1) - f(1-x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R} \}$.

1) Arătați că $A \neq \varnothing$.

2) Demonstrați că există $f \in A$ pentru care mulțimea $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1 \}$ are cel puțin două elemente.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

VIII 260. Se consideră perpendiculara DA pe planul triunghiului ABC şi un punct $E \in (DA)$. Se notează cu M, N, P, Q proiecțiile punctului A pe dreptele $BD, CD, BE,$ respectiv CE. Arătați că:

1) $MN \cap BC \cap PQ \neq \varnothing$.

2) patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

Mihai Miculița, Oradea

Clasa a IX-a

IX 216. Arătați că, pentru orice numere reale strict pozitive a, b, c, are loc inegalitatea:

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

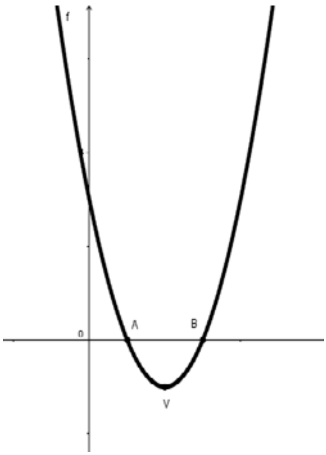
OL Iaşi

IX 217. Se notează cu G centrul de greutate al unui triunghi ABC şi, pentru un punct oarecare P din interiorul triunghiului ABC, se notează cu P_1, P_2, P_3 proiecțiile acestuia pe medianele triunghiului ABC.

Demonstrați că $\overrightarrow{P_1G} + \overrightarrow{P_2G} + \overrightarrow{P_3G} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PG}$.

Mircea Iucu, Reşița

IX 218. O funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{Z}$, are reprezentarea geometrică a graficului ca în figura de mai jos.



1) Arătați că dacă $ac \ge 4$, atunci $|b| \ge 5$.
2) Determinați numărul a în cazul în care $A(1,0)$ şi $B(3,0)$, iar triunghiul AVB are aria egală cu 2.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

IX 219. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ şi ecuația $\{a^2\}x^2 - 2\{a\}x + 1 = 0$.

1) Arătați că, dacă soluțiile ecuației sunt numere întregi, atunci $a\in\mathbb{Q}$.

2) Demonstrați că există o infinitate de valori ale lui $a>1$ astfel încât ecuația să aibă soluțiile întregi.

Dana Heuberger, Baia – Mare

IX 220. Bisectoarele interioare ale unghiurilor A, B, C ale unui triunghi ABC ascuțitunghic intersectează cercul circumscris acestuia în M, N, respectiv P. Arătați că, dacă ariile triunghiurilor BMC, CNA, APB sunt egale, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Clasa a X-a

X 216. Determinați numerele naturale n pentru care dezvoltarea $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ conține exact 30 de termeni iraționali.

* * *

X 217. Rezolvați ecuația $2\sin x\cdot\left(1+2\sin^2 x\right)=1+\cos 2x$.

* * *

X 218. Fie $n\in\mathbb{N}$, cu $n\geq 2$. Dacă $z_1, z_2, \dots, z_n\in\mathbb{C}$ sunt n numere complexe cu proprietatea că $|z_1|=4|z_2|=9|z_3|=\dots=n^2|z_n|$, arătați că $z_1+z_2+\dots+z_n=0 \Leftrightarrow z_1=z_2=\dots=z_n=0$.

Mihai Chiş, Timişoara

X 219. Un grup de patru prieteni se numeşte *frumos* dacă din grup face parte cel puțin o fată. Calculați câte grupuri *frumoase* se pot forma din echipa de dans sportiv a unui liceu, alcătuită din Alina, Bogdan, Cristina, Daniel, Elena, Florin, Gabriela şi Horațiu.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

X 210. Rodica alege un număr natural a, ştiind că apoi Ovidiu alege la întâmplare un număr real strict pozitiv x. Dacă $A=10-\log_2\left(x^2\right)$ sau $B=\log_2(16x)$ este cel puțin egal cu a, atunci Ovidiu îi va face Rodicăi un cadou în valoare de 3^a lei.

Ce număr trebuie să aleagă Rodica pentru a primi, evident, un cadou cât mai valoros?

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Clasele a XI-a, a XII-a

XI 216. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Să se arate că şirul cu termenul general $x_n = \{n \cdot \alpha\}$, $n \in \mathbb{N}$, este convergent dacă şi numai dacă $\alpha \in \mathbb{Z}$. (S-a notat cu $\{a\}$ partea fracționară a numărului real a)

Jenică Crînganu, Galați

XI 217. Fie $a \in \mathbb{R}$ un număr real oarecare fixat, iar $(x_n)_{n\in N}$ şirul de numere reale definit prin $x_0 = a$ şi $x_{n+1} = e^{-x_n} + x_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

Arătați că:

a) Şirul $(x_n)_{n\in N}$ are limita $+\infty$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{x_n} = 1$.

Mihai Chiş, Timişoara

XI 218. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietățile:

a) $f(x) + y = f(x + f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}.$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0.$

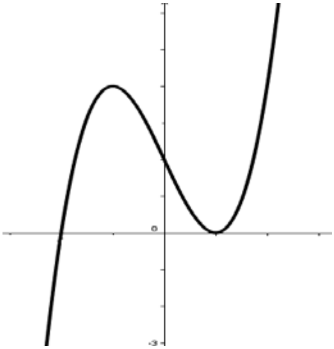
Arătați că f este injectivă şi determinați funcția f.

Dorel Miheț, Timişoara

XI 219. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție pentru care există $L > 0$ astfel încât $\left| f(x) - f(y) \right| \geq L \cdot \left| x - y \right|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}.$ Arătați că f este surjectivă dacă şi numai dacă este continuă.

Dorel Miheț, Timişoara

XI 220. O funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^3+bx+c,$ are reprezentarea geometrică a graficului ca și în figura de mai jos.



Demonstrați că:

1) $8a+2b+c\geq 0$
2) $abc<0$.

Lucian Dragomir – Oțelu – Roşu

Probleme alese

A 25. Să se găsească toate tripletele de numere întregi a căror sumă este egală cu produsul lor.

Gh.I.Buicliu, GM 1907

A 26. Dintr-un punct fix M se duc secantele variabile MBA şi MDC la un cerc fix $\mathcal{C}$, de centru O. Arătați că linia centrelor cercurilor circumscrise triunghiurilor ADM, BCM trece printr-un punct fix.

Gh.I. Buicliu, GM 1902

A 27. Într-un sfert de cerc să se înscrie un pătrat având două vârfuri pe circumferință, iar celelalte două pe razele care delimitează sfertul de cerc.

Gh.I. Buicliu, GM 1901

A 28. Rezolvați în numere întregi pozitive ecuația $3^{x^2+y-1}-3^{x^2+1}=1944$.

C. Vasilescu, GM 1900

Adunarea Generală a Filialei Caraş Severin a SSMR, 18.01.2012

Deşi o facem cu întârziere, credem că e nimerit să vă informăm despre ce s-a mai întâmplat în cadrul Filialei noastre. În data de 18.01.2012, la Reşiţa, a avut loc Adunarea Generală a Filialei.

○ Vă prezentăm acum materialul principal prezentat :

Raport asupra activității Filialei Caraş Severin a SSMR în perioada 2008 – 2011

Scopurile Adunării generale a Filialei de astăzi, 18 ianuarie 2012, sunt : analiza activității Filialei, a organismului său de conducere pe o perioadă de patru ani, stabilirea direcțiilor de acțiune pentru anii următori, precum şi alegerea noului Consiliu Director al Filialei SSMR Caraş – Severin, organism colectiv de conducere.

Pentru început, trebuie să subliniem că, la Conferința Națională extraordinară din 12 noiembrie 2011 s-au luat decizii în ceea ce priveşte unele modificări ale Statutului Societății; unele le vom prezenta succint aici, în rest, orice informații despre activitățile Societății pot fi găsite pe site-ul acesteia, la adresa **rms.unibuc.ro** (pe care chiar vă invităm să îl vizitați cât de des) sau **www.ssmr.ro.**

Trebuie să reamintim că scopul principal al Societății este cultivarea şi răspândirea cunoştințelor matematice, îndrumarea cercetărilor originale şi a educației matematice.

În acest moment, filiala are 128 de membri cu cotizația plătită la zi (adică pe anii 2010 şi 2011); conform statutului, un membru care nu plăteşte cotizația timp de doi ani consecutivi, pierde această calitate.

Una dintre principalele preocupări ale filialei în această perioadă a fost asigurarea editării şi distribuirii Revistei de matematică RMCS a elevilor şi profesorilor din Caraş – Severin, activitate care s-a desfăşurat la cote de exigență şi responsabilitate inegale. Deşi s-a reuşit publicarea a 16 numere (câte 4 în fiecare an), ajungând astfel la numărul 38, eforturile pentru editare au aparţinut constant unui număr restrâns de colegi. Tirajul unui număr se situează în jurul a 700 – 900 de exemplare; această fluctuație este foarte gravă, deoarece rămân de multe ori multe exemplare nevândute, adică pierderi financiare. Una peste alta, revista a ajuns o publicație apreciată şi căutată în țară. Avem semnale că unele probleme sunt prea dificile ; mărturism că dorim ca, prin efortul depus pentru încercarea de a găsi soluții, prin simpla lecturare a soluțiilor publicate ulterior, elevii, şi nu numai ei, să rămână cu anumite idei noi, să mai învețe câte ceva, aşa cum am făcut şi noi, cei care am crescut cu Gazeta Matematică în mână .

O altă activitate reuşită a fost organizarea, în fiecare an, la Oțelu – Roşu, cu sprijinul major al Primăriei şi Consiliului Local al oraşului gazdă, înainte de etapa județeană a Olimpiadei, a Concursului revistei; la acest concurs au participat deobicei aproximativ 120 de elevi din clasele I – XII sau a II-a până la a XII-a. Jumătate dintre elevii participanți au fost şi vor fi premiați (s-au oferit şi vor fi oferite diplome, bani sau cărți).

În fiecare vară din ultimii trei ani s-a reuşit organizarea unei tabere de matematică la Crivaia, pentru elevii de gimnaziu. Deloc lipsit de importanță, ba dimpotrivă, în anul 2011, județul nostru a fost gazda Concursului Interjudețean Traian Lalescu; sprijinul Filialei SSMR în organizarea şi desfăşurarea acestei competiții a fost, credem, unul important.

Unul dintre membrii filialei noastre, colegul Nicolae Stăniloiu a creat un program de alcătuire a testelor cu itemi dintr-o bază inițială de date şi care, considerăm noi, poate fi folosit cu succes de către oricine ; este foarte probabil să existe şi alți colegi cu preocupări în domenii conexe ; de aceea, vă rugăm să ne informați despre activitatea dumneavoastră (probleme propuse în diverse publicații, articole, teme, lucrări, participări semnificative la conferințe etc) pentru a putea cel puțin populariza activitatea Dumneavoastră.

Deasemenea, în perioada 29 septembrie – 2 octombrie 2011, în colaborare cu Filiala Hunedoara, filiala noastră a organizat, în premieră pentru noi, Conferința Anuală a SSMR, în municipiul Hunedoara; mulțumim şi pe această cale tuturor celor care au înțeles să ajute, într-un fel sau altul, la organizarea aproape impecabilă a acestei manifestări. Trebuie spus totuşi că, din județul nostru au participat însă foarte puțini profesori la partea ştiințifică a Conferinței: am avut, din păcate, doar 4 profesori care au participat cu 3 comunicări metodico-ştiințifice.

Contribuțiile Filialei la site-ul www.ssmr.ro sau viitoriiolimpici.ro sunt deasemenea minore, dar există: este vorba de 3 materiale de pregătire, elaborate de membrii ai filialei noastre, aprobate şi publicate în anul 2011.

Nu în ultimul rând, trebuie să remarcăm aportul decisiv al unor membrii ai Filialei noastre la redactarea, în colaborare tot cu Filiala Hunedoara, a numărului 12/ 2011 al Gazetei Matematice seria B. Semnalele primite de la colegii din țară sunt extrem de pozitive legate de reuşita noastră şi în această direcţie. Subliniem şi cu această ocazie îndemnul de a populariza în rândul elevilor această publicație veche de peste 100 de ani, mai ales că începând cu numărul 10/2012, a devenit, credem, mult mai apropiată de ceea ce ar trebui să fie, de ceea ce aşteaptă mulți elevi, profesori, părinți chiar, de la noi. Mai nou, GM este tipărită de Editura PARALELA 45 ; distribuitorii acesteia o aduc lunar în județ, însă doar pentru comandă ; calea de a ajunge la numerele gazetei este aşadar facilă, trebuie doar să vă exprimați dorințele. Nu uitați că, printre subiectele propuse la diverse etape ale olimpiadei, ale Concursului Județean al revistei, au fost şi vor fi probleme publicate în Gazeta Matematică ; în plus, pentru concursul nostru, punctajele copiilor se obțin prin cumularea punctelor obținute pentru rezolvări din RMCS şi GM !!!. Cu riscul de a ne repeta, observăm că atât GM cât şi RMCS pot fi folosite nu numai pentru a trimite rezolvări la problemele propuse, cât şi pentru a învăța din articole sau din rezolvările problemelor anterioare.

Revenind la activitatea unora dintre membrii filialei noastre, credem că nu trebuie omis faptul că unele culegeri de probleme, apreciate după părerea nu numai a noastră, apărute la editurile Paralela 45, Sigma, Bîrchi, au ca şi autori colegi din județul nostru.

Reamintim că informații referitoare la activitatea matematică din județ pot fi găsite constant pe internet, la adresa www.neutrino.ro, în special la publicații sau la CSMATE.

În ceea ce priveşte fondul financiar al Filialei, acesta s-a constituit din: cotizațiile anuale (adică 50% din banii Dumneavoastră), banii proveniți din vânzarea revistei, la care se adaugă firave şi sporadice sponzorizări. Cheltuielile au fost şi sunt mari şi constau în: tipărirea revistei, distribuirea gratuită a 50 de numere în țară, tipărirea diplomelor şi foilor de concurs pentru Concursul RMCS, fondul de premiere al Concursului, organizarea efectivă a Concursului, participarea la fondul necesar celuilalt concurs de anul trecut (Traian Lalescu) şi, nu în ultimul rând, deplasarea preşedintelui filialei la Bucureşti, la conferințele ordinare anuale.

Nu dorim să facem clasificări, dar se cuvine să remarcăm susținerea inspectorilor de specialitate din ultimii ani şi activitatea depusă de câțiva dintre membrii Filialei noastre în aceşti ultimi ani ; fără să supărăm pe cineva, prin omisiune, trebuie totuşi să facem publică o listă a celor care chiar au făcut câte ceva, unii mai mult, unii mai puțin, dar care au făcut CEVA : Doamnele profesoare Irina Avrămescu, Antoanela Buzescu, Adriana Dragomir, Iulia Cecon, Heidi Feil, Delia Dragomir, Lavinia Moatăr, Domnii profesori Ovidiu Bădescu, Costel Bolbotină, Vasile Chiş, Petrişor Neagoe, Dan Dragoş Popa, Ion Dumitru Pistrilă, Nicolae Stăniloiu, Marius Şandru şi, cu voia dumneavoastră, Lucian Dragomir. Să avem astfel în vedere ca persoanele care au dovedit pricepere şi disponibilitate pentru implicarea în activitățile prezentate să facă poate parte din structura de conducere a Filialei, care va fi aleasă astăzi pentru următorii 4 ani. Ne exprimăm astfel speranța că veți face o alegere bună.

Biroul Filialei SSMR Caraş – Severin,
care, începând cu acest moment, îşi încheie mandatul încredințat.

○ După discuții, au urmat alegerile pentru conducerea Filialei pentru următorii 4 ani. Consiliul Director ales în urma voturilor celor prezenți are următoarea componență:

Nr.	**Nume, prenume**	**Funcție**	**Şcoala**
1.	Dragomir Lucian	Preşedinte	Liceul Bănățean Oțelu Roşu
2	Bădescu Ovidiu	Vicepreşedinte	Liceul Traian Lalescu Reşița
3	Şandru Marius	Vicepreşedinte	Şcoala nr.2 Reşița
4	Avrămescu Irina	secretar	Şcoala nr.9 Reşița
5	Chiş Vasile	casier	Şcoala nr.9 Reşița
6	Buzescu Antoanela	membru	Liceul C.D.Loga Caransebeş
7	Gîdea Vasilica	membru	Grup şcolar Moldova Nouă
8	Bolbotină Costel	membru	Liceul Hercules Băile Herculane
9	Deaconu Tudor	membru	CCD
10	Lascu Adrian	membru	ISJ
11	Lazarov Mihael	membru	Lic. Gen. Dragalina Oravița

○ Nu putem decât să urăm succes colegilor noştri în efortul, deloc de neglijat, de a mişca în sens constant pozitiv matematica din judeţ şi, deopotrivă, să sperăm că vor avea alături un număr mult mai mare de dascăli dedicaţi profesiei pe care, de bunăvoie şi nesiliţi de nimeni, şi-au ales-o.

○ În Adunarea Generală a SSMR din 17 martie 2012 a fost ales Consiliul Director al Societăţii; printre cei 25 de membri se află şi un reprezentant al judeţului nostru, profesorul Lucian Dragomir.

Membrii Fililalei Caraş – Severin a SSMR care au plătit cotizaţia pe anii 2011 + 2012

1. Almăjan Cătălin Şcoala cu clasele I-VIII Ramna
2. Ardelean Ion Şcoala cu clase I-VIII Rusca Montană
3. Avram Matei, Colegiul Economic Reşiţa
4. Avrămescu Irina Şcoala Gen.9 Reşiţa
5. Albeanu Vasile Grup şcolar Moldova Nouă
6. Bădescu Ovidiu Liceul Traian Lalescu Reşiţa
7. Bălan Gheorghe, Colegiul Economic Reşiţa
8. Bejan Otilia Liceul Traian Lalescu Reşiţa
9. Belci Ion Şcoala Gen.9 Reşiţa
10. Beţa Maria Liceul Teoretic Mircea Eliade Reşiţa
11. Belu Angela Adina, Şcoala Gen.9 Reşiţa
12. Bîrză Nuţu, Obreja
13. Bobic Florin Şcoala cu clase I-VIII Naidăş
14. Bolbotină Constantin Liceul Hercules Băile Herculane
15. Boriuc Veturia, Ocna de Fier
16. Buzescu Antoanela Liceul Pedagogic Caransebeş
17. Buzilă Claudia Şcoala Gen.7 Reşiţa
18. Buzilă Mircea Lic.Traian Vuia Reşiţa
19. Burcui Simona, Gornea
20. Cata Marinela, Bocşa
21. Cecon Iulia Lic. Bănăţean Oţelu – Roşu
22. Cerbu Enache Grup şcolar Agricol Oraviţa
23. Călin Ramona – Colegiu Tehnic Reşiţa
24. Călin Ciprian, CN Traian Lalescu Reşiţa
25. Chiş Vasile Şcoala Gen.9 Reşiţa
26. Cioloş Aurelia Liceul Teoretic Tata Oancea Bocşa

27. Cristescu Vănică - Şcoala cu clasele I – VIII Plugova
28. Ciucă Sorin, Rusca Teregova
29. Ciulu Daniela Loreta Şcoala Gen.6 Reşiţa
30. Cocorăl Radu – Şcoala Şoşdea
31. Cleşnescu Florin Şcoala cu clase I-VIII nr. 5 Reşiţa
32. Coandă Camelia Şcoala Gen.8 Reşiţa
33. Corîci Carina Şcoala Gen.2 Caransebeş
34. Ciocan Florin – Liceul Traian Doda Caransebeş
35. Cormianu Maria , Şcoala cu clasele I – VIII Plugova
36. Costa Veronica Şcoala cu clasele I-VIII nr.1 Bocşa
37. Curea Nicolae Şcoala Romul Ladea Oraviţa
38. Curescu Simona Şcoala Gen.8 Reşiţa
39. Dancea Ion, Clocotici
40. Deaconu Tudor CCD Reşiţa
41. Dicu Lenuţa Şcoala Gen.12 Reşiţa
42. Dobriţan Heckl Alina Şcoala Gen.1 Reşiţa
43. Drăghicescu Tomiţă Şcoala Forotic
44. Didraga Elena, Grup şcolar Auto Caransebeş
45. Drăghici Florica Mariana Şcoala Gen.2 Reşiţa
46. Dragomir Adrian Liceul Traian Doda Caransebeş
47. Dragomir Adriana Lic. Bănăţean Oţelu – Roşu
48. Dragomir Delia Maria, Liceul Traian Doda Caransebeş
49. Dărac Cornelia Grup şcolar Moldova Nouă
50. Dragomir Lucian Lic. Bănăţean Oţelu – Roşu
51. Drăgan Ion - Şcoala cu clasele I – VIII Cornereva
52. Drăgan Radu – Grup şcolar Auto Caransebeş
53. Dragotă Ana Lic. Traian Doda Caransebeş
54. Dugălia Bauer Anette, Lic. Ped. CD Loga Caransebeş
55. Feil Heidi Lic. Bănăţean Oţelu – Roşu
56. Feraru Florin, Şcoala Gen.8 Reşiţa
57. Florea Viorel Şcoala cu clase I-VIII Rusca Montană
58. Fiat Filip - Şcoala cu clasele I – VIII Luncaviţa
59. Ghiocel Dorina, Şcoala Gen.9 Reşiţa
60. Gugea Laura - Grup şcolar Auto Caransebeş
61. Grindeanu Nicolae – Liceul Pedagogic CD Loga Caransebeş
62. Grindeanu Victor, Şcoala Gen.9 Reşiţa
63. Gîdea Vasilica Grup Şcolar Ind. Moldova-Nouă
64. Golopenţa Marius Liceul Hercules Băile Herculane
65. Goşa Anca Şcoala Gen.12 Reşiţa

66. Gruescu Gheorghe, Gîrnic
67. Guran Nela, Grup şcolar Auto Caransebeş
68. Haracicu Maria Şcoala cu clasele I-VIII Băile Herculane
69. Horescu Ioan Şcoala cu clasele I-VIII Topleț
70. Hurduzeu Diana Liceul Pedagogic Caransebeş
71. Hergane Adam Şcoala cu clasele I-VIII Sichevița
72. Huza Vasile, Coronini
73. Iovanovici Cristina Grup Şcolar Moldova Nouă
74. Iancovici Camelia Elena, Socol
75. Iancu Maria Şcoala Romul Ladea Oravița
76. Ienea Erimescu Mihai - Şcoala cu clasele I – VIII Verendin
77. Ienea Maria Liceul Tehnologic Mehadia
78. Iliescu Sabin Liceul Tehnologic Mehadia
79. Isac Daniel, Petroşnița
80. Iocşa Lucia Liceul Teoretic Mircea Eliade Reşița
81. Istudor Gheorghe, Şcoala Padina Matei
82. Iucu Mircea pensionar Reşița
83. Iuhasz Cornelia, Zăvoi
84. Ivaşcu Nicoleta Liceul Pedagogic Caransebeş
85. Jurj Nuțu Grup şcolar Forestier Caransebeş
86. Jura Anna Maria, prof.inginer, Rusca Montană
87. Janțu Mariana, Lic. Bănățean Oțelu – Roşu
88. Lascu Adrian, ISJ
89. Lazarov Aurica Lic. Gen. Dragalina Oravița
90. Lazarov Mihael Lic.Gen.Dragalina Oravița
91. Liuba Ovidiu, Poiana
92. Liuba Ioan, Vârciorova
93. Lungu Aurel Şcoala cu clasele I-VIII nr. 1 Bocşa
94. Lungu Emilia Liceul Teoretic Tata Oancea Bocşa
95. Lupulescu Daniela Liceul Teoretic Tata Oancea Bocşa
96. Macovei Daniela Lic.Baptist Reşița
97. Mandreşi Ana Liceul Pedagogic Caransebeş
98. Mara Adriana Liceul de Artă Reşița
99. Merşa Marcel - Şcoala cu clasele I – VIII Vrani
100. Medoia Gheorghe Grup Şcolar Industrial Bocşa
101. Miholcea Dan Şcoala cu clasele I-VIII Berzovia
102. Milotin Mirela Lic.Gen.Dragalina Oravița
103. Mirulescu Marița Liceul Pedagogic Caransebeş
104. Mîşcoi Geta Şcoala cu clase I-VIII Ciclova-Română

105. Miuță Bocicariu Janet Liceul Traian Doda Caransebeş
106. Moatăr Costa, Şcoala Gen.9 Reşița
107. Moatăr Lavinia Liceul Pedagogic Caransebeş
108. Miloş Laura - Grup Şcolar Agricol Oravița
109. Mitrică Mariana, Şcoala Gen.9 Reşița
110. Mateia Monica- Colegiul Economic Reşița
111. Manzur Maria, Reşița
112. Moțco Monica, Lic. de artă Reşița
113. Mateescu Milena - Şcoala cu clase I-VIII Liubcova
114. Musteți Liliana Liceul Teoretic Tata Oancea Bocşa
115. Mustețea Elisaveta, Grup şcolar Auto Caransebeş
116. Neagoe Petrişor Grup Şcolar Mathias Hammer Anina
117. Ocanovici Zoran Grup Şcolar Ind. Moldova-Nouă
118. Opranescu Angela Şcoala cu clasele I-VIII Băile Herculane
119. Opruț Ana – Grup şcolar Forestier Caransebeş
120. Orăvițan Florica, Lupac
121. Pascariu George Liceul Teoretic Eftimie Murgu Bozovici
122. Pascariu Ion Şcoala Prigor
123. Pătraşcu Zaharia, Lăpuşnicel
124. Peter Eva Maria Şcoala cu clasele I-VIII nr. 1 Bocşa
125. Pîrvu Camelia Şcoala Romul Ladea Oravița
126. Pistrilă Ion Dumitru Lic.Gen.Dragalina Oravița
127. Popescu Adrian Liceul Tehnologic Mehadia
128. Pral Mihaela, Lic Ped CD Loga Caransebeş
129. Popescu Constanța Harisena, Grup şcolar CM Caransebeş
130. Panici Nadița - Şcoala cu clasele I-VIII Belobreşca, Pojejena
131. Rădoi Mirela Şcoala Gen.8 Reşița
132. Radosavlevici Mărioara Şcoala cu clasele I-VIII Moldova-Nouă
133. Răduca Rodica Şcoala Gen.7 Reşița
134. Rîncu Pavel Şcoala Dalboşeț Bozovici
135. Roman Simion Şcoala cu clasele I-VIII Topleț
136. Rostescu Constantin Şcoala cu clasele I-VIII Domaşnea
137. Roşu Lia Şcoala Gen.7 Reşița
138. Răşinariu Lucica Şcoala Sfânta Elena
139. Rudneanu Iosif, Bocşa
140. Rujici Iasna Floriana Şcoala cu clasele I-VIII nr.1 Moldova Nouă
141. Stănică Diana, Şcoala Gen.6 Reşița
142. Sadovan Nistor Şcoala cu clasele I-VIII Cornea
143. Şandru Marius Şcoala Gen.2 Reşița

144. Scorțan Gheorghe - Grup Şcolar Ind. Moldova-Nouă
145. Schiha Emilia Dana Şcoala cu clasele I-VIII Berzasca
146. Seracin Ioan Scoala cu clase I-VIII Măureni
147. Seracin Nicolae , Grup şc. Forestier Caransebeş
148. Simion Gheorghe Şcoala Romul Ladea Oravița
149. Simulescu Susana Şcoala Gen.6 Reşița
150. Socol Maria Şcoala Gen.12 Reşița
151. Seracin Nicolae – Grup şcolar Forestier Caransebeş
152. Spaiuc Veronica Lic. Bănățean Oțelu – Roşu
153. Stan Loredana, Grup şcolar CM Caransebeş
154. Şuşoi Paul – Liceul Pedagogic Caransebeş
155. Stăniloiu Manuela Şcoala cu clasele I-VIII nr. 3 Bocşa
156. Stăniloiu Nicolae, Tirol
157. Stăvăroiu Eugen, Grup şcolar CM Caransebeş
158. Suciu Daniela Şcoala Gen. 3 Oțelu Roşu
159. Ştefan Dana – Grup şcolar Forestier Caransebeş
160. Schelean Dorina, Oțelu – Roşu
161. Schelean Alexandra, elevă, Oțelu – Roşu
162. Ştefãnescu Andrei, elev, Oțelu Roşu
163. Ştefãnescu Cornelia, Oțelu – Roşu
164. Ştefãnescu Nicolae, Oțelu – Roşu
165. Szucs Alecxandru Lic.Baptist Reşița
166. Tătucu Anton Şcoala cu clasele I-VIII Iablanița
167. Stănică Diana Şcoala cu clasele I – VIII nr. 2 Reşița
168. Todor Lidia, Lic Ped CD Loga Caransebeş
169. Tuvenie Dorina, Grup şc. Forestier Caransebeş
170. Țuican Liliana, Şcoala Turnu Ruieni
171. Vasile Mihaela Liceul Tehnologic Mehadia
172. Vladu Dumitru Grup Şcolar Ind. Moldova-Nouă
173. Vladu Sânefta Şcoala cu clasele I-VIII nr.3 Moldova-Nouă
174. Vlăduceanu Cristina Lic.Diaconovici-Tietz Reşița
175. Voilovici Aurelia Grup Şcolar Ind. Moldova-Nouă
176. Ziman Lăcrimioara Grup Şcolar Ind. Moldova-Nouă
177. Zecheru Zora, Şcoala Gen.9 Reşița

Miniconcursul revistei

Problema 3.

Rezultatul înmulțirii de mai jos nu este 209.

```
   **×
   **
 ______
  ***
 **___
  *09
```

Dacă nu este 209, atunci care este rezultatul înmulțirii ?

Elevul care trimite primul soluția corectă şi complet justificată la problema propusă va primi din partea autorului cartea *Matematică distractivă pentru clasele V – VI,Editura Art, 2012, autor I. Dăncilă.*

Rezolvarea trebuie trimisă pe adresa :

Ioan Dăncilă, str. Drumul Taberei nr. 67, bl. TD 44, ap. 42
Sector 6, Bucureşti, cod poştal 061 366

N.red. : Am primit cartea care se oferă ca şi premiu! Forma şi conținutul sunt de invidiat. Credem sincer că aveți numai de câştigat dacă o comandați (elevi, profesori, părinți).