Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Caraş-Severin

REVISTA DE MATEMATICĂ

RMCS

A ELEVILOR ŞI PROFESORILOR

DIN JUDEŢUL CARAŞ-SEVERIN

Nr. 38, An XII – 2011

Acest număr al revistei are avizul Comisiei pentru publicaţii a SSMR

Editura „Neutrino”
Reşiţa, 2011

Titlul: Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din județul Caraş-Severin
I.S.S.N. 1584-9481

Mobil: 0741017700
www.neutrino.ro
E-mail: contact@neutrino.ro

CUPRINS

Despre educație

● Educația este dobândirea artei de a utiliza cunoştințele.

A.N. Whitehead

● Educația este un al doilea soare pentru cei care o au.

Heraclit

● Mania de a întrerupe pe cineva când vorbeşte este unul din semnele cele mai evidente ale unei educații deficitare.

John Locke

● A instrui pe tineri cum se cuvine nu constă în a le vârî în cap mulțime de cuvinte, fraze, expresiuni şi opiniuni din diferiți autori, ci a le deschide calea cum să priceapă lucrurile.

J.A.Comenius

● Educația este îmblânzirea unei flăcări, nu umplerea unui vas.

Socrate

● Un om care are cunoştințe, dar este needucat, este ca şi un inel de aur pus în botul unui porc.

J.A.Comenius

● Când statul nu plăteşte profesorii, copiii sunt cei care vor plăti.

Guy Bedos

● Dacă ai impresia că educația e scumpă, atunci încearcă să vezi cum e ignoranța.

Andy McIntyre

● Educația e ca un pom fructifer: dacă nu e altoită, face fructe mici şi acre.

Robert Frost

Matematica...altfel (partea a VIII-a)

Ioan Dăncilă, Bucureşti

Prima dată când ne-am întâlnit cu numărul 8 a fost, fără să ne dăm seama, la botez: cristelnița tradițională are opt laturi. În dicționarul explicativ al limbii române cuvintele cu prefixul *octo* ocupă o jumătate de pagină!. Fascinația pentru un ansamblu de *opt* elemente, pentru *octuplu,* s-ar putea explica prin apartenența numărului 8 la procesele de dublare repetitivă. De la *octofor* – unul dintre cei 8 purtători ai unei litere romane, la *octavă* – interval dintre două sunete alcătuit din 8 trepte, de la *octombrie* – a opta lună a anului în calendarul roman – la *octet* – unitatea de măsură a informației echivalente cu 8 biți, numărului 8 i s-a acordat probabil o importanță similară cu cea a oxigenului – al 8-lea element din tabloul lui Mendeleev!.

Legăturile numărului 8 cu matematica sunt chiar speciale:
(1) numărul 8 este cub perfect; (2) există un corp platonic cu 8 fețe (octoedrul); (3) planele sistemului tridimensional de coordonate împart spațiul în *opt octanți* (părți); (4) piramidele construite (Egipt, Mexic etc) au *opt* muchii.

Numărul 8 *nu* lipseşte din şirul lui Fibonacci! Flori precum cocoşelul de câmp, floarea de portocal, unii bujori de stepă, au *opt* petale. Fructul de ananas are *opt* alveole!!!!.

Sub semnul lui *opt*, în lumea faunei, sunt păianjenii cu cele *opt* picioare ale lor, caracatițele cu cele *opt* brațe acoperite de ventuze.

Roza Vânturilor indică *opt* direcții, lotusul mistic are *opt* petale, zeii hinduşi sunt adesea reprezentați având *opt* brațe!!!

Ca o confirmare a prezenței numărului *opt*, trebuie să remarcăm şi faptul că revista noastră are 8×8 pagini!

Ne întrebăm acum: Cât de artificială sau de naturală este, nu încercarea noastră de a pune în evidență prezența unor numere în tot ceea ce ne înconjoară, ci efectiv prezența acestor numere în diverse apariții în mediul care, să zicem, ne absoarbe?

Concursul Județean al Revistei de Matematică Caraş-Severin, Ediția a VII-a

Regulament (modificat față de cel anterior, aşadar lecturați!)

Ediția a VII-a a Concursului Revistei este în plină desfăşurare; de fapt, cu rezolvarea problemelor din acest număr se încheie etapa de selecție. Concursul va avea loc probabil în data de 3 martie 2012, la Liceul Bănățean Oțelu – Roşu. Fiecare elev trebuie să rezolve (subliniem din nou: **singur!;** altfel e posibil să vă treziți calificați la concurs şi acolo să nu faceți mare lucru, dați naştere la întrebări şi credem că nici n-o să vă simțiți prea bine), aşadar să rezolve cât mai multe probleme de la clasa sa şi, începând cu numărul 38, adică cel pe care îl lecturați aproape în totalitate, **de la două clase precedente** sau de la orice clasă superioară.

Redactați îngrijit (ne adresăm în primul rând elevilor) fiecare problemă pe câte o foaie separată *(enunț + autor + soluție + numele vostru +clasa)*, completați talonul de concurs de pe ultima copertă a revistei şi trimiteți totul **într-un plic format A4**, *coală ministerială*, adresat astfel **(FOARTE IMPORTANT)**:

Prof. Lucian Dragomir, Liceul Bănățean Oțelu-Roşu, str. Republicii 10-12, 325700, Oțelu-Roşu, Caraş-Severin (*în colțul din dreapta jos a plicului*), cu mențiunea **“**probleme rezolvate, clasa ….” (*în colțul din stânga jos, **scrieți evident clasa în care sunteți!!!***).

Colțul din *stânga sus* vă este rezervat (expeditor), acolo vă scrieți numele, prenumele, adresa. Insistăm asupra trimiterilor în plic (nu în folii de plastic) şi asupra respectării cu strictețe a termenelor finale indicate de fiecare dată - plicurile primite după data limită nu vor fi luate în considerare. Revenim: redactați complet, justificați, răspundeți exact la cerința problemei.

Subliniem: *Concizia şi claritatea redactării vor fi luate în considerare pentru eventuale departajări*!!! (aceasta este evident valabil şi pentru concursul efectiv).

Rezolvări poate trimite orice elev, indiferent de județul în care învață, el va apărea ca şi rezolvitor cu punctajul corespunzător, însă la Concursul RMCS pot fi invitați, cel puțin deocamdată, doar elevii județului Caraş-Severin. Ne cerem scuze pentru acest inconvenient elevilor şi colegilor din țară.

Probabil că s-a remarcat şi introducerea unei noi rubrici: *Probleme alese*. La aceste probleme (care se punctează cu maxim 25 de puncte) se primesc soluții de la orice elev, indiferent de clasă.

După data limită de trimitere a soluțiilor, acestea sunt evaluate şi în numărul următor al revistei vor fi publicați toți rezolvitorii cu punctajele obținute.

La ediția a VII-a a concursului vor fi selectați concurenții în funcție de punctajele obținute din rezolvarea problemelor publicate în numerele 35, 36, 37 şi 38 ale revistei noastre. În jurul datei de 20 ianuarie 2012 se va întocmi clasamentul general (prin însumarea punctelor obținute) şi astfel primii clasați vor fi invitați, împreună, ca şi în acest an, să participe la concurs; acesta va avea loc în luna februarie sau martie, într-un oraş care va fi anunțat în timp util.

Noutățile acestei ediții sunt:

1) După cum ați observat, am renunțat, din mai multe motive, la organizarea concursului pentru elevii clasei I; aşadar, concursul se adresează doar elevilor claselor II – XII .

2) La punctajele obținute pentru rezolvarea problemelor din RMCS se vor adăuga punctajele obținute pentru rezolvarea problemelor din Gazeta Matematică, seria B, publicate începând cu numărul 7-8-9/2011 al Gazetei şi terminând cu numărul care va fi tipărit până la mijlocul lunii februarie 2012. Numerele următoare vor oferi puncte pentru viitoare ediție a Concursului RMCS.

Subiectele vor fi alese tot din probleme de genul **RMCS** sau **G.M.** sau ceva cât de cât nou. Veți remarca, desigur, că unele probleme pe care vi le propunem sunt din numere mai vechi ale Gazetei Matematice, în speranța că vă vom trezi interesul pentru una dintre cele mai serioase şi vechi reviste de matematică din lume. Abonați-vă la ***Gazeta Matematică***, sigur veți avea numai de câştigat!

Din nou, spor la treabă tuturor: elevi, profesori, părinți sau prieteni!

(*Informații suplimentare se pot obține la: prof.Ovidiu Bădescu, tel: 0741017700 sau prof. Lucian Dragomir, tel: 0255/530303 sau 0722/883537, e-mail: lucidrag@yahoo.com).* ■

Rețele laticeale în plan

Vasile Pop, Lucian Dragomir

Rezumat: *Acest articol prezintă o serie de probleme legate de puncte care au coordonatele întregi, probleme deosebit de frumoase, poate mai ales prin simplitatea ideilor care conduc la rezolvare.*

Dacă xOy este un sistem ortogonal în plan, atunci elementele mulțimii $L=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{Z}\wedge y\in\mathbb{Z}\}$ se numesc *puncte laticeale*, iar mulțimea L se numeşte *rețea laticeală* în plan; punctele laticeale se mai numesc astfel şi *nodurile rețelei*.

Un rezultat absolut remarcabil îl constituie următoarea

Teoremă (G.Pick, 1899) .

Dacă P este un poligon convex în plan ale cărui vârfuri sunt puncte laticeale, în interiorul poligonului sunt n noduri ale rețelei laticeale, iar k puncte laticeale sunt pe frontiera poligonului, atunci aria acestuia este $\mathcal{A}(P)=n+\frac{k}{2}-1.$

Demonstrația, absolut instructivă, se poate găsi în [1] sau [2].

Prezentăm acum problemele promise:

P1. Determinați toate poligoanele regulate care au vârfurile în nodurile unei rețele laticeale.

Soluție: Se arată că singurele poligoane cu această proprietate sunt pătratele. Observăm pentru început că, pentru orice vârfuri A,B,C situate în noduri ale rețelei, avem $tg(\sphericalangle BAC)\in\mathbb{Q}$; deoarece $tg\frac{\pi}{3}, tg\frac{3\pi}{5}, tg\frac{2\pi}{3}$ sunt numere iraționale, deducem că într-o rețea de pătrate nu pot fi înscrise triunghiuri echilaterale, pentagoane regulate şi hexagoane regulate. Pentru $n\geq 7$, presupunem că există un poligon regulat $A_1A_2...A_n$ cu vârfurile în nodurile rețelei; dintre toate poligoanele de acest fel îl alegem acum pe cel care are latura cea mai mică. Alegem şi un nod

O al rețelei, apoi translatăm fiecare latură A_iA_{i+1} cu A_i în O (obținem astfel $\overrightarrow{OB_i} = \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$, cu $A_{n+1} = A_1$).

Poligonul $B_1B_2...B_n$ este regulat, are vârfurile în nodurile rețelei şi are latura strict mai mică decât a primului poligon (într-un poligon regulat cu $n \geq 7$ laturi, latura este mai mică decât raza cercului circumscris). Am ajuns astfel la o contradicție (lungimea laturilor nu poate fi micşorată oricât, distanța între două puncte laticiale fiind cel puțin 1).

P2. Se consideră în plan trei puncte A, B, C de coordonate întregi în astfel încât pe segmentele $[AB],[BC],[CA]$ nu sunt situate alte puncte de coordonate întregi, iar în interiorul triunghiului ABC este exact un punct G de coordonate întregi. Arătați că G este centrul de greutate al triunghiului ABC .

Soluție: Partiționăm triunghiul ABC în triunghiurile GAB, GBC, GCA şi astfel fiecare dintre aceste triunghiuri are trei noduri pe frontieră (vârfurile) şi niciun punct în interior. Conform teoremei lui Pick, ariile celor trei triunghiuri sunt egale cu $0+\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$, deci egale între ele. Deducem imediat (!) că G este centrul de greutate al triunghiului ABC .

P3. Arătați că, pe orice cerc cu centrul în punctul $A(\sqrt{2},\sqrt{3})$, există cel mult un punct de coordonate întregi.

Soluție: Considerăm două puncte $B(x, y), C(u, v)$ situate pe un acelaşi cerc cu centrul în $A.$ Avem astfel imediat

$\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=\left(u-\sqrt{2}\right)^2+\left(v-\sqrt{2}\right)^2$, de unde

$x^2+y^2-2\sqrt{2}\cdot x-2\sqrt{3}\cdot y+5=u^2+v^2-2\sqrt{2}\cdot u-2\sqrt{3}\cdot v+5$.

Folosim acum faptul că, dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$ şi $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0$, atunci $a=b=c=0.$ (Justificați!)

Obținem imediat că $x=u, y=v$, aşadar punctele B şi C coincid.

P4. Se consideră două segmente $[OA]$ şi $[OB]$ în plan, de lungimi $\sqrt{3}$, respectiv $\sqrt{2}$. Pe fiecare dintre aceste segmente se construieşte câte un pătrat care generează astfel două reţele infinite de pătrate în plan. Calculaţi câte noduri comune au cele două reţele.

Soluţie: Alegem un sistem de coordonate în plan cu originea în O şi astfel încât dreapta OA să fie axa Ox. Punctele reţelei de pătrate construite pe OA au coordonatele $\left(m\sqrt{3}, n\sqrt{3}\right), m, n \in \mathbb{Z}$; dacă unghiul dintre OA şi OB este α, atunci reţeaua construită pe OB se obţine prin rotaţia de unghi α a reţelei cu nodurile $\left(p\sqrt{2}, q\sqrt{2}\right), p, q \in \mathbb{Z}$, deci nodurile acesteia vor fi $\left(p\sqrt{2}\cos\alpha - q\sqrt{2}\sin\alpha, p\sqrt{2}\sin\alpha + q\sqrt{2}\cos\alpha\right)$. Vom arăta acum că singurul nod comun este $O(0,0)$, adică $m = n = 0$ şi $p = q = 0$. Dacă există $M\left(m\sqrt{3}, n\sqrt{3}\right) = P\left(p\sqrt{2}\cos\alpha - q\sqrt{2}\sin\alpha, p\sqrt{2}\sin\alpha + q\sqrt{2}\cos\alpha\right)$, atunci vectorii $\overrightarrow{OM}$ şi $\overrightarrow{OP}$ au aceeaşi lungime, de unde se ajunge la $3\left(m^2 + n^2\right) = 2\left(p^2 + q^2\right)$, adică o interesantă ecuaţie în numere întregi. Deoarece $m^2 + n^2$ este astfel divizibil cu 2, deducem că m, n au aceeaşi paritate, aşadar putem considera $m = x + y, n = x - y$, cu $x, y \in \mathbb{Z}$. Ajungem la $3\left(x^2 + y^2\right) = p^2 + q^2$; deoarece $p^2 + q^2$ este divizibil cu 3, se deduce că $p = 3a_1, q = 3b_1$, cu $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$, de unde obţinem $x^2 + y^2 = 3\left(a_1^2 + b_1^2\right)$. Continuând la fel, avem că $x = 3c_1, y = 3d_1$, cu $c_1, d_1 \in \mathbb{Z}$, apoi $a_1 = 3a_2, b_1 = 3b_2$ etc, deci $m^2 + n^2$ şi $p^2 + q^2$ se divid cu orice putere a lui 3, adică $m^2 + n^2 = p^2 + q^2 = 0$. În concluzie $m = n = p = q = 0$.

P5. Arătaţi că, pentru orice număr natural n, există în plan un cerc care conţine în interior exact n puncte de coordonate întregi, iar pe frontieră niciunul.

Soluție: Luăm un cerc de centru $A(\sqrt{2},\sqrt{3})$, de rază suficient de mică astfel încât să nu conțină în interior niciun punct laticeal. Mărim raza cercului până când pe frontiera sa apare primul punct de coordonate întregi; mărim în continuare raza, timp în care în interiorul cercului rămâne un singur punct laticeal. Găsim al doilea cerc care are pe frontieră un singur punct laticeal (conform problemei **P3**) şi în interior unul singur; mărim raza şi astfel intră şi al doilea punct în cercul nou obținut. Continuăm cu acelaşi procedeu şi raționament până când obținem un cerc în care intră exact n puncte laticeale.

P6. O mulțime $\mathcal{D}$ de n drepte din plan are proprietatea că fiecare dreaptă a mulțimii intersectează exact 2011 drepte din $\mathcal{D}$.

Determinați numărul natural n.

Soluție: Considerăm o dreaptă d din $\mathcal{D}$; presupunând că d este paralelă cu exact k drepte din $\mathcal{D}$, rezultă că $n = 2012 + k$. Dacă a este o dreaptă din $\mathcal{D}$, diferită de d, deoarece a intersectează 2011 drepte din $\mathcal{D}$, ea este paralelă cu $n - 2012 = k$ drepte din $\mathcal{D}$.
Aşadar, fiecare dreaptă din $\mathcal{D}$ este paralelă cu exact k drepte, deci cele n drepte se pot împărți în grupe de câte $k+1$ drepte paralele între ele. Deducem astfel că $(k+1)\,|\,n$, deci $(k+1)\,|\,(k+2012)$, de unde $k \in \{0, 2010\} \Rightarrow n \in \{2012, 4022\}$. De remarcat că o configurație validă pentru $n = 2012$ este formată din dreptele suport ale laturilor unui poligon convex cu 2012 laturi, oricare două neparalele, iar o configurație validă pentru $n = 4022$ este formată din 2011 drepte paralele intersectate de alte 2011 drepte paralele (o rețea laticeală de exemplu).

Conf. Univ. Dr., Universitatea Tehnică Cluj – Napoca
Prof., Liceul Bănățean – Oțelu Roşu

Bibliografie:
[1] Vasile Pop, Viorel Lupşor (coordonatori) – Matematică pentru grupele de excelență, clasa a IX-a, Editura Dacia Educațional, 2004
[2] Vasile Pop – Geometrie combinatorică, Editura Mediamira, 2010

O metodă de rezolvare a unor probleme în cub.

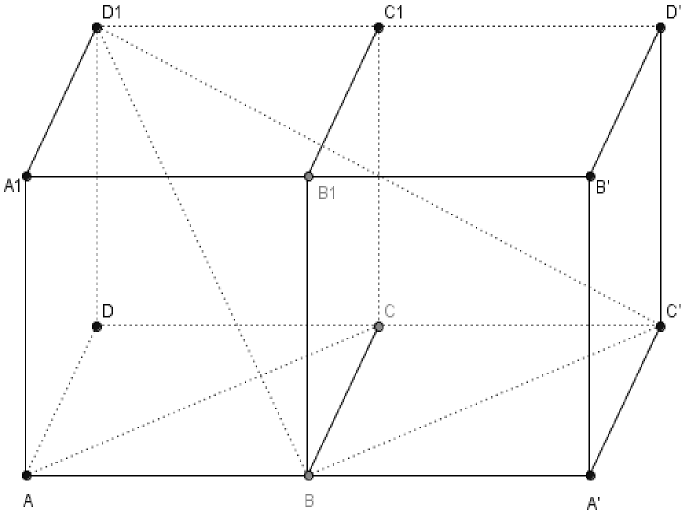
Ioan- Nicolae Boariu şi Aurel Doboşan

În multe probleme de geometrie în spaţiu referitoare la cub, se cer determinate anumite unghiuri dintre segmente, respectiv drepte suport, necoplanare. Metoda constă în aceea că se „dublează” (se translatează) cubul având o faţă comună cu cubul iniţial, în jurul acesta punându-se uşor în evidenţă unghiul a cărei mărime se cere. Vom ilustra cele de mai sus prin câteva probleme.

P 1: Fiind dat cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$, calculaţi măsura unghiului dintre dreptele BD_1 şi AC .

[2], T33, problema 5.

Soluţie:



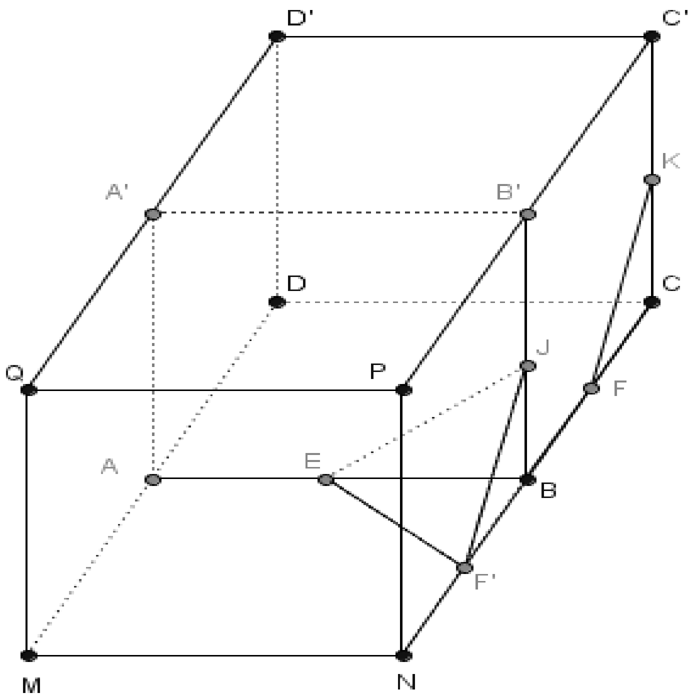
Construim cubul $BCC_1B_1A'B'C'D'$. Cum $BC' \parallel AC$, unghiul căutat este $\sphericalangle D_1BC'$. Notând cu a lungimea laturii cubului, avem $BD_1 = a\sqrt{3}, BC' = a\sqrt{2}$ şi $D_1C' = a\sqrt{5}$ ca diagonală a dreptunghiului $DC'D'D$.

Deoarece $BD_1^2 + BC'^2 = 3a^2 + 2a^2 = 5a^2 = D_1C'^2$, după reciproca teoremei lui Pitagora rezultă că $m\left(\sphericalangle D_1BC'\right) = 90^0$.

P 2: În cubul $ABCDA'B'C'D'$ se notează cu E, F, J, K mijloacele segmentelor $[AB], [BC], [BB']$ respectiv $[CC']$. Calculați măsura unghiului format de dreptele EJ şi FK.

[1], problema VIII, G.326.

Soluție:

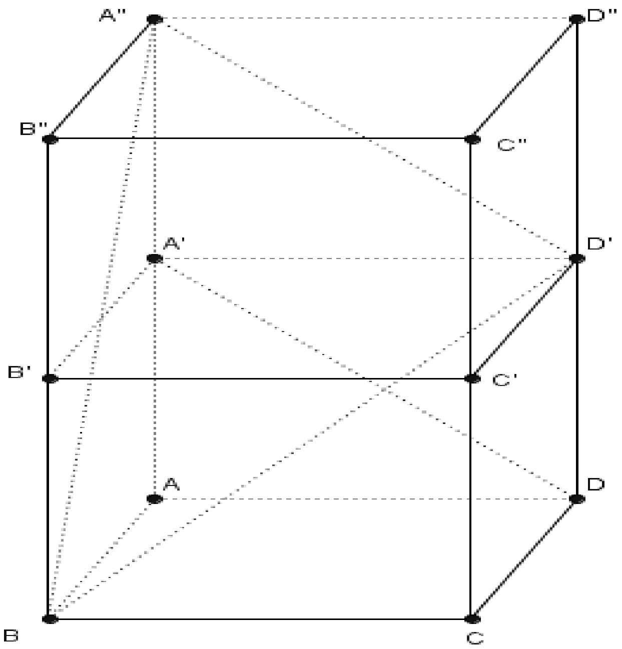


Construim cubul $ABB'A'MNPQ$. Fie F' mijlocul segmentului $[NB]$. Atunci $JF' \parallel KF$ şi unghiul cerut este $\sphericalangle EJF'$. Cum triunghiul EJF' este echilateral (cu laturile $\frac{AB\sqrt{2}}{2}$) rezultă că $m(\sphericalangle EJF') = 60^0$

P3: Se dă cubul $ABCDA'B'C'D'$. Aflați măsura unghiului determinat de dreptele DA' şi BD'.

[3], problema VIII. 146..

Soluție:



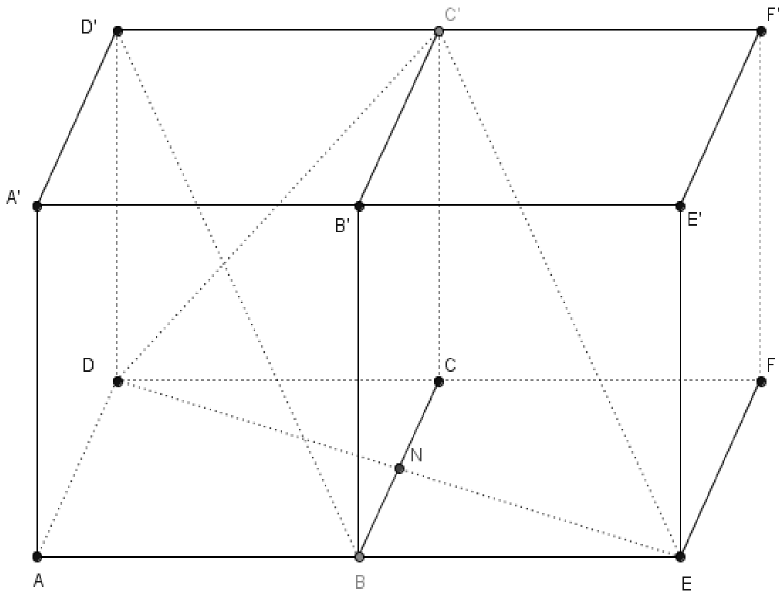
Construim Cum $[DA'] \overset{\parallel}{\equiv} [D'A"]$ rezultă că unghiul cerut este $BD'A"$. Notând lungimea laturii cubului cu a, avem: $BD' = a\sqrt{3}$ (diagonala cubului), $D'A" = a\sqrt{2}$ (diagonala feței) şi $BA" = a\sqrt{5}$ (diagonala dreptunghiului $ABB"A"$ de latură a şi 2a).

Atunci în triunghiul $BD'A"$ avem $BD'^2 + D'A"^2 = 3a^2 + 2a^2 = 5a^2 = BA"^2$ şi conform reciprocei teoremei lui Pitagora rezultă că triunghiul $BD'A"$ este dreptunghic în D' adică $m(\sphericalangle BD'A") = 90^0$.

P 4: În cubul $ABCDA'B'C'D'$ se notează cu M mijlocul $[BC]$.
Calculați măsura unghiului determinat de dreptele BD' şi DM.

Aurel Doboşan

Soluție:



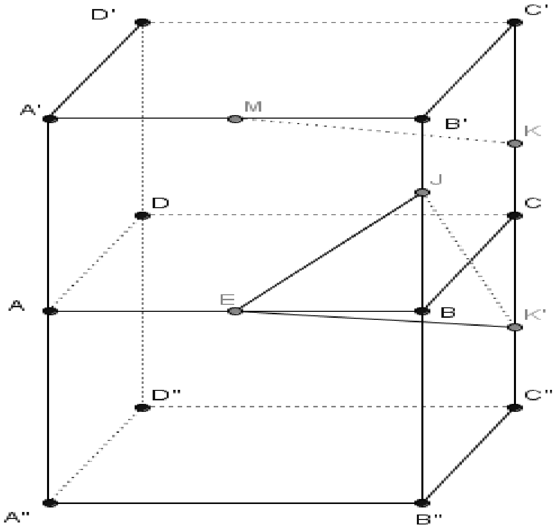
Construim cubul $BEFCB'E'F'C'$. Cum $BD' \| EC'$, rezultă că unghiul este $\sphericalangle DEC'$. Dar notând lungimea laturii cubului cu a, avem: $DE = a\sqrt{5}$ (diagonala dreptunghiului $AEFD$ de dimensiuni a si 2a), $DC' = a\sqrt{2}$ (diagonala feței), $EC' = a\sqrt{3}$ (diagonala cubului). Cum $\left(DC^{/}\right)^2 + \left(EC^{/}\right)^2 = DE^2$, folosind reciproca teoremei lui Pitagora, rezultă că triunghiul DEC' este dreptunghic in C'. Deducem astfel :

$\cos\left(\sphericalangle DEC'\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$, de unde $m\left(\sphericalangle DEC'\right) = arc\cos\frac{\sqrt{15}}{5}$.

P 5: Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi E,J,K,M mijloacele segmentelor $[AB],[BB'],[CC']$ respectiv $[A'B']$. Calculați măsura unghiului format de dreptele EJ şi MK.

Ioan Nicolae Boariu

Soluție:



Construim cubul $ABCDA"B"C"D"$. Notăm K',A_1,B_1,D_1,E' mijloacele segmentelor $[CC"],[AA"],[BB"],[DD"]$ respectiv $[A_1B_1]$. Cum $EK' \| MK$ rezultă că unghiul cerut este $\sphericalangle JEK'$. Din pătratul $A_1B_1K'D_1$ aflăm $E'K' = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, din triunghiul $EE'K$ dreptunghic în E' aflăm $EK' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. În plus $EJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Apoi $JK' = B'C = a\sqrt{2}$. Observăm că $EJ^2 + EK'^2 = \frac{2a^2}{4} + \frac{6a^2}{4} = 2a^2 = JK'$; conform reciprocei teoremei lui Pitagora rezultă că triunghiul EJK' este dreptunghic în *E*, adică $m(\sphericalangle JEK') = 90^0$.

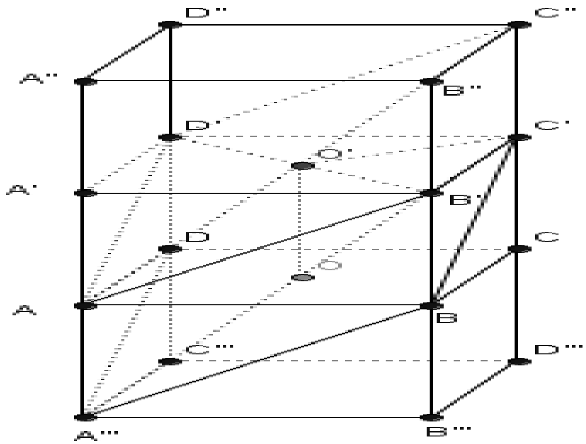
P6: Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu lungimea muchiei a.

a) Arătați că $(AB'D') \| (C'BD)$

b) Calculați distanța dintre planele $AB'D'$ şi $C'BD$.

Olimpiadă Maramureş,1988

Soluție:



Construim cuburile $A'B'C'D'A''B''C''D''$ şi $ABCDA''B''C''D''$

a) $AB'C''D'$ şi $A'''BC'D$ sunt romburi cu laturile respectiv paralele, deci fac parte din plane paralele.

b) Dacă O este centrul pătratului $ABCD$ şi O' este centrul pătratului $A'B'C'D'$, iar Q este proiecția O' lui pe OC', atunci

$$O'Q = \frac{OC' \cdot O'C'}{OC'} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Bibliografie:

[1] *V.E. Cărbunaru, C.M. Cărbunaru – Culegere de probleme de matematică clasele VII-VIII*

[2] *Petre Simion – Teste de matematică pentru concursurile şcolare*

[3] *Revista Arhimede 2003*

Profesor, Şcoala Generală Hopîrta, Alba,

Profesor, Colegiul Național „Iulia Haşdeu”, Lugoj, Timiş

Metode nestandard de abordare a unor tipuri de ecuații algebrice cu coeficienți reali

Antoanela Buzescu

Noțiunea de ecuație este una dintre primele noțiuni pe care elevul le întâlneşte în matematica gimnaziului, urmând ca, ulterior, în liceu, să diversifice modalitățile de abordare a ecuațiilor algebrice, atât în problematica rezolvării efective (în cazuri particulare pentru ecuațiile algebrice de grad superior), cât şi printr-un studiu calitativ în care analiza matematică joacă un rol esențial.

Pornind de la noțiuni elementare de algebră, cele mai multe la nivelul programei de liceu, problemele legate de studiul ecuațiilor algebrice pot fi tratate şi ,,altfel'', ceea ce s-ar putea constitui, aşa credem, într-un instrument util în pregătirea concursurilor şcolare.

Selecția s-a realizat atât din rândul problemelor propuse la concursurile şcolare, cât şi din diverse materiale publicate în timp în GM.

Problema 1: Arătați că, dacă $a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, atunci ecuația

$$ax^3 - 3bx^2 - 3ax + b = 0$$ are toate soluțiile reale .

Rezolvare: Se împarte prin $a \neq 0$ şi ecuația se rescrie

$x^3 - 3\dfrac{b}{a}x^2 - 3x + \dfrac{b}{a} = 0$; deducem imediat că $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$; cum $x \in \mathbb{R}$, există $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ pentru care $tg\, y = x$, iar ecuația se rescrie din nou astfel : $tg\, 3y = \dfrac{b}{a}$ şi are soluțiile $y_k = \dfrac{arctg\left(\dfrac{b}{a}\right) + k\pi}{3}$, unde $k \in \{0,1,2\}$

Revenim la substituție şi rezultă : $x_k = tg\, y_k$, unde $k \in \{0,1,2\}$.

Problema 2: Arătați că, dacă $|a_i| < \dfrac{2}{3}, a_i \in \mathbb{R}$, atunci ecuația

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + 1 = 0$$ nu are soluții reale .

Rezolvare : Arătăm că

$$\left|x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x\ \ +1\right|\geq\left|x^4+1\right|-\left|a_1x^3+a_2x^2+a_3x\ \right| \qquad (1)$$

Cum $\left|a_1x^3+a_2x^2+a_3x\right|\leq\frac{2}{3}\cdot\left(|x|^3+|x|^2+|x|\right)$, revenind în (1) rezultă că:

$$\left|x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x\ \ +1\right|\geq\left|x^4+1\right|-\frac{2}{3}\left(|x|^3+|x|^2+|x|\right)=\left(|x|-1\right)^2\left(|x|^2+\frac{4}{3}|x|+1\right)\geq 0,$$

$(\forall)x\in\mathbb{R}$ (2)

Dacă $x=1$, înlocuind în ecuație, obținem $2+a_1+a_2+a_3=0$, ceea ce este imposibil deoarece $|a_i|<\frac{2}{3}\Rightarrow 2+\sum a_i>0$. Analog, pentru $x=-1$, rezultă $2-a_1+a_2-a_3=0$, fals pentru că $2-a_1+a_2-a_3>0$. În concluzie, inegalitatea (2) este strictă, deci ecuația dată nu are soluții reale.

Problema 3: Arătați că ecuația $x^3-2x-a=0$, unde $a\in\mathbb{Q}$ are cel mult o soluție rațională.

Rezolvare :

Presupunem, prin absurd, că ecuația are soluțiile $x,y\in\mathbb{Q}$, $x\neq y$. Atunci $x^3-2x-a=0$ şi $y^3-2y-a=0$. De aici , prin scădere, deducem că $x^2+xy+y^2-2=0$, ecuație de gradul II în x care are rădăcini raționale dacă $\Delta_x=y^2-4(y^2-2)$ este pătratul unui număr rațional, adică dacă $8-3y^2=\left(\frac{p}{q}\right)^2$ şi ,unde $(p,q)=1, p,q\in\mathbb{Z}$ $q\neq 0$.

De aici $8q^2-3(yq)^2=p^2\Leftrightarrow 8q^2-p^2=3(yq)^2$ (1)

Se analizează cazurile $p,q\in\{3k,3k+1,3k+2\}$ şi se constată că (1) nu are loc .

Problema 4: Să se rezolve ecuația $x^3 - x^2 + (a+b)x + b = 0$, unde $a,b \in \mathbb{R}$ știind că admite rădăcinile $x_1 = \cos u$, $x_2 = \cos 2u$, $x_3 = -\cos 3u$, $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și să se determine valorile parametrilor a și b.

Rezolvare :

Din $\sum x_1 = 1 \Rightarrow \cos u + \cos 2u - \cos 3u = 1 \Leftrightarrow \sin u \cdot \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3u}{2}\right) = 0$;

Singura soluție convenabilă este $u = \frac{\pi}{3}$ când $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = 1$, $a = -\frac{5}{4}$, $b = \frac{1}{4}$.

Problema 5: Se consideră ecuația $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, unde $a,b,c \in \mathbb{R}$. Dacă $c > 1$, $b > ac$ și rădăcinile ecuației sunt reale și pozitive, arătați că:

a) ecuația nu poate avea rădăcina 1;
b) o rădăcină este subunitară și două supraunitare.

Rezolvare :

a) Prin reducere la absurd . Condițiile $c > 1, b > ac$ conduc la $x_1 x_2 x_3 > 1$ și $\sum x_1 x_2 > \left(\sum x_1\right)(x_1 x_2 x_3) \Leftrightarrow \sum \frac{1}{x_1} > \sum x_1$. Dacă $x_1 = 1$, atunci $x_2 x_3 > 1$ și $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} > x_2 + x_3$. Ultima inegalitate este echivalentă cu $(x_2 + x_3)(1 - x_2 x_3) > 0$, fals pentru că rădăcinile sunt pozitive .

b) Dacă $x_1, x_2, x_3 > 1$ atunci avem relația falsă $\sum \frac{1}{x_1} > \sum x_1$.

Dacă $x_1 > 1$, $x_2 x_3 < 1$ atunci din relațiile date se ajunge la $(x_2 - 1)(x_3 - 1)(x_2 x_3 - 1) > 0$, contradicție. Analog, dacă $x_1, x_2, x_3 < 1$, atunci se contrazice relația $x_1 x_2 x_3 > 1$.

Problema 6: Se consideră ecuația $ax^2+bx+c=0$, unde $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Să se arate că numărul $\sqrt[3]{3}$ nu poate fi rădăcină a acestei ecuații .

(ONM 1979, autor : Sorin Popa)

Rezolvare :

Să presupunem că $x=\sqrt[3]{3}$ ar fi rădăcină a ecuației date. Fie $y=\sqrt[3]{9}$ şi $x=\sqrt[3]{3}$.

Atunci obținem : $\begin{cases} ay+bx=-c \\ by+cx=-3a \end{cases}$

Dacă $b^2\neq ac$ atunci $x=\dfrac{bc-3a^2}{ac-b^2}$, adică $\sqrt[3]{3}$ ar fi rațional, ceea ce este fals .

Dacă $b^2=ac$ atunci $ax^2+bx+c=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-b\pm bi\sqrt{3}}{2a}$ de unde deducem că $b=0$, atunci $x=0$ fals, iar dacă $b\neq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{3}$ este din mulțimea $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, fals. Prin urmare, $\sqrt[3]{3}$ nu poate fi rădăcină a ecuației date .

Problema 7: Se consideră ecuația $x^n-\sum_{k=1}^{n}C_n^k x^{n-k}(a-1)^{k-1}=0$,

cu $n\in\mathbb{N}^*, a\in\mathbb{R}$ şi $a\geq 0$. Să se arate că ecuația admite ca rădăcină numărul $x=1+\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{a^2}+\ldots+\sqrt[n]{a^{n-1}}$.

(Problema 18238,Gazeta Matematică – Nr.4 / 1980,
autor: Ion Ursu)

Rezolvare:

$x^n=(1+\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{a^2}+\ldots+\sqrt[n]{a^{n-1}})^n$ şi

$$\sum_{k=1}^{n}C_n^k x^{n-k}(a-1)^{k-1}=\frac{1}{a-1}\sum_{k=1}^{n}C_n^k x^{n-k}(a-1)^k=\frac{1}{a-1}\left[(x+a-1)^k-x^n\right]=$$

$=\dfrac{1}{a-1}\left[\sqrt[n]{a}^n x^n-x^n\right]=\dfrac{1}{a-1}(a-1)x^n=x^n$, şi deci afirmația din enunțul problemei este demonstrată .

Cazuri particulare :

1) ecuația $x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x^2-\sum_{k=1}^{2} C_2{}^k x^{2-k}=0$ admite rădăcina $x=1+\sqrt{2}$;

2) ecuația $x^3-3x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow x^3-\sum_{k=1}^{3} C_3{}^k x^{3-k}=0$ admite rădăcina $x=1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}$

3) ecuația $x^4-4x^3-6x^2-4x-1=0 \Leftrightarrow x^4-\sum_{k=1}^{4} C_4{}^k x^{4-k}=0$ admite rădăcina $x=1+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2^2}+\sqrt[4]{2^3}$.

Problema 8: Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația

$$\left(x^2+2x+2\right)\left(3x^2+2x+4\right)=3\left(x^2+1\right)^2 .$$

(Problema E: 12 100,Gazeta Matematică – Nr.9-10 / 2001, autori: Adriana & Lucian Dragomir)

Rezolvare :

Notând $y=2x^2+2x+3$, ecuația devine

$$\left[y-\left(x^2+1\right)\right]\left[y+\left(x^2+1\right)\right]=3\left(x^2+1\right)^2 \Leftrightarrow y^2-4\left(x^2+1\right)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(y-2x^2-2\right)\left(y+2x^2+2\right)=0 \Leftrightarrow \left(2x+1\right)\left(4x^2+2x+5\right)=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

pentru că ecuația $4x^2+2x+5=0$ nu admite rădăcini reale .

Problema 9: Să se rezolve ecuația $x^4-4x^3-4x^2+25x-20=0$.

(Problema 18566, Gazeta Matematică – Nr.12 / 1980, autor: Radu Mărculescu)

Rezolvare:

În rezolvarea acestei ecuații se va folosi metoda lui Descartes pentru rezolvarea unei ecuații algebrice de gradul patru. Se face substituția: $y=x+1$.

Revenind la ecuație, se ajunge la forma $y^4-10y^2+9y-2=0$

Se caută apoi o descompunere de forma

$$y^4-10y^2+9y-2=\left(y^2+ay+b\right)\left(y^2+cy+d\right)$$

Prin identificare, se obține sistemul

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+d+ac=-10 \\ ad+bc=9 \\ bd=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-a \\ b+d=a^2-10 \\ d-b=\dfrac{9}{a} \\ bd=-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Cum $bd=\frac{1}{4}\left[(b+d)^2-(b-d)^2\right] \Rightarrow -2=\frac{1}{4}\left[\left(a^2-10\right)^2-\left(\frac{9}{a}\right)^2\right]$

$$\Rightarrow -8=a^4-20a^2+100-\frac{81}{a^2}$$

Notăm $a^2=z$ și obținem ecuația în z : $z^3-20z^2+108z-81=0$ care admite rădăcina *z=9*

Revenind la substituție , luăm $a=3 \Rightarrow c=-3, b=-2, d=-1$.

Deci , avem că $y^4-10y^2+9y-2=\left(y^2+3y-2\right)\left(y^2-3y+1\right)$.

1) $y^2+3y-2=0$ ne conduce la $y_1=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$; $y_2=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$;

2) $y^2-3y+1=0$ ne conduce la $y_3=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $y_4=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Revenind la substituția inițială , avem soluțiile:

$x_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$; $x_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$; $x_3=\frac{-5+\sqrt{5}}{2}$; $x_4=\frac{-5-\sqrt{5}}{2}$.

Problema 10: Să se rezolve ecuația $(x-1)^4+(x+3)^4=17$

(Gazeta Matematică – Nr.8 / 1985)

Rezolvare :

Se face substituția $y=x+1$ și astfel ecuația devine

$$(y-2)^4+(y+2)^4=17 \Leftrightarrow 2y^4+48y^2+32=17 \Leftrightarrow 2y^4+48y^2+15=0$$

ceea ce reprezintă o ecuație bipătrată, care se poate rezolva simplu, ulterior revenindu-se la substituție.

Problema 11: Rezolvați ecuația $p(z)=0$ unde

$p=X^4-7X^3+15X^2-7X-6$, ştiind că diferența a două rădăcini este 1.

Rezolvare :

Nu se recomandă abordarea problemei cu ajutorul relațiilor dintre rădăcini şi coeficienți, datorită dificultăților de calcul ce se întâmpină în rezolvarea sistemului care rezultă. O soluție, mai „economică" din punct de vedere al calculelor, este următoarea :

Conform enunțului, rădăcinile ecuației $p(z)=0$ sunt $a,a-1,b,c$ deci ecuația $p(z+1)=0$ are soluțiile $a-1,a-2,b-1,c-1$. Rezultă deci că $p(z)=0$ şi $p(z+1)=0$ admit rădăcina comună $a-1$. Deoarece $p(z+1)=z^4-3z^3+6z-4$ vom afla c.m.m.d.c. al polinoamelor p şi $q=x^4-3x^3+6x-4$. Acesta este polinomul $r=X-2$, deci $a-1=2$ sau $a=3$ şi se cunosc astfel două rădăcini ale ecuației $p(z)=0$. În continuare , se găsesc rădăcinile $b=1-\sqrt{2}$ şi $c=1+\sqrt{2}$.

Problema 12: Dacă ecuația $x^3+px+q=0$, $p,q\in\mathbb{R}$, are o singură rădăcină reală, modulul unei rădăcini complexe nereale este mai mare sau mai mic decât modulul rădăcinii reale după cum $p>0$, respectiv $p<0$.

(Gazeta Matematică – Nr.8 / 1985)

Rezolvare :

Fie $x_1=a$ rădăcina reală a ecuației. Rezultă că

$x^3+px+q=(x-a)(x^2+ax+a^2+p)$

Presupunând că $p\neq 0$, rezultă că rădăcinile complexe nereale ale ecuației sunt $x_2=\frac{1}{2}\left(-a-i\sqrt{3a^2+4p}\right)$, $x_3=\frac{1}{2}\left(-a+i\sqrt{3a^2+4p}\right)$

De aici deducem că: $|x_2|=|x_3|=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3a^2+4p}{4}}=\sqrt{a^2+4p}$.

Aşadar $p>0\Rightarrow|x_2|=|x_3|>|a|$; $p<0\Rightarrow|x_2|=|x_3|<|a|$;

Remarcăm că pentru rezolvarea problemei s-a presupus că $3a^2+4p>0$.

Problema 13: Să se determine zerourile funcției $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f_n(x)=1-\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x(x-1)+...+\frac{(-1)^n}{n!}x(x-1)...(x-n+1).$$

Rezolvare: Vom observa că $f_1(x)=-(x-1)$, deci funcția f_1 are un singur zero $x_1=1$. În plus, $f_2(x)=\frac{1}{2!}(x-1)(x-2)$, deci funcția f_2 are două zerouri $x_1=1$ și $x_2=2$. Suntem astfel conduși la a face presupunerea **(*)** $f_k(x)=\frac{(-1)^k}{k!}(x-1)(x-2)...(x-k)$, unde $k\in\mathbb{N}^*$.

Deducem că $f_{k+1}(x)=f_k(x)+\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}x(x-1)(x-2)...(x-k)=$

$$=\frac{(-1)^k}{k!}(x-1)(x-2)...(x-k)+\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}x(x-1)(x-2)...(x-k)=$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}(x-1)(x-2)...(x-k)\left[-(k+1)+x\right]$$, deci

$$f_{k+1}(x)=\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}x(x-1)(x-2)...(x-k)(x-k-1)$$, ceea ce confirmă că

$f_{k+1}(x)$ este de forma **(*)** $\Rightarrow f_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}(x-1)(x-2)...(x-n)$, unde $n\in\mathbb{N}^*$

Rezultă că zerourile funcției f_n sunt numerele $1,2,...,n$.

Bibliografie :

[1] Năstăsescu, Constantin - Teoria calitativă a ecuațiilor algebrice, București, Editura Tehnică, 1979

[2] Ganga, Mircea - Ecuații și inecuații, Ploiești, Editura Mathpress, 1988

[3] Neacșu, Mihail - Concursul interjudețean Traian Lalescu, Pitești, Editura Paralela 45, 1999

[4] Georgescu Eremia,Onofraș Eugen - Metode de rezolvare a problemelor de matematică în liceu,București, Editura Didactică și Pedagogică, 1982

[5] Colecția Gazeta Matematică (1962-2011)

Profesor, Liceul C.D. Loga, Caransebeș

Asupra unor probleme propuse în RMCS

Petrişor Neagoe

În numărul 35 al revistei RMCS au fost propuse spre rezolvare la clasa a VIII-a (VIII.218 şi VIII.219) două probleme de la testele de selecție pentru OBMJ. În continuare voi prezenta soluții pentru cele două probleme (problemele 1 şi 2), iar problema 3 reprezintă o generalizare a problemei 2.

1. Arătați că în orice triunghi ABC dreptunghic în A este adevărată inegalitatea $(AB-AC)^2\cdot\left(BC^2+4\cdot AB\cdot AC\right)^2\le 2\cdot BC^6$.

Demonstrație:
Folosim notațiile uzuale $BC=a$, $AC=b$ şi $AB=c$.
Deoarece triunghiul ABC este dreptunghic în A rezultă, din teorema lui Pitagora, relația $a^2=b^2+c^2$.
Inegalitatea ce trebuie demonstrată este echivalentă cu inegalitatea

$$(b-c)^2\cdot\left(a^2+4bc\right)^2\le 2a^6 \Leftrightarrow \left(b^2+c^2-2bc\right)\cdot\left(a^2+4bc\right)^2\le 2a^6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2-2bc\right)\cdot\left(a^2+4bc\right)^2\le 2a^6 \Leftrightarrow \frac{a^2-2bc}{a^2}\cdot\left(\frac{a^2+4bc}{a^2}\right)^2\le 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{2bc}{a^2}\right)\cdot\left(1+2\cdot\frac{2bc}{a^2}\right)^2\le 2$$

Facem notația $\frac{2bc}{a^2}=t$. Ultima inegalitate este echivalentă cu inegalitatea

$$(1-t)\cdot(1+2t)^2\le 2 \Leftrightarrow (1-t)\cdot\left(1+4t+4t^2\right)\le 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+4t+\cancel{4t^2}-t-\cancel{4t^2}-4t^3\le 2 \Leftrightarrow 4t^3-4t+t+1\ge 0 \Leftrightarrow$$

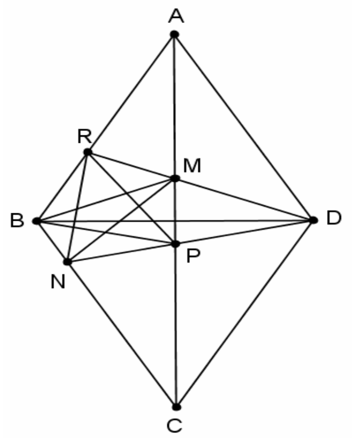
$$\Leftrightarrow 4t\cdot\left(t^2-1\right)+(t+1)\ge 0 \Leftrightarrow 4t\cdot(t-1)\cdot(t+1)+(t+1)\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t+1)\cdot\left(4t^2-4t+1\right)\ge 0 \Leftrightarrow (t+1)\cdot(2t-1)^2\ge 0.$$

Ultima inegalitate este adevărată, aşadar este adevărată şi cea propusă.

2. Fie $ABCD$ un romb şi punctele M, N pe segmentele (AC), respectiv (BC), $N \neq B$, astfel încât $DM = MN$. Se notează $\{P\} = AC \cap DN$ şi $\{R\} = AB \cap DM$. Demonstrați că $RP = PD$.

Demonstrație:



$ABCD$ - romb şi $M, P \in (AC) \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BMP \equiv \triangle DMP \Rightarrow \sphericalangle MBP \equiv \sphericalangle MDP$ şi $\sphericalangle BMP \equiv \sphericalangle DMP$.

$$\left.\begin{array}{r} \sphericalangle MBP \equiv \sphericalangle MDP \\ MN = MD \Rightarrow \sphericalangle MDN \equiv \sphericalangle MND \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle MBP \equiv \sphericalangle MNP$$

$\Rightarrow MBNP$ - patrulater inscriptibil $\Rightarrow \sphericalangle CNP \equiv \sphericalangle BMP \equiv \sphericalangle DMP \Rightarrow$

$\Rightarrow MNCD$ - patrulater inscriptibil $\Rightarrow \sphericalangle MDN \equiv \sphericalangle MCN \equiv \sphericalangle MAB \Rightarrow$

$\Rightarrow ADPR$ - inscriptibil $\Rightarrow \sphericalangle PRD \equiv \sphericalangle PAD \equiv \sphericalangle PAR \equiv \sphericalangle PDR \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle PRD$ - isoscel , $PR = PD$.

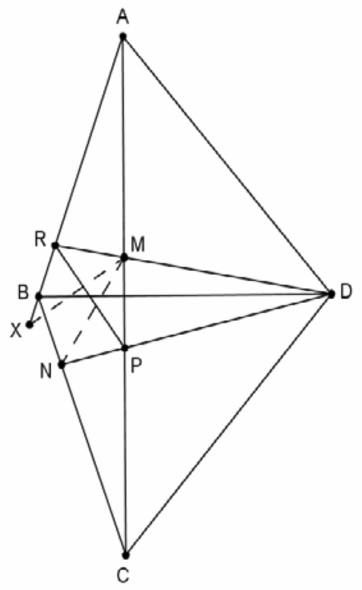
3. În patrulaterul $ABCD$ se consideră $BA = BC$ şi $DA = DC$. Fie punctele $M \in (AC)$, $X \in (AB$ şi $N \in (BC)$ astfel încât $\sphericalangle MXA \equiv \sphericalangle MDA$ şi $MN = MX$. Se notează $\{P\} = AC \cap DN$ şi $\{R\} = AB \cap DM$. Demonstrați că $\triangle PRD \sim \triangle MND$.

Demonstrație:

$BA = BC \Rightarrow \triangle ABC$ - isoscel $\Rightarrow \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BCA$.

$DA = DC \Rightarrow \triangle ADC$ - isoscel $\Rightarrow \sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle DCA$.

În următorul şir de egalităţi s-a aplicat teorema sinusurilor în $\triangle MCN$, $\triangle MAX$, $\triangle MAD$ şi $\triangle MCD$.



$$\frac{MC}{\sin(\sphericalangle MNC)} = \frac{MN}{\sin(\sphericalangle MCN)} =$$

$$= \frac{MX}{\sin(\sphericalangle MAX)} = \frac{MA}{\sin(\sphericalangle MXA)} =$$

$$= \frac{MA}{\sin(\sphericalangle MDA)} = \frac{MD}{\sin(\sphericalangle MAD)} =$$

$$= \frac{MD}{\sin(\sphericalangle MCD)} = \frac{MC}{\sin(\sphericalangle MDC)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\sphericalangle MNC) = \sin(\sphericalangle MDC) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sphericalangle MNC + \sphericalangle MDC = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow MNCD$ - patrulater inscriptibil $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle MDN \equiv \sphericalangle MCN \equiv \sphericalangle MAB \Rightarrow$

$\Rightarrow ADPR$ - patrulater inscriptibil $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle PRD \equiv \sphericalangle PAD \equiv \sphericalangle MCD \equiv \sphericalangle MND$.

Deci, $\triangle PRD \sim \triangle MND$.

Observație: Dacă $ABCD$ este romb atunci, din $\sphericalangle MXA \equiv \sphericalangle MDA$**,** rezultă că $X = B$ şi $MD = MX = MN$, deci $\triangle MND$ este isoscel. Din problema 3 rezultă imediat că $\triangle PRD$ este isoscel şi astfel obținem o altă soluție a problemei 2.

Profesor, Grup Şcolar „Mathias Hammer" Anina

Probleme rezolvate din RMCS nr. 35

Clasa a V-a

V. 210 a) Calculați câte numere de trei cifre au exact două cifre egale.
b) Arătați că nu există numere naturale $a, b, c,$ cel mult egale cu 9, pentru care $\overline{abc} + \overline{cba} = \overline{aab}$.

Olimpiadă Canada, enunț modificat

Soluție: a) Deosebim (sau distingem) trei tipuri de numere care satisfac enunțul: (I) numere de tipul 100, 122, 133,..., 199 (fără 111), avem 9 astfel de numere; de acest tip avem $9 \times 9 = 81$ de numere; (II) numere de tipul 121, 131, ... avem în total $9 \times 9 = 81$ numere; (III) numere de tipul 112, 113, ... avem în total 81... Total: 243 de numere.
Observație: De reținut: *Orice alt mod de numărare, corect, se punctează corespunzător.* b) Egalitatea se poate scrie $101c + 19b = 9a$ şi astfel se ajunge la $9a \leq 81 < 101 \leq 101c + 19b$, deoarece $c \neq 0$.

V. 211 Arătați că numărul $A = 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{210}$ se divide cu 1302.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție : Deoarece $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, putem folosi
$A = 2 \cdot (1+2) + 2^3 \cdot (1+2) + ... + 2^{209} \cdot (1+2)$, apoi
$A = 2 \cdot \left(1+2+4\right) + 2^4 \cdot \left(1+2+4\right) + ... + 2^{208} \cdot \left(1+2+4\right)$, deci A este multiplu de 6 şi multiplu de 7. La fel, avem şi
$A = 2 \cdot \left(1+2+4+8+16\right) + ...$, deci numărul este multiplu şi de 31 ; în concluzie, A se divide prin $6 \cdot 7 \cdot 31 = 1302$.

V. 212 Calculați restul împărțirii la 5 a numărului $A = 132^{123} + 77^{77}$.

Alfred Eckstein, Viorel Tudoran, Arad

Soluție : Notăm cu $u(a)$ ultima cifră a numărului a.
Avem astfel $u\left(132^{123}\right) = 8$ şi $u\left(77^{77}\right) = 7$, deci $u(A) = 5$ şi astfel restul cerut este 0.

V. 213 Şase copii vor să formeze două echipe de către trei jucători şi să dispute un meci de baschet. Calculați în câte feluri se pot forma cele două echipe.

Ioan Dăncilă, Bucureşti

Soluție : De fapt, trebuie să aflăm în câte feluri putem forma o echipă de trei jucători având la dispoziție şase. Pentru un elev de clasa a X-a, problema este simplă. Noi putem utiliza aici o simplă schemă grafică şi obținem 10 modalități.

V. 214 Într-o dimineață, veverița a lăsat în cuib, pentru cei patru pui ai săi, Alvin, Simon, Theodore şi Jason, o grămadă de alune. Fiecare pui, când s-a trezit, crezând că este primul, a luat un sfert din alunele aflate în cuib şi a plecat la joacă. După ce s-a trezit şi cel mai leneş, şi-a luat alunele după aceeaşi regulă, şi astfel au rămas în cuib 81 de alune. Câte alune a lăsat veverița în cuib?

Adriana Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție : Trebuie remarcat faptul că se poate da şi o soluție algebrică, aşa cum au încercat unii dintre rezolvitori (unii elevi au şi reuşit). Preferăm o metodă mai apropiată de nivelul actual de pregătire al elevilor, metoda drumului invers. Dacă în cuib au rămas la final 81 de alune, adică trei sferturi din numărul alunelor găsite de al patrulea pui în cuib, înseamnă că numărul alunelor lăsate în cuib de al treilea pui a fost egal cu $81 \cdot \frac{4}{3} = 108$. Folosind acelaşi raționament, avem că 108 reprezintă $\frac{3}{4}$ din numărul alunelor găsite în cuib de al treilea pui, deci în cuib erau $108 \cdot \frac{4}{3} = 144$ de alune, lăsate de al doilea pui. La fel, $144 \cdot \frac{4}{3} = 192$ de alune a lăsat primul pui în cuib şi astfel la început au fost în cuib $192 \cdot \frac{4}{3} = 256$ de alune.

V. 215 Un număr natural n împărțit la 15 dă restul 11, iar împărțit la 8 dă restul 3. Determinați restul împărțirii numărului $n+1$ la 12 .

* * *

Soluție : Din $n = 15 \cdot c + 11 = 8 \cdot d + 3$, deducem $n + 1 = 15c + 12 = 8d + 4$ sau $n + 1 = 3 \cdot (5c + 4) = 4 \cdot (2d + 1)$, deci restul împărțirii lui $n + 1$ la 3 şi la 4 este 0, deci restul cerut este 0.

V. 216 Suma tuturor resturilor împărțirii la 5 a n numere naturale consecutive este egală cu 86. Care este cel mai mic *n* posibil?

* * *

Soluție: Oricare 5 numere naturale consecutive dau la împărțirea cu 5 resturile 0,1,2,3 şi 4. Suma resturilor la împărțirea cu 5 a oricăror 5 numere naturale consecutive este aşadar egală cu 10. Deoarece, conform ipotezei, suma resturilor este egală cu $8 \cdot 10 + 6$, deducem că numerele pot fi grupate în 8 grupe de câte 5 numere consecutive plus câteva. În succesiunea de resturi 0,1,2,3,4,0,1,2,3,4,0,... doar secvența de trei resturi 1,2,3 conduce la suma 6. Cel mai mic *n* posibil este aşadar de fapt unicul număr posibil : $n = 40 + 3 = 43$.

V. 217 Determinați numărul maxim de numere care pot fi alese dintre numerele $1, 2, 3, ..., 50$, astfel incât suma oricăror două numere dintre cele alese să nu fie divizibilă cu 7.

* * *

Soluție: împărțim numerele în *şapte* mulțimi, anume $A_0 = \{7, 4, 21, ..., 49\}$, $A_1 = \{1, 8, 15, ..., 50\}$, $A_2, ..., A_6$, astfel încât în mulțimea A_k sunt numerele care dau restul *k* prin împărțirea la 7. Trebuie să observăm că nu putem alege două numere din mulțimea A_0, nici perechi de numere din A_1 cuplate cu numere din A_6 sau din A_2 cuplate cu elemente din A_5, etc. Aşadar vom putea alege elemente din A_1, A_2, A_3 sau A_4, A_5, A_6 cuplate cu un element din A_0. Numărul maxim de numere se realizează cu toate elementele din mulțimile A_1, A_2, A_3 şi un element din A_0. Avem astfel în total $8 + 7 + 7 + 1 = 23$ de numere.

V. 218 Toți Popeştii sunt Ioneşti (adică orice om care poartă numele Popescu face parte din marea familie a celor care poartă numele Ionescu), dar numai unii Ioneşti sunt Georgeşti. Stabiliți care dintre următoarele afirmații este adevărată:

a) Niciun Popescu nu poate fi Georgescu.
b) Dacă unul nu este Ionescu, el deasemenea nu este Georgescu.
c) Dacă unul nu este Georgescu, el nu poate fi Ionescu.

* * *

Soluție: Se poate oferi o soluție cu diagrame, desene... O superbă rezolvare (părerea noastră) face următoarea convenție inițială : dacă Ioneştii sunt numere naturale, Popeştii numere naturale divizibile cu 2, iar Georgeştii numere naturale divizibile cu 3, atunci într-adevăr toți Popeştii sunt Ioneşti şi numai Ioneştii sunt Georgeşti. Afirmațiile a) şi c) sunt aşadar false, iar b) este adevărată. (Soluție preluată din cartea Domnului Ioan Dăncilă: O carte premiu : Matematica pentru învingători, clasele V – VI , Ed. ErcPress).

V. 219 Aflați cel mai mare număr natural par n astfel încât în mulțimea $\{1, 2, 3, ..., n\}$ să existe exact 668 de numere care se divid cu 2, dar nu se divid cu 6.

Liliana Niculescu, Craiova

Soluție : Să remarcăm că numărul căutat este de forma $6a, 6a+2$ sau $6a+4, a \in \mathbb{N}^*$. Dacă $n = 6a$, atunci în mulțime sunt $3a$ numere divizibile cu 2 şi a numere divizibile cu 6, deci $3a - a = 668$, de unde $a = 334 \Rightarrow n = 2004$. Dacă $n = 6a + 2$, avem $3a + 1$ numere divizibile cu 2 şi a numere divizibile cu 6, aşadar obținem $3a + 1 - a = 668 \Rightarrow a \notin \mathbb{N}$. Dacă $n = 6a + 4$ se ajunge la $3a + 2 - a = 668 \Rightarrow a = 333 \Rightarrow n = 2002$. Aşadar numărul cerut este 2004.

Clasa a VI-a

VI. 210 Determinați numerele naturale m şi n ştiind că există un număr natural impar $\overline{abcbc}$ astfel încât $\overline{abcbc} = 26^m - 26^n$.

Pavel Rîncu, Bozovici

Soluție : Se deduce imediat că $m > n$ iar, dacă $n > 0$, atunci $26^m - 26^n = 26^n\left(26^{m-n} - 1\right)$ se divide cu 26, contradicție cu imparitatea numărului din enunț. Aşadar $n = 0$. Cum singura putere de cinci cifre a lui 26 este $26^3 = 17576$, deducem $m = 3$ şi $\overline{abcbc} = 17575$.

VI. 211 Acum 30 de ani, vârstele lui Anton, Barbu şi Constantin erau direct proporționale cu 1, 2, respectiv 5. Astăzi, raportul vârstelor lui Anton şi Barbu este egal cu $\frac{6}{7}$. Ce vârstă are în prezent Constantin?

Olimpiadă Canada, prelucrare

Soluție : Notăm cu a, b, c vârstele de acum 30 de ani ale celor trei oameni. Avem astfel $a = \frac{b}{2} = \frac{c}{5}$ şi deci $\frac{a+30}{b+30} = \frac{6}{7}$, $a + 30 = \frac{6}{7} \cdot (2a + 30)$, apoi $a = 6, c = 30$. Aşadar actuala vârstă a lui Constantin este $C = 60$ (de ani, evident).

VI. 212 Biletul de intrare la un meci de fotbal costă 60 lei. Din lipsă de spectatori prețul biletului a fost redus şi numărul spectatorilor a crescut cu 50%, încasările mărindu-se în acest fel cu 20%. Cu ce procent s-a redus prețul biletului?

Mariana Drăghici, Reşița

Răspuns: procentul cerut este 20%.

VI. 213 Un organism are în momentul naşterii 2,5 kg. În prima lună de viață, organismul creşte în greutate cu 0,5 kg. Presupunând că procentajul de creştere se păstrează constant pentru primele şase luni de viață, calculați ce greutate va avea organismul după două luni.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: Procentajul de creştere lunară este $p = \frac{5 \cdot 100}{25} = 20\%$. Dacă notăm greutatea organismului după *n* luni cu g_n, avem $g_0 = 2{,}5$, apoi $g_1 = 3$ şi $g_2 = 3{,}6$ kg. De remarcat că $g_2 \neq 3{,}5$ kg, pentru că

$g_2 = 3 + \frac{20}{100} \cdot 3$.

VI. 214 În acest semestru, Georgică are, la matematică, numai note de 7, 8, 9 şi 10, din fiecare cel puţin una şi cel mult două. Media notelor sale este 8,40. Care sunt notele pe care Georgică le-a primit de două ori?

Ioan Dăncilă, Bucureşti

Soluţie: Conform ipotezei, elevul are cel puţin 4 note şi cel mult 8 note. Dintre numerele $n\times 8,40\left(4\le n\le 8\right)$, număr natural este doar numărul $5\times 8,40=42$, satisfăcând astfel condiţia ca suma notelor să fie un număr natural. Aşadar Georgică are 5 note. Nota primită de două ori este $42-\left(7+8+9+10\right)=8$

VI. 215 Aflaţi cel mai mic număr natural nenul *n* pentru care putem alege semnele $+$ şi $-$ astfel încât $\pm 1\pm 2\pm 3\pm ...\pm n=16$.

Dan Comănescu, Timişoara

Soluţie: Pentru $n\le 5$ avem $\pm 1\pm 2\pm 3\pm ...\pm n\le 1+2+...+n\le 1+2+3+4+5=15$, adică egalitatea din enunţ nu se poate realiza. Pentru $n=6$, suma este un număr impar, deci nu poate fi egală cu 16, iar pentru $n=7$ avem $1-2+3-4+5+6+7=1$, deci numărul cerut este 7.

VI. 216 Arătaţi că mulţimea $A=\left\{1,2,3,4,...,1234\right\}$ nu se poate împărţi în două submulţimi disjuncte astfel încât suma sau produsul elementelor din cele două submulţimi să fie numere egale.

* * *

Soluţie: $\sum\limits_{x\in A} x=\dfrac{1234\cdot 1235}{2}=617\cdot 1235$ este un număr impar, deci A nu se poate partiţiona în două submulţimi disjuncte cu sumele elementelor egale. Acum, pentru produs, considerăm *p* cel mai mare număr prim din *A* şi astfel, dacă există *B* şi *C* astfel încât $A=B\cup C, B\cap C=\varnothing$, avem că doar unul dintre produsele $\prod\limits_{x\in B} x$ şi $\prod\limits_{y\in C} y$ îl conţine ca factor pe numărul *p*, aşadar nici această partiţionare nu este posibilă.

VI. 217 Arătaţi că fracţia $\dfrac{2^n\cdot 5^{n+1}+7}{2^{n+1}\cdot 5^n+3}$ este , pentru orice număr natural *n*, ireductibilă.

Olimpiadă Vrancea

Soluție: Dacă $d \mid \left(a = 5 \cdot 10^n + 7\right)$, atunci $d \mid 2a$, iar dacă $d \mid \left(b = 2 \cdot 10^n + 3\right)$, atunci $d \mid 5b$ şi astfel $d \mid \left(5b - 2a = 1\right)$.

VI. 218 Determinați numerele naturale *a, b* şi *c* ştiind că $a+b+c$ este pătrat perfect şi $\overline{bc} = \frac{1}{6} \cdot \overline{abc}.$

Olimpiadă Caraş – Severin

Soluție: Egalitatea din ipoteză conduce la $20a = 10b + c$, aşadar *c* este multiplu de 10, deci $c = 0.$ Din $2a = b$ deducem că numerele 120, 240, 360 şi 480 verifică a doua condiție din enunț. Evident, doar 360 are suma cifrelor pătrat perfect.

VI. 219 Punctele *A,B,C,D* sunt situate, în această ordine, pe o dreaptă *d*, astfel încât *C* este mijlocul segmentului *(BD)*, $AB = 25\% \cdot BD$ şi $\frac{1}{5} \cdot CD = 5,2$ cm. Calculați distanța dintre mijloacele segmentelor *(AB)* şi *(CD)*.

Aurelia Voilovici, Moldova – Nouă

Soluție: Pentru a uşura redactarea, renunțăm la unitatea de măsură şi avem imediat $CD = BC = 26 \Rightarrow BD = 52, AB = 13, AD = 65$. Se obține apoi $MN = AD - AM - ND = 65 - \frac{13}{2} - 13 = \frac{91}{2}.$

Clasa a VII-a

VII. 210 Arătați că 2011^{2011} nu se poate scrie că sumă a două pătrate perfecte.

Andrei Eckstein, Timişoara

Soluție : Folosim faptul că $2011 = \mathcal{M}4 + 3$, deci $2011^{2011} = 4k+1, k \in \mathbb{Z}$; pe de altă parte, orice pătrat perfect este de forma $4q$ sau $4q+1$, deci suma a două pătrate perfecte nu poate fi de forma $4p+1$.

VII. 211 Fie triunghiul ascuțitunghic ABC $(AB < AC)$ şi P un punct în interiorul acestuia astfel încât $\sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle PBC$ şi $\sphericalangle PAC \equiv \sphericalangle PCB$.
a) Să se demonstreze că dreapta AP trece prin mijlocul laturii BC.
b) Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC şi $\{V\} = BP \cap CH$, atunci să se arate că $VB \cdot VP = VC \cdot VH$.

Petrişor Neagoe, Anina

a) Fie $\{M\} = AP \cap BC$. Triunghiurile MAB şi MBP sunt asemenea, deoarece $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle MBP$ şi $\sphericalangle M$ este comun.

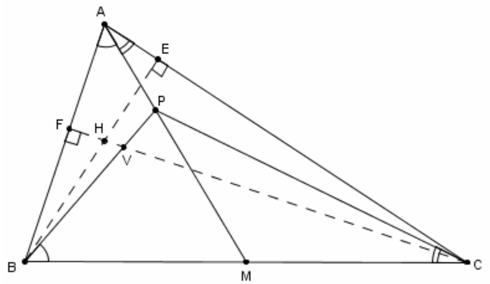
Astfel avem $\dfrac{MB}{MP} = \dfrac{MA}{MB}$, deci $MB^2 = MA \cdot MP$ (1)

Triunghiurile MAC şi MCP sunt asemenea, deoarece $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle MCP$ şi $\sphericalangle M$ este comun.

Astfel avem şi $\dfrac{MC}{MP} = \dfrac{MA}{MC}$, deci $MC^2 = MA \cdot MP$ (2)

Din (1) şi (2) rezultă că $MB^2 = MC^2$, deci $MB = MC$.

În concluzie, dreapta AP trece prin mijlocul laturii BC.



b) Fie $\{E\} = BH \cap AC$ şi $\{F\} = CH \cap AB$.

În $\triangle BEC$, $m(\sphericalangle BEC) = 90^\circ$ avem $m(\sphericalangle EBC) = 90^\circ - m(\sphericalangle ECB)$. Deci, $m(\sphericalangle HBC) = 90^\circ - m(\sphericalangle ACB)$. În $\triangle CFB$, $m(\sphericalangle CFB) = 90^\circ$ avem $m(\sphericalangle FCB) = 90^\circ - m(\sphericalangle FBC)$. Deci, $m(\sphericalangle HCB) = 90^\circ - m(\sphericalangle ABC)$.

$m(\sphericalangle BHC) = 180^\circ - \left[m(\sphericalangle HBC) + m(\sphericalangle HCB)\right] =$

$= 180^\circ - \left[90^\circ - m(\sphericalangle ACB) + 90^\circ - m(\sphericalangle ABC)\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\sphericalangle BHC) = 180^\circ - m(\sphericalangle BAC)$ (3)

$$m(\sphericalangle BPC)=180^\circ-\left[m(\sphericalangle PBC)+m(\sphericalangle PCB)\right]=$$

$$=180^\circ-\left[m(\sphericalangle MAB)+m(\sphericalangle MAC)\right]\Rightarrow m(\sphericalangle BPC)=180^\circ-m(\sphericalangle BAC) \quad (4)$$

Din (3) şi (4) rezultă că $\sphericalangle BHC\equiv\sphericalangle BPC$.

Deoarece $\sphericalangle VHB\equiv\sphericalangle VPC$ şi $\sphericalangle BVH\equiv\sphericalangle CVP$ rezultă că triunghiurile BVH şi CVP sunt asemenea.

Astfel, $\dfrac{VB}{VC}=\dfrac{VH}{VP}$, deci $\boxed{VB\cdot VP=VC\cdot VH}$.

VII. 212 Pentru orice număr natural $n\geq 2$ se notează

$$A(n)=\frac{\sqrt{n+1}}{n}+\frac{\sqrt{n+4}}{n+3}+\frac{\sqrt{n+7}}{n+6}+\frac{\sqrt{n+10}}{n+9}+\frac{\sqrt{n+13}}{n+12} \text{ şi}$$

$$B(n)=\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\frac{1}{\sqrt{n+5}}+\frac{1}{\sqrt{n+8}}+\frac{1}{\sqrt{n+11}}.$$

a) Arătați că $A(2)<3$.

b) Demonstrați că, pentru orice număr natural $n\geq 2$, este adevărată inegalitatea

$$A(n)<B(n).$$

Olimpiadă Ungaria, enunț modificat

Soluție (barem propus):

a) $A(2)=\dfrac{\sqrt3}{2}+\dfrac{\sqrt6}{5}+\dfrac{\sqrt9}{8}+\dfrac{\sqrt{12}}{11}+\dfrac{\sqrt{15}}{14}$.	(1p)
$A<1+\dfrac12+\dfrac12+\dfrac12+\dfrac12=3$.	(3p)
b) $\dfrac{\sqrt{p+1}}{p}<\dfrac{1}{\sqrt{p-1}},\forall p\geq 2$	(1p)
$\dfrac{\sqrt{n+3i+1}}{n+3i}<\dfrac{1}{\sqrt{n+3i-1}},\forall i\in\{0,1,2,3,4\}$	(1p)
$A(n)<B(n)$.	(1p)

VII. 213 Se consideră un paralelogram $ABCD$ în care $3AB = 2BC$. Bisectoarea unghiului $\widehat{BAD}$ intersectează (BC) în E. Se notează cu F simetricul punctului E față de D. Arătați că triunghiul AEF este isoscel.

Concurs Suceava

Soluție : Egalitatea din enunț conduce la $AB = 2k, BC = 3k$. Din $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle EAB$ și $\sphericalangle EAD \equiv \sphericalangle AEB$ (alterne interne) deducem $\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle AEB$, deci triunghiul AEB este isoscel. Notăm $BF \cap AD = \{G\}$ și, deoarece $GD \parallel BE, FD = DE$, avem că GD este linie mijlocie în triunghiul FEB. Cum $GD = \frac{BE}{2} = \frac{AB}{2} = k \Rightarrow AG = 2k = AB$, așadar $ABEG$ este romb. Avem astfel $FB \perp AE \Rightarrow F$ aparține mediatoarei segmentului (AE), deci $FE = FA$.

VII. 214 Se consideră numerele întregi nenule *a, b* și . Arătați că numărul soluțiilor întregi ale ecuației $|ax+b| = c$ este par dacă și numai dacă există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $k \cdot a = 2 \cdot c$.

* * *

Soluție : Ecuația $|ax+b| = c$ este echivalentă cu ecuațiile $ax + b = \pm c$, cu soluțiile $x_1 = \frac{c-b}{a}, x_2 = \frac{-c-b}{a}$. Dacă soluțiile sunt întregi, atunci $a \mid (c-b)$ și $a \mid (c+b)$, deci $a \mid 2c \Rightarrow 2c = ka, k \in \mathbb{Z}$. Reciproc, dacă $a \mid 2c$, atunci $a \mid (c-b+c+b)$ și astfel, dacă de exemplu $x_1 = \frac{c-b}{a} \in \mathbb{Z}$ (adică $a \mid (c-b)$), atunci $a \mid (c+b)$, deci și $x_2 = \frac{-c-b}{a} \in \mathbb{Z}$. Ecuația are astfel un număr par de soluții. Dacă *a* nu divide unul dintre numerele $c-b$ sau $c+b$, atunci nu divide nici pe celălat, deci ecuația are 0 soluții întregi (deci număr par de soluții).

VII. 215 Determinați numerele naturale n pentru care $\frac{2n^2+15}{3n+2} \in \mathbb{N}$.

* * *

Soluție : $(3n+2)|(2n^2+15)$ şi $(3n+2)|(3n+2)$ conduc la

$(3n+2)|(2n(3n+2)-3(2n^2+15))$, de unde $(3n+2)|(4n-45)$ şi,

imediat, $(3n+2)|143.$ Se ajunge imediat la $n=3.$

VII. 216 Se consideră un patrulater $ABCD$ cu laturile AD şi BC paralele, pentru care există punctele $M\in(BC), N\in CD$, C între N şi D, astfel încât $AB=BM$ şi $DN=AD.$ Demonstrați că, dacă punctele A,M,N sunt coliniare, atunci $ABCD$ este paralelogram.

Cristinel Mortici, Târgovişte

Soluție : Deoarece AM este secantă pentru dreptele paralele AD şi BC, deducem $\sphericalangle DAC\equiv\sphericalangle AMB.$ Cum $AB=BM$ rezultă că triunghiul ABM este isoscel şi deci $\sphericalangle BAM\equiv\sphericalangle MAD.$ Pe de altă parte, din $AD=DN$ deducem că $\sphericalangle NAD\equiv\sphericalangle AND$, de unde $\sphericalangle BAM\equiv\sphericalangle AND,$ adică $DC\parallel AB$. Cum $AD\parallel BC$, deducem că $ABCD$ este paralelogram.

VII. 217 Se consideră un triunghi ABC cu $AB=9, AC=15$ şi în care se notează cu G centrul de greutate, iar cu I centrul cercului înscris . Calculați BC în cazul în care $IG\parallel BC$.

Constantin Apostol, Rîmnicu – Sărat

Soluție : Notăm cu D şi E punctele în care bisectoarea, respectiv mediana din A intersectează latura (BC). Cum $IG\parallel BC$, teorema lui Thales în triunghiul ADE conduce la $\frac{AI}{ID}=\frac{AG}{GE}$ (1). Cu teorema bisectoarei în triunghiul ABD se ajunge la $\frac{AB}{BD}=\frac{AI}{ID}$ (2). Se obține imediat $BD=4,5$, apoi $CD=7,5\Rightarrow BC=12.$

VII. 219 Se consideră un trapez cu baza mare (AB). Demonstrați că bisectoarele unghiurilor $\widehat{BCD}$ şi $\widehat{ADC}$ se intersectează într-un punct situat pe (AB) dacă şi numai dacă $AB=AD+BC.$

Admitere Universitate 1985

Soluție: Dacă M este punctul de intersecție a celor două bisectoare, atunci M este egal depărtat de laturile $[BC],[CD],[AD];$ notăm cu h

distanța respectivă. Deoarece $M\in[AB]$ dacă şi numai dacă $\mathcal{A}[ABCD]=\mathcal{A}[ADM]+\mathcal{A}[MDC]+\mathcal{A}[MBC]$, această egalitate este echivalentă cu $\frac{h(AB+CD)}{2}=\frac{AD\cdot h}{2}+\frac{CD\cdot h}{2}+\frac{BC\cdot h}{2}$, adică cea din enunț.

Clasa a VIII-a

VIII. 210 Se consideră un număr real $a>1$. Arătați că, dacă $x\in(1,a)$ şi $y\in\left(a,a^2\right)$, atunci $2xy-(1+a)(y+ax)+a\left(1+a^2\right)>0$.

Ioan Dăncilă, Bucureşti

Soluție : Deoarece $x-a<0$ şi $y-a^2<0$, iar $y-a>0, x-1>0$, deducem că $\left(y-a^2\right)(x-a)>0$ şi $(y-a)(x-1)>0$; prin însumarea ultimelor două, calcule imediate conduc la inegalitatea de demonstrat.

VIII. 211 Arătați că, dacă $a,b,c\in(-1,\infty)$ verifică relația

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1,\text{ atunci } a+b+c\geq 6.$$

Andrei Eckstein, Timişoara

Soluție : Notăm $a+1=x>0, b+1=y>0, c+1=z>0$ şi astfel, ştiind că $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, folosind inegalitatea dintre media aritmetică şi cea armonică, obținem $x+y+z\geq 9$, de unde $a+b+c\geq 6$.

VIII. 212 Demonstrați că oricum am alege 9 puncte în interiorul unui cub cu lungimea muchiei 2 cm, există două puncte astfel încât distanța dintre ele să fie mai mică decât 1,74 cm.

Loreta Ciulu, Reşița

Soluție: $V=l^3=8cm^3$, deci cubul poate fi împărțit în 8 cuburi cu muchia de 1 cm. Având 9 puncte, rezultă că cel puțin două dintre ele sunt in interiorul aceluiaşi cub şi deci distanța dintre ele este mai mică decât diagonala care are lungimea $\sqrt{3}cm$ $\left(\sqrt{3}<1,74\right)$.

VIII. 213 Determinați numerele reale *x* şi *y* pentru care

$$x^2 - x = y^2 - 3y + 2 \text{ şi } x^2 + y^2 = 5.$$

Lucian Dragomir, Oțelu Roşu

Soluție: Prima egalitate se înmulțeşte cu 4 şi se ajunge imediat la $(2x-1)^2 = (2y-3)^2$, de unde $x = y-1$ sau $y = 2-x.$ Folosind acum a doua relație din enunț se ajunge la perechile

$$(x,y) \in \left\{(1,2),(-2,-1),\left(\frac{2+\sqrt{6}}{2},\frac{2-\sqrt{6}}{2}\right),\left(\frac{2-\sqrt{6}}{2},\frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)\right\}.$$

VIII. 214 Determinați numerele reale x pentru care este adevărată egalitatea $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) = 720.$

Olimpiadă Irlanda

Soluție (barem propus):

Ecuația se poate scrie, efectuând înmulțiri convenabile: $\left(x^2-7x+6\right)\cdot\left(x^2-7x+10\right)\cdot\left(x^2-7x+12\right) = 720$	(3p)
Notăm $y = x^2 - 7x$ şi avem $(y+6)(y+10)(y+12) = 720$	(1p)
$y^3 + 28y^2 + 252y = 0$	(1p)
$y\cdot\left[(y+14)^2 + 56\right] = 0$	(1p)
$y = 0 \Rightarrow x \in \{0;7\}$	(1p)

VIII. 215 Într-un plan α se consideră un triunghi echilateral ABC şi un punct P astfel încât $PA = 2$ şi $PB = 3.$

Demonstrați că $PC < 5.$ (Enunț corectat)

Admitere învățământ tehnic, lot olimpic, 1988

Soluție: Dacă P nu este situat pe cercul circumscris al triunghiului ABC, atunci (Teorema lui Pompeiu) PA, PB, PC reprezintă lungimile laturilor unui triunghi, deci $PC < PA + PB = 5.$ În cealaltă situație, avem că $PABC$ este patrulater inscriptibil şi astfel (Teorema lui Ptolemeu): $PC\cdot AB = PA\cdot BC + PB\cdot AC \Rightarrow PC = PA + PB = 5.$

Observație: Pentru situația din urmă, se poate oferi şi o altă soluție :

Considerăm punctul $Q \in Int\Delta ABC$ pentru care $m(\sphericalangle QBP) = 60^o$ şi

$PB = QB$. Deducem că ΔPBQ este echilateral, deci $PQ = PB = 3.$ Avem astfel $\Delta BQC \equiv \Delta BPA$, deci $QC = PA = 2$ şi, în triunghiul PQC, avem $PC \le PQ + QC = 5.$

VIII. 216 O piramidă are toate muchiile egale. Arătați că baza ei nu poate fi un poligon cu 7 laturi.

Admitere Universitate 1988

Soluție : Presupunem că există o piramidă $VA_1A_2...A_7$ cu vârful V, baza $A_1A_2...A_7$ şi muchiile egale. Dacă O este proiecția lui V pe planul bazei, atunci triunghiurile $VOA_i, i = \overline{1,7}$, sunt congruente, de unde $OA_1 = OA_2 = ... = OA_7$ şi astfel poligonul $A_1A_2...A_7$ este inscriptibil ; deoarece laturile sale sunt egale, acesta este poligon regulat, iar latura sa are lungimea mai mică decât latura hexagonului regulat înscris în acelaşi cerc, deci $A_1A_2 < OA_1$ sau $A_1V < OA_1$, ceea ce este fals, deoarece VOA_1 este triunghi dreptunghic în O.

VIII. 217 Arătați că semiplanul bisector al unui diedru într-un tetraedru împarte muchia opusă în segmente proporționale cu ariile fețelor alăturate.

Admitere Universitate Craiova 1991

Soluție : Considerăm tetraedrul $ABCD$ în care planul bisector al diedrului planelor $(ABC),(DBC)$ taie muchia (opusă) AD în punctul M. Distanțele MN şi MP de la punctul M la planele (BCD), respectiv (ABC) sunt egale. Dacă A', D' sunt proiecțiile punctelor A şi D pe planul bisector (BCM), atunci punctele A', D', M sunt coliniare. Avem astfel

$$\mathcal{V}[ABCD] = \frac{\mathcal{A}(BCM) \cdot AA'}{3} = \frac{\mathcal{A}(ABC) \cdot MP}{3} \text{ şi}$$

Clasa a IX-a

IX. 190 Arătați că, dacă $a, b, c \in (0, +\infty)$ şi $\frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c} = 1$, atunci $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \le 3.$

Pavel Rîncu, Bozovici

Soluție : Egalitatea din enunț se poate scrie $\frac{2}{2+a}+\frac{2}{2+b}+\frac{2}{2+c}=2$ sau $\sum\left(\frac{2}{2+a}-1\right)=-1$, de unde $\sum\frac{a}{2+a}=1$. Notăm $\frac{a}{2+a}=x, \frac{b}{2+b}=y, \frac{c}{2+c}=z$ şi avem $a=\frac{2x}{y+z}, b=\frac{2y}{z+x}, c=\frac{2z}{x+y}$.

Folosind inegalitatea mediilor avem $\sqrt{ab}\le 2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}\right)$ şi analoagele ; prin însumarea acestora se ajunge imediat la inegalitatea propusă.

IX. 191 Determinați funcțiile $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $f\left(\left[\frac{m}{n}\right]\right)=\frac{f(m)}{f(n)}, \forall m\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}^*$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *a*.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție : pentru $m=n$ avem $f(1)=1$. Pentru $m=1$ şi $n\ge 2$ se obține $f(0)=\frac{1}{f(n)}\in\mathbb{N}\Rightarrow f(n)=1$. Se deduce astfel că există o singură funcție care verifică enunțul, anume $f(n)=1, \forall n\in\mathbb{N}$.

IX. 192 Ştiind că $\sin x+\sin y=b$ şi $\cos x+\cos y=a$, cu $a^2+b^2\ne 0$, calculați $\cos(x+y)$.

Admitere Universitate 1988

Soluție : Se ridică la pătrat cele două relații date, apoi se adună, respectiv se scad ; se ajunge imediat la $\cos(x+y)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

IX. 193 Un trapez cu lungimea diagonalelor d_1 şi d_2 este circumscris unui cerc de rază *r*. Arătați că $d_1^2+d_2^2\ge 16r^2$.

Admitere Universitate 1988

Soluție : Notăm cu P,Q proiecțiile lui D, respectiv C pe AB, iar $M\in(AD), N\in(BC)$ astfel încât MN este linie mijlocie a trapezului. Aplicând teorema lui Pitagora în ΔACQ şi ΔBDP ajungem la $d_1^2+d_2^2=8r^2+AQ^2+PB^2$. Pe de altă parte, aplicând inegalitatea mediilor, avem $AQ^2+PB^2\geq\frac{(AQ+PB)^2}{2}=\frac{(AB+CD)^2}{2}=2MN^2$. Cum însă $MN^2\geq 4r^2$ (M,N sunt în exteriorul cercului şi MN trece prin centrul cercului), deducem imediat inegalitatea propusă.

IX. 194 Demonstrați că nu există poligoane convexe cu mai mult de 3 unghiuri ascuțite.

Admitere învățământ tehnic 1988

Soluție: Dacă $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ sunt unghiurile poligonului, avem $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=(n-2)\pi$. Dacă $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k<\frac{\pi}{2}$ şi $\alpha_{k+1},\alpha_{k+2},...,\alpha_n\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, atunci $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n<k\cdot\frac{\pi}{2}+(n-k)\cdot\pi$, de unde $(n-2)\pi<\left(n-\frac{k}{2}\right)\pi\Rightarrow k<4$.

Clasa a X-a

X. 190 Punctele $A_0,A_1,A_2,...,A_{n-1}$ sunt vârfurile unui poligon regulat. Cercul circumscris acestui poligon are raza 1. Demonstrați că $A_0A_1\cdot A_0A_2\cdot...\cdot A_0A_{n-1}=n$.

Admitere Universitate Craiova 1991

Soluție: Vârfurile $A_0,A_1,A_2,...,A_{n-1}$ corespund rădăcinilor de ordinul n ale unității, adică $z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}, k=\overline{0,n-1}$. Cum $A_k(\cos\frac{2k\pi}{n},\sin\frac{2k\pi}{n})$, cu notația $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\frac{2\pi}{n}$, deducem $A_0A_1=|1-\varepsilon|, A_0A_2=\left|1-\varepsilon^2\right|,...,A_0A_{n-1}=\left|1-\varepsilon^{n-1}\right|$ şi astfel

$$A_0A_1 \cdot A_0A_2 \cdot ... \cdot A_0A_{n-1} = \left|(1-\varepsilon)\left(1-\varepsilon^2\right)...\left(1-\varepsilon^{n-1}\right)\right|.$$

Pe de altă parte, $\varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{n-1}$ sunt rădăcinile polinomului $f(z) = 1 + z + z^2 + ... + z^{n-1}$, deci $f(z) = (z-\varepsilon)\left(z-\varepsilon^2\right)...\left(z-\varepsilon^{n-1}\right)$.

Luăm $z = 1$, trecem la module şi obținem egalitatea dorită.

X. 191 Rezolvați inecuația $\sqrt{2-\log_2 x} \geq \log_2 x$.

Admitere Facultate Chimie 1990

Răspuns : Mulțimea soluțiilor inecuației este $(0,2]$.

X. 192 Fie $a,b,c,d \in \mathbb{C}^*$ afixele vârfurilor unui patrulater convex $ABCD$ în care $a \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot c$, $b \cdot \overline{d} = \overline{b} \cdot d$ şi $a+b+c+d=0$. Arătați că $ABCD$ este paralelogram.

Concurs Focşani 2010

Soluție: Condiția $a \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot c$ se poate scrie $\frac{a}{c} = \overline{\left(\frac{a}{c}\right)}$, deci $\frac{a}{c} \in \mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că A, C, O sunt puncte coliniare ; analog se obține că B, D, O sunt coliniare, deci O este intersecția diagonalelor patrulaterului $ABCD.$ Deducem astfel că suma $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ are direcția diagonalei AC, iar suma $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ are direcția diagonalei BD; egalitatea $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ este astfel posibilă doar dacă $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, deci O este mijlocul fiecărei diagonale, aşadar $ABCD$ este paralelogram.

X. 193 Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică egalitatea $f\left(f(x)+y\right) = 3x + f\left(f(y)-2x\right), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Concurs Baia Mare 2010

Soluție: Luăm $y = -f(x)$ şi deducem că funcția este surjectivă. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ pentru care $f\left(x_0\right) = 0$ şi astfel, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, există $y \in \mathbb{R}$ cu $f(y) = 2x_0 + t$ .Deducem $f(t) = f(f(y)-2x_0)$ sau $f(t) = f\left(f(x_0)+y\right) - 3x_0 = f(y) - 2x_0 - x_0 = t - x_0$, deci $f(x) = x + a.$

Clasa a XI-a, Clasa a XII-a

Din cauze mai mult sau mai puțin obiective, soluțiile vor fi publicate în numărul viitor al revistei, odată cu rubrica rezolvitorilor.

Până atunci, redacția urează tuturor cititorilor sărbători cât mai fericite, o binemeritată vacanță relaxantă şi odihnitoare, clipe pline de bucurie, cât mai multe probleme de matematică rezolvate când vă faceți timp şi pentru asta!

Probleme alese

A. 5 Arătați că, pentru orice număr natural nenul n şi orice număr real x este adevărată egalitatea

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+...+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx].$$

Charles Hermite

Soluție: Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\left[x+\frac{k}{n}\right]-[nx].$

Deoarece $f\left(x+\frac{1}{n}\right)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$, este suficient să studiem ce se întâmplă pe $\left[0,\frac{1}{n}\right)$. Pentru $0\le x<\frac{1}{n}$ avem $\left[x+\frac{k}{n}\right]=0,[nx]=0\Rightarrow f(x)=0.$

A. 6 Demonstrați că, dacă $m\ge 6$ este un număr compus, atunci m este un divizor al numărului $(m-1)!$.

Joseph Liouville

Soluție: Dacă p este număr prim, $p\,|\,m$, $m=p^k\cdot n$ şi p nu divide n, trebuie să arătăm că $p^k\,|\,(m-1)!$.Dacă $m\ne p^k$, atunci $m=p^k\cdot n$, $n\ge 2$ şi $p^k=\frac{m}{n}\le\frac{m}{2}\le m-1$, $p^k\,|\,(m-1)!$. Dacă $m=p^k, k>2$, atunci

$p \neq p^{k-1}$, $p^{k-1} = \frac{m}{p} \leq \frac{m}{2} \leq m-1$ şi deci $p^k = p \cdot p^{k-1} \mid (m-1)!$. Dacă $m = p^2, p \geq 3$, atunci $2p \leq p^2 - 1 = m-1$ şi $p \cdot 2p = 2p^2 \mid (m-1)!$. Aşadar, în toate cazurile $p^k \mid (m-1)!$.

A. 7 Arătați că pentru orice număr natural $n \geq 3$, există numere întregi impare a şi b astfel încât $a^2 + 7b^2 = 2^n$.

Leonhard Euler

Soluție : Demonstrație prin inducție după n. Pentru $n = 3$, alegem $a = b = 1$. Presupunem acum că există numere întregi impare a şi b astfel încât $a^2 + 7b^2 = 2^n$; înlocuind eventual pe a cu $-a$ şi pe b cu $-b$, putem presupune că $a \equiv b \equiv 1 (\bmod 4)$. Considerăm $c = \frac{a-7b}{2}$ şi $d = \frac{a+b}{2}$. Evident, cele două numere sunt întregi şi $(a-7b) \equiv (a+b) \equiv 2 (\bmod 4)$, deci c şi d sunt numere întregi impare. Un calcul simplu conduce acum la $c^2 + 7d^2 = 2^{n+1}$.

A.8 Se consideră o mulțime M infinită în plan, cu proprietatea că distanța dintre oricare două puncte ale ei este un număr natural. Demonstrați că M este o submulțime a unei drepte.

Paul Erdös

Soluție: Presupunem prin absurd că există trei puncte necoliniare A, B, C în mulțimea M . Vom arăta mai întâi că pe dreapta BC există un număr finit de puncte din M . Presupunem contrariul : $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M \cap BC$. Din $-AB < AA_i - BA_i < AB, \forall i \in \mathbb{N}$ şi deoarece $(AA_i - BA_i) \in \mathbb{Z}$, deducem că există $i < j$ astfel încât $AA_i - BA_i = AA_j - BA_j$; pentru comoditate, presupunem că $i = 1, j = 2$ şi deci $A_1A_2 = BA_2 - BA_1 = AA_2 - AA_1$, contradicție cu inegalitatea triunghiului. Deci : $|M \cap BC| < \infty$. Fie acum

$\left(B_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M \setminus BC.$ Deoarece $-BC < B_nB - B_nC < BC$ şi $\left(B_nB - B_nC\right) \in \mathbb{Z}$, există un subşir n_k astfel încât $B_{n_k}B - B_{n_k}C = \alpha, \quad -BC < \alpha < BC.$ Pentru uşurința scrierii, subşirul $\left(B_{n_k}\right)_k$ îl vom nota tot cu $\left(B_n\right)_n$. Există aşadar un şir infinit $B_n \subseteq M \cap \mathcal{H}_1$, unde $\mathcal{H}_1$ este hiperbola de focare B, C şi constantă α. Fie două puncte în $M \cap \mathcal{H}_1$, presupunem că acestea sunt A şi $D.$ Facem acum acelaşi raționament ca mai sus cu $\left(B_n\right)_n$ în loc de M şi cu A, D în loc de $B, C.$ Deducem existența unui subşir $\left(B_{n_k}\right)_k \subseteq \left(B_n\right)_n \cap \mathcal{H}_2$, unde $\mathcal{H}_2$ este hiperbola de focare A, D şi constantă β $\left(-AD < \beta < AD\right)$. Deducem că $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ ar fi o mulțime infinită, deoarece conține şirul de puncte $\left(B_{n_k}\right)_k$. Acest lucru este însă imposibil, deoarece două hiperbole distincte au cel mult 4 puncte comune. ($\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ sunt distincte deoarece perechile de focare $\left(B, C\right)$ şi (A, D) sunt distincte). Am obținut astfel o contradicție, deci enunțul este adevărat.

Probleme propuse

(Se primesc soluții **începând cu 15 ianuarie 2012**, pentru a nu încurca plicurile, **până în data de 10 februarie 2012**, nu mai târziu!. Pe plic scrieți clasa în care sunteți, vă rugăm DIN NOU !)

Clasa a II-a

II.111. Câte exerciții a rezolvat Andrei într-o săptămână, dacă în fiecare zi a rezolvat cu 5 exerciții mai multe decât în ziua precedentă, iar în ultima zi a rezolvat 40 exerciții?

Prof. înv. primar Neta Novac,, Reşița

II.112 Trei copii au împreună 205 timbre. Dacă primul şi al doilea au împreună 144 timbre, iar al doilea şi al treilea au 140 timbre, aflați câte timbre are fiecare din cei trei copii.

Prof. înv. primar Neta Novac,Reşița

II.113 Adună numărul 49 cu succesorul şi predecesorul său. Ce număr ai obținut ?

Prof. înv. primar Neta Novac,Reşița

II. 114 a) Determinați numerele de două cifre care au suma cifrelor egală cu diferența lor. b) Calculați suma acestor numere.

Prof. înv. primar Mariana Mitrică,Reşița

II. 115. Suma a două numere este 55. Al doilea număr este mai mare decât primul cu 9 şi este format din aceleaşi cifre, dar scrise în ordine inversă. Care sunt numerele?

Prof. înv. primar Mariana Mitrică,Reşița

II. 116 Tatăl lui John lucrează la etajul 28 al unei clădiri cu 43 de nivele, iar prietenul său, tatăl lui Brian, la penultimul etaj, în aceeaşi clădire. Câte etaje îi despart pe cei doi prieteni?

Prof. înv. primar Mariana Mitrică, Şcoala Nr. 9, Reşița

II. 117 În toate căsuțele unui pătrat $\frac{4}{15} < \frac{n}{10} < \frac{11}{12}$ (format din 9 pătrățele egale) era scris inițial numărul 1. Se numeşte *pas* operația prin care în toate cele patru căsuțe ale unui pătrat $\frac{2}{7} < \frac{3}{n} < \frac{4}{9}$. se adună, la numărul existent acolo, numărul 3. S-au efectuat câțiva *paşi* şi pătratul arată astfel:

7	10	4
13	25	13
7	16	

Ce număr se află în pătrățelul din dreapta jos?

Prof. Heidi Feil, Oțelu – Roşu

II. 118 Un turist a parcurs distanța dintre Deva şi Reşița în patru zile, astfel: în a doua zi a parcurs cu 10 km mai mult decât în prima zi, în a treia zi a parcurs cu 15 km mai mult decât în a doua zi, iaar în ultima zi a parcurs cu 5 km mai puțin decât în a doua zi. Dacă distanța dintre cele două localități este de 144 km, aflați câți km a parcurs turistul în prima zi.

Prof. Ion Cubin, Oțelu – Roşu

II. 119 Un turist a găsit pe plaja Oceanului Pacific o sticlă în care era o hârtie pe care scria:
„Am naufragiat pe o insulă pe care în total, suntem zece ființe: trei pisici, doi şoricei şi □ câini. Acest mesaj conține exact □ cuvinte.” (în locul pătrățelelor erau cuvinte care, din cauza trecerii timpului, s-au şters).

Ce cuvinte erau în locul pătrățelelor?

Ioan Dăncilă, Bucureşti

II. 120 Pentru orice numere a şi b, cu a mai mare decât b, se notează $a * b = 150 + a - b.$

Rezolvați fiecare dintre următoarele probleme:

1) Aflați numărul $70 * 30$.
2) Aflați numărul b pentru care $321 * b = 123$.

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Clasa a III-a

III. 111 Un tren are 9 vagoane. În fiecare vagon sunt câte 2 bănci a câte 4 locuri. Sunt suficiente locurile pentru 150 de călători? Justifică!

Prof. înv. primar Neta Novac,Reşiţa

III. 112 Mama a cheltuit într-o zi o sumă de bani. Dacă adunăm jumătatea sumei cu sfertul ei, obținem 375 lei.
Câți lei a cheltuit mama în acea zi?

Prof. înv. primar Neta Novac,Reşiţa

III. 113 Suma a trei numere naturale consecutive este un număr cuprins între 91 şi 95. Află numerele.

Prof. înv. primar Neta Novac, Reşiţa

III.114 Pe o fructieră se află trei banane, trei portocale şi trei struguri. Gabi ia trei fructe.
Câte fructe din fiecare fel pot rămâne în fructieră? Scrie toate posibilitățile.

Prof. înv. primar Mariana Mitrică, Reşiţa

III. 115 Andrei a ales un număr, l-a înmulțit cu 7, la rezultat a adunat 17, suma obținută a împărțit-o la 2 şi a obținut rezultatul 19. Ioana a ales un alt număr, l-a înmulțit cu 3, la rezultat a adunat 13, suma obținută a împărțit-o la 2 şi a obținut rezultatul 17. Care dintre cei doi copii a ales un număr mai mare?

Prof. Adriana Dragomir, Oțelu – Roşu

III. 116 În trei saci sunt, în total, 45 kg de cartofi. Din primul sac s-au pus în al doilea 3 kg, din al treilea în al doilea sac s-au pus 4 kg, iar tot din al treilea sac s-au pus în primul sac 5 kg; s-a constatat astfel că în cei trei saci sunt acum cantități egale de cartofi. Câte kg de cartofi au fost inițial în fiecare sac?

Prof. înv. primar Nicoleta Toader, Oțelu – Roşu

III. 117 La Obreja, într-o grădină, s-au plantat trandafiri şi lalele. Numărul trandafirilor este de patru ori mai mic decât cel al lalelelor; dacă s-ar mai fi plantat 10 trandafiri, atunci numărul acestora ar fi fost doar de două ori mai mic decât cel al lalelelor. Câți trandafiri şi câte lalele sunt în acea grădină?

Prof. Ion Cubin, Oțelu – Roşu

III. 118 Oana şi Iza s-au întors de la cumpărături şi, pe drum, au purtat următorul dialog:
Oana: *Am obosit ! Plasa mea e două ori mai grea decât a ta!*
Iza: *Na bine, dă-mi un kg de zahăr de la tine!*
Oana: *Perfect ! Atunci o să avem plase la fel de grele!*

Cât cântăresc cumpărăturile aduse acasă împreună de cele două surori?

Prof. Ion Cubin, Oțelu – Roşu

III. 119 La Caransebeş, un sfert din zilele unei veri au fost ploioase. Dacă în luna iunie a plouat de trei ori mai mult decât în iulie, iar în luna iulie a plouat cu două zile în plus față de luna august, aflați câte zile ploioase a avut luna august.

Prof. Ion Cubin, Oțelu – Roşu

III. 120 Adrian este cu 35 de ani mai în vârstă decât fiul său Andrei. Dacă în anul 2011 Andrei a împlinit 7 ani, aflați în ce an s-a născut tatăl său.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu –Roşu

Clasa a IV-a

IV. 111 Înlocuiți, în fiecare dintre egalitățile de mai jos, semnul $\odot$ cu un acelaşi număr, pentru a obține egalități adevărate:

a) $\odot+\odot:\odot=100$.

b) $\odot-\odot:\odot=200$.

c) $104+\odot\times\odot=300$.

d) $4\times\odot+\odot=400$.

Prof. Iulia Cecon, Oțelu – Roşu

IV.112 Aurel, Ionuț şi Marian citesc aceeaşi carte. Aurel termină cartea, Ionuț citeşte jumătate din carte, iar Marian un sfert. Câte pagini mai are de citit fiecare dacă în acest moment toți trei au citit 455 de pagini?

Prof. înv. primar Neta Novac,Reşița

IV. 113 Un număr a este cu 345 mai mare decât 678, un alt număr b este cu 278 mai mic decât 1000, iar un alt număr c este cât suma numerelor 1050 şi 925. Aflați suma celor trei numere.

Prof. înv. primar Neta Novac,Reşița

IV. 114 La o stână din Munții Țarcului sunt oi din satele comunei Bucoşnița: o treime din oi sunt din Bucoşnița, o şesime din oi sunt din Goleț, un sfert sunt din Petroşnița, iar restul de 120 de oi sunt din Vălişoara. Dacă un cioban poate avea grijă de maxim 90 de oi, câți ciobani trebuie să fie la acea stână?

Prof. Ion Cubin, Oțelu – Roşu

IV. 115 Unul dintre cei mai de seamă haiduci ai Banatului a fost Pătru Mantu din Bolvaşnița; el lua de la bogați şi dădea de la săraci (că doar nu era să facă invers!). Într-o vară, a luat de la un bogat o pungă cu 150 de galbeni şi a împărțit aurul astfel: celor din Petroşnița şi Bolvaşnița le-a dat aceeaşi cantitate de galbeni, iar celor din Zlagna le-a dat jumătate din cât le-a dat celor din Bolvaşnița. Câți galbeni au primit cei din Petroşnița?

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

IV. 116 Pentru orice numere a şi b, cu a mai mare decât b, se notează $a \bigcirc b = 567 + a - b.$

Rezolvați fiecare dintre următoarele probleme:

3) Aflați numărul $c = 345 \bigcirc 234$.
4) Aflați numărul a pentru care $(5a) \bigcirc (3a) = 789.$
5) Aflați numărul b pentru care $\left(a \bigcirc b\right) \bigcirc a = 789.$

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

IV. 117 Ioana are 15 ani, iar bunicul ei are 75 de ani. Aflați cu câți ani în urmă vârsta bunicului a fost de 7 ori mai mare decât cea a nepoatei sale.

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

IV. 118 Iulia a găsit câteva cartonaşe pe care erau scrise numere naturale; adunând numerele de pe cartonaşe, Iulia a obținut numărul 12, iar înmulțind aceleaşi numere, a obținut acelaşi rezultat. Câte cartonaşe a găsit Iulia?

Ing. Cristian Voiț, Oțelu – Roşu

IV. 119 Un număr de patru cifre are ultima cifră 2. Dacă se şterge ultima cifră a numărului, se obține un număr mai mic cu 1811 decât numărul inițial. Aflați numărul inițial.

Ing. Mircea Cristian, Oțelu – Roşu

IV. 120 Războiul de independență (1877 – 1878) a p u ș față în față, armata turcească cu armata româno-rusă (sau ruso-română, discutabilă ordinea). Înaintea bătăliei de la **Plevna**, armata otomană dispunea de o sută de tunuri, iar armata aliată potrivnică dispunea de un total de 426 de tunuri. Dacă armata română ar fi avut la dispoziție de trei ori mai multe tunuri, atunci numărul acestora ar fi depăşit cu doar 14 unități numărul tunurilor deținute de armata rusă aliată. Aflați câte tunuri avea la dispoziție armata română înainte de ofensiva de la Plevna şi citiți şi întrebați, dacă nu ştiți, dascălii voştri, despre ce şi cum s-a întâmplat atunci. Şi mai ales de ce şi pentru ce.

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Clasa a V-a

V. 235 a) Suma a cinci numere naturale, diferite, este egală cu 10. Determinați produsul acestor numere.

b) Suma unor numere naturale este egală cu 12. Ştiind că produsul lor este egal tot cu 12, determinați aceste numere

Constantin Apostol, Rm. Sărat

V. 236 Determinați numărul x cu proprietatea că, în sistemul zecimal, este adevărată egalitatea $x^4 = \overline{1aabaab}$.

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

V. 237 La un concurs de matematică au participat 100 de elevi. Concurenților li s-au propus spre rezolvare patru probleme. După evaluarea lucrărilor, s-a constatat că 85 de elevi au rezolvat corect prima problemă, 80 de elvi au rezolvat corect a doua problemă, 75 de elevi au rezolvat corect a treia problemă şi 70 a patra. E adevărat că există 10 elevi care au rezolvat corect toate cele patru probleme?

Ioan Dăncilă, Bucureşti

V. 238 Suma unor numere naturale consecutive este egală cu 42. Aflați numerele.

OL Caraş – Severin, 1986

V. 239 Arătați că, dacă n este un număr natural par nenul, atunci numărul $A = 3^n + 63$ este divizibil cu 72.

OL Caraş – Severin, 1995

V. 240 Găsiți două numere naturale a căror sumă este egală cu 234, ştiind că unul dintre ele este egal cu produsul cifrelor celuilalt.

OJ Caraş – Severin, 2001

Clasa a VI-a

VI. 235 Într-un triunghi dreptunghic, măsura unui unghi este de patru ori mai mare decât măsura altui unghi. Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

VI. 236 Determinați mulțimile A şi B de numere naturale nenule care verifică simultan proprietățile:

a) pentru orice $a, b \in A \Rightarrow (a+b) \in B.$

b) $A \cap B = \{2, 3\}.$

c) $card(A) = 3.$

d) elementele mulțimii B sunt mai mici decât 14.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

VI. 237 Stabiliți dacă există numere naturale nenule şi distincte x, y, z pentru care $x^3 + y^3 + z^3 = 2011^3.$

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

VI. 238 Determinați numerele naturale x şi y ştiind că sunt verificate simultan condițiile: a) $\overline{yx} - \overline{xy}$ este pătrat perfect;

b) $3y^2 - 7 \cdot 2^x = 19$.

Prof. Alfred Eckstein, Prof. Viorel Tudoran, Arad

VI. 239 Determinați numerele a, b, c ştiind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

1) $\overline{abc}$ este cub perfect;

2) numărul $\overline{23abc}$ este divizibil cu 7.

Prof. Alfred Eckstein, Prof. Viorel Tudoran, Arad

VI. 240 Determinați numerele naturale n pentru care

$$\frac{4}{15} < \frac{n}{10} < \frac{11}{12} \text{ şi } \frac{2}{7} < \frac{3}{n} < \frac{4}{9}.$$

OJ Caraş – Severin, 1991 (enunț modificat)

Clasa a VII-a

VII. 235 În triunghiul *ABC, M* este piciorul bisectorei din *C*. Ştiind că $\Delta ABC \sim \Delta CMB$, să se determine raportul de asemănare a celor două triunghiuri.

Prof.Constantin Apostol, Rm. Sărat

VII. 236 Să se rezolve în $\mathbb{Z}$, ecuația :

$$\frac{x+14}{3} + \frac{x+35}{10} + \frac{x+56}{17} + ... + \frac{x+140}{45} = 21.$$

Prof. Constantin Apostol, Rm. Sărat

VII. 237 Salariul mediu lunar al unei categorii de muncitori dintr-o întreprindere, pe cele 4 trimestre ale anului 2011, a fost de 850, 910, 930, respectiv 980 lei/lună, iar fondul total de salarii corespunzător celor 4 trimestre a fost de 170 000, 227 500, 241 800, respectiv 284 200 lei/trimestru.

Calculați salariul mediu lunar al unui muncitor de la acea întreprindere în cursul anului 2011.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

VII. 238 Două oraşe A şi B sunt situate la 10 km, respectiv 20 km de un râu, de aceeaşi parte a râului, care poate fi considerat o dreaptă d, iar proiecția segmentului $[AB]$ pe dreapta d are lungimea de 48 km. Cele două oraşe trebuie alimentate cu apă de la o uzină care urmează a fi construită pe marginea râului. Determinați poziția de amplasare a uzinei astfel încât costul construcției conductelor care vor lega oraşele de uzină să fie minim.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

VII. 239 a) Dați un exemplu de numere $a,b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care $(a+b-2ab) \in \mathbb{Z}.$

b) Determinați perechile (a,b) de numere întregi pentru care $a+b-2ab=3.$

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

VII. 240 Se notează cu S aria oricărui triunghi cu lungimile laturilor a,b,c . Demonstrați că $S < \dfrac{ab+bc+ca}{6}.$

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

Clasa a VIII-a

VIII. 235 Determinați numerele naturale n de două cifre pentru care fiecare dintre numerele $\left[\dfrac{n}{4}\right]$ şi $\left[\dfrac{4n+25}{7}\right]$ este un număr natural format din două cifre egale .

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

VIII. 236 Determinați perechile (x,y) de numere întregi pentru care $x^2-y^2=26-x.$

Prof. Alfred Eckstein, Prof. Viorel Tudoran, Arad

VIII. 237 Pentru orice număr întreg n se notează $F(n)=n^2+n+1$ şi $G(n)=n^3+2n^2+2n+4$.

a) Determinați numerele n pentru care $\sqrt{F(n)}\in\mathbb{Q}$.

b) Determinați $n\in\mathbb{N}$ pentru care $\dfrac{G(n)}{F(n)}\in\mathbb{N}$.

Prof. Alfred Eckstein, Prof. Viorel Tudoran, Arad

VIII. 238 Arătați că, dacă $x,y,z\in(0,+\infty)$ şi $x+y+z=19$, atunci

$$\frac{9}{x}+\frac{49}{y}+\frac{81}{z}\geq 19.$$

Prof. Alfred Eckstein, Prof. Viorel Tudoran, Arad

VIII. 239 Se consideră mulțimile $A=\{0,1,2,3,...,50\}$ şi $B=\{-1,0,1\}$.
a) Determinați câte funcții se pot defini pe A cu valori în B.
b) Dați un exemplu de funcție neconstantă $f:A\to B$ pentru care $f(1)+f(2)=0$ şi $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+...f(50)=0$.
c) Arătați că, dacă $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot...\cdot f(50)\neq 0$, atunci $f(0)+f(1)+f(2)+...+f(50)\neq 0$.

OL CS 1986, enunț modificat

VIII. 240 Pentru orice $a,b\in\mathbb{R}, a>b$, se notează $F(a,b)=\dfrac{a^2+b^2}{a-b}$.
a) Determinați numerele întregi x pentru care $F(x,1)\in\mathbb{Z}$.
b) Arătați că, dacă $a\cdot b=1$, atunci $F(a,b)\geq 2\sqrt{2}$.

OL Caraş – Severin , 1997, enunț modificat

Clasa a IX-a

IX. 205 Pentru $k,j\in\mathbb{Z}$ se consideră mulțimile $A(k)=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+2x+3k=0\}$ şi $B(j)=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-4x-5j=0\}$.
Arătați că, pentru orice număr întreg m, mulțimea $A(m)\cup B(m)$ are cel mult trei elemente.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

IX. 206 Se consideră un paralelogram $ABCD$ şi punctele M, N pentru care $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{DN} = p \cdot \overrightarrow{NM}$. Determinați numerele naturale k şi p pentru care punctele A, N, C sunt coliniare.

Prof. Ovidiu Bădescu, Reşița, Caraş – Severin

IX. 207 Determinați numerele reale x pentru care

$$x \cdot [x] = x + 2.$$

Carina Atinge, studentă, Timişoara

IX. 208 Arătați că, dacă $x < 1$ şi $y > 1$, atunci $8 + \frac{x^2+3}{x-1} - \frac{y^2+3}{y-1} \le 0$.

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

IX. 209 Arătați că, dacă $x, y \in (0, +\infty)$ şi $x^2 y + y^2 x + x^2 + y^2 = 18xy$, atunci $xy \le 64$.

Prof. Alfred Eckstein, Prof. Viorel Tudoran, Arad

IX. 210 Arătați că, dacă $a, b \in (0, +\infty)$, atunci $\frac{a^3}{a+b} \ge \frac{5a^2 - b^2}{8}$.

Prof. DM. Bătinețu – Giurgiu , Bucureşti

Clasa a X-a

X. 205 O pereche (a, b) de numere iraționale strict pozitive se numeşte *puternică* dacă $a \cdot b \in \mathbb{Q}$ şi există $k, m \in \mathbb{Z}$ astfel încât $4^a = 3^k$ şi $27^b = 8^m$. Arătați că există o infinitate de perechi *puternice*.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

X. 206 . Determinați mulțimea M a numerelor reale strict pozitive x pentru care $[\log_4 x]$, $[\log_3 (x+1)]$ şi $[\log_2 (x+2)]$ sunt, în această ordine, numere naturale consecutive ($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *a*).

Prof. Nicolae Stăniloiu, Bocşa,
Prof. Lucian Dragomir, Oțelu - Roşu

X. 207 Rezolvați ecuația $1^x + 2^x + 3^x + ... + 2011^x = 2011 \cdot (1005x + 1)$.

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

X. 208 Arătați că, pentru orice număr complex z şi orice numere complexe z_1, z_2, z_3, z_4, este adevărată inegalitatea

$$|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_4| + |z_4 - z_1| \le 2 \cdot \left(|z - z_1| + |z - z_2| + |z - z_3| + |z - z_4|\right)$$

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

X. 209 Dacă z_1, z_2, z_3 sunt numere complexe nenule astfel încât $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$, arătați că numărul $z = \dfrac{z_1^6 + z_2^6 + z_2^6}{z_1^2 z_2^2 z_3^2}$ este real.

Olimpiadă Buzău

X. 210 Se notează cu O centrul cercului circumscris unui triunghi ABC şi $\{A_1\} = AO \cap BC$, $\{B_1\} = BO \cap CA$, $\{C_1\} = CO \cap AB$. Exprimați în funcție de raza R a cercului circumscris suma $\dfrac{1}{AA_1} + \dfrac{1}{BB_1} + \dfrac{1}{CC_1}$.

Concurs Academician Radu Miron

Clasa a XI-a

XI. 205 Arătați că există o infinitate de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ pentru care $\det\left(A - \sqrt{3} \cdot I_2\right) = 3$.

Lorena Krokoş, elevă, Oțelu – Roşu

XI. 206 Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Determinați matricele $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $AX = XA$.

b) Rezolvați în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ecuația $X^n = A, n \in \mathbb{N}^*$.

Olimpiadă Bucureşti, 2003

XI. 207 Dacă $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică egalitățile $tr(AB) = \det(AB) = 1$, arătați că $(BA)^{-1} = I_2 - BA.$

Olimpiadă Neamț, 2003

XI. 208 Calculați limita şirului definit prin

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right)^{b_n}, \forall n \ge 1, \text{ unde } b_n = \frac{\ln n}{n}, \forall n \ge 1.$$

Concurs Nicolae Păun

XI. 209 Definim şirul $(b_n)_{n\ge1}$ astfel: $b_1 = 1, b_{n+1} = 4^n - 3 \cdot b_n, \forall n \ge 1.$

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} \cdot b_n.$

Olimpiadă Mehedinți

XI. 210 Se consideră un şir convergent $(x_n)_{n\ge1}$ pentru care există $L = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot (x_{n+1} - x_n).$ Determinați $L.$

Olimpiadă Suceava

Clasa a XII – a

XII. 205 a) Dați un exemplu de funcție continuă neconstantă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\int_0^1 f(x)dx = \frac{4k+1}{4}$ şi $\int_1^2 f(x)dx = \frac{4k+15}{4}.$

b) Dați un exemplu de funcție continuă neconstantă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $4 \cdot \int_0^1 x \cdot f'(x)dx = 3.$

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

XII. 206 Determinați ultimele trei cifre ale numărului $a = 179249^{2011}$.

Prof. Alfred Eckstein, Prof. Viorel Tudoran, Arad

XII. 207 1) Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, se notează $F(a,b) = 2 + (a-2)(b-2)$. Arătați că, dacă $a, b \in [1,3]$, atunci $F(a,b) \in [1,3]$.

2) Demonstrați că, dacă $x, y, z \in [1,3]$, atunci $\left(xyz - 2(xy + yz + zx) + 4(x + y + z) - 6\right) \in [1,3]$.

Prof. Aurel Doboşan, Lugoj

XII. 208 Se consideră un număr natural $n \geq 3$. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

a) există n numere naturale impare $a_1, a_2, ..., a_n$ astfel încât

$$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

b) n este de forma $4k+1, k \in \mathbb{N}$.

Concurs Cristian Calude

XII. 209 Calculați $\displaystyle\int \frac{e^x (x-2)}{x\left(x^2 + e^x\right)} dx, \quad x \in (0, +\infty)$.

Olimpiadă Bucureşti

XII. 210 Calculați $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\{x\}}{\sin x} dx$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x.

Olimpiadă Hunedoara

Probleme alese

A 17. Dacă n numere prime formează o progresie aritmetică, atunci rația progresiei se divide cu orice număr prim $p < n$.

Cantor

A 18. Arătați că, pentru orice număr natural n, numărul $x_n = 78557 \cdot 2^n + 1$ este compus.

Selfridge

A 19. Arătați că un număr scris în baza 10, cu $n \geq 2$ cifre egale, nu este pătrat perfect.

Oblath

A 20. Demonstrați că, pentru orice număr întreg k, există un număr natural n şi o alegere a semnelor "$+$" sau "$-$", astfel încât $k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm n^2$.

Erdös – Surany

Un nou semn de exclamare, adică: !

Dacă în numărul anterior al revistei noastre inseram, la pagina 4, unele afirmații ale unor oameni care, în ultimii ani au marcat probabil pozitiv trecerea noastră pe aici şi asta v-a mişcat măcar un pic, înseamnă că … putem să vă propunem o altă carte de calitate (părerea noastră).

Vorbim aici de calitatea şi utilitatea celor aflate în cartea pe care vă propunem să o parcurgeți, dincolo de calitatea prezentării tehnice, care, din păcate, are carențe de tehnoredactare, nu „arată" foarte bine…care cărți serioase arătau însă *bine* în 1990 sau chiar şi în 1993? Unele erau xeroxate şi totuşi de Mare valoare!!!

Având în vedere că această carte s-a născut în urmă cu vreo 18 ani (aşa simțim noi), putem acorda circumstanțe atenuante legate de modul de prezentare…Una peste alta, vă propunem să comandați, măcar pentru a răsfoi seara (poate atunci veți găsi chestii pe care nu le-ați prea întâlnit, care poate vă dau idei pentru a face ceva util cu elevii Dumneavoastră, cu proprii copii…)

Hai să nu o mai lungim, vorbim despre:

„Învață din greşelile altora…"
(un florilegiu cu greşeli culese din matematica preuniversitară)

autori: E. Dăncilă, I. Dăncilă, Editura ErcPress, Bucureşti

Căutați, încercați, de exemplu, la nr. 021 318 7027
Sau google…dacă credeți că merită…