Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Caraş-Severin

REVISTA DE MATEMATICĂ

A ELEVILOR ȘI PROFESORILOR

DIN JUDEȚUL CARAŞ-SEVERIN

Nr. 37, An XII – 2011

Acest număr al revistei are avizul Comisiei pentru publicații a SSMR

Editura „Neutrino”
Reşița, 2011

© 2011, Editura „Neutrino”
Titlul: Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din județul Caraş-Severin
I.S.S.N. 1584-9481

Colectivul de redacție

Avrămescu Irina
Bădescu Ovidiu
Bolbotină Costel
Buzescu Antoanela
Chiş Vasile
Cecon Iulia
Deaconu Tudor
Dragomir Adriana
Dragomir Delia
Dragomir Lucian
Drăghici Mariana
Feil Heidi
Gîdea Vasilica
Golopența Marius
Iucu Mircea
Lazarov Mihael
Mitrică Mariana
Moatăr Lavinia
Monea Mihai
Neagoe Petrişor
Pistrilă Ion Dumitru
Popa Dan Dragoş
Rîncu Pavel
Stăniloiu Nicolae
Şandru Marius
Ziman Lăcrimioara

Redacția

Redactor - Şef: *Dragomir Lucian*
Redactor - Şef Adjunct: *Bădescu Ovidiu*
Redactori principali: *Dragomir Adriana*
Mitrică Mariana
Monea Mihai
Neagoe Petrişor
Stăniloiu Nicolae
Responsabil de număr: *Lucian Dragomir*

© 2011, Editura „Neutrino”
Toate drepturile rezervate
Mobil: 0741017700
www.neutrino.ro
E-mail: contact@neutrino.ro

CUPRINS

Despre greşeli

● Cine înțelege greşit, răspunde greşit.

G. Polya, matematician

● Oricine poate greşi, dar numai nebunul stăruie în greşeală.

Cicero – un realist

● Este imposibil să rezolvăm orice problemă fără greşeală, deoarece greşelile sunt mai ingenioase decât noi.

Murphy – un hâtru

● Iertând prea multe celui ce a greşit, nedreptățesti pe cel ce n-a greşit.

Baldasare Castiglione – un justițiar

● Prietenul care ne ascunde greşelile ne slujeşte mai rău decât duşmanul care ni le reproşează.

Pitagora – un filozof

● Niciodată nu trebuie să te ruşinezi a mărturisi că ai greşit. Înseamnă doar să spui cu alte cuvinte că astăzi eşti mai înțelept decât ieri.

Marcel Archard – un moralist

● Orice eroare este un fost adevăr.

Emil Cioran – un pesimist

(Extrase din lucrarea *Să învățăm din greşelile altora,* autori E. Dăncilă şi I. Dăncilă, Editura Erc. Press.)

Matematica...altfel (partea a VII-a)

Ioan Dăncilă, Bucureşti

Al patrulea număr prim, al treilea număr Mersenne, număr mistic, cifră a universului, 7 este de departe unul dintre cele mai răsfățate numere naturale.

O săptămână are şapte zile, notele muzicale sunt şapte, culorile curcubeului sunt tot şapte (şi fundamentale). Popoarele lumii "au văzut" şi au exprimat prin numărul 7 cantitatea semificativă, definitorie.

"Cei şapte ani de acasa" sunt hotărâtori în educația unui copil, balaurul din poveste este de nînvins pentru că are şapte capete, şapte au fost înțelepții lumii antice, minunile lumii antice tot şapte, şapte sunt artele liberale considerate în Evul mediu necesare pentru educația unei persoane culte; s-au asociat astfel *quadrivium* (mecanica, aritmetica, geometria şi astronomia) cu *trivium* (gramatica, dialectica şi retorica).

Primele şapte zile(septenat) sunt hotărâtoare în evoluția unei boli. Păcatele capitale sunt şi ele, vai!, în număr tot de 7. Exagerezi "mâncând cât şapte", era atat de turmentat încât "mergea pe şapte cărări", sunt atât de valoros încât "nu mă dau pe şapte ca el"... sunt ziceri populare care valorifică importanța populară a numărului şapte.

Şapte are o importanță deosebită şi în religiile lumii. În Egiptul antic, septenarul era simbolul vieții veşnice ; existau şapte zei ai luminii şi şapte zei ai întunericului. În Biblie, septenarul reprezintă marele sistem al simbolisticii. În iudaism, menorah, sfeşnicul de aur, are şapte ramuri, Musulmanii cred că există şapte ceruri (la fel evreii şi budiştii), în plus şapte iaduri, şapte tărâmuri, şapte punți spre paradis şi şapte profeți.

Dacă pentru multe popoare şapte este asociat cu mult(e), pentru chinezi şapte este asociat cu desăvârşirea, simplitatea. Superbele jocuri de construcție chinezesti *tangram* şi *soma* au numai câte şapte piese.

Alte curiozități privind numărul 7:

● Se poate scrie, utilizând câte o singură dată cifrele 1, 2, 3, sub formele

$$7 = 2 \times 3 + 1 \text{ sau } 7 = 2^3 - 1.$$

● Ca numitor al unei fracții "produce" perioade atât de interesante încât numărul 142 857 a primit chiar un nume, numărul lui Zevros.

● numărul 7 nu poate fi lungimea unei catete într-o tripletă pitagorică.

● în cântul X, din *Infernul* lui Dante, scena 3, Machbet afirma: Şapte este singurul număr natural care adunat cu 1 dă dublul unui pătrat şi al cărui pătrat adunat cu 1 dă tot dublul unui pătrat. Este adevărat?

De vorbă cu Alin Gălățan

(interviu realizat de Lucian Dragomir)

În rândurile care urmează, sperăm să vă oferim bucuria reântâlnirii cu unul dintre cei mai buni elevi pe care i-a avut (atât cât i-a avut) județul nostru. Este vorba despre Alin Gălățan, născut în Moldova Nouă, în data 29 octombrie 1987, absolvent al gimnaziului în Moldova – Nouă, apoi al Liceului Grigore Moisil din Timişoara, apoi student la Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi la Şcoala Normală Superioară Bucureşti, în cadrul Institutului de Matematică al Academiei Române.

Reaminitim câteva dintre premiile obținute de Alin la concursuri şi olimpiade: Medalie de aur în clasa a 11-a la ONM, medalie de aur (şi locul 1) în clasa a 12-a la ONM ca elev, iar ca student : argint la SEEMOUS (South Eastern European Mathematics Olympiad Students, în Cipru şi Grecia) şi aur la IMC (International Mathematics Olympiad – pentru studenți – la Budapesta). Acum doctorand în Matematică, anul 1, la UCLA (University of California, Los Angeles).

Iată acum câteva dintre întrebările la care a avut amabilitatea să răspundă :

1. Care crezi că a fost primul imbold spre matematică, cine ți l-a dat, când şi unde? Cum ai răspuns?

Primul imbold a venit (bineînțeles) din partea mamei. Primele amintiri pe care le am în care eu fac matematică sunt cele în care ea încerca să mă convingă că, dacă vrem să rezolvăm $x+4=5$, atunci 4 trece în dreapta cu "semn schimbat". În anii ce au urmat, când au apărut concursurile (faimoasele "faze" locale, județene, interjudețene, naționale), făceam matematică de dragul concursurilor: competiția, excursia în oraşul unde "faza" avea loc, plăcerea de a te întâlni cu oameni pe care îi vedeai doar de câteva ori pe an. Decizia de a face efectiv carieră din matematică a venit în clasa a 11-a, când am descoperit analiza matematică. Imboldul propriu-zis a fost eşecul din clasa a 10-a de la națională, când, întors acasă de la Deva, am decis să mă apuc să învăț singur materia pentru anul următor. Am cumpărat manualele de clasa a 11-a şi de acolo a început de fapt totul.

2. Ce profesori ți-au marcat parcursul prin şcoală, ce amintiri marcante te leagă de şcoală (ciclu primar, gimnaziu, liceu, facultate)?

În primul rând, aş vrea să le mulțumesc celor care m-au învățat cât au putut de bine, de la tabla adunării, de la asemănări, concurenţe şi coliniarități, până la derivate şi integrale : doamnei învățătoare **Sorescu Mariana**, doamnei profesoare **Gâdea Vasilica** de la Grup Şcolar Industrial Moldova Nouă şi domnului profesor **Georgescu George** de la Liceul Grigore Moisil, Timişoara. La facultate, lucrurile se complică puțin, întrucât evenimentele nu mai sunt liniare, precum în ciclul pre-universitar. Inițial, am început în paralel la Bucureşti Politehnica la secția Calculatoare şi Matematica la Universitatea Bucureşti. Motivul e simplu: nu îmi era deloc clar ce pot face cu matematica. În primul rând, nu vedeam în momentul acela ce mai e de cercetat şi inventat în matematică. Părea că la sfârşitul liceului, matematica a ajuns la final. În al doilea rând, singura perspectivă pe care o vedeam era cea de a deveni profesor. Nu mi-ar displăcea deloc, singura problema fiind bineânțeles cea financiară.
Astfel, am decis să fac Politehnica, Calculatoare, pentru a mă putea angaja ca programator « în caz de nevoie », iar în paralel Matematica, la UB. A mers bine planul în anul 1. Şi a venit anul 2. În prima săptămână, bineînțeles, am mers la toate cursurile, atât la Poli cât şi la UB, pentru a vedea care e situația. Atunci l-am cunoscut pe cel care avea să îmi schimbe complet perspectivele, datorită lui fiind acum unde sunt. Este vorba de Profesorul **Şerban Strătilă**. După doar câteva cursuri, am decis: vreau să fac doar matematica şi vreau să îmi dedic întreg timpul(cu excepția celui rezervat pentru a fi liber) pentru a face performanță în matematică. Astfel, m-am retras de la Politehnică şi m-am înscris la o altă şcoală de matematică: SNSB (Şcoala Normală Superioară Bucureşti), în cadrul IMAR (Institutul de Matematică al Academiei Române).

Domnul Profesor Strătilă m-a ghidat pas cu pas. Încă țin minte serile petrecute la dumnealui acasă, discutând fie despre licență, fie despre disertații şi nu numai. De aceea, vreau să îi mulțumesc şi pe această cale pentru tot ce a făcut pentru mine. De asemenea, au fost alți profesori care m-au ajutat extrem de mult şi cărora le mulțumesc: domnului profesor **Radu Gologan**, atât pentru ajutorul acordat de-a lungul anilor de liceu, cât şi ulterior, ca profesor de analiză la Politehnică(recunosc că aproape toată Analiza Matematică necesară primilor ani de studiu am învățat-o la Politehnică). De asemenea, în ultimul an de masterat la Bucureşti am fost asistent la Politehnică la cursul domnului Gologan, iar experiența aceasta mi-a prins foarte bine. De foarte mare ajutor au fost şi domnii profesori de la UB/SNSB: **Liviu Ornea, Nicolae Popa, Victor Vuletescu, Marius Vlădoiu, Călin Popescu.** Cu toții au contribuit mult la formarea mea ca (sper eu) viitor matematician.

3. Cât crezi că înseamnă, pentru a obține un premiu la ONM sau chiar o calificare în lotul țării, harul, talentul, efortul? Pot fi cuantificate, putem oferi procentaje? Ce este de recomandat unui elev care a fost, să zicem, în fiecare an în primii 5 la OJM, câteodată în primii 30 la ONM şi care doreşte mai mult?

Greu de zis. Cred că foarte puțini dețin harul, deci dacă ar trebui dată o rețetă pentru a avea rezultate la ONM, ea nu ar trebui să țină cont de har. Cei cu har se descurcă fără rețete. Cei ce merg la olimpiada se separă în trei categorii, din câte cred eu: 1) cei ce fac matematica din plăcere, sunt curioşi, studiază problema în profunzime. 2) cei care o fac pentru că e distractiv… primeşti scutire la şcoală înainte de olimpiadă, mai mergi într-o excursie, cunoşti oameni noi…şi 3) cei pe care îi obligă, mai mult sau mai puțin, părinții(sau chiar profesorii) iar când se afişează rezultatele, e mai mult competiție între mame/tați/profesori decât între copii. «Rețeta» mea e în principiu aceeaşi pentru toate cele trei categorii: cât mai multe probleme muncite(în special naționalele şi interjudețenele din anii anteriori), cât mai din timp şi preferabil să nu te uiți la soluția problemei în 10 minute după ce te-ai apucat de ea. Înveți mai mult dintr-o problemă neterminată, dar la care te-ai chinuit mult şi ai înțeles în ce constă dificultatea decât abandonând repede şi uitându-te la soluție. Ceea ce spun aici e părerea mea; consider că în cazul meu această abordare a dat roade. Cred însă că rețeta dă rezultate diferite pentru cele trei categorii de mai sus. De asemenea, eu când întâlnesc un concept nou, care-mi place mult, ies la plimbare şi meditez la acel lucru. Pe mine mă ajută mult.

4. Ai avut vreun moment în drumul tău matematic în care ai fost tentat să renunți, să te apuci de altceva? Dacă da, de ce? Dacă nu, de ce? Sau, reformulând, în momente de cumpănă(dacă ai avut), ce ai ales?

Momentul în care a trebuit să iau una din cele mai grele decizii a fost înainte de înscrierea la facultate. Nu numai că nu eram decis ce să aleg între Timişoara şi Bucureşti, dar nu eram decis nici ce să aleg:

informatica sau matematica? Cu a doua întrebare am rezolvat relativ repede, zicând că le voi face pe amândouă. Însă cu prima a fost teribil de greu. Schimbam decizia zilnic. Când să plecăm la înscriere, fiind la Moldova Noua cu părinții, ne-am urcat în maşină şi am ajuns la intersecția unde « stânga » însemna Bucureşti, iar «dreapta» Timişoara ; am oprit maşina şi ai mei mi-au spus să mă hotărăsc. A urmat secunda care a decis tot ce a urmat apoi. Noroc că nu regret.

5. Un gând aparte pentru Caraş – Severin , vreo altă amintire deosebită, mai « neortodoxă » chiar?

Întotdeauna mă gândesc cu drag la şcoala din Moldova Nouă, îmi amintesc de prima fază locală, când într-o iarnă stăteam zgribuliți şi aşteptam subiectele de la centru, de la Reşița. În momentele acelea, Reşița era centrul întregului meu Univers. Apoi îmi amintesc de fazele județene, când ne trezeam cu noaptea-n cap şi, fie în autobuze, fie în maşinile personale, porneam spre «reşedința de județ ». Mi-e dor de emoția de a te căuta pe liste, de a merge în sala de concurs, de a aştepta subiectele, iar apoi rezultatele. Ulterior, după ce am mers la liceu la Timişoara şi am venit la Caransebeş la Traian Lalescu(n.red.: concurs interjudețean pentru elevii din vestul țării) cu lotul din Timiş, simțeam un ataşament aparte pentru Caraş-Severin. Parcă locul meu nu era cu cei din Timiş.

Din păcate, au existat şi amintiri neplăcute. În clasa a 6-a, după faza județeană, eu eram sigur(şi încă sunt) că am rezolvat corect o problemă. Din păcate, nu am fost punctat, iar din cauza aceasta am ratat "Traian Lalescu". În mod normal, privind în urmă, lucrul acesta n-ar trebui să conteze prea mult. Dar la vârsta de 12 ani, a fost efectiv o lovitură. Din păcate, cu contestațiile a fost complicat. Tatăl meu a venit la Reşița, a contestat evaluarea, un profesor (îl salut şi cu această ocazie...) şi domnul inspector au spus că soluția e bună, însă diferă de cea din barem (ceea ce evident nu trebuie să conteze...). Însă pentru a putea modifica nota, trebuia chemată comisia care deja se întorsese acasă, în toate colțurile județului, şi dacă vreau s-o aduc, ar trebui să le plătesc deplasarea. Evident că am abandonat. Asta m-a mâhnit mai tare.(n.red. : după încheierea prezentării acestiu interviu, vom reveni asupra temei).

6. Ce crezi că ar trebui schimbat în învâțământul românesc ?

Da, cred cu tărie că ar trebui schimbate multe. Cred însă că e prea complicat pentru a răspunde. Ca să fiu sincer, nici mie nu mi-e clar cum.

E clar totuşi că trebuie mai mulţi bani pentru sistemul de învăţământ; Problema e că viitorii profesori sunt, în mare măsură, tot mai slab pregătiţi. Chiar dacă există studenţi buni, ei vor urma un doctorat, iar apoi cariera universitară (cel puţin asta se întâmplă cu cei ce fac matematică) sau se vor îndrepta spre domenii mai generoase pentru viitorul financiar al familiilor lor. Astfel, din păcate, în marea lor majoritate, viitorii profesori din preuniversitar vor fi foarte slab pregătiţi. Şi e greu să schimbi lucrul acesta, care depinde clar de cei care guvernează. Ar trebui ridicat foarte mult nivelul studenţilor, pentru ca măcar probabilistic, să fie unii buni care să dorească să intre în sistemul preuniversitar... Din păcate, mai nimeni nu vrea să facă matematică... Aproape toţi elevii buni din liceu decid să facă informatică. De ce ? Răspunsul cred că este, din păcate, în cele spuse anterior; din această cauză, facultăţile de matematică sunt nevoite să coboare ştacheta, să treacă studenţi care în mod normal n-ar trebui admişi! Dar dacă ai da notele pe bune(i.e. nu îi laşi să copieze şi nu dai doar subiecte de toceală), în situaţia actuală cred că facultăţile din România ar rămâne efectiv fără oameni în anul 2. Am păţit-o pe propria piele când m-am înscris la master în Bucureşti: specializarea pe care am vrut eu s-o urmez nu s-a ţinut, din cauza că numărul minim de înscrişi trebuia să fie minim 7 ; cu mine eram 3. Ajunsesem la situaţia penibilă de a mă gândi că dacă ajungem la 5-6, să îi pun pe ai mei să se înscrie, doar pentru a putea lua fiinţă sectia respectivă de master, pe care chiar doream să o frecventez. Deci situaţia e dramatică, cred eu, şi nu prea văd cale de ieşire.

7. Să încerc eu câteva căi de ieşire, care nu neapărat îmi aparţin : (1) aşa cum spuneai, motivarea financiară a dascălilor ; (2) îndrumarea viitorilor dascăli, de pe băncile facultăţii, prin chestiuni de metodica predării disciplinei, prin chestiuni utile, punctuale, despre interdisciplinaritate, despre transformările care ţin de vârsta elevilor... ; (3) schimbarea, măcar un pic pentru început, a programelor şcolare, aerisirea lor; nu cantitate de informaţii, ci calitate...trebuie elevii învăţaţi să gândească, măcar să aplice, nu să memoreze chestiuni pe care le vor uita peste vreo 3 ani... (4) examene de admitere la liceu, examene de admitere la facultate, aşa cum am dat eu şi părinţii tăi... Vorba ta, ar fi multe de adăugat...

De acord clar cu ideile anterioare... Am mai auzit câte ceva despre nu ştiu ce teste predictive date în acest an prin şcolile din ţară, care au cam bulversat sistemul 2-3 săptămâni... ideea e ok în principiu ; probabil că ar trebui făcut totuşi ca în U.S.A., astfel de teste să fie unice pe țară, broşurile cu subiecte să vină printate de la Bucureşti, în toată țara la fel, atunci ai o radiografie exactă asupra sistemului național; evident, în fiecare şcoală aceeaşi corectitudine la supraveghere.... în alte țări, nici nu îşi pun elevii problema fraudei, a copiatului adică... au învățat de câteva generații că dacă încearcă aşa ceva, riscă tot! aşadar, nimeni nu copiază...pentru că nimeni nu se gândeşte la asta!!!

8. Ce studiezi acum, către ce domeniu te-ai aplecat, de ce?

Algebre de operatori. Pentru că domnul profesor Şerban Strătilă, cel cu care am colaborat în Bucureşti, este un specialist în acest domeniu. Deşi pare că ar fi algebră(după nume), de fapt e mai mult analiză. Sunt deschis însă şi spre alte domenii. De exemplu, particip la un curs ținut de **Terence Tao**, care nu are (aparent) nicio legătură cu ceea ce fac eu, însă curiozitatea de a asista la un curs ținut de un medaliat Fields m-a făcut să mă înscriu.

9. Crezi că, un viitor medic sau un viitor biolog să zicem, are nevoie de matematica din şcoală?

Dacă vrem performanță, cred că da. Cei ce au inventat tomograful, RMN-ul şi alte asemenea minunății, au ştiut clar multă matematică, de înaltă calitate. Aici, la UCLA, avem unul din cele mai bune spitale universitare din SUA (fiind chiar lângă Beverley Hills, aici vin cam toți actorii renumiți să se trateze). Implicit, avem mulți studenți care vor să facă medicina. Spre deosebire de România, unde fiecare facultate care are nevoie de un minim de matematică, are (în general) proprii profesori de matematică, aici toate departamentele, inclusiv medicina, apelează la profesorii de la departamentul nostru pentru a le ține cursurile. Altfel spus, în departamentul nostru se predă matematica pentru toate specializările din cadrul Universității. Puteți să intuiți astfel ce pregătire interdisciplinară au profesorii de matematică!!! Pentru viitorii doctori, cursul de matematica de aici, numit Math for Life Sciences cuprinde, evident, exemple din biologie. Deci, dacă la un spital de top se cere matematică (şi se cere destul de mult), cred că viitori medici/biologi au nevoie de ea. Cel puțin dacă vor să facă cercetare sau doresc să fie profesionişti.

10. Cum se vede România din afară, cât se cunoaşte din ceea ce e pozitiv pe la noi ?

Aici, în SUA, unde sunt eu, mi se pare că au o părere foarte bună despre noi. În departament sunt destul de mulți profesori români, iar lumea are doar cuvinte de laudă pentru ei. De asemenea, am petrecut trei luni în Cardiff (Marea Britanie), pe un proiect european de cercetare şi nu am avut probleme de integrare. A fost un singur moment în care m-am simțit penibil : împreuna cu colegii din proiect (un japonez, un finlandez, un american şi un german) trebuia să venim la Bucureşti, la o conferință. Deodata mă trezesc în birou cu unul dintre ei, întrebându-mă dacă trebuie să îşi facă vaccin anti-hepatic, pentru că cineva îi spusese că România are probleme foarte mari. Mi-a arătat articolul de pe Wikipedia, şi, din păcate, acolo scria exact ceea ce îmi zisese el. În felul acesta, s-au panicat şi ceilalți. A trebuit să duc lupte mari de convingere, să le spun că nu e nicio problema să vină în România. După ce au venit, unii au fost dezamăgiți, altora le-a plăcut (tuturor le-a plăcut însă mâncarea).

11. Legat de ce povesteai acum, în afară de percepția pozitivă asupra eforturilor unor matematicieni români de valoare, ideea era dacă ştiu şi altceva bun despre România? Ok, mâncare(chiar ok), dar literatură, istorie, artă? Sau măcar sport, folclor? (Poate cer prea mult...) . Dacă în cercurile tale vezi că nu prea ştiu, încerci să le spui, le pui un CD cu, de exemplu, Nicoleta Voica sau Drăgan Munteanu? Dacă nu, o să incerci? Pentru că România are suflet totuşi... Mulțumesc!

Ştiu de Ceauşescu, de Revoluție şi de Transilvania(a se citi Dracula). Îmi pare rău că eu tot insist cu mâncarea, dar la cât de proastă mi se pare mâncarea în Marea Britanie şi aici în SUA, mă mândresc cu sarmalele făcute de bunica. Chiar acum 10 minute am venit de la un restaurant românesc din Hollywood, unde merg în fiecare sâmbătă pentru o ciorbă de perişoare, o tocăniță, etc. De altfel, am fost acum ceva vreme şi cu colegii, să le arat ce înseamnă mâncarea adevărată.

Muzica e mai greu de popularizat. Ca sa fiu sincer, nici eu nu ascult Nicoleta Voica sau Drăgan Munteanu. Am încercat să le pun Phoenix, dar n-am obținut rezultate satisfăcătoare. Însă pe avion, deasupra Atlanticului, am ascultat Enescu – Rapsodia Română, la radio. A fost o senzație nemaipomenită. Colegilor din Cardiff le-am pus filme româneşti : *Filantropica* şi *Amintiri din Epoca de Aur*. Am rămas plăcut surprins să aflu că doi dintre ei văzuseră înainte *4 luni, 3 săptămâni şi 2 zile*.

În numele tuturor celor care citesc şi această mică revistă a noastră, îi mulțumesc lui Alin(astfel şi în mod public) pentru timpul pe care, sigur cu bucurie, şi l-a răpit; de ce a făcut asta? ca să fie încă odată alături de cei cărora le-a fost drag, de cei care i-au fost dragi şi, în ceea ce priveşte afecțiunea, de cei care încă simt la fel; şi totul aşa, preț măcar de câteva clipe, în care, cineva, de sus, ar fi definit o nemaiauzită funcție bijectivă între mulțimea sentimentelor şi trăirilor lui şi mulțimea gândurilor noastre alese.

Comentarii la răspunsul întrebării nr.5. :

Din fericire, sistemul de contestații s-a modificat ulterior. Din nefericire, nu s-a modificat substanțial, aşadar au fost şi au rămas doar încercări de a mima existența acestei modalități de finalizare a unei etape a unui concurs, cel puțin la nivel județean, acolo unde, pentru mulți, e bătaia cea mare(vedeți ce spune Alin: părinți, profesori...) Părerea mea este că ar trebui ca, după ce evaluatorii de la etapa județeană a olimpiadei, de exemplu, îşi termină munca, depusă cu efort (chiar nu glumim acum, ca să nu vorbim despre voluntariat... nici nu mă gândesc la orgolii şi interese, **eu** chiar nici nu gândesc prin prisma asta)...niciun rezultat obținut să nu fie transmis decât ca un rezultat parțial, aşa cum e la ONM. Urmează apoi luni dimineața, între orele 9,00 şi 13,00, să zicem, depunerea contestațiilor(cu opțiunea clară: punctajul acordat după contestații e cel final). Urmează ca marți sau chiar luni după – amiaza, o comisie formată din 3 profesori să decidă rezultatul final; cei **trei** profesori de la contestații : unul trebuie să fie, absolut obligatoriu, dintre cei care au corectat problema respectivă, ca să îşi susțină punctul de vedere, să explice ce şi cum şi de ce, să explice de ce a greşit sau, dacă nu e cazul, să expună ce alții nu au văzut sau au scăpat din vedere din diverse cauze, de exemplu oboseala ... Al doilea, trebuie să fie un dascăl care e recunoscut ca şi bun evaluator, al treilea, un bun mediator, bun cunoscător în ale matematicii. E doar o simplă părere – propunere.

Asupra unei metode de demonstrare a unor inegalități

Nicolae Stăniloiu

Rezumat: *Să presupunem că avem o inegalitate de forma:* $E(a_1, a_2, ..., a_n) \geq c$ sau $E(a_1, a_2, ..., a_n) \leq c$, *unde* $c \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}_+^*$, $i = \overline{1..n}$. *Este cunoscută ca metodă de a demonstra anumite inegalități metoda intercalării între valorile expresiei E si constanta c, o altă expresie care are avantajul că se compară uşor atât cu expresia E cât şi cu constanta reală c.*

Scopul articolului de față este ilustrarea acestei metode de lucru pentru demonstrarea unor inegalități. În acest sens vom privi expresia E ca o funcție $E : X^n \to \mathbb{R}$ *unde* $X = \mathbb{R}_+^*$.

Este normal să ne întrebăm cum evoluează expresia *E* atunci când două variabile ale sale devin egale. Vom construi astfel funcția

$$F : X^{n-1} \to \mathbb{R},\ F(a_1, a_3, ..., a_n) = E(a_1, a_1, a_3, ..., a_n)$$

(sau altele asemănătoare obținute prin egalarea a două argumente ale expresiei *E*). Apare în acest mod şi perspectiva utilizării inducției matematice.

A1. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare are loc inegalitatea

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{1}{8}$$

Soluție: Dacă un unghi e obtuz inegalitatea este evidentă. Dacă triunghiul este ascuțitunghic atunci notăm $E(A, B, C) = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ unde $A, B, C \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Dacă $B = C = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$ obținem $F : \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $F(A) = \cos A \cdot \sin^2 \frac{A}{2}$. Studiem acum veridicitatea relațiilor:

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \cos A \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Prima inegalitate, adică: $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \cos A \cdot \sin^2 \frac{A}{2}$, după simplificare cu factorul pozitiv $\cos A$ şi transformarea produsului în sumă, este echivalentă cu $\cos(B - C) \leq 1$, ceeace este evident.

A doua inegalitate: $\cos A\cdot\sin^2\frac{A}{2}\leq\frac{1}{8}$, este echivalentă cu:

$\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)\cdot\sin^2\frac{A}{2}\leq\frac{1}{8}$ sau $\left(4\cdot\sin^2\frac{A}{2}-1\right)^2\geq 0$, evident adevărat.

A2. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare are loc inegalitatea

$$\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Soluție: Notăm $E(A,B,C)=\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$ şi considerăm funcția $F:(0;\pi)\to\mathbb{R}$, $F(A)=\sin A\cdot\cos^2\frac{A}{2}$.

Încercăm să demonstrăm că: $\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\leq\sin A\cdot\cos^2\frac{A}{2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Prima relație $\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\leq\sin A\cdot\cos^2\frac{A}{2}$, după simplificare cu factorul pozitiv $\sin A$, este echivalentă cu $\cos(B-C)\leq 1$, ceea ce este evident. Relația a doua , $\sin A\cdot\cos^2\frac{A}{2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{8}$, poate fi dovedită studiind extremele funcției F cu ajutorul derivatei sau pe cale elementară prin ridicare la pătrat şi echivalând-o cu relația:

$16\cos^4 A+32\cos^3 A-32\cos A+11\geq 0$ care se mai scrie:

$\left(4\cos^2 A-4\cos A+1\right)\cdot\left(4\cos^2 A+12\cos A+11\right)\geq 0$ sau

$(2\cos A-1)^2\cdot\left(4\cos^2 A+12\cos A+11\right)\geq 0$ (Evident)

A3. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare are loc inegalitatea

$$\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$$

Soluție: Notăm $E(A,B,C)=\cos A+\cos B+\cos C$.

Considerăm $F:(0;\pi)\to\mathbb{R}$, $F(A)=\cos A+2\sin\frac{A}{2}$. Încercăm să justificăm relațiile: $\cos A+\cos B+\cos C\leq\cos A+2\sin\frac{A}{2}\leq\frac{3}{2}$.

Prima inegalitate: $\cos A+\cos B+\cos C\le\cos A+2\sin\frac{A}{2}$, este echivalentă cu: $2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}\le 2\sin\frac{A}{2}$ ceea ce este evident, iar a doua inegalitate, anume $\cos A+2\sin\frac{A}{2}\le\frac{3}{2}$ este echivalentă cu $\left(2\sin\frac{A}{2}-1\right)^2\ge 0$, ceea ce este iarăşi evident.

A4. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare are loc inegalitatea

$$\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Soluție: Notăm $E(A,B,C)=\sin A+\sin B+\sin C$.

Considerăm $F:(0;\pi)\to\mathbb{R}$, $F(A)=\sin A+2\cos\frac{A}{2}$. Încercăm să justificăm relațiile: $\sin A+\sin B+\sin C\le\sin A+2\cos\frac{A}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Prima inegalitate: $\sin A+\sin B+\sin C\le\sin A+2\cos\frac{A}{2}$, este echivalentă cu $2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\le 2\cos\frac{A}{2}$ ceea ce este echivalent cu $\cos\frac{B-C}{2}\le 1$. A doua inegalitate: $\sin A+2\cos\frac{A}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ se poate dovedi mai uşor studiind extremele funcției: $f:(0;\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x+2\cos\frac{x}{2}$. Într-adevăr: $f'(x)=\cos x-\sin\frac{x}{2}$, iar $f'(x)=0$ ne dă $x=\frac{\pi}{3}$ soluție unică şi deoarece derivata este pozitivă la stânga lui $\frac{\pi}{3}$ şi negativă la dreapta rezultă că $x=\frac{\pi}{3}$ este un punct de maxim local şi deci $f(x)\le f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

A5. Să se demonstreze că într-un triunghi ascuţitunghic are loc inegalitatea (culegere admitere Politehnica din Timişoara)

$$\frac{\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C}{\sin^2 A\cdot\sin^2 B\cdot\sin^2 C}\le\frac{8}{27}$$

Soluţie: Notăm $E(A,B,C)=\dfrac{\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C}{\sin^2 A\cdot\sin^2 B\cdot\sin^2 C}$. Construim $F(A)=\dfrac{\cos A\cdot\sin^2\frac{A}{2}}{\sin^2 A\cdot\cos^4\frac{A}{2}}$. Înainte de toate vom avea nevoie sa justificăm că într-un triunghi ascuţitunghic există un unghi al cărui cosinus e mai mare decât $\frac{1}{3}$. Dacă niciun unghi nu ar avea această proprietate atunci toate unghiurile ar fi mai mari de $\frac{\pi}{3}$ şi acest lucru e imposibil. Vom presupune că acest unghi e unghiul A. Încercăm să dovedim relaţiile:

$$\frac{\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C}{\sin^2 A\cdot\sin^2 B\cdot\sin^2 C}\le\frac{\cos A\cdot\sin^2\frac{A}{2}}{\sin^2 A\cdot\cos^4\frac{A}{2}}\le\frac{8}{27}.$$

Prima parte: $\dfrac{\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C}{\sin^2 A\cdot\sin^2 B\cdot\sin^2 C}\le\dfrac{\cos A\cdot\sin^2\frac{A}{2}}{\sin^2 A\cdot\cos^4\frac{A}{2}}$ este echivalentă după simplificare cu relaţia: $\dfrac{\cos B\cdot\cos C}{\sin^2 B\cdot\sin^2 C}\le\dfrac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^4\frac{A}{2}}$, care se poate aduce la forma: $\dfrac{2\left(\cos(B-C)-\cos A\right)}{\left(\cos(B-C)+\cos A\right)^2}\le\dfrac{2(1-\cos A)}{(1+\cos A)^2}$.

Este natural să considerăm funcţia: $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-\cos A}{(x+\cos A)^2}$ a cărei derivată este:

$$f'(x)=\frac{(x+\cos A)^2-2(x-\cos A)(x+\cos A)}{(x+\cos A)^4}=\frac{(x+\cos A)(3\cos A-x)}{(x+\cos A)^4}\geq 0$$

în baza ipotezei că $\cos A>\frac{1}{3}$. Prin urmare $f\left(\cos(B-C)\right)\leq f(1)$ şi demonstrația se încheie. Pentru partea a doua observăm că:

$$\frac{\cos A\cdot\sin^2\frac{A}{2}}{\sin^2 A\cdot\cos^4\frac{A}{2}}\leq\frac{8}{27}\Leftrightarrow\frac{2\cos^2\frac{A}{2}-1}{4\cos^6\frac{A}{2}}\leq\frac{8}{27}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 32\cos^6\frac{A}{2}-54\cos^2\frac{A}{2}+27\geq 0\Leftrightarrow\left(4\cos^2\frac{A}{2}-3\right)^2\left(2\cos^2\frac{A}{2}+3\right)\geq 0.$$

A6. Demonstrați că $a^3+b^3+c^3\geq a^2b+b^2c+c^2a$ pentru orice $a,b,c\in\mathbb{R}_+$.

Soluție: Notăm $E(a,b,c)=a^3+b^3+c^3-a^2b-b^2c-c^2a$. Să presupunem că $a=\max\{a,b,c\}$. Construim expresia:

$F(b,c)=E(b,b,c)=b^3+c^3-b^2c-bc^2$ şi încercăm să dovedim relațiile:

$a^3+b^3+c^3-a^2b-b^2c-c^2a\geq b^3+c^3-b^2c-bc^2\geq 0$.

Prima parte: $a^3+b^3+c^3-a^2b-b^2c-c^2a\geq b^3+c^3-b^2c-bc^2$ este echivalentă cu: $a^3-a^2b-c^2a+bc^2\geq 0$ ceeace conduce la $(a-b)(a-c)(a+c)\geq 0$, evident în baza ipotezei că $a=\max\{a,b,c\}$.

Partea a doua: $b^3+c^3-b^2c-bc^2\geq 0$ este echivalentă cu: $(b-c)^2(b+c)\geq 0$, ceea ce este evident.

A7. Demonstrați că: $x_1^3+x_2^3+...+x_n^3\geq x_1^2x_2+x_2^2x_3+...+x_n^2x_1$ unde $x_i\in\mathbb{R}_+$, $i=\overline{1..n}$.

Soluție: Alegem un $k\in\mathbb{N}$, $1\leq k\leq n$ astfel încât: $x_k=\max\{x_i\,|\,1\leq i\leq n\}$.

Notăm: $E_n(x_1,x_2,...,x_n)=x_1^3+x_2^3+...+x_n^3-x_1^2x_2-x_2^2x_3-...-x_n^2x_1$.

Se observă că:

$E_n(x_1,...,x_{k-1},x_{k-1},x_{k+1},...,x_n)=E_{n-1}(x_1,...,x_{k-1},x_{k+1},...,x_n)$ şi acum apare ca fiind naturală utilizarea inducției matematice în demonstrarea inegalității: $E_n\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\geq 0$.

Fie $P(n)$: $E_n\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\geq 0$, pentru $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$ şi orice $x_i\in\mathbb{R}_+$, $i=\overline{1,n}$. Etapa verificării este simplă, iar demonstrarea implicației $P(n-1)\Rightarrow P(n)$ se face în baza observației că relația $E_n\left(x_1,...,x_{n-1},x_n\right)\geq E_{n-1}\left(x_1,...,x_{k-1},x_{k+1},...,x_n\right)$ este echivalentă cu $\left(x_k-x_{k-1}\right)\left(x_k-x_{k+1}\right)\left(x_k+x_{k-1}\right)\geq 0$ ceeace este evident dacă ținem cont de alegerea lui *k* şi a mențiunilor că, dacă $k=1$, atunci

$$E_n\left(x_n,x_2,...,x_n\right)=E_{n-1}\left(x_2,...,x_n\right)$$

iar dacă $k=n$, atunci $E_n\left(x_1,...,x_{n-1},x_{n-1}\right)=E_{n-1}\left(x_1,x_2,...,x_{n-1}\right)$.

Profesor, Tirol, Doclin

Bibliografie:

[1] - E. Jecan ş.a – Matematică pentru grupele de performanță, Manual pentru cls a IX-a – Ed. Dacia Educațional, Cluj – Napoca
[2] – Mihai Onucu Drimbe – Inegalități, Idei şi metode – Ed. Gil, Zalău
[3] – M. Lascu, L. Panaitopol, V. Băndilă – Inegalități – Ed. Gil, Zalău

Conferința anuală a S.S.M.R

Lucian Dragomir

În perioada 29.09.2011 – 2.10. 2011 a avut loc, la Hunedoara, a XV – a Conferință Anuală a S.S.M.R , organizată de Filialele Hunedoara şi Caraş – Severin a societății. Credem că a fost un eveniment absolut reuşit, prin calitatea conferințelor şi comunicărilor prezentate, prin atmosfera creată de gazde. Trebuie să mulțumim şi pe această cale tuturor colegilor şi sponsorilor din cele două județe, care au înțeles că în aceste vremuri e foarte greu să organizezi o astfel de manifestare şi care astfel au fost aproape de sufletul participanților; din județul nostru, au făcut parte din Comitetul de organizare profesorii Bădescu Ovidiu, Bolbotină Costel, Cubin Ion(în premieră, un profesor de geografie, autor al unei reuşite şi apreciate broşuri turistice acordate participanților), Dragomir Lucian, Lascu Adrian, Popa Dan Dragoş, Şandru Marius. Trebuie subliniat efortul absolut determinant al Domnului Prof. Dr. Dan Ştefan Marinescu, preşedintele Filialei SSMR Hunedoara, sufletul

Conferinței. Detalii despre program găsiți pe pagina web a SSMR, adresa www. rms.unibuc.ro(pe care vă invităm din nou să o vizitați oricum).

Pentru a avea o imagine mai clară asupra ținutei științifice a conferinței, vom enumera totuşi câteva dintre titlurile unor lucrări:

○ Puncte fixe, puncte fixe duble şi câteva aplicații elementare(Prof. Univ. Dr. Vasile Berinde, Universitatea de Nord din Baia – Mare)
○ Măsuri în spații infinit dimensionale(Prof. Univ. Dr. Lucian Beznea, Directorul Institutului de Matematică al Academiei României)
○ Discret şi continuu în analiza matematică(Prof. Univ.Dr. Radu Nicolae Gologan, Universitatea Politehnică Bucureşti, Preşedintele SSMR)
○ Proprietăți de convexitate cu aplicații în ordonarea stochastică(Prof. Univ. Dr, Eugen Păltânea, Universitatea Transilvania din Braşov)
○ Proiecții şi simetrii în plan,spațiu şi spații vectoriale(Prof. Univ. Dr. Vasile Pop, Universitatea Tehnică din Cluj Napoca)
○ Geometrie Lorenz(Prof. Univ. Dr. Wladimir Boskoff, Universitatea Ovidius Constanța)
○ O proprietate a funcțiilor continue şi câteva consecințe(Nicolae Bourbăcuț, Hunedoara şi Prof. Mihai Piticari, Câmpulung Moldovenesc)
○ Automorfisme speciale ale grupurilor finite cu ordine cuprinse între 24 şi 39 (Prof. Codruța şi Mihai Chiş, Timişoara)
○ Teorema valorii intermediare pentru funcții cu valori întregi(Prof. Andrei Eckstein, Timişoara)
○ O clasă de rafinări ale inegalității mediilor clasice(Prof Dorin Mărghidanu, Corabia, Olt)
○ Reducerea la absurd în inegalități(Prof. Cristian Lazăr, Iaşi)
○ Simbolul lui Legendre(Prof. Ileana şi Emil Stanciu, Craiova, elev Ion Stanciu, Craiova)
○ Formulări eronate ale unor probleme de concurs(Prof. Marian Haiducu, Bucureşti)
○ Problema „ piesei de 5 lei" a lui Țițeica sau „Johnson's Theorem"?

(Din păcate) sau din fericire, din județul nostru au fost prezentate (doar) trei comunicări:

○ Inegalitatea Cauchy – Schwarz. Generalizare şi aplicații(Prof. Ovidiu Bădescu, Reşița şi Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu)
○ Metode nonstandard de abordare a unor tipuri de ecuații algebrice cu coeficienți reali(Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş)
○ Asupra unor formule de mecanică(Prof. Nicolae Stăniloiu, Bocşa)

Probleme rezolvate din RMCS nr. 34

Clasa a V-a

V.200 O mulțime se numeşte *utilă* dacă conține cel puțin trei numere pare consecutive. Câte mulțimi *utile* conține mulțimea $\{2,3,4,5,6,7,8\}$?

Olimpiadă Călăraşi

Soluție: Folosim următorul rezultat: O mulțime cu *n* elemente are 2^n submulțimi. Avem astfel: 2^4 submulțimi care conțin numerele 2, 4 şi 6 (numărul submulțimilor mulțimii $\{3,5,7,8\}$), 2^4 submulțimi care conțin numerele 4, 6 şi 8 şi 2^3 submulțimi care conțin numerele 2, 4, 6 şi 8. Aşadar, în total avem 40 mulțimi *utile.*

V.201 La un concurs internațional de matematică participă 100 de elevi; dintre aceştia, 10 nu cunosc nici limba germană, nici limba franceză, 75 cunosc limba germană şi 83 cunosc limba franceză. Câți dintre participanți cunosc ambele limbi străine?

Olimpiadă Covasna

Soluție: $100-10=90$ elevi cunosc cel puțin una dintre cele două limbi străine, deci $75+83-90=68$ elevi cunosc ambele limbi.

V.202 Notăm cu *A* mulțimea numerelor naturale de cinci cifre care au suma cifrelor egală cu 30 şi cu *B* submulțimea numerelor din *A* care coincid cu răsturnatele lor. Determinați cel mai mic şi cel mai mare element al fiecăreia dintre mulțimile *A* şi *B.*

Olimpiadă Iaşi

Soluție: Avem imediat: $A=\left\{\overline{abcde}/a+b+c+d+e=30\right\}$ şi

$B=\left\{\overline{xyzyx}/2x+2y+z=30\right\}$. Se ajunge uşor la:

$\min A=12999, \max A=99930, \min B=28992, \max B=96069.$

V.203 Mihai are cu 7 mai mulți colegi decât colege; în clasa lui sunt de două ori mai mulți băieți decât fete. Câte colege are Maria, una dintre colegele lui Mihai?

Olimpiadă Sălaj

Soluție: Notăm cu *b* numărul băieților din clasă şi cu *f* numărul fetelor.

Avem astfel: $b = f + 8$ şi $b = 2f$. Deducem acum: $2f = f + 8$, de unde

$f = 8$. Aşadar, Maria are 7 colege.

V.204 Comparați numerele $a = 8^{149}$ şi $b = 5^{201}$.

Andreas Grafenberger, elev, Oțelu – Roşu

Soluție: $a = 8^{149} < 8^{150} = \left(8^3\right)^{50}$ şi $b = 5^{201} > 5^{200} = \left(5^4\right)^{50}$; deoarece

$8^3 = 512 < 5^4 = 625$, deducem $a < b$.

V.205 Pe o tablă sunt scrise numerele 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16. Doi copii au şters pe rând câte patru numere şi s-a observat că suma numerelor şterse de unul este de trei ori mai mare decât suma numerelor şterse de celălalt. Ce număr a rămas scris pe tablă?

Olimpiadă Vrancea

Soluție: Suma numerelor scrise la început pe tablă este 70. Dacă *s* este suma celor patru numere şterse de către primul copil, atunci suma numerelor şterse de către celălat este *3s*; notând cu *a* numărul rămas pe tablă avem $4s + a = 70$. Deducem că restul împărțirii lui *a* la 4 este egal cu 2, aşadar $a = 6$. Frumoasă problema(părerea noastră).

V.206 Se consideră 25 de puncte albe şi 25 de puncte negre. O operație constă în alegerea a două puncte oarecare dintre cele 50 şi schimbarea culorii acestora(un punct alb devine negru, iar unul negru devine alb). Repetând această operație, este posibil ca la un moment dat cele 50 de puncte să fie colorate în alb?

Prof. Florian Dumitrel, Slatina

Soluție: Trebuie observat că după fiecare operație rămâne un număr impar de puncte la fel colorate, aşadar răspunsul este negativ.

V.207 Produsul a două numere naturale este egal cu 96. Dacă primul dintre ele se micşorează cu 9, iar celălalt se măreşte de 4 ori, atunci produsul rămâne neschimbat. Calculați suma numerelor.

Concurs Slatina

Soluție: Dacă *a* şi *b* sunt cele două numere, atunci $ab = 96$ şi $4b(a-9) = 96 \Rightarrow 4b(a-9) = ab$. Obținem $a = 12, b = 8 \Rightarrow a + b = 20.$

V.208 Un număr se numeşte *fiul* unui alt număr dacă este format cu două dintre cifrele numărului inițial, numit *tata.* Dintre numerele de trei cifre cu ultima cifră 0, aflați toți *tații* cu 891 mai mari decât unul dintre *fiii* lor.

Concurs Iaşi

Soluție: Dacă $\overline{ab0}$ este *tatăl,* atunci *fiii* săi sunt $\overline{a0}, \overline{b0}, \overline{ba}, \overline{ab}$. Cazurile $\overline{ab0} = 891 + \overline{a0}$ şi $\overline{ab0} = 891 + \overline{b0}$ sunt imposibile. Din $\overline{ab0} = 891 + \overline{ab}$ rezultă $a = b = 9$, iar din $\overline{ab0} = 891 + \overline{ba}$ obținem $a = 9$ şi $b \in \{1, 2, ..., 9\}$.

V.209 În mulțimea $\{1, 2, 3, ..., n\}$ a primelor *n* numere naturale nenule, 123 de numere se divid cu 2, dar nu se divid cu 4, iar 62 de numere se divid cu 4, dar nu se divid cu 8. Aflați numărul *n*.

Concurs Cluj – Napoca

Soluție: Numerele care se divid cu 2, dar nu cu 4, au forma $4k + 2$, aşadar în mulțimea dată sunt primele 123 numere de această formă. Cel mai mare dintre aceste numere este $4 \cdot 122 + 2 = 490.$ Numerele care se divid cu 4, dar nu se divid cu 8, sunt cele de forma $8p + 4$, cel mai mare dintre acestea fiind $8 \cdot 61 + 4 = 492$. Deducem astfel că $n = 492$ sau $n = 493$.

Clasa a VI-a

VI.200 Bunica împarte merele dintr-un coş celor trei nepoţi astfel: primul primeşte jumătate din numărul merelor plus jumătatea unui măr, al doilea primeşte jumătate din numărul merelor rămase şi jumătatea unui măr, iar al treilea primeşte jumătate din câte au rămas plus jumătatea unui măr. În coş au rămas 4 mere întregi. Câte mere au fost în coş?

Olimpiadă Harghita

Soluție: Folosim metoda drumului invers. Ştim că în final au rămas 4 mere, aşadar în coş erau $\left(4+\frac{1}{2}\right)\cdot 2=9$ mere înainte de a lua mere al treilea nepot. La fel, în coş erau $\left(9+\frac{1}{2}\right)\cdot 2=19$ mere înainte de a lua mere al doilea nepot şi deci în coş au fost la început $\left(19+\frac{1}{2}\right)\cdot 2=39$ mere.

VI.201 Să se găsească cel mai mare număr natural x pentru care $4^{27}+4^{1000}+4^{x}$ este pătrat perfect.

Prof. Loreta Ciulu, Reşița

Soluție: $N=4^{27}+4^{1000}+4^{x}=4^{27}\left(1+4^{973}+4^{x-27}\right)=$

$=4^{27}\left(1+2\cdot 2^{1945}+2^{2\cdot 1945+2x-54-2\cdot 1945}\right)=$

$=4^{27}\left(1+2\cdot 2^{1945}+2^{2(1945+k)}\right)$, unde $k=x-1972$. Pentru $k=0$, N este pătrat perfect, iar pentru $k>0$, N nu este pătrat perfect deoarece numărul $1+2\cdot 2^{1945}+2^{2(1945+k)}$ este cuprins între pătratele perfecte a două numere consecutive 2^{1945+k} şi $1+2^{1945+k}$. Aşadar $x=1972$.

VI.202 Fie un punct O. În sensul acelor de ceas, considerăm 360 semidrepte $[OA_0$, $[OA_1$, $[OA_2$,…, $[OA_{359}$, astfel încât $m(\sphericalangle A_0OA_1)=1^o$, $m(\sphericalangle A_1OA_2)=2^o$, $m(\sphericalangle A_2OA_3)=3^o$, … , $m(\sphericalangle A_{358}OA_{359})=1^o$. Studiați dacă există sau nu două numere naturale $k,l\in\{0,1,2,..,359\}$ distincte, astfel încât semidreptele $[OA_k$ și $[OA_l$ să se suprapună.

Prof. Steluța şi Mihai Monea, Deva

Soluție: Ideea este de a scrie pe 360 sau un multiplu de al său ca sumă de numere consecutive.
De exemplu 360 = 119+120+121, deci $k=118$ şi $l=121$.

VI.203 Arătați că numerele $a=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 16\cdot 17$ şi $b=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 18\cdot 19$ dau acelaşi rest prin împărțire la 31.

Olimpiadă Hunedoara

Soluție: Ideea esențială este de a arăta că numărul $b-a$ este divizibil cu 31 (credem că este de reținut metoda, dacă nu cumva o cunoaşteți deja !!!). Avem astfel: $b-a=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 16\cdot 17\cdot(18\cdot 19-1)$. Ar trebui acum să finalizați singuri.

VI.204 Un joc are 3 beculețe care, din când în când, se aprind, apoi se sting imediat(„clipesc”). Primul bec se aprinde la fiecare două secunde. Al doilea bec se aprinde prima dată la o secundă după aprinderea primului, apoi la fiecare trei secunde. Al treilea se aprinde prima oară la a doua aprindere a primului, apoi la fiecare cinci secunde.

a) Arătați că, la un moment dat, toate cele trei becuri vor fi aprinse simultan.
b) De câte ori, în primele trei minute, cele trei becuri sunt aprinse simultan ?

Olimpiadă Neamț

Soluție: Considerăm că primul bec se aprinde în secundele cu numerele $1,3,5,7,9,\ldots$, adică în cele de forma $a_n=2n-1, n\in\mathbb{N}^*$; deducem astfel că al doilea bec se aprinde în secundele cu numerele $2,5,8,11,14,...$, adică în cele cu numerele de forma $b_m = 3m-1, m \in \mathbb{N}^*$; al treilea bec se aprinde în secundele cu numerele $3,8,13,18,23,\ldots$, deci în cele de forma $c_p = 5p-2, p \in \mathbb{N}^*$. a) Observăm că, de exemplu, avem: $a_{12} = b_8 = c_5 = 23$, adică în secunda 23 cele trei becuri sunt toate aprinse. b) Primele două becuri se aprind simultan dacă există *n* şi *m* pentru care $2n-1 = 3m-1$, deci se aprind simultan în secundele cu numerele $6q-1, q \geq 2$; primul şi al treilea bec se aprind în secundele cu numerele $10s+3, s \geq 2$; deducem că toate becurile se aprind simultan în secundele cu numerele de forma $30r+23, r \geq 0$, adică în secundele cu numerele $23, 53, 83, 113, 143, 173$ (deci de şase ori în primele 180 de secunde).

VI.205 Spunem că o mulţime de unghiuri formate în jurul unui punct are proprietatea *(P)* dacă măsurile oricăror două unghiuri adiacente diferă prin 2^o.

a) Determinaţi măsurile exprimate prin numere întregi în cazul unei mulţimi de şase elemente care are proprietatea *(P).*
b) Arătaţi că nu există mulţimi formate din nouă unghiuri care să aibă proprietatea *(P).*

Olimpiadă Prahova

Soluţie: a) Notăm cu *n* numărul natural care reprezintă, în grade, măsura primului dintre cele şase unghiuri(evident, într-o alegere oarecare).Deosebim astfel cazurile: (1) măsurile unghiurilor sunt $n, n+2, n+4, n+2, n, n-2$, deci $6n+6 = 360 \Rightarrow n = 59$; (2) $n, n+2, n+4, n+6, n+4, n+2$, de unde $n = 57$; (3) $n, n+2, n, n+2, n, n+2$, caz în care $n = 59$. Finalizarea este imediată: 59,57,59,61,63,61 sau 59,61,59,61,59,61. b) Dacă $n_k, k = \overline{1,n}$ sunt numerele care reprezintă măsurile în grade ale celor nouă unghiuri , atunci $n_1 - n_2 = \pm 2,\ n_2 - n_3 = \pm 2,\ \ldots, n_9 - n_1 = \pm 2$; adunând, membru cu membru aceste egalități, obținem: $0 = \pm 2 \pm 2 \pm \ldots \pm 2$, ceea ce este imposibil, deoarece în dreapta avem un număr impar de numere pare.

VI.206 Se consideră numerele raționale nenule *x*, *y*, *z* pentru care

$$\frac{2x}{3y+4z} = \frac{3y}{2x+4z} = \frac{4z}{3y+2x}.$$

a) Arătați că numărul $(x+3y+2z)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{2z}\right)$ este natural.

b) Calculați $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$.

Olimpiadă Braşov

Soluție: Valoarea comună a rapoartelor din enunț este egală cu $\frac{2x+3y+4z}{2(2x+3y+4z)} = \frac{1}{2}$. Din $\frac{2x}{3y+4z} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4x = 3y+4z$ (1), iar din $\frac{3y}{2x+4z} = \frac{1}{2} \Rightarrow 6y = 2x+4z$ (2). Din (1) şi (2) deducem, prin scădere, $2x-3y=0$; analog, ajungem la $2x-4z=0$. a) Numărul propus este egal cu 10; b) suma are valoarea egală cu $\frac{10}{3}$.

VI.207 Un burete care conține 99% apă cântăreşte 600 g. După ce se evaporă o parte din apă, buretele conține 98% apă. Cât cântareşte acum buretele?

Olimpiadă Harghita

Soluție: Cantitatea inițială de apă din burete este egală cu $600\cdot\frac{99}{100} = 594$ g. Dacă se evaporă o cantitate de apă egală cu *a*, atunci avem: $594 - a = \frac{98}{100}\cdot(600-a)$, de unde obținem $a = 300$ şi astfel buretele cântăreşte acum 300 g.

VI.208 Se consideră un număr natural *n* care are produsul cifrelor egal cu un număr prim *p*. Determinați numerele *n* şi *p* ştiind că $n+p=156$.

Olimpiadă Hunedoara

Soluție: Trebuie remarcat de la început că *n* are cel mult trei cifre. Dacă *n* are două cifre, atunci una dintre cifrele sale este obligatoriu egală cu 1, iar cealaltă un număr prim; în acest caz suma $n+p$ nu poate fi 156 (e chiar mai mică decât 100). Dacă *n* are trei cifre, atunci două dintre acestea sunt egale cu 1 (!); evident, cifra sutelor este egală cu 1, deci *n* este de forma $n=\overline{11p}$, cu *p* număr prim, caz în care nu avem soluție(*p* este cifră), sau $n=\overline{1p1} \Rightarrow p=5, n=151.$

VI.209 Se dă unghiul propriu *XOY*. Pe latura *(OX* se iau punctele diferite *A* şi *B*, iar pe latura *(OY* se iau punctele diferite *C* şi *D* astfel încât $OA+OB=OC+OD.$ Mediatoarele segmentelor *(AB)* şi *(CD)* se intersectează în punctul *M*.

a) Demonstrați că $(MA)\equiv(MB)$.

b) Arătați că punctul *M* este situat pe bisectoarea unghiului $\widehat{XOY}$.

Prof. Mircea Fianu, Bucureşti

Soluție: a) Notăm cu *E* mijlocul lui *(AB)* şi cu *F* mijlocul lui *(CD)*; avem astfel $ME \perp AB, MF \perp CD.$ Din $\Delta MEA \equiv \Delta MEB$ obținem $(MA)\equiv(MB)$.

b) Egalitatea $OA+OB=OC+OD$ se poate scrie $2OA+AB=2OC+CD$ sau $OA+\frac{1}{2}AB=OC+\frac{1}{2}CD$, de unde $OE=OF$. Deducem astfel:

$\Delta OME \equiv \Delta OMF \Rightarrow \sphericalangle MOE \equiv \sphericalangle MOF$, adică *M* se află pe bisectoarea unghiului $\widehat{XOY}$.

Clasa a VII-a

VII.200 Determinați numerele întregi x şi y ştiind că y divide $x+1$, iar x divide $y+1$. (enunț corectat)

Olimpiadă Brăila

Soluție: Fără a restrânge generalitatea problemei, putem presupune $y \le x$, adică $x-y \ge 0$ .Pe de altă parte, avem $x \le y+1$, de unde $x-y \le 1$.Deducem astfel că $x-y \in \{0,1\}$. Dacă $x-y=0 \Rightarrow x=y$ şi condițiile din enunț conduc la $x=y=1$. Dacă $x-y=1$, atunci y divide $y+2 \Rightarrow y \in \{1,2\}$.

VII.201 Se consideră numerele $a=12n+23m$ şi $b=3n+10m$, unde $m,n \in \mathbb{Z}$. Arătați că, dacă 17 este un divizor al lui a, atunci 17 este un divizor şi al lui b.

Olimpiadă Argeş

Soluție: Dacă 17 divide numărul a, atunci 17 divide şi numărul $4a$, aşadar $17/\left[17(3n+6m)-(3n+10m)\right]$. Concluzia e imediată.

VII.202 Determinați numerele întregi x pentru care numerele $a=\dfrac{2x+1}{3x+1}$ şi $b=\dfrac{x-2}{4x+1}$ sunt simultan întregi.

Olimpiadă Ialomița

Soluție: Din $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3a \in \mathbb{Z}$, de unde $\dfrac{6x+3}{3x+1}=2+\dfrac{1}{3x+1} \in \mathbb{Z}$. Obținem astfel condiția necesară(nu şi suficientă): $3x+1 \in \{-1,1\}$; ajungem la $x=0$, valoare pentru care avem $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$.

VII.203 Determinați numerele prime p pentru care $24p+1$ este pătrat perfect.

Olimpiadă Olt

Soluție: Din $24p+1=(2k+1)^2, k\in\mathbb{N}$, deducem $6p=k(k+1)$ şi astfel: $k=ap, a\in\mathbb{N}$ sau $k+1=bp, b\in\mathbb{N}$. Dacă $k=ap, a\in\mathbb{N}$, atunci $6=a(ap+1)$, de unde $a\in\{1,2,3,6\}$; analog celălalt caz. Se ajunge în final la $p\in\{2,5,7\}$.

VII.204 Determinați numerele naturale *x* pentru care $\sqrt{\frac{2x-2}{x+1}}$ este număr natural.

Concurs Satu Mare

Soluție: Condiția din enunț conduce la $\frac{2x-2}{x+1}=k^2, k\in\mathbb{N}$. Ajungem astfel la $2-\frac{4}{x+1}=k^2 \Rightarrow (x+1)\in D_4$. Obținem imediat: $x\in\{1,3\}$.

VII.205 Determinați cel mai mic număr de forma $\left|3^{n+1}-3\cdot 5^m\right|$, unde *m* şi *n* sunt numere naturale diferite.

Prof. Mircea Fianu, Bucureşti

Soluție: Numărul se poate scrie $\left|3^{n+1}-3\cdot 5^m\right|=3\cdot\left|3^n-5^m\right|$, deci este minim dacă şi numai dacă $\left|3^n-5^m\right|$ este minim. Cum $m\neq n\Rightarrow\left|3^n-5^m\right|\neq 0$. Deoarece 3^n şi 5^m sunt impare, valoarea minimă a lui $\left|3^n-5^m\right|$ este 2; aceasta se obține, de exemplu, pentru $m=n=1$. Numărul minim cerut inițial este aşadar 6.

VII.206 Se consideră ΔABC în care $(AB)\equiv(AC)$ şi $m(\sphericalangle BAC)=20^o$. Dacă $D\in(AB)$ astfel încât $(AD)\equiv(BC)$, calculați $m(\sphericalangle BDC)$.

Olimpiadă Bucureşti

Soluție: Problema nu este chiar uşoară: construim în exterior triunghiul echilateral *ACE* şi avem astfel: $\Delta DAE \equiv \Delta BCA\ (L.U.L)$. Deducem

$m(\sphericalangle DEC)=40^o$ şi $AE=DE=EC$, apoi $m(\sphericalangle CDE)=70^o$,

$m(\sphericalangle BDC)=180^o-70^o-80^o=30^o$.

VII.207 Se ştie că în paralelogramul *ABCD* două dintre unghiurile *CAD, ADB, BDC* au măsurile egale cu 45^o . Arătați că *ABCD* este pătrat.

Prof. Mircea Fianu, Bucureşti

Soluție: Dacă $m(\sphericalangle ADB)=m(\sphericalangle BDC)=45^o$, deducem că

$m(\sphericalangle ADC)=90^o$, deci *ABCD* este dreptunghi.Avem acum:

$\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle ADB$ şi $\sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle DCA$; deoarece $m(\sphericalangle ADB)=m(\sphericalangle BDC)$,

deducem că triunghiul *ADC* este isoscel, deci $AD=DC$ şi astfel *ABCD*

este pătrat.Dacă $m(\sphericalangle ADB)=m(\sphericalangle CAD)=45^o$, atunci diagonalele

paralelogramului sunt congruente, deci paralelogramul este dreptunghi. Deoarece *ADC* este triunghi dreptunghic isoscel, dreptunghiul este chiar pătrat.

VII.208 Se consideră un patrulater convex *ABCD* cu proprietatea că există $M\in(AB)$ astfel încât $MA=AD$ şi $MB=BC$. Arătați că, dacă $DM\perp MC$, atunci bisectoarele interioare ale unghiurilor *A* şi *B* ale patrulaterului se intersectează pe *DC.*

Olimpiadă Bistrița – Năsăud

Soluție: Considerăm $P\in(DM)$ şi $Q\in(MC)$ astfel încât *(AP* şi *(BQ* sunt

bisectoare. Deducem că *AP* şi *BQ* sunt mediane şi înălțimi în triunghiurile

isoscele *DAM*, respectiv *MBC*, aşadar $AP\perp DM, BQ\perp MC$. Dacă *R* este

mijlocul laturii *(DC)*, avem că *RP* şi *RQ* sunt linii mijlocii, de unde

$RP // CM \Rightarrow RP \perp DM$ şi $RQ \perp MC$. Obținem astfel că *A,P,R* sunt coliniare, *B,Q,R* sunt de asemenea coliniare, concluzia fiind imediată.

VII.209 Fie $ABCD$ un patrulater în care laturile opuse nu sunt paralele. Considerăm mulțimea
$\Sigma = \{P \text{ din plan} | PA + PC = PB + PD\}$

a) Demonstrați că mulțimea Σ are cel puțin un element.
b) Dacă mulțimea Σ are un singur element, notat O, atunci $OA = OB = OC = OD$.

Prof. Steluța şi Mihai Monea, Deva

Soluție: a) Fie M intersecția mediatoarelor laturilor AB respectiv CD.
Atunci $MA = MB$ şi $MC = MD$, deci $M \in \Sigma$.
b) Construim analog punctul N ca intersecția a mediatoarelor segmentelor BC şi AD. Deducem că $M = N$ şi concluzia.

Clasa a VIII-a

VIII.200 Comparați numerele $A = \sqrt{n-a} + \sqrt{n+a}$ şi $B = \sqrt{a} + \sqrt{2n-a}$, unde $a, n \in \mathbb{N}, n \geq a.$

Prof. Marin Chirciu, Piteşti

Soluție: Se obține imediat $A > B \Leftrightarrow n > 2a$ şi astfel deosebim cazurile:

(1) Dacă $n \in \{a, a+1, ..., 2a-1\}$, atunci $A < B$; (2) dacă $n = 2a$, atunci $A = B$; (3) dacă $n > 2a$, atunci $A > B$.

VIII.201 Determinați numerele naturale *x* şi *y* pentru care

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Olimpiadă Vâlcea

Soluție: $x \geq 1, y \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq 2$ (1). Folosind inegalitatea mediilor avem

însă $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \geq 2$ (2). Deducem imediat, din (1) şi (2), $x = y = 1$.

VIII.202 Demonstrați că, pentru orice numere reale pozitive *a,b,c*, este adevărată inegalitatea: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geq\sqrt{2}\cdot(a+b+c)$.

Olimpiadă Sălaj

Idee:Se arată că $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2},\ \forall a,b\geq 0$.

VIII.203 Arătați că, dacă într-un triunghi dreptunghic raportul catetelor este egal cu $\sqrt{2}$, atunci două dintre medianele triunghiului sunt perpendiculare.

Concurs Bucureşti

Soluție: Considerăm triunghiul *ABC*, dreptunghic în *A* şi notăm cu *D,E,F* mijloacele laturilor *(BC),(CA),* respectiv *(AB),* iar cu *G* centrul de greutate. Din $\frac{b}{c}=\sqrt{2}$ şi $b^2+c^2=a^2$, obținem $c=\frac{a\sqrt{3}}{3}, b=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.Din ΔABE avem $BE=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, de unde $AG=\frac{a}{3}, BG=\frac{a\sqrt{2}}{3}$ şi astfel

$AG^2+BG^2=c^2\Rightarrow AG\perp BG$.

VIII.204 Se notează cu *O* centrul cercului circumscris unui triunghi *ABC* în care $m(\sphericalangle A)=4\cdot m(\sphericalangle C)$. Arătați că, dacă bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ intersectează cercul în punctul *M* astfel încât $m(\sphericalangle AOM)=120^o$, atunci triunghiul *ABC* este isoscel.

* * *

Soluție: Se ştie că $m(\sphericalangle ACB)=\frac{m\left(\overset{\frown}{AB}\right)}{2}$ şi

$m(\sphericalangle BAC)=\frac{m\left(\overset{\frown}{BC}\right)}{2}$.Deoarece $m(\sphericalangle AOM)=120^o$, deducem:

$2C+A=120^o$(am renunțat, pentru uşurința scrierii, la măsuri). Deoarece

$B=4C$ şi $A+B+C=180^o$, ajungem imediat la $A=B=80^o$.

VIII.205 Se consideră un patrulater convex *ABCD* în care $m(\sphericalangle BAC)=25^o, m(\sphericalangle BCA)=40^o, m(\sphericalangle BDC)=50^o, m(\sphericalangle BDA)=80^o$. Calculați măsura unghiului format de diagonalele patrulaterului.

Concurs Vâlcea

Soluție: Se consideră cercul circumscris triunghiului *ABC* şi se notează intersecția dreptei *BD* cu acesta cu *E.* Se folosesc în continuare proprietăți ale patrulaterului inscriptibil *ABCE* şi se obțin rezultatele posibile: 75^o sau 105^o.

VIII.206 Se consideră un tetraedru *VABC* în care VE este bisectoarea unghiului AVB şi VF este bisectoarea unghiului BVC. Notăm $AF \cap CE = \{I\}$ şi $BI \cap AC = \{S\}$. Demonstrați că VS este bisectoarea unghiului CVA.

Olimpiadă Hunedoara – 2005

Soluție. Se aplică succesiv teorema bisectoarei şi teorema lui Ceva.

VIII.207 Se consideră un număr natural *n* pentru care există $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $n = 3x^2 + 14y^2$. Arătați că există $a, b, c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $n = a^2 + b^2 + c^2$.

* * *

Soluție: $n = 3x^2 + 14y^2 = (x+y)^2 + (x+2y)^2 + (x-3y)^2$.

VIII.208 Se dau punctele necoplanare *P,A,B,C,D.* Dacă $PB \perp CD, PD \perp BC, PA \perp BD$, arătați că picioarele perpendicularelor duse din *A* şi *C* pe *BD* coincid.

Olimpiadă Caraş – Severin , 1992

Soluție: Dacă $AL \perp BD, AP \perp BD$, atunci

$BD \perp (ALP) \Rightarrow PL \perp BD.$ Considerăm acum

$CQ \perp BD, DR \perp BC, PD \perp BC \Rightarrow BC \perp (PDR)$, de unde

$BC \perp PR, BS \perp CD, PB \perp CD \Rightarrow CD \perp (PBS) \Rightarrow CD \perp PB$. Aşadar

proiecția lui *P* pe planul *(BCD)* este ortocentrul *H,* iar din

$PH \perp (BCD) \Rightarrow PL \perp BD \Rightarrow HL \perp BD$, deci *Q* şi *L* coincid.

VIII.209 Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care

$$\min\left(5x-4, 2-x\right) \geq \max(x, 3x-2).$$

Concurs Bacău

Soluție: Folosim $\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ şi $\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.

Inegalitatea din enunț conduce astfel la: $|x-1| \leq 0 \Leftrightarrow x=1$.

Clasa a IX-a

IX.185 Rezolvați ecuația: $\left[\frac{2x-1}{6}\right] + \left[\frac{x+1}{3}\right] = \frac{x+1}{2}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *a*.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: Se notează $t = \frac{2x-1}{6}$ şi se foloseşte identitatea

$[t] + \left[t + \frac{1}{2}\right] = [2t]$, adevărată pentru orice număr real *t*. Se ajunge la mulțimea soluțiilor $S = \{5, 7, 9\}$.

IX.186 Arătați că, dacă *a,b,c* sunt numere reale astfel încât $a^2 + ab + ac \leq 0$, atunci $b^2 - 4ac \leq 0$.

Concurs Bucureşti

Soluție: Inegalitatea din ipoteză se poate scrie $4a^2 + 4ab + 4ac \leq 0$ sau

$(2a+b)^2 + b^2 - 4ac \leq 0$; concluzia este, credem, imediată.

IX.187 Demonstrați că, dacă $a,b,c \in [0,1]$, atunci

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \leq 2.$$

Concurs Tg.Jiu

Soluție: Putem presupune $0 \le a \le b \le c \le 1$, de unde:

$a+b \le 1+ab \le 1+2ab$ şi astfel $a+b+c \le c+1+2ab \le 2(1+ab)$.

Deoarece avem şi $1+ab \le 1+ac \le 1+ab$, deducem:

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab} \le \frac{a+b+c}{1+ab} \le 2 .$$

IX.189 În plan se consideră o mulțime de vectori S care îndeplineşte condițiile:

1) Toți vectorii din S au module egale;
2) Toți vectorii din S au direcții diferite;
3) Suma tuturor vectorilor din S este nulă.

Atunci:

a) Dați exemplu de mulțime S cu trei elemente;
b) Demonstrați că S nu poate avea 4 elemente;
c) Demonstrați că pentru orice număr natural n impar, mai mare sau egal cu 5, se poate construi o mulțime S cu n elemente;
d) Demonstrați că pentru orice număr natural n par, mai mare sau egal cu 6, se poate construi o mulțime S cu n elemente.

Prof. Steluța şi Mihai Monea, Deva

Soluție: a) triunghiul echilateral; b)dacă suma este zero , atunci formează o linie poligonală închisă, deci este romb, ceea ce contrazice ipoteza cu direcții diferite; c) orice poligon regulat; d) orice număr întreg e sumă de numere impare şi se aplică puntul c).

Clasa a X-a

X.185 Determinați numerele complexe a şi b pentru care: $|a|=|b|=1$ şi $1+ab=\overline{a}+\overline{b}$.

Prof. Dinu Şerbănescu, Bucureşti

Soluție: Considerăm $a=\cos\alpha+i\sin\alpha$ şi $b=\cos\beta+i\sin\beta$. Relațiile din ipoteză conduc imediat la: $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=0$ şi $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=0$. Studiind cazurile ce se obțin, ajungem la $a=n\pi, b=m\pi$, cu *m* şi *n* de parități diferite sau ambele pare. Se deduce astfel: $a=b=1; a=-1, b=1; a=1, b=-1$. *Metoda a doua :*Din $ab=\overline{a}+\overline{b}-1$, deducem: $\overline{ab}=a+b-1$, de unde $|a+b-1|^2=|ab|^2=1$, deci ortocentrul triunghiului cu vârfurile în punctele de afixe -1, *a* şi *b* aparține cercului circumscris triunghiului. Evident, triunghiul este aşadar dreptunghic şi ortocentrul, de afix $a+b-1$, este unul dintre vârfuri.Dacă $a+b-1=1$, din $|a|=|b|=1$ deducem: $a=b=1$; dacă $a+b-1=a$, avem $b=1, a=\overline{a}$, deci $a\in\mathbb{R}\Rightarrow a=\pm1$.

X.186 Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $x^{\log_3(x-1)}+2(x-1)^{\log_3 x}=3x^2$.

Olimpiadă Caraş – Severin, 2003

Soluție : Folosim $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ şi ecuația devine

$x^{\log_3(x-1)}=x^2 \Leftrightarrow \log_3(x-1)=2 \Leftrightarrow x=10$.

X.187 Fie $a,b,c\in(1,\infty)$ astfel încât $abc=10$. Demonstrați că $\log_a 10+\log_b 10+\log_c 10\geq\sqrt{3\log_a 10\cdot\log_b 10\cdot\log_c 10}$

Prof. Steluța şi Mihai Monea, Deva

Soluție: Notăm $\lg a=x, \lg b=y, \lg c=10$, şi avem de demonstrat $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\sqrt{\frac{3}{xyz}}$ cu condiția $x+y+z=1$, care se rezolvă prin ridicare la pătrat şi folosind faptul că $x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2\geq xyz$.

X.188 Determinați numerele reale x pentru care este adevărată egalitatea

$$\sqrt[3x]{7-6x\sqrt[6x]{12x}}=\sqrt[6x]{6x}.$$

Andreas Grafenberger, elev, Oțelu Roşu

Soluție: Din condițiile $3x\geq 2, 7-6x\geq 2$, deducem $x\in\left[\frac{2}{3},\frac{5}{6}\right]$; în plus,

este necesar să avem $3x=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{k}{3}$ şi astfel:

$\frac{2}{3}\leq\frac{k}{3}\leq\frac{5}{6}\Rightarrow k=2\Rightarrow x=\frac{2}{3}$. Verificare!.

X.189 Se consideră un număr natural nenul *n*. Rezolvați ecuația $(2n+i\cdot z)^{2n}+(2n-i\cdot z)^{2n}=0$, unde $i^2=-1$.

* * *

Soluție : Ecuația se poate scrie : $\left(\frac{2n+iz}{2n-iz}\right)^{2n}=-1$, de unde

$\frac{2n+iz}{2n-iz}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}+i\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}, k=\overline{0,2n-1}$ şi, imediat, se

ajunge la $z_k=2n\cdot tg\frac{(2k+1)\pi}{4n}, k=\overline{0,2n-1}$.

Clasa a XI-a

XI.185 Arătați că, oricare ar fi matricea $A\in\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, există matricele $B,C\in\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ astfel încât $A=B+C$, cu $\det(B),\det(C)\in\mathbb{R}$.

Olimpiadă Călăraşi

Soluție: Dacă $X=\left(x_{ij}\right)\in\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, notăm

$\overline{X}=\left(\overline{x_{ij}}\right)\in\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ (conjugatele numerelor care definesc matricea X).

Considerăm astfel $B=\frac{1}{2}\left(A+\overline{A}\right)$ şi $C=\frac{1}{2}\left(A-\overline{A}\right)$; finalizarea e imediată.

XI.186 Se consideră $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $\det(A - I_2) = 2$ şi $\det(A + I_2) = 4$. Calculaţi $\det A$ şi $\det(A - 2I_2)$.

Prof. Gheorghe Andrei, Constanța

Soluție: Folosim egalitatea $\det(A - x \cdot I_2) = x^2 - (trA) \cdot x + \det A$ şi deducem imediat: $\det A - trA = 1$, $\det A + trA = 3$, de unde $\det A = 2, trA = 1$. De asemenea, avem şi $\det(A - 2I_2) = 4$.

XI.187 Determinaţi matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ştiind că $A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Olimpiadă Olt

Soluție: Considerăm $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi, deoarece $A^5 = B$, deducem că $A^6 = AB = BA$; calcule imediate conduc la concluzia că $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ şi, imediat, se ajunge la $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$. Finalizarea este imediată.

XI.188 Se consideră şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{1 + n \cdot x_n}, \forall n \geq 1.$ Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{n}$.

Cristian Zanfir, elev, Caransebeş

Soluție: Se demonstrează prin inducție: $n - 1 < x_n < n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, de unde $\frac{n-1}{n} < \frac{x_n}{n} < 1, \forall n \geq 1$; folosind teorema *cleştelui*, obținem că limita cerută este egală cu 1.

XI.189 Se consideră $a \in \mathbb{R}^*{}_+, b \in \mathbb{R}$. Studiați existența limitei în origine a funcției $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{a} \cdot \left[\frac{b}{x}\right]$, unde $[t]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *t*.

Olimpiadă Iaşi

Soluție: Pentru $x > 0$ avem $\frac{b}{x} \geq \left[\frac{b}{x}\right] > \frac{b}{x} - 1$, de unde $\frac{b}{a} \geq f(x) > \frac{b}{a} - \frac{x}{a}$; pentru $x < 0$, deducem $\frac{b}{a} \leq f(x) < \frac{b}{a} - \frac{x}{a}$. Obținem astfel imediat: $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{b}{a}$.

Clasa a XII-a

XII.185 Arătați că, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, este adevărată inegalitatea:

$$\frac{3x}{\sin x} > 4 - \cos x .$$

Prof. Mircea Iucu, Reşița

Soluție: Se studiază variația

funcției $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, f(x) = 3x - 4\sin x + \sin x \cdot \cos x.$

XII.186 Determinați $\int \frac{\sin^2 x + \sin 2x + 1}{e^{-x} + \sin^2 x + 1} dx.$

Olimpiadă Buzău

Soluție: Integrala se poate scrie $\int \frac{\sin^2 x + e^{-x} + 1}{e^{-x} + \sin^2 x + 1} dx + \int \frac{\left(\sin^2 x + e^{-x} + 1\right)'}{e^{-x} + \sin^2 x + 1} dx$

şi astfel mulțimea căutată este egală cu $x + \ln\left(\sin^2 x + e^{-x} + 1\right) + \mathcal{C}$.

XII.187 Se consideră un grup multiplicativ *G*, având ordinul *2n*. Stabiliți paritatea numărului natural nenul *n*, ştiind că numărul elementelor de ordinul 2 din grupul *G* este egal cu *n*.

Olimpiadă Călăraşi

Soluție: Cele $n-1$ elemente care nu au ordinul 2 pot fi grupate în perechi de forma $\left(x, x^{-1}\right)$(cu elemente distincte), aşadar $n-1=2k \Rightarrow n=2k+1$, deci *n* este impar.

XII.188 Calculați: $\int \left(x\cos x+\sin x\right)\ln x\,dx$**,** $x>0$.

Prof.Steluța şi Mihai Monea, Deva

Soluție: Fie funcțiile $f,g:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot\sin x$ şi $g(x)=\ln x$; integrala propusă este egală cu $\int f'(x)\cdot g(x)dx$, apoi e simplu.

XII.189 Determinați un interval $I\subset\mathbb{R}$, cu $0\in I$, şi o funcție $f:I\to\mathbb{R}_+^*$ astfel încât $f(0)=1$, iar $\frac{1}{f}$ este o primitivă a lui *f*.

Prof. Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluție: Din $\left(\frac{1}{f}\right)'=f$ deducem: $\frac{f'}{f^3}=-1\Rightarrow\left(\frac{1}{f^2(x)}\right)'=2$, de unde

$\frac{1}{f^2(x)}=2x+C\Rightarrow f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+C}}$. Condiția inițială conduce la

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ şi $I\subseteq\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Probleme alese

A.1 Se consideră o mulțime finită de puncte în plan cu proprietatea că orice dreaptă determinată de două puncte mai conține cel puțin un punct. Arătați că toate punctele sunt coliniare.

(Sylvester, 1893)

Soluție : Dacă prin absurd, punctele nu sunt coliniare, considerăm triunghiul *ABC*, de înălțime minimă *AM*. Pe dreapta *BC* se mai află un punct *D* şi, cu o eventuală schimbare de notații, putem presupune *D* între *B* şi *C*, iar dacă *D* şi *B* sunt de de aceeaşi parte a lui *M*, atunci triunghiul *ABD* are înălțimea $DM < AM$, contradicție cu alegerea făcută. (Această problemă, propusă de Sylvester în 1893, a fost rezolvată prima dată de T. Gallai în 1933 ; soluția pe care v-am prezentat-o a fost dată de R. Steinberg.)

A.2 Dacă *p* este un număr prim, $p > 3$, iar $n = \dfrac{4^p - 1}{3}$, arătați că *n* divide $2^n - 2$.

(Paul Erdös)

Soluție : Deoarece $n - 1 = \dfrac{4\left(2^{p-1} - 1\right)\left(2^{p-1} + 1\right)}{3}$ şi *p* divide $2^{p-1} - 1$,

deducem că $2p \mid (n-1) \Rightarrow n - 1 = 2kp$. Cum $4^p - 1 = 3n$,ajungem la

$$2^{n-1} - 1 = 2^{2kp} - 1 = \left(4^p\right)^k - 1 = \left(4^p - 1\right)\left(4^{p(k-1)} + 4^{p(k-2)} + ... + 4^p + 1\right) =$$

$$= 3n\left(4^{p(k-1)} + 4^{p(k-2)} + ... + 4^p + 1\right) \Rightarrow n \mid \left(2^{n-1} - 1\right).$$

A.3 Determinați perechile (x, y) de numere întregi pentru care egalitatea $1 + x + x^2 + x^3 = y^2$ este adevărată.

(H. Brocard, 1875)

Soluție: Ecuația se poate scrie $\left(1+x\right)(1+x^2)=y^2$ (1) .

O primă remarcă este aceea că c.m.m.d.c. al numerelor $1+x$ şi $1+x^2$ este 1 sau 2 ; în primul caz, se ajunge destul de uşor la $x=0$. Pentru a doua posibilitate, din (1) ajungem la

$$x+1=2a^2 \text{ şi } x^2+1=2b^2,\ a,b\in\mathbb{Z},\ y=2ab. \quad (2)$$

Eliminarea lui x din egalitățile anterioare conduce la

$$a^4+\left(a^2-1\right)^2=b^2 \qquad (3).$$

Aceasta este o ecuație pitagorică, cu b impar, prim cu a şi cu a^2-1.
Ecuația (3) are soluții doar pentru $a^2=0, a^2=1, a^2=4$.
(Ecuația (3) se aduce, în funcție de paritatea lui a la una dintre formele $x^4+y^4=z^2$ sau $x^4-y^4=z^2$). Se ajunge astfel la $x=-1, x=0, x=1$ sau $x=7$. Finalizarea este imediată. (De remarcat că problema a fost publicată în 1875.)

A.4 Dacă diferența cuburilor a două numere naturale consecutive este pătratul unui număr natural, atunci acel număr este suma pătratelor a două numere consecutive.

(R. Lyness, 1948)

Soluție: Avem aşadar $\left(x+1\right)^3-x^3=3x^2+3x+1=y^2$. Prin înmulțire cu 4, ajungem la $3\left(2x+1\right)^2=\left(2y-1\right)\left(2y+1\right)$. Deoarece y este număr impar (!), ajungem la $2y-1=m^2, 2y=1=3n^2$, cu m,n întregi impari.
Pentru $m=2k+1$ se ajunge la $y=k^2+\left(k+1\right)^2$. Frumos rezultat.

Probleme propuse

(Se primesc soluții până în data de 14 ianuarie 2012, nu mai târziu!.
Pe plic scrieți clasa în care sunteți, vă rugăm DIN NOU !)

Clasa a II-a

II. 101 Ziua de naştere a Luciei este 18 februarie. A câta zi din an este?

Mariana Mitrică, Reşița

II. 102 Revista de matematică RMCS are 32 file. De câte ori apare cifra 6 în numerotarea paginilor?

Mariana Mitrică, Reşița

II. 103 Suma cifrelor unui număr scris cu două cifre este cel mai mare număr scris cu o cifră.Cât este suma cifrelor cu care este scris predecesorul său?

Mariana Mitrică, Reşița

II. 104 Calculând suma numerelor până la 10, Simona a obținut rezultatul 60.A rezolvat corect Simona? Justifică răspunsul.

Mariana Mitrică, Reşița

II. 105 Ovidiu rezolvă în trei zile 29 probleme. Ştiind că în primele două zile a rezolvat 19 probleme, iar în ultimele două zile 18, aflați câte probleme a rezolvat în fiecare zi .

Neta Novac, Reşița

II. 106 Se ştie că pe Lună obiectele sunt de şase ori mai uşoare decât pe Pământ. Dacă pe Pământ într-o plasă încap nouă portocale, câte portocale vom putea pune în aceeaşi plasă pe Lună ?

Ioan Dăncilă, Bucureşti

II. 107 Mihai şi Victor merg împreună la şcoală. In timp ce Victor face 5 paşi, Mihai face 4 paşi. Dacă Mihai ajunge la şcoală în 20 de minute, în câte minute ajunge Victor la şcoală ?

Ioan Dăncilă, Bucureşti

II. 108 Obosit, Nicu se culcă la ora 20 şi-şi potriveşte ceasul deşteptător să-l trezească a doua zi la ora 9. Câte ore doarme neântrerupt Nicu ?

Ioan Dăncilă, Bucureşti

II. 109 Andrei, Corina, mama şi un ursuleț de pluş stau pe o bancă, în parc. Mama stă lângă Andrei, dar nu lângă ursuleț. Ursulețul nu stă lângă Corina. Cine stă lângă Corina ?

Ioan Dăncilă, Bucureşti

II. 110 Dacă pe talerul unei balanțe se pun 3 kilograme de mere, cu 4 lei kilogramul, câte kilograme de mere, cu 6 lei kilogramul, trebuie puse pe celălalt taler pentru ca balanța să fie în echilibru ?

Ioan Dăncilă, Bucureşti

Clasa a III-a

III. 101 Numărul purtat de tatăl lui Gabi la pantof reprezintă cel mai mic număr natural, mai mare decât 40, care are cifra unităților mai mică decât cifra zecilor. Ce număr poartă tatăl la pantof?

Mariana Mitrică, Reşița

III. 102 Trei frați au împreună 25 ani. Cosmin şi Raluca au împreună anul acesta 19 ani, iar Raluca şi Erik vor avea anul viitor împreună tot 19 ani. Ce vârstă are fiecare copil?

Mariana Mitrică, Reşița

III. 103 Andreea are doi frați. Unul are 15 ani, iar celălalt cu 6 ani mai puțin. Andreea are vârsta pe care au avut-o cei doi frați în urmă cu 6 ani. Câți ani are Andreea?

Mariana Mitrică, Reşița

III. 104 Două numere naturale sunt egale. Dacă adunăm la primul număr 15 şi la cel de-al doilea 16, suma lor devine 57. Aflați cele două numere.

Neta Novac, Reşița

III. 105 Mă gândesc la un număr, scad 29, iar la rezultatul obținut adaug 12 şi obțin 64. Care este numărul la care m-am gândit?

Neta Novac, Reşița

III. 106 Aurel are 14 ani, iar peste 10 ani vârsta lui va fi cât dublul vârstei fratelui său. Câți ani are fratele său acum ?

Neta Novac, Reşița

III. 107 În fiecare dintre coloanele tabelului de mai jos, numărul de jos este într-o aceeaşi legătură ascunsă cu cel situat deasupra lui. Puteți stabili care este numărul care trebuie scris în ultima coloană ? Explicați alegerea făcută.

32	43	54	65	87
6	12	20	30	

Iulia Cecon, Oțelu – Roşu

III. 108 Mirela soseşte la orice întâlnire cu zece minute întârziere, iar Laura soseşte la orice întâlnire cu un sfert de oră mai devreme. Iulia vrea să le întâlnească pe amândouă seara, la ora 19 şi 5 minute; la ce oră le dă întâlnire fiecăreia dintre cele două prietene ?

Iulia Cecon, Oțelu – Roşu

III. 109 Dacă 3 kg de ardei şi 2 kg de roşii costă 22 de lei, iar un kg de roşii şi 2 kg de ardei costă 13 lei, aflați cât costă 4 kg de ardei şi 5 kg de roşii.

Iulia Cecon, Oțelu – Roşu

III. 200 Un bunic are tot atâția ani câte luni are nepotul său, iar suma vârstelor lor este 65 de ani. Câți ani are bunicul ?

Iulia Cecon, Oțelu – Roşu

Clasa a IV-a

IV. 101 Dintr-un număr dat se scade 6 şi se obține un număr de trei ori mai mic decât dublul numărului dat. Ce număr s-a dat ?

Constantin Apostol, Rîmnicu Sărat

IV. 102 . Se ştie că media aritmetică a numerelor $a+b$ este 200, iar c este sfertul sumei $a+b$. Aflați suma numerelor $a+b+c$.

Desanca Tismănar, Moldova - Nouă

IV. 103 Din dublul unui număr scădem sfertul acestuia şi obținem 98. Aflați numărul.

Desanca Tismănar, Moldova – Nouă

IV. 104 Trei fraţi citesc aceeaşi carte.Când primul a terminat de citit cartea , al doilea citise jumătate, iar al treilea un sfert din ea.

Dacă în momentul acesta toți trei citiseră împreună 280 de pagini, atunci câte pagini a citit fiecare?

Desanca Tismănar, Moldova – Nouă

IV. 105 Suma a 4 numere este 550. Aflaţi numerele ştiind că: diferenţa dintre primul şi al doilea număr este 12, suma dintre al treilea şi al patrulea este 256, iar câtul dintre acestea este7.

Costa Moatăr, Reşiţa

IV. 106 O carte şi un stilou costă împreună 25 lei. 8 cărți şi 10 stilouri costă 230 lei. Câți lei costă fiecare dintre aceste articole?

Costa Moatăr, Reşiţa

IV. 107 Într-un butoi se aflau 300 litri ulei. După ce s-a consumat jumătate din cantitatea de ulei, restul s-a pus în 5 bidoane de aceeaşi mărime.Câți litri de ulei conține fiecare bidon?

Neta Novac, Reşița

IV. 108 În trei saci au fost, în total, 240 kg cartofi. După ce s-au vândut din fiecare sac cantități egale de cartofi, au rămas 20 kg, 36 kg, respectiv, 40 kg cartofi.Câte kg cartofi a avut fiecare sac la început?

Neta Novac, Reşița

IV. 109 În două lăzi se aflau 73 pepeni. După ce s-au vândut 23 pepeni din prima ladă şi 8 pepeni din a doua ladă, în prima ladă a rămas o cantitate de pepeni de 5 ori mai mică decât în a doua ladă.Câți pepeni au fost la început în fiecare ladă?

Mariana Mitrică, Reşiţa

IV. 200 Pe fiecare raft al unei biblioteci cu 5 rafturi sunt 24 de cărți. Câte cărți rămân în bibliotecă, după ce Andrei ia un sfert din cărțile de pe primul raft şi câte 8 cărți de pe fiecare din celelalte 4 rafturi ale bibliotecii?

Ozana Drăgilă, Reşița

Clasa a V-a

V.230 Determinați numerele prime p şi q pentru care $p^2 - q^2 = 16 + p$

Lucian Dragomir, Oțelu Roşu

V.231 a) Arătați că dintre oricare trei numere naturale putem alege două astfel încât suma lor să fie un număr par.
b) Dacă avem la dispoziție şapte numere naturale, arătați că putem alege patru dintre ele astfel încât suma lor să fie divizibilă cu 4.

Cristian Lazăr, Iaşi

V.232 Determinați cifrele a şi b pentru care $\overline{abb} + \overline{baa} + \overline{aaa} = 777$

Olimpiadă, Caraş-Severin

V.233 O sală de spectacole are 400 de locuri. Pentru un spectacol care începe la ora 20:00 se deschid uşile sălii la ora 19:00. În primul minut intră un spectator, în al doilea minut intră trei spectatori şi, tot aşa, în fiecare minut intră cu doi mai mulți spectatori decât au intrat în minutul anterior. Aflați la ce oră s-a umplut sala.

Iulia Cecon, Oțelu Roşu

V.234 Determinați numerele naturale a, pătrate perfecte mai mici decât 100, ştiind că restul împărțirii lui 2003 la numărul natural a este egal cu $403 - 6a$.

Lucian Dragomir, Oțelu Roşu

Clasa a VI-a

VI.230 La un moment dat, într-o parcare, numărul autoturismelor roşii reprezintă 25% din numărul total al autoturismelor parcate. După o oră, se constată că numărul total de autoturisme a crescut cu o unitate, iar procentul celor roşii a devenit 12% din numărul total. Arătați că, în intervalul de o oră scurs, au plecat din parcare cel puțin 3 autoturisme roşii.

Olimpiadă, Braşov

VI.231 Se consideră mulțimile $A=\{1,2,3,...,2011\}$, $B=\{n\in\mathbb{Z} \mid n=x-y, x\in A, y\in A\}$ şi $C=\{m\in\mathbb{Z} \mid m=a\cdot b, a\in A, b\in B\}$.

a) Calculați card B.

b) Calculați suma elementelor mulțimii C

Prof. Mircea Fianu, Bucureşti

VI.232 Arătați că dacă $x,y,z\in\mathbb{Z}$ şi $3x-8z-6z=0$, atunci $\frac{y(x+2z)}{12}\in\mathbb{Z}$.

Concurs, Giurgiu

VI.233 Într-o urnă sunt 100 de bile numerotate diferit, de la 1 la 100. Se extrag două bile la întâmplare. Care este probabilitatea ca una dintre bile să aibă înscris un număr cu 25% mai mare decât numărul înscris pe cealaltă bilă?

Concurs, Vâlcea

VI.234 Există numere naturale *N* de 8 cifre distincte astfel încât *N* se divide cu fiecare cifră a sa?

Olimpiadă, Rusia

Clasa a VII-a

VII.230 Arătați că, dacă $a,b\in\mathbb{Z}$ şi 9 divide numărul $c=a^2+4ab+b^2$, atunci 3 divide numărul $d=2011\cdot a+201\cdot b$.

* * *

VII.231 Se consideră un triunghi ABC dreptunghic în A, în care M este mijlocul lui $[BC]$ şi $BD\perp AM, D\in[AC]$. Arătați că $m(\sphericalangle ACB)=30°$ dacă şi numai dacă $BD=2\cdot MD$.

* * *

VII.232 Se consideră un triunghi ABC în care $AB\neq AC$, iar $D\in BC$ astfel încât AD este bisectoare exterioară a unghiului $\sphericalangle BAC$. Perpendiculara din *B* şi *C* pe *AD* intersectează dreapta *AC* în *E*, respectiv dreapta *AB* în *F*. Arătați că punctele D, E şi F sunt coliniare.

Concurs, Sibiu

VII.233 Calculați câte numere de zece cifre au proprietatea că suma pătratelor cifrelor sale este egală cu suma cifrelor.

Prof. Sorin Rădulescu, Bucureşti

VII.234 Arătați că pentru orice $a,b,c \in [0,\infty)$ este adevărată inegalitatea: $a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 2(ab+bc+ca)$.

Dorij Grindberg

Clasa a VIII-a

VIII.230 Se consideră mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{Z} \middle| x=a^2+b^2, a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

Arătați că: (1) dacă $x,y\in A,$ atunci $x\cdot y\in A$

(2) $10^{10}\in A$

(3) dacă $x\in A,$ atunci $x^{10}\in A$

* * *

VIII.231 Determinați perechile (x,y) de numere naturale pentru care $x\cdot(x-y)=5(y-1)$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu Roşu

VIII.232 Arătați că nu există numere naturale nenule x şi y pentru care numerele $a=x^2+2y$ şi $b=y^2+2x$ sunt simultan pătrate perfecte.

Prof. Maria Pop, Cluj Napoca

VIII.233 Determinați tripletele (a,b,c) de numere reale strict pozitive pentru care $a^2-2b=1, b^2-2c=1, c^2-2a=1.$

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu Roşu

VIII.234 Se consideră trei drepte a,b,c incluse într-un plan α şi se notează $a\cap b\cap c=\{O\}$. Prin O se duce o dreaptă m care formează, de aceeaşi parte a planului α, cu dreptele a,b respectiv c, unghiuri congruente. Arătați că $m\perp\alpha$.

* * *

Clasa a IX-a

IX. 200 Arătați că, dacă $a,b,c\in(0,\infty)$ şi $xyz=1$, atunci:

$$\frac{1+xy}{1+z}+\frac{1+yz}{1+x}+\frac{1+xz}{1+z}\geq 3.$$

Olimpiadă, Iaşi, 2007

IX. 201 Un număr real x verifică egalitatea $x^9-x^7+x^5-x^3+x=13.$ Demonstrați că: $5<x^5<13.$

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu Roşu

IX. 202 Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_n=a\cdot 4^n+b\cdot n+c,$ $\forall n\geq 1,$ unde a,b,c sunt numere întregi date.

a) Arătați că, dacă primii doi termeni ai şirului sunt divizibili cu 3, atunci orice termen al şirului este divizibil cu 3.

b) Demonstrați că, în cazul $b=0,$ şirul nu conține trei termeni în progresie aritmetică.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu Roşu

IX. 203 Determinați funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care au proprietatea că

$$f\left(x^3+y\right)=f(x)+f\left(y^3\right),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Prof. Maria Pop, Cluj Napoca

IX. 204 Se ştie că $\{x\}$ este notația pentru partea fracționară a numărului real $x.$ Determinați numerele naturale n pentru care

$$\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{2}{n}\right\}=0,08(3).$$

Concurs, Bacău

Clasa a X-a

X. 200 Rezolvați ecuația:

$$\cos^3 x + 4\sin x\cos x - 2\sin^3 x = 2.$$

Admitere Politehnică, 1988

X. 201 Arătați că, dacă în triunghiul ABC are loc egalitatea $BC = \sqrt{2} \cdot AC,$ atunci mediana (AM) formează cu latura (BC) un unghi congruent cu unghiul $\sphericalangle BAC$.

Admitere facultate, 1987

X. 202 Se consideră un triunghi ABC în care $tgA = 3$ și $tgB = 2.$ Arătați că ortocentrul triunghiului coincide cu mijlocul înălțimii (AD).

Admitere Institutul Politehnic, 1987

X. 203 Arătați că, dacă $a, b, c \in (0,1),$ atunci

$$\frac{1}{2+\log_a b} + \frac{1}{2+\log_b c} + \frac{1}{2+\log_c a} \le 1.$$

Olimpiadă Caraş-Severin, 2008

X. 204 Determinați numerele naturale distincte $x_1, x_2, ..., x_n$ şi $y \in \mathbb{N}$ pentru care are loc egalitatea: $2^{x_1} + 2^{x_2} + ... + 2^{x_n} = 2^y - 1.$

Olimpiadă Suceava

Clasa a XI-a

XI. 200 Se consideră şirul $(x_n)_{n\ge1}$, definit prin

$$x_n = \begin{cases} 1, \text{ dacă } n \text{ este pătrat perfect} \\ 0, \text{ în rest} \end{cases}$$

Se notează $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$ Arătați că şirurile $\left(\frac{s_n}{n}\right)_{n\ge1}$ şi $\left(\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\ge1}$ sunt convergente.

Concurs, Arad

XI. 201 Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, dat prin $x_1 > 0, x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n}, \forall n \geq 1.$

a) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \infty$

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$

c) Determinaţi $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x_n}{n^2}$

Olimpiadă, Braşov

XI. 202 Determinaţi numerele naturale x, y, z ştiind că triunghiul determinat de punctele $A(x,y), B(y,z), C(z,x)$ are aria egală cu $\frac{3}{2}$, iar centrul de greutate al triunghiului ABC este $G(2,2)$.

Olimpiadă, Caraş-Severin

XI. 203 Se consideră $A \in M_3(\mathbb{R}^*)$ astfel încât $A \cdot {}^t A = I_3$. Calculaţi $\det\left(A^2 - I_3\right)$.

* * *

XI. 204 Se consideră $A \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $\det A = tr(A) = 1$. Calculaţi câte elemente are mulţimea $H = \left\{A^n \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$.

* * *

Clasa a XII-a

XII. 200 Demonstraţi că $0 < x \cdot (\ln x)^2 < \frac{2}{3}, \forall x \in (0,1)$.

Admitere Universitate Bucureşti, 2000

XII.201 Determinaţi funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică egalitatea $f(arctgx) = \left(1 + x^2\right) \cdot f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$

Alexandru Gabriel Mîrşanu, Iaşi

XII. 202 Se consideră un grup G cu 10 elemente în care există $a,b \in G \setminus \{e\}$, distincte, astfel încât $a^2 = b^2 = e$. Arătați că G nu este abelian.

Olimpiadă, Caraş-Severin

XII. 203 Arătați că nu există funcții strict crescătoare $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admit o primitivă F pentru care $F(1-x)\cdot F(x) = F(x^2), \forall x \in \mathbb{R}$.

Olimpiadă, Caraş-Severin

XII. 204 Se consideră un grup $(G,\cdot)$ şi $a,b \in G$ astfel încât suma dintre numărul elementelor lui G care comută cu a şi numărul elementelor lui G care comută cu b este un număr prim. Determinați numărul elementelor care comută şi cu a şi cu b.

Marian Andronache, Bucureşti

Probleme alese

A 13. Dacă f este o funcție reală continuă, definită pe circumferința C a unui cerc, arătați că există o pereche (P_1, P_2) de puncte diametral opuse pe C pentru care $f(P_1) = f(P_2)$.

Alexandru Froda

A 14. Demonstrați că dacă $a,b,c \in (0,\infty)$, atunci

$$\frac{a}{a+2b+c} + \frac{b}{b+2c+c} + \frac{c}{c+2a+b} \geq \frac{3}{4}.$$

Gheorghe Eckstein

A 15. Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}, n > 3$, există un poligon convex cu n laturi, nu toate egale, cu proprietatea că suma distanțelor de la orice punct interior la laturi este constantă.

Dan Schwarz

A 16. Arătați că în orice poliedru convex există cel puțin două fețe care au acelați număr de laturi.

Kőmal

Rubrica rezolvitorilor

(Aşa cum am anunțat, aici apar punctajele cumulate pentru soluțiile primite din numerele 35 şi 36)

Clasa a II-a

Liceul Hercules Băile Herculane (înv. Doina Zah, înv. Camelia Staicu) Murguleț Alexandru 240, Stan Elena Andreea 120, Bălțățeanu Valentina 240, Stoican Anastasia 200, Gavril Tania 240

Liceul Tehnologic Mehadia(înv.Stana Pepşilă)Dumbravă Alexandru 120

Şcoala nr.2 Reşița (înv. Ana Modoran) Manole Alexandra 100, Istvancsek Bianca 200, Rusu Adelin Dumitru 340, Boc Alissia – Driada 340, Zarcula Alexandru 200, Comănescu – Crîsciu Anamaria-Diana 200, Voina Vanesa 200, Milcu Irina 200, Florea Ioana 320

Şcoala nr.9 Reşița (Inst. Mariana Mitrică, înv. Adina Belu, înv. Maria Ciontu) Imbrescu Cosmin 210, Lupaşcu Eduard 200, Popescu Sebastian Marius 115, Pusu Antonia 200, Florea Andrada 480, Melca Laurian 200, Velică Andreea-Maria 100

Şcoala nr.12 Reşița (înv. Neta Novac) Glosic Dragoş 200

Clasa a III-a

Liceul Hercules Băile Herculane (înv. Alexa Gaiță, inst. Diana Grozăvescu) Bolbotină Iulia 240, Bolbotină Flavia 240

Liceul Eftimie Murgu Bozovici (înv. Marius Băcilă) Ignea Alina 220, Clipa Andreea 426, Anton Iulia Andreea 436, Oniga Nicoleta 420, Marin George 426, Mihoc Cristian 433

Liceul Pedagagogic C.D.Loga Caransebeş (înv. Anesia Dobromirescu, înv. Patricia Trion) Savu Amalia 240, Salcău Teodora 290, Ostoea Maria 280, Batiz Darius 110, Cornea Andra 130, Tufişi Alexandru 100

Şcoala nr.1 Moldova –Nouă(înv. Georgeta Turcin)Craiovan Cosmina 90

Şcoala nr.2 Reşiţa (înv. Elisaveta Vlăduţ, înv. Robertha Oprea, înv.Maria Ciontu) Jula Diandra 300, Popescu Nicoleta 260, Mircea Antonia 290, Călin Denis 250, Aruxandei Oana 200, Boloca Mădălina 444, Fara Eduard 270, Hamat Octavia 260, Dumitru Maria 251, Ţucă – Willinger Andra 290, Tibru Bianca 261, Pinte Alexandru 270, Terfăloagă Maria 260, Doran Andrei 260, Bîrla Ştefan 260, Petrică Andra 250, Bîtea Iulia 200, Marin Oana 230, Stuparu Daniel 290, Cismaru George 143, Giurescu Petre 175

Şcoala Romul Ladea Oraviţa (înv. Constanţa Chiriac, înv. Claudia Gavrilescu, înv. Felicia Roiban)

Ne cerem scuze pentru unele inadvertenţe; dacă sesizaţi ceva de acest gen, anunţaţi imediat…mulţumim pentru înţelegere: suntem oameni şi noi, cei foarte puţini care am ajuns să ne ocupăm de revistă…

Ghiduş Adela 220, Dumitru Ana-Maria 260, Tomici Bogdan 340, Iancu Eunice 230, Gherovăţ Ana-Maria 360, Fiştea Răzvan 90, Novac Naomi 100, Schinteie Amalia 90, Ghiuţă Andrei 90, Mişca Laurenţiu 100, Ivănuş Rareş 48, Albert Sterian Eduard 100, Richter Eduard 100

Liceul Gen. Dragalina Oraviţa (înv. Paulina Lăpuşnianu) Lăpuşnianu Ştefan 100

Liceul Bănăţean Oţelu – Roşu (înv. Luminiţa Orszari) Feil Nadia 270, Schelean Alexandra 330

Clasa a IV-a

Liceul Hercules Băile Herculane (înv. Mirela Bolbotină, înv. Felicia Adriana Laitin, înv. Maria Puşchiţă) Blidariu Mihai 100, Bohnsack Alexandru 380, Cîrdei Bogdan 540, Popescu Marius 220, Petcu Egon 380, Cionca Cosmin 100, Dina Emanuel 250, Gongu Ilie Cristian 225, Vlădica Alexandra 200

Liceul Pedagagogic C.D.Loga Caransebeş (înv. Lidia Todor, inst. Adriana Leţa, inst. Diana Gorczynski) Bogdan Alexandra 410, Boncalo Sebastian 460, Iacob Rareş 400, Ghimboaşă Petronela 500, Huian Cosmina 531, Brejnec Adrian 140

Şcoala nr.1 Moldova – Nouă (prof. Desanca Tismănar) Muntean Paul 200, Gruescu Gabriel 200

Şcoala Romul Ladea Oraviţa (înv. Daniela Man, înv. Lăcrimioara Potoceanu) Potoceanu Anamaria Larisa 190, Stîngă Răzvan 410, Marocico Denis 410, Mureşan Eliza 300, Balmez Cristina 560, Sporea Bianca 80, Győrgy Maria Cristina 183

Liceul Gen.Dragalina Oraviţa(înv.Ildiko Stoenescu)Lazarov Andrei 240

Liceul Bănăţean Oţelu – Roşu(înv. Floare Homota, înv. Nicoleta Toader) Angheloni Denisa 540, Meilă Denis 520, Baderca Flavius 400, Drăghici Mihail 230

Şcoala nr.2 Reşiţa(înv. Mihaela Mregea, înv. Florica Boulescu, prof. Mariana Brebenariu) Roescu Codruţa 590, Istvancsek Andreas 390, Datcu Goiceanu David 490, Aruxandei Denisa 180, Milencovici Radoliub 430, Szazi Timeea 340, Ciobanu Elena 530, Cicortaş Raul 90, Racoceanu Rareş 510, Burileanu Iulia 100, Rotaru Răzvan 570, Tucanu Cristina 220

Şcoala nr.8 Reşiţa(înv. Maria Hristodoreanu) Coandă Amelia 600, Lunguleasa Rafael 240, Purdea Mădălina 90

Şcoala nr.9 Reşiţa (prof. Costa Moatăr, inst. Măriuţa Benga, înv. Lidia Adamescu) Păvălan Patricia 200, Negrea Alexandra 450, Voinea Nicoleta 550, Bodnar Emanuela 360, Davidescu Olivia 590, Cîrpaci Rupa Esmeralda 200

Clasa a V-a

Liceul Hercules Băile Herculane (înv. Doina Zah, înv. Camelia Staicu, inst. Floarea Kuszay) Bolbotină Gabriel 428, Nicoară Rebeca 390, Dancău Ileana 394, Stoican Anastasia 194.

Grup şcolar Construcţii maşini Caransebeş(înv. Simona Mihai)
Ţuican Alexandru 100

Şcoala Romul Ladea Oravița (înv. Viorica Totorean) Popovici Antonia 190, Dudilă Eduard 130, Preda Damir 401, Burcuşel Alex Paul 155 (*mulțumesc încă odată pentru că mă consideri antrenorul tău…poate îmi dai un telefon să vedem despre ce e vorba…)*

Liceul Bănățean Oțelu – Roşu (prof. Heidi Feil) Voiț Iulia 366, Drăghici Maria Florina 163, Honciuc Raul 180, Buță Jana Adina 324, Meszaroş Rebeca 119, Muntean Andra 369, Ursu Raluca 193

Şcoala nr.3 Oțelu – Roşu (înv. Dorinela Turcin, prof. Daniela Suciu) Butoi Drăghici Alina 170

Liceul Traian Lalescu Reşița (înv. Alina Guță, înv. Luci Mihăilescu, prof. Otilia Bejan, prof. Maria Manzur) Kovacs Iulia 400, Pădurean Daniel 550, Voina Liviu 190, Turcoane Paul 370, Badea Elia 210, Ciuban Casian 54, Cristea Andrei 123, Apati Richard Ştefan 441, Bălănoiu Ana-Maria Antonia 438, Cenan Glăvan Daria 100, Cîrstea Denisa 180, Lucaci Cristiana 110

Şcoala nr.2 Reşița (înv. Eufemia Jurca, înv. Aurica Nițoiu) Petrică Anca 360, Zaharia Flavius 100, Muntean Andra 398, Stoia Gabriela 200, Potocean Teodora 460, Suteanu Sara 314, Parfenie Alexandra 420.

Şcoala nr.8 Reşița(înv. Rodica Moldovan) Duca David 100, Goian Tudor 390, Paidola Flavius Zaharia 191

Şcoala nr.9 Reşița (înv. Margareta Filip) Jumanca Patricia 398

Şcoala Rusca Teregova (prof. Sorin Ciucă) Blaj Elisabeta Luciana 86, Humița Ionela Florina 86

Clasa a VI-a

Liceul Hercules Băile Herculane (prof. Maria Haracicu) Gelegram Sorin Ioan Dumitru 248

Liceul Pedagagogic C.D.Loga Caransebeş (prof. Antoanela Buzescu, prof. Dorina Humița, prof. Lavinia Moatăr) Urechiatu Bianca 189, Hotima Darius 62, Balint Alina 80, Chersa Adrian Octavian 99, Tunsoiu

Oana Mihaela 90, Boba Bianca Cristina 42, Benec Ileana 81, Buzescu Mălina 190, Muhlroth Otto 128, Lupu Andrei Cristian 170, Lungocea Amalia Maria 133, Ştefănigă Răzvan 187, Tîrnă Mihai Alexandru 107, Teregovan Nicoleta 85, Pascotă Andreea 240, Dărăban Mariana 60, Pepa Rolland Daniel 50, Cernicica Andrei 108

Grup şcolar construcţii maşini Caransebeş (prof. Carina Corîci) Nițu Nastasia Elena 129, Pepa Georgiana 148

Liceul Teoretic Mehadia (prof. Sabin Cosmin Iliescu) Dumbravă Marius 278

Liceul Bănățean Oțelu – Roşu (prof. Heidi Feil) Drăgan Lavinia 58, Drăghici Maria Florina 141, Racolța Annlee 119, Ştefoni Fabian Cosmin 20

Şcoala nr.3 Oțelu – Roşu (prof. Felicia Boldea) Buzuriu Andreea 212, Olariu Nicoleta Daiana 217

Liceul Traian Lalescu Reşița (prof. Otilia Bejan) Cenan Glăvan Daria 160, Cîrstea Denisa 180, Lucaci Cristiana 110, Păuşan Barna Leonard Denis 43, Prunar Silviu 38

Şcoala nr.2 Reşița (prof. Marius Șandru, prof. Mariana Drăghici) Nicola Elena Beatrice 50, Milencovici Merima Nicole 283, Turturea Oana 175

Şcoala nr.8 Reşița (prof. Camelia Coandă) Andrei Cătălin 116, Rus Gabriel Andrei 170

Şcoala nr.9 Reşița (prof. Irina Avrămescu, prof. Ion Belci) Gherasim Daniel 319, Remo Denis 291, Imbrescu Raluca 261, Zaharia Flavia Cristiana 394, Şoavă Daniel Viorel 126, Țigănilă Ionuț 173

Şcoala Rusca Teregova (prof. Sorin Ciucă) Stepanescu Iuliana 80

Şcoala Romul Ladea Oravița (prof. Maria Iancu) Nițu Flavius 260

Clasa a VII-a

Liceul Eftimie Murgu Bozovici (prof. Pavel Rîncu) Melcescu Florina 60, Vodă Ana-Maria 60, Băin Oriana 70, Marin Mihaela 55, Romînu Denisa 55

Liceul Pedagagogic C.D.Loga Caransebeş (prof. Lavinia Moatăr) Ardelean Andra 180, Jura Victor 100, Ciobanu Iulia Andreea 314, Nicoară Daiana 86, Iovănică Sebastian 38, Miculescu Adrian 40

Liceul Traian Doda Caransebeş (prof. Delia Dragomir, Adrian Dragomir) Ionescu Roberto 217, Stan Iulia 10

Liceul Bănăţean Oţelu – Roşu (prof. Adriana Dragomir, prof. Heidi Feil) Epuraş Georgian 100, Firanda Denysa 236, Suciu Alexandra 325, Damian Patricia Cristina 54, Rus David Andrei 368, Hrenyak Alexia 210, Mihuţ Casiana 70, Cioarcă Adnana 230, Janţu Marian Petre 200, Graszl Bianca Laura 65, Babeu Denis 60, Boştină Dorian 108, Văcălie Andreeas 65, Cojocaru Daria 81, Vîrvesc Ionela Adina 81

Şcoala Romul Ladea Oraviţa (prof. Camelia Pîrvu) Murgu Teodora 238, Cocar Lorena Melissa 259, Gagea Maria Mirabela 110, Horniciar Andrei 84, Marocico Diana Andreea 116

Liceul Gen. Dragalina Oraviţa (prof. Aurica Lazarov) Lisa Jumanca 64

Şcoala nr.2 Reşiţa (prof. Mariana Drăghici) Popa Radu 40, Mihancea Miruna 76

Şcoala nr.8 Reşiţa (prof. Camelia Coandă, prof. Mirela Rădoi) Copocean Carmen 430 (problemele de la clasa a II-a nu se iau în considerare), Dudău Marin Claudiu 287, Cipu Drăghici Cosmin 282

Şcoala nr.9 Reşiţa (prof. Irina Avrămescu, prof. Vasile Chiş) Moroti Cristina 105, Călina Antonia 125, Şutilă Alexandra Ionela 95, Bălean Vlad 135

Şcoala Rusca Teregova (prof. Sorin Ciucă) Vingan Irina 58, Stepanescu Ana Maria 0 (plic doar cu enunţuri…), Codoşpan Alina 14

Şcoala Vîrciorova (prof. Ioan Liuba) Bănescu Ramona 37

Clasa a VIII-a

Liceul Hercules Băile Herculane (prof. Costel Bolbotină) Popa Andrei 116, Cîrdei Alex 110, Stanciu Ana 160, Urdeş Florin 80, Stanciu Ana Maria 163, Urzică Ionuț 115

Şcoala nr.2 Reşița (prof. Marius Şandru) Ciobanu Anca 110, Neațu Monica 71

Şcoala nr.8 Reşița (prof. Mirela Rădoi) Rus Daniel 248, Budimir Claudia 180

Şcoala nr.9 Reşița (prof. Vasile Chiş) Pupăzan Andreea 76, Muscu Dragoş 74, Anănuță Adela 25

Şcoala Romul Ladea Oravița (prof. Camelia Pîrvu) Balmez Andrada 347

Liceul Bănățean Oțelu – Roşu (prof. Heidi Feil) Erdei Dorian 45, Szatmari Larisa 300, Neagu Alexandra 10, Toader Răzvan 300, Honciuc Laura 55, Dinu Alexandru 3.

Şcoala nr.3 Oțelu – Roşu (prof. Daniela Suciu) Piess Helmuth 85

Liceul Traian Lalescu Reşița (prof. Otilia Bejan) Malyar Cristina 10

Şcoala Vîrciorova (prof. Ioan Liuba) Ivăniş Patricia 66

Clasa a IX-a

Liceul Pedagagogic C. D. Loga Caransebeş (prof. Antoanela Buzescu) Dinulică Ioan – Septimiu 410, Dinulică Petru – Augustin 410

Grup şcolar Moldova Nouă (prof. Lăcrimiora Ziman) Nistoran Denisa 20, Damian Melisa 40

Şcoala Generală nr. 3 Moldova – Nouă (prof. Sânefta Vladu) Rijici Marina 30

Liceul Bănățean Oțelu – Roşu (prof. Heidi Feil, prof. Lucian Dragomir) Ştefănescu Andrei 458, Bistrean Andra 75, Bunei Silvana 75, Meszaroş Alessandra Alessia 10,

Liceul Gen. Dragalina Oravița (prof. Mihai Lazarov) Pîrvu Ancuța 159

Liceul Traian Lalescu Reşița (prof. Ovidiu Bădescu) Ciulu Miruna 300

Clasa a X-a

Liceul Eftimie Murgu Bozovici (prof. George Pascariu) Pîrciu Viorel-Damaschin 20

Grup şcolar Moldova Nouă(prof. Lăcrimiora Ziman) Vladisavlevici Iuliana 55

Liceul Hercules Băile Herculane(prof. Costel Bolbotină) Rădoi Iulia 96, Timaru Sorin 107.

Liceul Pedagagogic C.D.Loga Caransebeş(prof. Marița Mirulescu) Stanciu Maria Georgiana 56

Liceul Traian Doda Caransebeş (prof. Lavinia Moatăr) Szabo Ildiko 40, Valuşescu Andreea 67, Iova Miruna 60, Colțan Adrian 50, Orbulescu Vlad 50, Orbulescu Dan 50, Florei Laura 40, Ban Ioana 40, Pop Silvia 40, Stan Erimescu-Maria 40.

Liceul Bănățean Oțelu – Roşu (prof. Lucian Dragomir) Băilă Diana 122, Ciama Mirela 41, Cucuruz Marilena 43, Pop Cristian 106, Popescu Ana-Maria 77, Radu Ionela 77, Samfireag Anița 77, Vărgatu Alina 77, Bidilici Răzvan 41.

Clasa a XI-a

Liceul Eftimie Murgu Bozovici(prof. George Pascariu) Surulescu Ilie 30

Liceul Traian Doda Caransebeş (prof. Ana Dragotă) Milu Nicoleta 47, Dumitraşcu Andreea 56

Grup şcolar Moldova Nouă (prof. Lăcrimiora Ziman)Vuletici Nikolia 45, Iorgovan Georgina 221, Cioancă Dorotea 60, Herea Mihaela 65.

Liceul Bănățean Oțelu – Roşu (prof. Lucian Dragomir) Krokoş Lorena 70.

Clasa a XII-a

Grup şcolar Moldova Nouă(prof. Gheorghe Scorțan) Uță Robert 10

Liceul Tehnologic Mehadia(prof. Mihaela Vasile)Costescu Nicoleta 125

Liceul Bănățean Oțelu – Roşu(prof. Lucian Dragomir)Duma Andrei 35

Simțim nevoia să propunem celor mai mici, părinților şi dascălilor lor o carte de învățătură care conține mici probleme care limpezesc mintea şi bucură inima:

Matematică distractivă pentru clasele I – IV
Autori: Eduard şi Ioan Dăncilă
Editura Gama, 2011, comenzi la office@edituragama.ro sau tel. 0232 230 212/ int. 122, 0722 611 212.

În plus, autorii cărții propun următoarea problemă:

Dispuneți numai de cifrele 1, 2, 3, 4, 5 şi 6. Scrieți o egalitate adevărată utilizând toate cele şase cifre câte o singură dată, simboluri matematice şi eventual paranteze.

Exemplu: $6:\left(1-\frac{3}{4}\right)=24$.

Prin tragere la sorți, va primi premiu cartea pe care tocmai am prezentat-o, elevul care va utiliza cele mai puține simboluri matematice. Tot ceea ce trebuie să faceți este să trimiți rezolvarea într-un plic pe adresa:

Ioan Dăncilă, str. Drumul Taberei nr. 67, bl. TD 44, ap. 42
Sector 6, Bucureşti, cod poştal 061 366

Spor la treabă !