UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIŞOARA
DEPARTAMENTUL PENTRU PREGĂTIREA PERSONALULUI DIDACTIC

LUCRARE METODICO-ŞTIINŢIFICĂ
PENTRU OBŢINEREA GRADULUI DIDACTIC I

Conducător ştiinţific :
Conf. dr. Dorel Miheţ

Candidat :
prof. Alexandru Szucs

Unitatea de învăţământ: Liceul Teologic Baptist Reşiţa

Timişoara
2013

UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIŞOARA
DEPARTAMENTUL PENTRU PREGĂTIREA PERSONALULUI DIDACTIC

TITLUL LUCRĂRII
COLINIARITATE ŞI CONCURENŢĂ ÎN PLAN

Conducător ştiinţific :
Conf. dr. Dorel Miheţ

Candidat :
prof. Alexandru Szucs

Unitatea de învăţământ: Liceul Teologic Baptist Reşiţa

Timişoara
2013

CUPRINS

INTRODUCERE

Geometria prezintă caracterul cel mai concret dintre toate disciplinele matematice. Pornind de la studiul unor figuri prezente în imediata noastră apropiere, geometria îmbină coerent gândirea abstractă cu gândirea concretă.

Geometria lui Euclid apare ca o doctrină constituită din punct de vedere teoretic, ca o ştiinţă deductivă ale cărei adevăruri numite teoreme, se deduc pe cale logică dintr-o serie de definiţii şi axiome, rezultate din experienţă, din observaţiile făcute asupra figurilor din spaţiul în care trăim.

Reconceperea geometriei drept studiu logic deductiv a determinat reformularea sistemului axiomatic a lui Euclid de către David Hilbert (1862-1943) în cartea sa, *Fundamentele geometriei*, apărută în 1899. Lucrarea prezintă un sistem complet de axiome, pornind de la care se poate obţine prin deducţie logică întregul material al geometriei. După axiomatica lui Hilbert au apărut şi alte sisteme axiomatice pentru geometria euclidiană: printre acestea se numără şi sistemul axiomatic al lui G.D. Birkoff (1884-1944) studiat şi în actualele manuale şcolare într-o formă uşor modificată.

În geometria elementară, rezolvarea problemelor de coliniaritate a unor puncte sau de concurenţă a unor drepte se realizează folosind metode şi criterii matematice care necesită din partea rezolvitorului o analiză amănunţită. Aceasta implică atât cunoştinţe dobândite în şcoală, cât şi un anumit antrenament de a rezolva problemele, o gândire matematică şi o tehnică de lucru specifică, o imaginaţie şi o creativitate bine conturate.

Lucrarea de faţă este structurată în patru capitole după cum urmează:

- Capitolul I prezintă structuri de spaţiu euclidian, apoi introduce noţiunea de vector în planul euclidian şi de reper cartezian pe o dreaptă şi în plan.
- Capitolul II se referă la noţiunea de coliniaritate a unor puncte în plan; sunt prezentate câteva criterii de coliniaritate aplicate pe o serie de probleme celebre de coliniaritate (dreapta lui Gauss, dreapta lui Euler, dreapta lui Newton etc.).
- Capitolul III cuprinde noţiunea de concurenţă a dreptelor; sunt prezentate criterii de concurenţă cu aplicabilitate în câteva probleme deosebite şi câteva teoreme celebre (teorema lui Carnot, teorema lui Nagel, teorema lui Gergonne etc.).
- Capitolul IV conţine dualitatea coliniaritate – concurenţă precum şi câteva probleme rezolvate prin metode alternative, dificultăţi în tratarea acestor probleme, evaluarea în problematica coliniarităţii şi concurenţei.

Desigur, nu se poate epuiza sfera problemelor de coliniaritate şi concurenţă, însă în cadrul lucrării s-a încercat cuprinderea celor mai interesante rezultate din acest domeniu.

Pentru sprijinul şi recomandările primite în realizarea acestei lucrări, aduc mulţumirile mele domnului conf. dr. Dorel Miheţ

CAPITOLUL I

NOŢIUNI PRELIMINARE

I.1. PREZENTAREA STRUCTURII DE SPAŢIU EUCLIDIAN

Geometria euclidiană plană este o teorie matematică axiomatizată. Această teorie dezvoltă proprietăţile unei structuri matematice, numită **planul euclidian**, notat:

$$\varepsilon\left(D,\delta:\varepsilon \text{ x } \varepsilon \to \mathbb{R}, m:U \to [0,180], A_{I-IV}\right)$$

structură matematică pe care o prezentăm în continuare.

Prezentarea sistemului axiomatic

La baza geometriei euclidiene plane se va considera un sistem axiomatic după G.D.Birkoff, graţie accesibilităţii şi eficienţei sale.

Noţiunile primare sunt: punctul, dreapta, funcţia distanţă dintre două puncte δ, „funcţia-măsură-în grade” a unghiurilor *m*.

Relaţiile primare sunt cele aparţinând teoriei mulţimilor: apartenenţă, incluziune, funcţie, relaţia de echivalenţă etc.

Punctele se vor nota cu *A, B, C,...., M, N ,....*, iar dreptele cu *a, b,c, d,...*; mulţimea punctelor se notează cu E, mulţimea dreptelor cu *D,* mulţimea unghiurilor din plan cu *U.*

Se presupun cunoscute proprietăţile algebrice, de ordine, de continuitate şi metrice ale mulţimii numerelor reale. $\mathbb{R}\text{x}\mathbb{R}$ este un corp comutativ, ordonat arhimedian şi euclidian. Structura metrică pe $\mathbb{R}$ este dată de funcţia distanţă:

$$d(x,y)\in\mathbb{R}x\mathbb{R}\to d(x,y)=\left|x-y\right|\in\mathbb{R}_{+}$$

(în particular, $\mathbb{R}$ are şi o structură topologică indusă de *d* – topologia naturală).

Axiomele geometriei euclidiene plane sunt grupate în 6 grupe mari.

Prezentarea grupelor de axiome

- ***Axiomele de apartenenţă*** A_I ***sau*** I_{1-3}***:***

I_1. Mulţimea punctelor, ε, este planul. Dreptele sunt submulţimi ale planului ε.

I_2. Fiecare dreaptă conţine cel puţin două puncte distincte. Planul conţine cel puţin trei puncte care nu aparţin aceleiaşi drepte.

I_3. Pentru oricare două puncte distincte, există o dreaptă şi numai una care le conţine.

Trei sau mai multe puncte aparţinând aceleaşi drepte se numesc **puncte coliniare**. Dreapta determinată de punctele *A* şi *B* se notează *AB*. Două drepte aparţinând aceluiaşi plan se numesc **drepte paralele**, dacă $d_1 \cap d_2 = \emptyset$ se scrie $d_1 \parallel d_2$.

- ***Axioma riglei*** A_{II} sau *R*

R: Pentru fiecare $d \in D$, există o funcţie $s : d \to \mathbb{R}$, care verifică următoarele condiţii:

R_1: *s* este bijectivă

R_2: $\forall P, Q \in d$, are loc relaţia: $\delta(P,Q) = |s(P) - s(Q)|$ (*formula distanţei*).

O funcţie $s : d \to \mathbb{R}$ care verifică R_1, R_2 se numeşte **sistem de coordonate carteziene normale** pe *d* (s.c.c.n.), cu originea $O = s^{-1}(0) \in d$. Dacă $P \in d$, numărul $x_P = s(P) \in \mathbb{R}$ se numeşte **coordonata (abscisa) lui *P* în raport cu *s***. Numărul $\delta(P,Q)$ se numeşte **distanţa dintre punctele *P* şi *Q*** şi se notează cu $|PQ|$ sau *PQ*.

$$\delta(P,Q) = |PQ| = PQ \geq 0$$

Distanţa între două puncte este un număr real pozitiv, unitatea de măsură este fixată aprioric. Axioma riglei permite introducerea metodei coordonatelor în studiul planului euclidian, prin intermediul sistemului de coordonate carteziene, respectiv al reperului cartezian.

Se spune că $M \in d$ **separă** punctele $A, B \in d$ sau că ***M* este între *A* şi *B*,** notând *A*-*M*-*B*, dacă $AM + MB = AB$, i.e. $x_A < x_M < x_B$ sau $x_B < x_M < x_A$.

Se definesc noţiunile de **segment deschis (închis)** (*AB*), respectiv [*AB*], **semidreapta deschisă (închisă)** (*AB*, respectiv [*AB*, de exemplu:

$$(AB) := \{M \in AB | A - M - B\}$$

$$(AB) : \{M(x_M) \in d | x_A < x_M < x_B\}$$

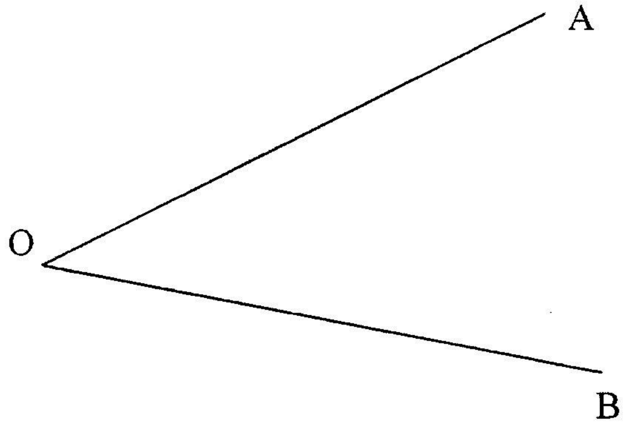
$$[AB := \{M \in AB | A = A \text{ sau } A - M - B \text{ sau } M = B \text{ sau } A - B - M\}$$

$$[AB := \{M(x_M) \in d | x_A \le x_M\}$$

unde $d = AB$ este înzestrat cu un *s.c.c.n.*, cu proprietatea $x_A < x_B$.

Vom spune că două segmente [*AB*], [*CD*] sunt **congruente** şi notăm $[AB] \equiv [CD]$, dacă au aceeaşi lungime, adică $AB = CD$.

Reuniunea a două semidrepte închise cu aceeaşi origine se numeşte **unghi.** Dacă [*OA*, [*OB* sunt două semidrepte cu originea *O*, atunci figura: $\sphericalangle AOB = [OA \cup [OB$ este unghiul cu vârful *O* şi laturile [*OA*, [*OB*.



Se mai notează $\sphericalangle AOB$ sau hk unde $h = [OA$ şi $k = [OB$.

- $\sphericalangle AOB$ este **unghi nul** dacă $[OA = [OB$
- $\sphericalangle AOB$ este **unghi alungit** dacă $A - O - B$
- Altfel $\sphericalangle AOB$ este **unghi propriu**.

Dacă *A*, *B*, *M* sunt puncte coliniare $(M \neq B)$, se numeşte **raportul în care *M* divide bipunctul (*A*, *B*) sau raportul simplu al ternei ordonate** (*A*, *B*, *M*), numărul real:

$$(A, B; M) = \begin{cases} -\dfrac{MA}{MB}, \text{ dacă } M \in [AB) \\ \dfrac{MA}{MB}, \text{ dacă } M \notin [AB) \end{cases} \qquad k = (A, B; M) \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Dacă dreapta *AB* este înzestrată cu un s.c.n.n., atunci

$$k = \frac{x_A - x_M}{x_B - x_M} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k}.$$

M este mijlocul lui [*AB*] dacă $k = -1$.

Fie $d \in D$ şi $A, B \in \mathrm{E}$. Dreapta *d* **separă punctele *A* şi *B*** dacă $d \cap AB = \varnothing$. Dacă $A, B \notin d$ şi $d \cap AB = \varnothing$, atunci ***A* şi *B* sunt de aceeaşi parte a lui *d*.**

- ***Axioma de separare*** A_{III} sau *SP*

SP. Fie o dreaptă $d \in D$ şi trei puncte distincte $A, B, C \in \varepsilon \setminus d$. Dacă *d* separă pe *A*, *B* şi nu separă pe *B*, *C* atunci *d* separă pe *C*, *A*.

O dreaptă $d \in \varepsilon$ separă planul ε în două semiplane (deschise) ale lui ε, care sunt disjuncte şi se numesc **semiplane opuse** determinate (limitate) de *d*.

Dacă $O \notin d$, atunci $(dO := \{M \in d \,|\, d \text{ nu separă } O, M\}$ se numeşte **semiplanul limitat de *d* care conţine pe *O*.**

Se numeşte **interiorul unghiului** propriu $\sphericalangle AOB$, figura:

$$\sphericalangle AOB = (aB \cap (bA, \text{ unde } a = OA \text{ şi } b = OB.$$

Unghiurile proprii $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$ se numesc **adiacente** dacă $\sphericalangle AOB \cap \sphericalangle BOC = \varnothing$, $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$ se numesc **adiacente suplementare** dacă semidreptele [*OA* şi [*OB* sunt opuse.

- ***Axiomele unghiului*** A_{IV} sau $U_1 - U_3$:

Dacă *U* este mulţimea unghiurilor din ε şi $m : hk \in U \to m\left(hk\right) \in [0;180]$ este funcţia măsură – în – grade a unghiurilor, atunci *m* satisface axiomele:

U_1. $m\left(\sphericalangle AOB\right) = 0$ dacă şi numai dacă $\sphericalangle AOB$ este un unghi nul.

$m\left(\sphericalangle AOB\right) = 180$ dacă şi numai dacă $\sphericalangle AOB$ este un unghi alungit.

U_2 (axioma raportorului).

Fie (*OA* o semidreaptă şi α un semiplan limitat de dreapta *OA*. Pentru fiecare număr $a \in (0,180)$ există o semidreaptă unică $(OB \subset \alpha$, astfel încât $m\left(\sphericalangle AOB\right) = \alpha$.

U_3 (axioma de adunare a unghiurilor)

Dacă $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle BOC$ sunt unghiuri adiacente cu $(OB \subset \left(\sphericalangle AOC\right)$ sau sunt unghiuri adiacente suplementare, atunci $m\left(\sphericalangle AOB\right) + m\left(\sphericalangle BOC\right) = m\left(\sphericalangle AOC\right)$.

Suma măsurilor a două unghiuri adiacente suplementare este egală cu 180. Două unghiuri, hk, lm se zic **suplementare**, dacă $m\left(hk\right) + m\left(lm\right) = 180$.

Două unghiuri $\sphericalangle ABC$ şi $\sphericalangle MNP$ se zic **congruente** şi se notează $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle MNP$, dacă $m\left(\sphericalangle ABC\right) = m\left(\sphericalangle MNP\right)$.

Măsura unghiului se exprimă printr-un număr real din [0,180]; unitatea de măsură este fixată aprioric, instrumenul de măsură este **raportorul**.

Considerăm o altă unitate de măsură a unghiurilor, **radianul**, se poate obţine o teorie paralelă, înlocuind funcţia măsură-în-grade *m*, cu **funcţia măsură-în-radiani** $\mu : U \to [0, \pi] \subset \mathbb{R}$. Relaţia care există între cele două funcţii este dată de formula:

$$\frac{m\left(hk\right)}{180} = \frac{\mu\left(hk\right)}{\pi}$$

care permite trecerea de la măsura în grade la măsura în radiani a unui unghi. Axiomele $U_1 - U_3$ se pot reformula în termeni de „măsură în radiani”.

Semidreapta [*OC* este **bisectoarea unghiului** $\sphericalangle AOB$, dacă $(OC \subset \left(\sphericalangle AOB\right)$ şi $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle COB$.

Se numeşte **unghi drept**, orice unghi congruent cu un suplement al său. $\sphericalangle AOB$ este unghi drept dacă şi numai dacă $m\left(\sphericalangle AOB\right)=90$ sau $\mu\left(AOB\right)=\frac{\pi}{2}$

Dreptele *OA* şi *OB* se numesc perpendiculare (în *O)* şi se notează $OA\perp OB$ dacă $\sphericalangle AOB$ este unghi drept.

Mediatoarea unui segment este dreapta perpendiculară pe segment în mijlocul său.

Două triunghiuri $\triangle ABC, \triangle MNP$ se numesc **congruente** şi se notează $\triangle ABC\equiv\triangle MNP$, dacă există o corespondenţă între vârfurile $A\rightarrow M,\ B\rightarrow N,\ C\rightarrow P$, astfel încât:

$$\begin{cases}[AB]\equiv[MN]\\ [AC]\equiv[MP]\\ [BC]\equiv[NP]\end{cases} \text{ şi } \begin{cases}A\equiv M\\ B\equiv N\\ C\equiv P\end{cases}.$$

- ***Axioma de congruenţă*** A_V sau *L.U.L.*

L.U.L.: Fie două triunghiuri $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$. Dacă $[AB]\equiv[A'B']$ şi $[AC]\equiv[A'C']$ şi $A\equiv A'$, atunci $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$.

În baza axiomei *LUL* se stabilesc teoremele de congruenţă a triunghiurilor: *LLL, LUU, ULU*, precum şi **teorema unghiului exterior**: *un unghi exterior al unui triunghi este mai mare decât fiecare dintre unghiurile interioare neadiacente lui.*

Consecinţele primelor cinci grupe de axiome formează geometria absolută a planului ε, din care enumerăm câteva:

- Mediatoarea unui segment este locul geometric al tuturor punctelor din plan, care sunt la egală distanţă de extremităţile segmentului.
- Fie $d\in D$ şi $A\in\varepsilon$. Există o unică dreaptă care conţine pe *A* şi este perpendiculară pe *d*.
- Pentru fiecare dreaptă $d\in D$ şi fiecare punct $A\notin D$, există cel puţin o dreaptă $d'\in D$, astfel încât $A\in d'$ şi $d'\parallel d$.

- Bisectoarea unui unghi propriu este locul geometric al punctelor din interiorul unghiului, care sunt la egală distanţă de laturile unghiului, reunit cu vârful acestuia. Bisectoarele unui triunghi sunt concurente.
- Într-un triunghi oarecare $\triangle ABC$ au loc inegalităţile:

$$\begin{gathered} AB + BC > CA \\ BC + CA > AB \\ CA + AB > BC \end{gathered}$$

- Ansamblul (ε, d) formează un spaţiu metric.
- Dacă două drepte $d_1, d_2 \in D$ formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne, respective corespondente congruente, atunci $d_1 \parallel d_2$ (criteriu de paralelism).
- Într-un $\triangle ABC$ oarecare are loc relaţia: $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) \leq 180$.

> ***Axioma paralelelor*** A_{VI} ***sau*** *P*:

P: Fiind date, o dreaptă oarecare şi un punct oarecare exterior dreptei, cel mult o dreaptă conţine punctul dat şi este paralelă cu dreapta dată.

Consecinţele tuturor grupelor de axiome anterioare formează geometria euclidiană a planului ε, din care enumerăm:

- Printr-un punct exterior unei drepte date există o unică dreaptă paralelă la dreapta dată.
- Dacă două drepte $d_1, d_2 \in D$ sunt paralele, atunci ele formează cu orice secantă perechi de unghiuri alterne – interne, respectiv corespondente, congruente.
- Măsura unui unghi exterior al unui triunghi este egală cu suma măsurilor unghiurilor interioare neadiacente lui.
- Într-un $\triangle ABC$ oarecare are loc relaţia: $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 180$.

I.2. VECTORI. OPERAŢII CU VECTORI

Definiţia 1

Fie ε planul euclidian.

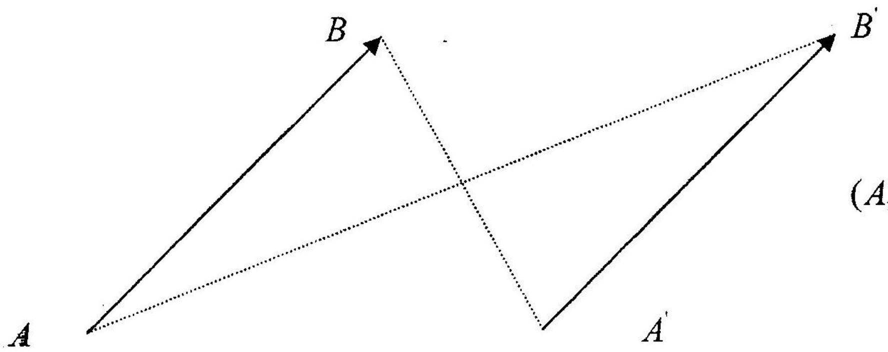
Produsul cartezian $\varepsilon \times \varepsilon$ este format din perechile ordonate de puncte din ε numite **bipuncte**.

Bipunctul $(A, B) \in \varepsilon \times \varepsilon$ are **originea în** *A* **şi extremitatea în** *B*, el determină segmentul [*AB*], dar şi un sens pe dreapta *AB*, anume sensul semidreptei [*AB*; de aceea, bipunctul (*A*,*B*) se mai numeşte **segment orientat** şi se notează uneori cu $\overline{AB}$.

Un bipunct de forma (*A*, *A*) este reprezentat grafic printr-un singur punct *A*. Două bipuncte sunt **bipuncte egale** dacă şi numai dacă au aceeaşi origine şi aceeaşi extremitate.

Definiţia 2

Două bipuncte (*A*, *B*) şi (A', B') se numesc **bipuncte echipolente** şi vom nota $(A, B) \approx (A', B')$ dacă segmentele [*AB*] şi $[A'B]$ au acelaşi mijloc.



$(A, B) \approx (A', B')$

Proprietăţile relaţiei de echipolenţă:

1) Toate bipunctele de forma (*A*, *A*) unde $A \in \varepsilon$ sunt considerate echipolente, prin definiţie.
2) Dacă punctele A, B, A', B' nu sunt coliniare, atunci $(A, B) \approx (A', B')$ dacă şi numai dacă $AA'BB'$ este un paralelogram.
3) Dreptele *A B* şi $A'B'$ au aceeaşi direcţie (adică $AB = A'B'$ sau $AB \,||\, A'B'$)
4) Semidreptele [*AB* şi $[A'B'$ au acelaşi sens (adică AA' nu separă *B* şi B').
5) [*AB*] şi $[A'B']$ sunt segmente congruente (au aceeaşi lungime).

6) $(A,B) \approx (A,B)$ (relaţia este reflexivă).

7) $(A,B) \approx (A',B') \Rightarrow (A',B') \approx (A,B)$ (relaţia este simetrică).

8) $(A,B) \approx (A',B')$ şi $(A',B') \approx (A'',B'') \Rightarrow (A,B) \approx (A'',B'')$ (relaţia este tranzitivă).

9) $(A,B) \approx (A',B') \Leftrightarrow (A,A') \approx (B,B')$.

Definiţia 3

Se numeşte **vector geometric** sau **vector liber** sau vector din planul euclidian ε cu reprezentantul (*A*, *B*), mulţimea tuturor bipunctelor din ε care sunt echipolente cu (*A*, *B*) şi se notează $\overline{AB}$.

$$\overline{AB} : \{(M,N) \in \varepsilon\, x\varepsilon \,|\, (A,B) \approx (M,N)\}$$

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \Leftrightarrow (A,B) \approx (A',B') \Leftrightarrow (A',B') \in \overline{AB} \Leftrightarrow (A,B) \in \overline{A'B'}.$$

Definiţia 4

Vectorul $\overrightarrow{AA}$ reprezentat de bipunctele de forma (*A*, *A*) se numeşte **vector nul**, iar vectorul $\overrightarrow{BA}$ reprezentat de bipunctul (*B*,*A*) se numeşte **opusul vectorului** $\overrightarrow{AB}$.

Mulţimea tuturor vectorilor din ε se va nota $\vec{\varepsilon}$.

Fiecare punct din ε este originea unui reprezentant unic al unui vector dat, adică:

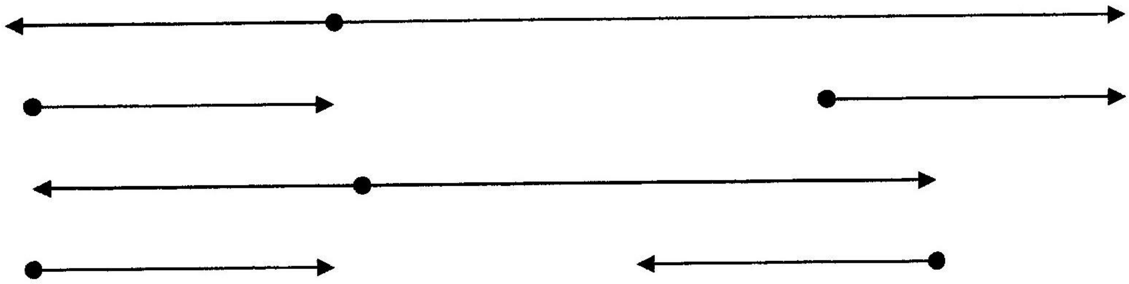
$$\bar{v} = \vec{\varepsilon}, A \in \varepsilon \Rightarrow \exists B \in \varepsilon : \overrightarrow{AB} = \bar{v}.$$

Un vector nenul $\bar{v} = \overrightarrow{AB}$ determină o direcţie unică, direcţia dreptei suport *AB*, ea se numeşte **direcţia vectorului** $\bar{v}$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow AB = CD \text{ sau } AB \,||\, CD.$$

Definiţia 5

Doi vectori care au aceeaşi direcţie se numesc **vectori coliniari**. Prin definiţie, vectorul nul este coliniar cu orice vector.

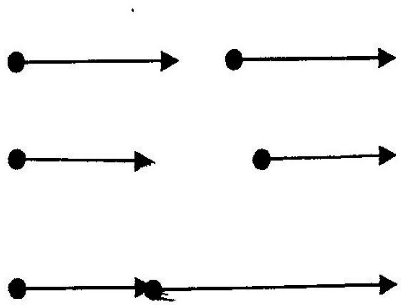


Vectori coliniari

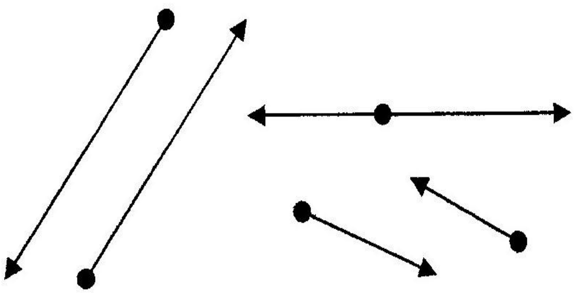
Un vector nenul $\overline{v} = \overrightarrow{AB}$ determină un sens unic pe direcţia sa, anume sensul semidreptei [*AB*; el se numeşte **sensul vectorului** $\overline{v}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow [AB, [CD$ au acelaşi sens.

Doi vectori $\overline{a} = \overrightarrow{OA}, \overline{b} = \overrightarrow{O'A'}$ sunt de **sensuri opuse** (contrare), dacă semidreptele [*OA* şi $[O'A'$ au sensuri opuse.



Vectori de acelaşi sens



Perechi de vectori de sensuri opuse

Definiţia 6

Un vector $\overline{v} = \overrightarrow{AB}$ determină un număr nenegativ unic, anume, lungimea bipunctului (*A, B*) sau lungimea segmentului [*AB*]*;* el se numeşte **lungimea sau modulul vectorului** $\overline{v}$ şi se notează cu $|\overline{v}|$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow AB = CD$ sau $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

Implicaţia reciprocă nu este adevărată, adică egalitatea lungimilor a doi vectori nu înseamnă egalitatea acestora.

Vectorul care are $|\overline{v}|=1$ se numeşte **vector unitar** sau **versor**.

Observaţie: Fiecare vector nenul este unic determinat de ansamblul celor trei elemente asociate: direcţie, sens şi lungime. Doi vectori sunt **egali** dacă şi numai dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi lungime.

Definiţia 7

Unghiul a doi vectori nenuli $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ este unghiul determinat de doi reprezentanţi ai vectorilor, cu aceeaşi origine, respectiv măsura acestuia.

Dacă $\overline{a}=\overrightarrow{OA}$ şi $\overline{b}=\overrightarrow{OB}$, atunci $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right):=\sphericalangle AOB$ sau $m\left(\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right):=m\left(\sphericalangle AOB\right)\in[0;180]$ sau $\mu\left(\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right):=\mu\left(\sphericalangle AOB\right)\in[0;\pi]$. Dacă $m\left(\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)=90°$, respectiv $\mu\left(\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)=\frac{\pi}{2}$, vectorii se numesc **vectori ortogonali (perpendiculari)** şi se notează $\overline{a}\perp\overline{b}$.

Observaţie: Doi vectori $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt **coliniari** dacă şi numai dacă $m\left(\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)\in\{0;180\}$, respectiv $\mu\left(\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)\in\{0;\pi\}$.

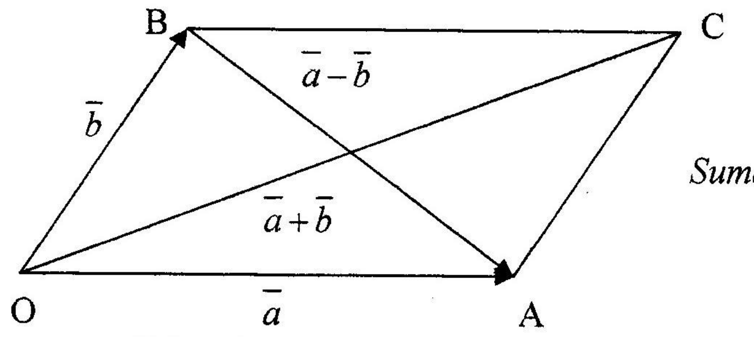
OPERAŢII CU VECTORI

Adunarea vectorilor

Fie $\overline{a}=\overrightarrow{OA},\overline{b}=\overrightarrow{OB}$ doi vectori nenuli din $\vec{\varepsilon}$. Se numeşte **suma vectorilor** $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ vectorul $\overline{a}+\overline{b}=\overrightarrow{OC}$, unde *C* este simetricul lui *O* faţă de mijlocul lui [*AB*], respectiv *C* este cel de-al patrulea vârf al paralelogramului *OACB* construit pe $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$. Dacă unul din vectorii $\overline{a}$ sau $\overline{b}$ este vectorul nul, de exemplu, $\overline{b}=\overline{0}$, atunci, prin definiţie, $\overline{a}+\overline{0}=\overline{0}+\overline{a}=\overline{a}$ ($\overline{0}$ este element neutru la adunare).

Operaţia prin care se asociază la doi vectori suma lor se numeşt adunarea vectorilor. Adunarea vectorilor $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ este corect definită, adică suma $\overline{a}+\overline{b}$ depinde de alegerea reprezentanţilor lui $\overline{a}$ şi $\overline{b}$.

$(O', A') \approx (O, A), (O', B') \approx (O, B) \Rightarrow (O', C') \approx (O, C)$, unde C' este simetricul lui O' faţă de mijlocul lui $[A'B']$.



Suma şi diferenţa vectorilor

Asemenea compunerii forţelor sau vitezelor din fizică, se spune că adunarea vectorilor se face prin „**regula paralelogramului**”. În calculul vectorial este utilă scrierea sumei a doi vectori cu „**regula triunghiului**”:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \ \forall A, B \in \varepsilon.$$

Diferenţa vectorilor

Diferenţa vectorilor $\bar{a} = \overrightarrow{OA}, \bar{b} = \overrightarrow{OB}$ este $\bar{a} - \bar{b} : \overrightarrow{BA}$. Vectorii sumă şi diferenţă $\bar{a} + \bar{b}$, şi $\bar{a} - \bar{b}$, au ca suporturi cele două diagonale ale paralelogramului *AOBC,* construit pe $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$.

Pentru orice vector $\overrightarrow{AB}$ şi orice punct *O* din ε, există egalitatea:

AB = *OB*-*OA*; $\quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Adunarea vectorilor are următoarele **proprietăţi**:

1) $\left(\bar{a} + \bar{b}\right) + \bar{c} = \bar{a} + \left(\bar{b} + \bar{c}\right)$ (asociativitate)

2) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (comutativitate);

3) $\bar{a} + \left(-\bar{a}\right) = \left(-\bar{a} + \bar{a}\right) = \bar{0}$ ($\bar{a}$ şi $-\bar{a}$ sunt simetrice la adunare);

4) $\bar{a} + \left(-\bar{b}\right) = \bar{a} - \bar{b}$;

5) $\bar{a} - \bar{b} = \bar{c} \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{b} + \bar{c}$;

6) $\left|\overline{a}+\overline{b}\right| \leq |\overline{a}|+|\overline{b}|$ (**inegalitatea lui Minkowski**)

7) Dacă $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt coliniari, atunci $\overline{a}+\overline{b}, \overline{a}-\overline{b}$ sunt coliniari;

8) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overline{0}$, $\forall A, B, C \in E$ (**relaţia lui M.Chasles**);

În general $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+...+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overline{0}$ (**regula poligonului**).

Produsul unui vector cu un scalar

Fie $\overline{a}=\overrightarrow{OA}$ vector nenul din ε şi $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se numeşte **produsul vectorului** $\overline{a}$ cu scalarul λ vectorul $\lambda\overline{a} := \overrightarrow{OD}$ unde *D* este coliniar cu *A* şi *O* şi este determinat de valoarea şi semnul lui λ, astfel:

- dacă $\lambda < 0$ atunci *D-O-A* şi $OD = -\lambda OA$;
- dacă $\lambda = 0$, atunci $D = O$;
- dacă $\lambda > 0$, atunci $D \in (OA$ şi $OD = \lambda OA$

Dacă $\overline{a}=\overline{0}$, atunci prin definiţie $\lambda\overline{0}=\overline{0}, \forall\lambda \in \mathbb{R}$.

Produsul vectorilor cu nr reale

Înmulţirea cu scalari a vectorilor are următoarele **proprietăţi**:

1) Vectorii $\overline{a}$ şi $\lambda\overline{a}$ sunt coliniari, de acelaşi sens dacă $\lambda > 0$ şi de sensuri opuse dacă $\lambda < 0$.

2) $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}; (-1) \cdot \overline{a} = -\overline{a}$, $\forall \overline{a} \in \vec{\varepsilon}$;

3) $\lambda\overline{a} = 0 \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{0}$ sau $\lambda = 0$;

4) $\lambda\left(\mu\overline{a}\right) = \mu\left(\lambda\overline{a}\right) = (\lambda\mu)\overline{a} = (\mu\lambda)\overline{a}$;

5) $(\lambda+\mu)\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}$;

6) $\lambda\left(\overline{a}+\overline{b}\right) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{a}$;

7) $|\lambda\overline{a}| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|$.

Observaţii:

1. Doi vectori nenuli $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt **coliniari** dacă şi numai dacă există un număr real nenul λ, astfel încât $\overline{a} = \lambda \overline{b}$.

2. Dacă $\overline{v}$ este un vector nenul, atunci $\overline{e} = \frac{1}{|\overline{v}|}\overline{v}$ este un vector unitar, coliniar şi de acelaşi sens cu $\overline{v}$, numit **versorul lui** $\overline{v}$.

3. Fie punctele coliniare *A, B, M* $(M \neq B)$. Numărul real $k \in \mathbb{R} - \{1\}$ este **raportul în care *M* divide bipunctul (*A* ,*B*)** dacă şi numai dacă $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, deci:

$$(A,B;M) = k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}.$$

Punctul *M* este mijlocul segmentului [*AB*] dacă şi numai dacă $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overline{0}$.

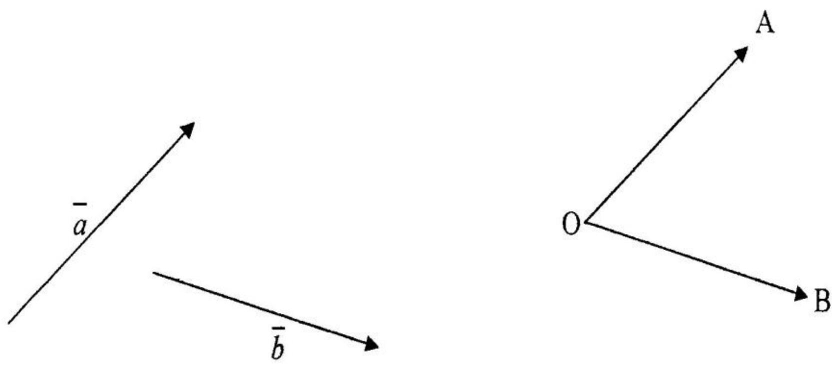
4. Fie punctele coliniare distincte *A, B, M, N*. Punctele *M, N* sunt **conjugate armonic** faţă de *A, B* dacă şi numai dacă există un număr real $k \in \mathbb{R} - \{-1,0,1\}$ astfel încât $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ şi $\overrightarrow{NA} = -k \cdot \overrightarrow{NB}$, adică $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1+k}, O \in E$.

Punctul *M* este mijlocul lui [*AB*], dacă şi numai dacă $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$.

Produsul scalar a doi vectori

Definiţia 1

Pentru doi vectori $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ se defineşte **unghiul dintre cei doi vectori**, unghiul $\sphericalangle AOB$, unde *O* este un punct al planului euclidian, iar *A* şi *B* sunt astfel alese încât direcţia semidreptei [*OA* coincide cu direcţia lui $\overline{a}$, iar direcţia semidreptei [*OB* coincide cu direcţia lui $\overline{b}$.



Definiţia 2

Fiind daţi doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ notăm cu $\varphi \in [0,\pi]$ unghiul acestor doi vectori. Numărul real $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$ se numeşte **produsul scalar al vectorilor** $\bar{a}$ şi $\bar{b}$. Dacă vectorii sunt perpendiculari atunci produsul lor scalar este 0.

Produsul scalar a doi vectori are următoarele **proprietăţi**:

1. Dacă $\bar{a}=0$ sau $\bar{b}=0$ atunci $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$, prin definiţie.
2. Dacă $\bar{a}=\overrightarrow{OA}, \bar{b}=\overrightarrow{OB}$ şi $A' = pr_{OA}(A)$ şi $B' = pr_{OB}(B)$ atunci $\bar{a}\cdot\bar{b}=\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB}$ sau $\bar{a}\cdot\bar{b}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}$.
3. $|a|^2=\sqrt{\bar{a}^2}$, unde $\bar{a}^2=\bar{a}\cdot\bar{a}\geq 0; \bar{a}^2=0 \Leftrightarrow \bar{a}=0$.
4. $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$ (simetrie).
5. $\bar{a}\cdot\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$ (aditivitate).
6. $\left(\lambda\bar{a}\right)\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot\left(\lambda\bar{b}\right)=\lambda\bar{a}\cdot\bar{b}, \lambda\in\mathbb{R}$ (omogenitate).
7. $\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\right|\leq|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$ (**inegalitatea lui Cauchy**).
8. $p_{\bar{b}}(\bar{a})=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\bar{b}^2}\bar{b}$ dacă $\bar{b}\neq 0$, unde $p_{\bar{b}}(\bar{a}):=\overrightarrow{OA'}$ este proiecţia ortogonală a lui $\bar{a}$ pe direcţia lui $\bar{b}$.

Observaţii

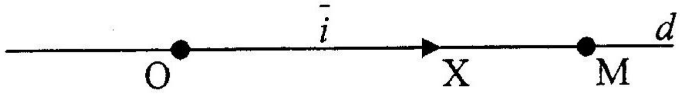
1. Doi vectori $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă $\overline{a} \cdot \overline{b} = \pm |\overline{a}| \cdot |\overline{b}|$.
2. Doi vectori sunt ortogonali dacă şi numai dacă $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$.
3. În planul euclidian se fixează doi vectori unitari ortogonali $\overline{i}$ şi $\overline{j}$. Dacă $\overline{a_1} = x_1\overline{i} + y_1\overline{i}$ şi $\overline{a_2} = x_2\overline{i} + y_2\overline{i}$ în raport cu $\left(\overline{i}, \overline{j}\right)$, atunci: $\overline{a_1} \cdot \overline{a_2} = x_1x_2 + y_1y_2$ este **exprimarea produsului scalar în coordonate**.
4. Dacă $\overline{v} = x\overline{i} + y\overline{i}$, atunci se regăseşte expresia lungimii lui $\overline{v}$, anume: $|\overline{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
5. Dacă $\overline{a_1} = x_1\overline{i} + y_1\overline{i}$ şi $\overline{a_2} = x_2\overline{i} + y_2\overline{i}$ sunt vectori nenuli, iar $\varphi \in [0, \pi]$ notează unghiul vectorilor $\overline{a_1}$ şi $\overline{a_2}$, atunci formula: $\cos\varphi = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$ permite calculul lui φ cu ajutorul produsului scalar.

I.3. REPERE CARTEZIENE ÎN PLANUL EUCLIDIAN

Reper cartezian pe o dreaptă

Fie d o dreaptă. Se numeşte **reper cartezian pe dreapta *d*** o pereche $\left(O, \overline{i}\right)$ formată dintr-un punct $O \in d$ (**originea** reperului) şi un vector nenul $\overline{i}$ din direcţia lui d (există $X \in d$, unic, astfel încât $\overrightarrow{OX} = \overline{i}$). În particular, dacă $\overline{i}$ este un versor, atunci $\left(O, \overline{i}\right)$ se numeşte **reper cartezian normal pe *d*.** Un segment orientat (*A*, *B*) determină, în mod natural, un reper cartezian $\left(A, \overrightarrow{AB}\right)$ pe dreapta *AB*.

Dreapta *d* înzestrată cu un reper cartezian $\left(O, \overline{i}\right)$ se numeşte **axă** (de coordonate) cu originea *O* şi **semiaxa pozitivă** [*OX*.



Axă

Fie d înzestrată cu un reper cartezian (normal) $\left(O,\bar{i}\right)$.

$M \in d \Leftrightarrow \exists x_M \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OM} = x_M \bar{i}$.

$\overrightarrow{OM}$ se numeşte **vectorul de poziţie** al punctului *M*; x_M se numeşte **coordonata (abscisa)** lui *M* relativ la $\left(O,\bar{i}\right)$ şi se scrie $M\left(x_M\right) \in d$.

Funcţia $s : M \in d \to x_M \in \mathbb{R}$ este bijectivă şi se numeşte **sistem de coordonate carteziene pe *d* asociat lui** $\left(O,\bar{i}\right)$**.** Se mai notează $s = OX$.

Observaţie: Dacă $A(x_A), B(x_B) \in d$, atunci

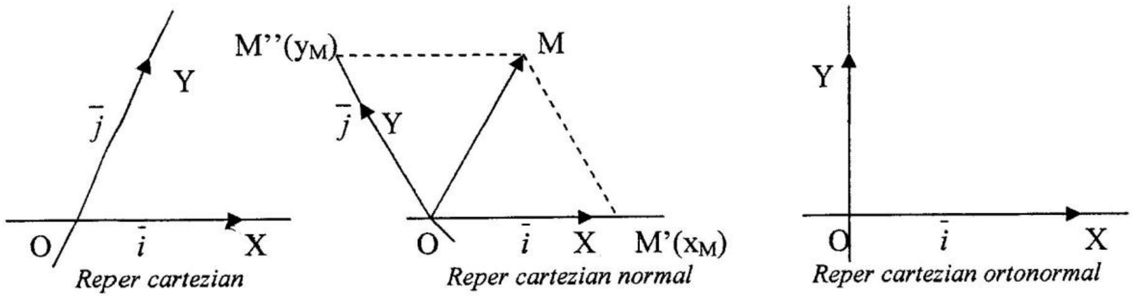
1. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A) \cdot \bar{i}$;
2. $AB = |x_B - x_A|$;
3. $(A,B;M) = k \Leftrightarrow x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \Leftrightarrow k = \dfrac{x_A - x_M}{x_B - x_M}$ unde $M(x_M) \in d$, $M \neq B$.

Reper cartezian în plan

Fie α un plan. Se numeşte **reper cartezian în planul** α un ansamblu $\left(O;\bar{i},\bar{j}\right)$, format dintr-un punct $O \in \alpha$ (**originea** reperului) şi doi vectori necoliniari $\bar{i}$, $\bar{j}$ din direcţia planară a lui α (există $X, Y \in \alpha$, unic determinate de condiţiile $\overrightarrow{OX} = \bar{i}, \overrightarrow{OY} = \bar{j}$). În particular, dacă $\bar{i}$, $\bar{j}$ sunt versori ortogonali, atunci $\left(O;\bar{i},\bar{j}\right)$ este **un reper cartezian ortonormal** în α. Un triplet ordonat de puncte necoliniare (*A, B, C*) determină un reper cartezian $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ în planul *ABC*.

Dacă s-a fixat un reper cartezian (normal, ortonornal) $\left(O;\bar{i},\bar{j}\right)$ în α, atunci se mai spune că planul α este raportat la reperul $\left(O;\bar{i},\bar{j}\right)$.

Dreptele OX şi OY formează **sistemul de axe (de coordonate)** cu reperele carteziene $\left(O,\bar{i}\right)$ şi respectiv $\left(O,\bar{j}\right)$, asociat reperului cartezian $\left(O;\bar{i},\bar{j}\right)$.



Fie planul α raportat la un reper cartezian ortonormal $\left(O;\bar{i},\bar{j}\right)$.

$M \in \alpha \Leftrightarrow \exists\left(x_M, y_M\right) \in \mathbb{R}\mathrm{x}\mathbb{R} : \overrightarrow{OM} = x_M \bar{i} + y_M \bar{j}$.

$\overrightarrow{OM}$ este **vectorul de poziţie** a lui M; x_M, y_M se numesc **coordonatele (abscisa, respectiv ordonata**) lui M relativ la $\left(O;\bar{i},\bar{j}\right)$ şi se scrie $M\left(x_M, y_M\right) \in \alpha$.

Funcţia $s : M \in \alpha \to (x_M, y_M) \in \mathbb{R}\mathrm{x}\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ este bijectivă şi se numeşte **sistem de coordonate carteziene în α asociat lui** $\left(O;\bar{i},\bar{j}\right)$. Se mai notează $s = OXY$.

Observaţie: Dacă $A\left(x_A, y_A\right), B\left(x_B, y_B\right) \in \alpha$, atunci:

$\overrightarrow{OA} = x_A \bar{i} + y_A \bar{j}$

$\overrightarrow{OB} = x_B \bar{i} + y_B \bar{j}$

$\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A\right)\bar{i} + \left(y_B - y_A\right)\bar{j}$

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$(A, B; M) = k \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} \end{cases} \Leftrightarrow k = \dfrac{x_A - x_M}{x_B - x_M} = \dfrac{y_A - y_M}{y_B - y_M}$ unde $M\left(x_M, y_M\right) \in AB, M \neq B$.

CAPITOLUL II

COLINIARITATE

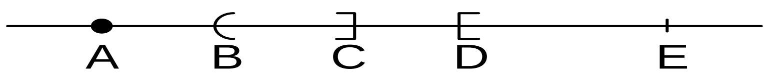
II.1. CE ESTE O PROBLEMĂ DE COLINIARITATE? CRITERII DE COLINIARITATE (EXEMPLIFICĂRI)

Noţiunea de coliniaritate

Definiţie

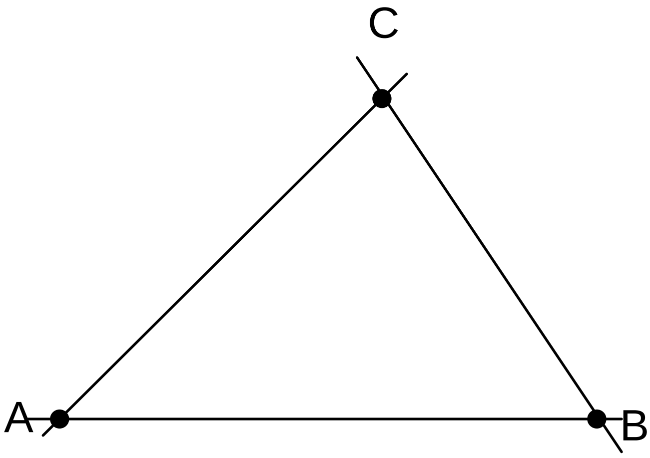
Două sau mai multe figuri (puncte, bipuncte, segmente, semidrepte) se numesc **figuri coliniare**, dacă există o dreaptă care le conţine. În caz contrar, ele se numesc **necoliniare**.

Cum două puncte distincte determină o dreaptă, înseamnă că, dacă figurile sunt puncte, atunci problema coliniarităţii se pune pentru trei sau mai multe puncte.



Figurile A, $(BC],[DE$ *sunt coliniare.*

Puncte coliniare



Puncte necoliniare

Fie punctele *A, B, C* aparţinând planului euclidian. Dacă *A, B, C* sunt coliniare, atunci unul şi numai unul dintre ele se află între celelalte două.

Dacă *C* este între *A* şi *B,* adică $AC + CB = AB$, atunci se notează $A - C - B$ sau $B - C - A$.

Criteriu nr.1 – Probleme în rezolvarea cărora se foloseşte postulatul lui Euclid: „Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă şi numai una la acea dreaptă”

Criteriu nr.2 – Probleme în rezolvarea cărora folosim teorema: „Într-un plan dintr-un punct exterior unei drepte se poate duce pe acea dreaptă o perpendiculară şi numai una”.

Criteriu nr.3 – Probleme în rezolvarea cărora se va identifica o dreaptă care conţine punctele considerate.

Criteriu nr.4 – Probleme în rezolvarea cărora se utilizează proprietăţile unghiurilor opuse la vârf.

Criteriu nr.5 – Probleme în rezolvarea cărora intervin două sau mai multe unghiuri adiacente cu proprietatea că unghiul sumă a lor este un unghi alungit.

Criteriu nr.6 - Probleme în care se va redefini unul din punctele care figurează în condiţia de coliniaritate.

Punctele *A, B, C* sunt coliniare dacă:

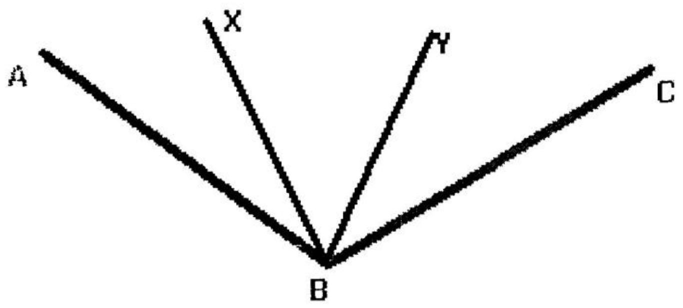
1. $m(\sphericalangle ABC) = 180°$.

Observaţii:

1) În redactarea rezolvării problemei trebuie precizat: „Considerăm semidreptele (*BA* şi $(BC$" pentru a nu se crea dubii asupra procedeului folosit.
2) În general $m(\sphericalangle ABC)$ se obţine o relaţie de tipul:

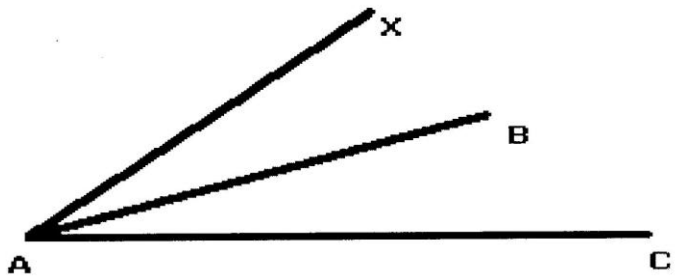
   $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ABX) + m(\sphericalangle XBY) + m(\sphericalangle YBC)$ unde

   $BX \subset \text{Int}(\sphericalangle ABY)$ şi $BY \subset \text{Int}(\sphericalangle XBC)$.

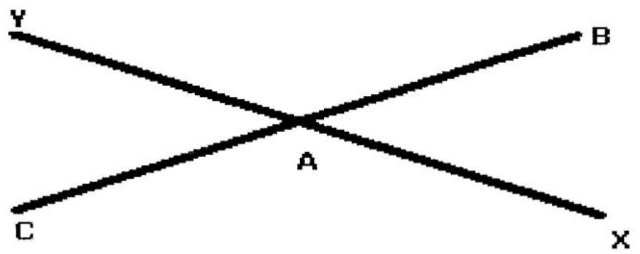


2. $m(\sphericalangle ABC) = 0°$

Observaţie: Se consideră semidreptele (*AB*, (*AC*, (*AX* şi se arată că $m(\sphericalangle XAB) = m(\sphericalangle XAC)$.



3. $m(\sphericalangle BAX) = m(\sphericalangle CAY)$ unde $A \in XY$ iar *B, C* se găsesc în semiplane diferite determinate de dreapta *XY*.

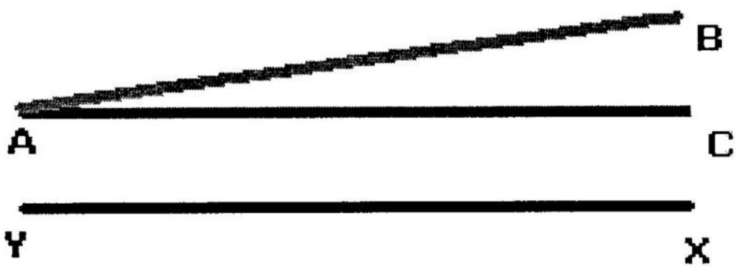


Observaţie: Se utilizează reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf.

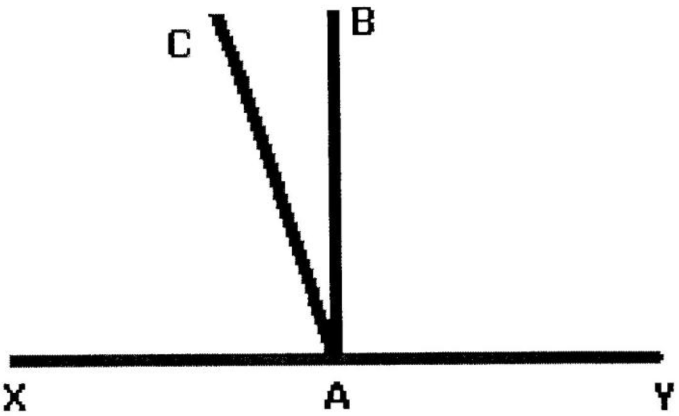
4. $AB \parallel XY$ şi $AC \parallel XY$

Observaţii:

a) Se utilizează axioma referitoare la unicitatea paralelelei dusă printr-un punct la o dreaptă.

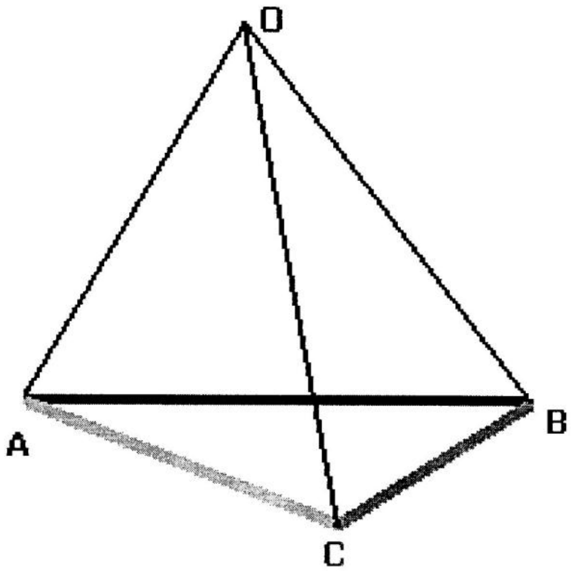


b) Ca variantă se poate folosi teorema privind unicitatea perpendicularei dusă dintr-un punct pe o dreaptă şi anume: $AB \perp XY$ şi $AC \perp XY$.

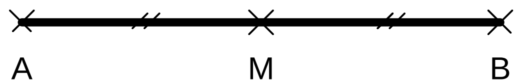


5. Aria triunghiului *ABC* este nulă

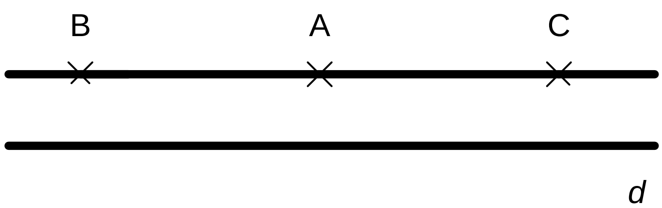
Observaţie: Se va demonstra acest lucru cu ajutorul relaţiei:
$\sigma[AOB] = \sigma[AOC] + \sigma[COB]$ unde $C \in \text{Int}\left(\sphericalangle AOB\right)$.



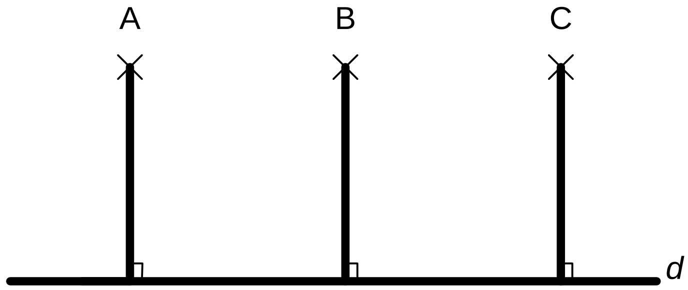
1) Cu ajutorul mijlocului unui segment: dacă *M* este mijlocul lui [*BC*] $\Rightarrow$ *A, M, B* coliniare.



2) Cu ajutorul dreptelor confundate (Cu axioma lui Euclid, arătând că cele trei puncte determină două drepte paralele cu o dreaptă dată). Dacă $\left.\begin{array}{l} AB \parallel d \\ AC \parallel d \end{array}\right\} \Rightarrow AB$ şi *AC* sunt drepte confundate.



3) Cu ajutorul distanţelor, arătând că fiind de aceeaşi parte a unei drepte sunt la aceeaşi distanţă faţă de acea dreaptă. Dacă $A, B, C \in (d, A)$ şi $d(A,d) = d(B,d) = d(C,d) \Rightarrow A, B, C$ sunt coliniare.

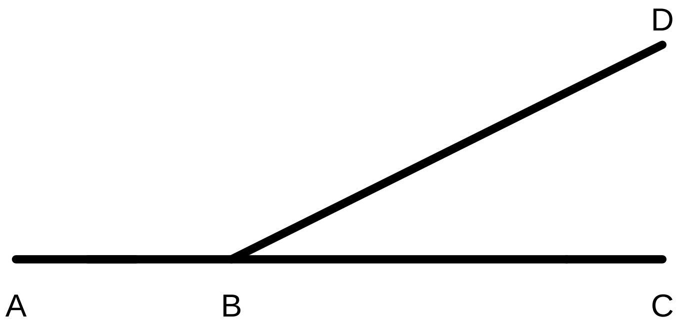


4) Arătând că: $AB+BC=AC$. Dacă *AB, BC, AC* sunt lungimi de segmente şi $AB+BC=AC \Rightarrow B\in[AC]$ şi *A, B, C* sunt coliniare.

5)

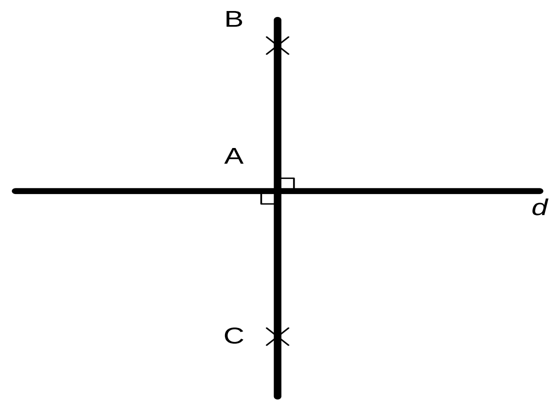
6) Cu ajutorul unghiurilor adiacente suplementare.

Dacă $m(\sphericalangle ABD)+m(\sphericalangle DBC)=180^\circ \Rightarrow A,B,C$ sunt coliniare.



7) Cu ajutorul a două drepte perpendiculare pe o altă dreaptă în acelaşi punct al ei.

Dacă $\left.\begin{array}{l} AB\perp d \\ AC\perp d \end{array}\right\} \Rightarrow A,B,C$ coliniare.



8) Analitic, arătând că coordonatele lor verifică ecuaţia dreptei. Fie $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$ trei puncte şi (d) o dreaptă de ecuaţie $ax + by + c = 0$. Dacă $\begin{cases} a \cdot x_A + b \cdot y_A + c = 0 \\ a \cdot x_B + b \cdot y_B + c = 0 \\ a \cdot x_C + b \cdot y_C + c = 0 \end{cases} \Rightarrow A, B, C \in d$, deci sunt coliniare sau dacă şi numai dacă $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$.

EXEMPLE ILUSTRATIVE

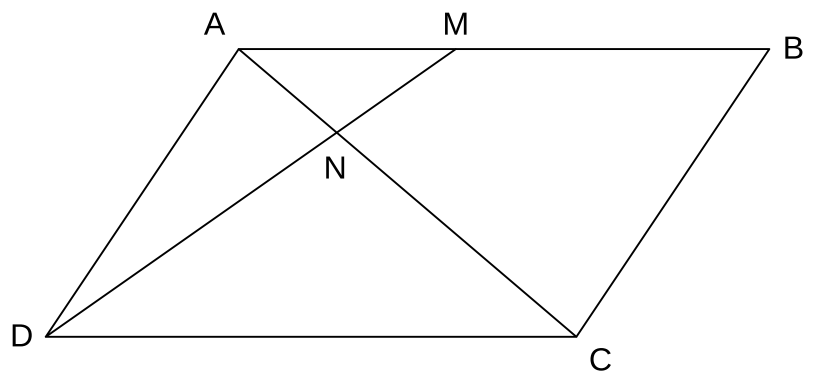
Problema 1:

Se consideră paralelogramul $ABCD$ şi punctele $M \in (AB); N \in DM$ astfel încât $AM = MB$ şi $MD = 3MN$. Să se demonstreze că punctele *A, N, C* sunt coliniare.

Soluţie: Folosind operaţiile cu vectori se obţin relaţiile:

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$ (1)

$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN}$



Se înmulţeşte prima relaţie cu 2 şi prin adunare cu a doua egalitate se obţine:

$2\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MN}$

$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN}$

Avem: $2\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MN} - 2\overrightarrow{AM} -$ $-2\overrightarrow{MN} = 0$. Aşadar $2\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CN} = 0$, deci vectorii $\overrightarrow{AN}$ şi $\overrightarrow{CN}$ sunt coliniari. Rezultă că punctele *A, N, C* sunt coliniare.

Problema 2:

Se dau cercurile *C*(*O*,*K*) şi *C*(*O'*,*R'*) care se intersectează în punctele *A* şi *B*.

De aceeaşi parte cu *A* faţă de dreapta *OO*' se consideră punctele $M \in C(O,R)$ şi $M' \in C(O',R')$ astfel ca $OM \parallel O'A$ şi $O'M' \parallel OA$.

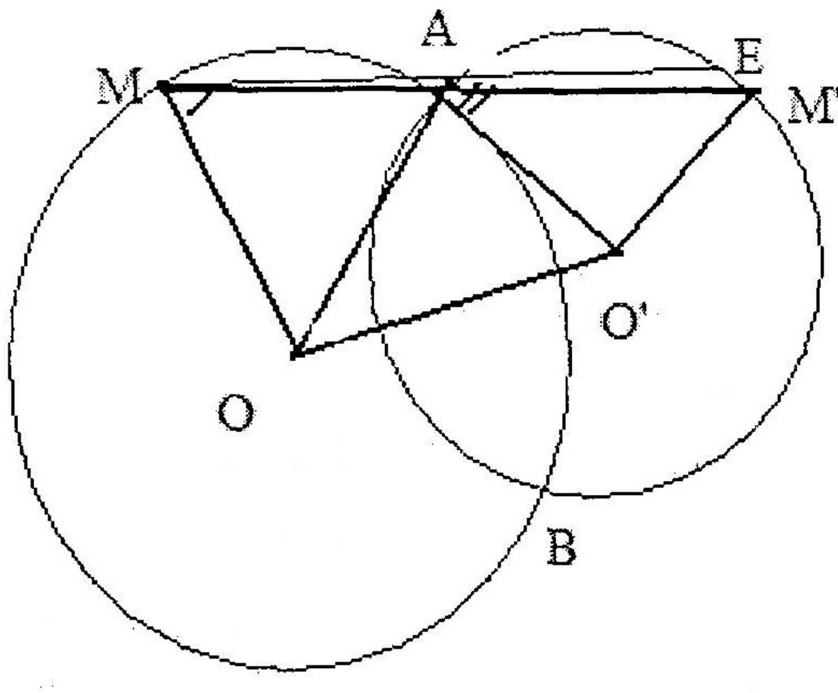
Să se arate că punctele *A*, *M*, *M'* sunt coliniare.

Demonstraţie*:*

Presupunem că punctele *A, M, M'* nu sunt coliniare.

Fie E al doilea punct de intersecţie al dreptei *MA* cu cercul *C*(*O'*,*R'*).

Atunci: $\sphericalangle AMO \equiv \sphericalangle EAO'$ (1) ca unghiuri corespondente.



Unghiurile $\sphericalangle MOA, \sphericalangle AO'M'$ - având laturile două câte două paralele şi de acelaşi sens, sunt congruente.

Triunghiurile isoscele ΔMOA şi $\Delta AO'M'$ sunt asemenea şi atunci:

(2) $\sphericalangle AMO \equiv \sphericalangle M'AO'$.

Comparând relaţiile (1) şi (2) obţinem că: $\sphericalangle EAO' \equiv \sphericalangle M'AO'$ (3)

Din relaţia (3) rezultă că două unghiuri cu vârful comun în *A*, cu latura comună [*AO'*] şi cu interioarele de aceeaşi parte a laturii comune sunt congruente fără ca celelalte două laturi [*AE*, [*AM'* să coincidă.

Contradicţia la care s-a ajuns arată că punctele *A, M, M'* sunt coliniare.

Problema 3:

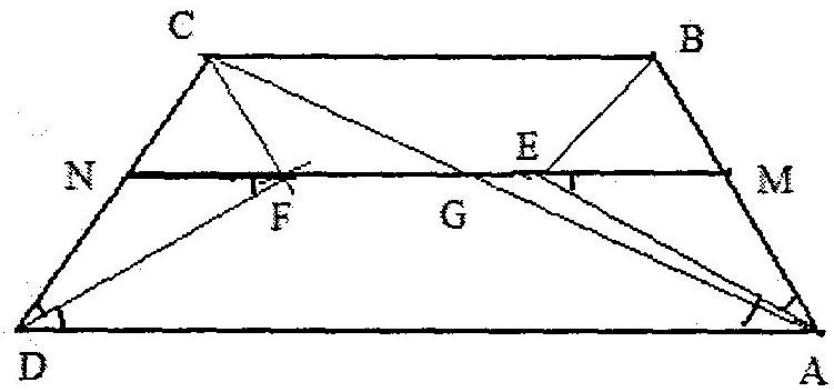
Fie trapezul isoscel *ABCD* (*BC* || *AD*).

Bisectoarele interioare ale unghiurilor *A* şi *B* se întâlnesc în *E*, iar bisectoarele interioare ale unghiurilor *C* şi *D* în *F*.

Fie *G* mijlocul diagonalei *AC*. Să se arate că punctele *F, G, E* sunt coliniare.

Demonstraţie:

Triunghiul *AEB* este dreptunghic în *E*. Fie *M* – mijlocul laturii *AB*, atunci $EM = \frac{1}{2}AB$, triunghiul *EMA* este isoscel.



$\sphericalangle MEA \equiv \sphericalangle MAE \equiv \sphericalangle EAD$, deci *ME* || *AD*.

Analog, pentru *N* – mijlocul lui *CD*, obţinem *NE* || *AD*.

MN – fiind linie mijlocie în trapez, avem $MN \parallel AD$, deci punctele $E, F \in MN$. *G* – mijlocul diagonalei aparţine lui *MN*, aşadar punctele *F, G, E* – sunt coliniare.

Problema 4:

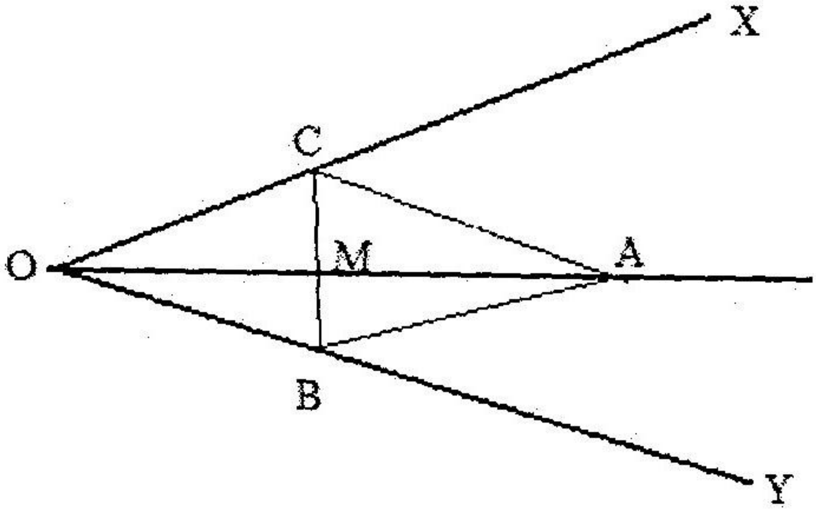
Fie unghiul *XOY* şi *M* un punct în interiorul lui, nesituat pe nici una din laturi.

Segmentul [*OM*] se prelungeşte cu $[MA] \equiv [OM]$. Paralela prin *A* la *OX* întâlneşte pe *OY* în *B*, iar paralela prin *A* la *OY* întâlneşte pe *OX* în *C*.

Să se demonstreze că punctele *B*, *M*, *C* – sunt coliniare.

Demonstraţie:

În patrulaterul *OBAC* avem *OC* || *AB*, *OB* || *AC*, deci *OBCA* este paralelogram.



Segmentul [*OA*] – este una din diagonale, cu *M* – mijlocul ei. Cealaltă diagonală [*BC*] intersectază diagonala [*OA*] în *M*. Aşadar punctele *B*, *M* şi *C* sunt coliniare.

Problema 5:

Fie B', C' mijloacele segmentelor (*AC*) respectiv (*AB*).

D – simetricul lui *B* faţă de *B'*, iar *E* – simetricul lui *C* faţă de *C*.

Să se demonstreze că punctele *D*, *A*, *E* – sunt coliniare.

Demonstraţie:

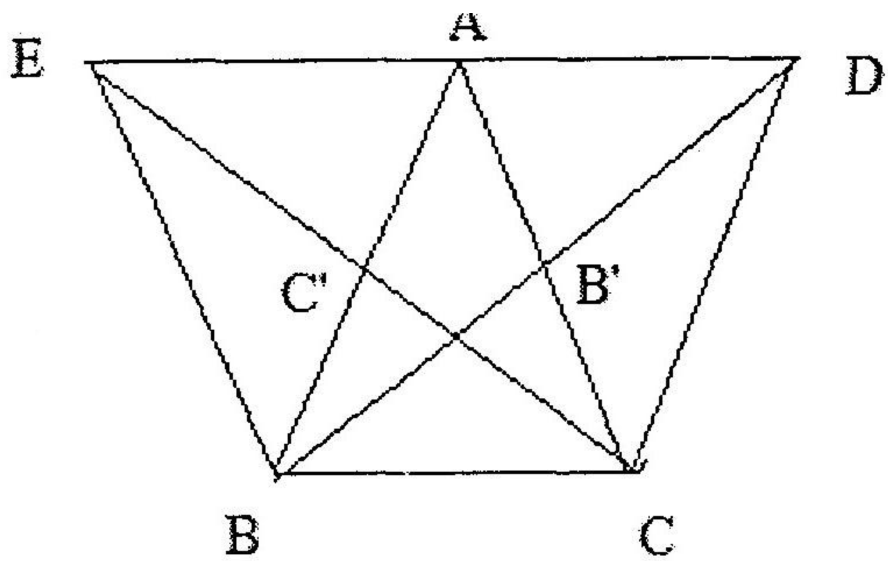
Patrulaterul *AEBC* având diagonalele care se taie în părţi congruente este un paralelogram, deci:

(1) *AE* || *BC*.

În patrulaterul *ABCD* diagonalele se taie în părţi congruente deci este un paralelogram, atunci:

(2) $AD \parallel BC$

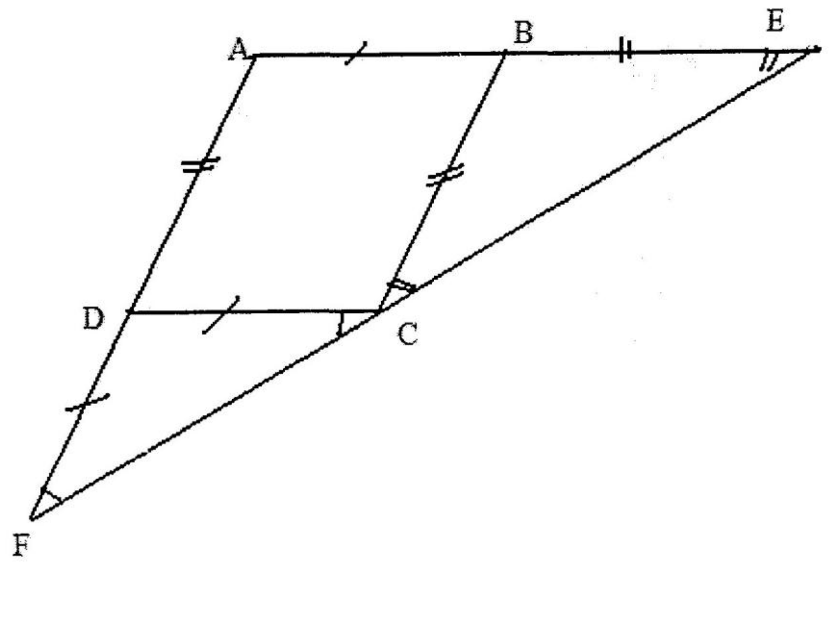
Din relaţiile (1) şi (2), ţinând cont de axioma unicităţii paralelei rezultă că punctele *D, A, E* – sunt coliniare.



Problema 6:

Fie un paralelogram *ABCD* şi punctele *E, F* astfel încât $B \in (AE), BE = AD,$ $D \in (AF), DF = AB$. Să se demonstreze că punctele *E, C, F* sunt coliniare.

Demonstraţie:



Din triunghiurile isoscele ΔCBE şi ΔFDC obţinem relaţiile:

(1) $\sphericalangle BCE \equiv \sphericalangle CEB$

(2) $\sphericalangle DCF \equiv \sphericalangle CFD$

iar din paralelogramul *ABCD* obţinem

(3) $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle DCB$.

Ţinând cont de relaţiile (1), (2) şi (3) rezultă:

$m(\sphericalangle FCD) + m(\sphericalangle DCB) + m(\sphericalangle BCE) = 180°$

Cum punctele *D, F* şi *E, B* sunt de aceeaşi parte a lui *AC*, rezultă că punctele *F, E* sunt de o parte şi de alta a dreptei *AC,* deci $C \in (FE)$.

Unghiurile *ACF* şi *ACE* sunt adiacente suplementare dacă laturile lor necomune vor fi în prelungire. Aşadar punctele *F, C, E* – sunt coliniare.

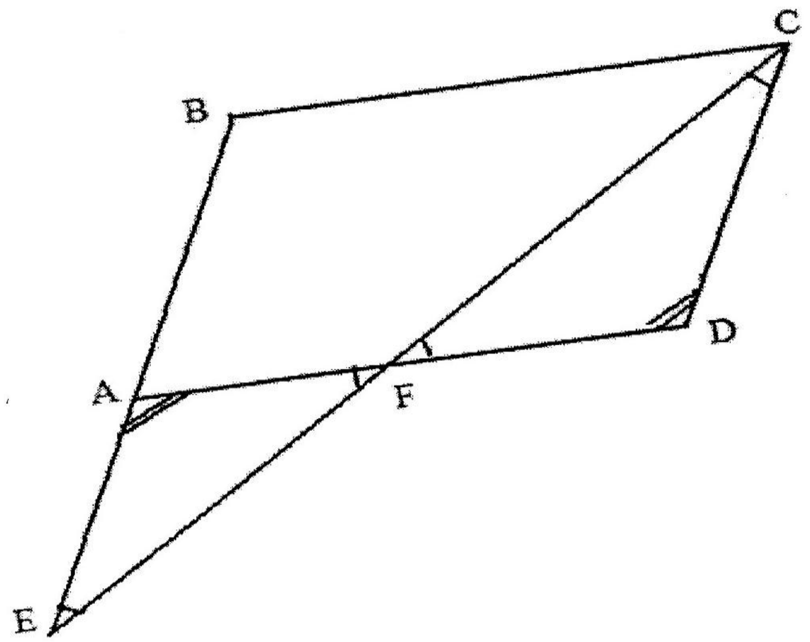
Problema 7:

Fie paralelogramul *ABCD* (*AB* < *AD*) şi punctele *E, F* astfel încât $A \in (BE), F \in (AD)$ şi $[BE] \equiv [AD]$ şi $[DF] \equiv [AB]$. Demonstraţi că punctele *C, F, E* – sunt coliniare.

Demonstraţie:

Unim *F* cu *C* şi separat *F* cu *E*. Triunghiurile ΔCDF şi ΔAEF – isoscele.

Deoarece $\sphericalangle AFE \equiv \sphericalangle DFC$ obţinem că $\sphericalangle AFE \equiv \sphericalangle DFC$.



Deoarece semidreptele [*FE* şi [*FC* formează cu dreapta *AD*, $F \in (AD)$, de o parte şi de alta a ei, unghiurile congruente $\sphericalangle AFE$ şi $\sphericalangle DFC$, rezultă că semidreptele [*FE* şi [*FC* sunt în prelungire, adică punctele *E, F, C* sunt coliniare.

Problema 8:

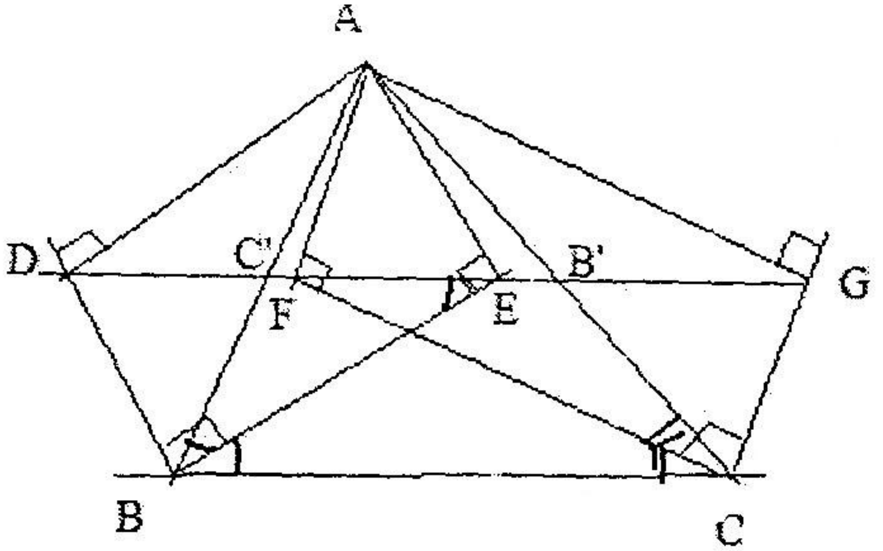
Fie un triunghi *ABC* şi punctele *D, E, F, G* – picioarele perpendicularelor duse din *A* pe bisectoarele interioare şi exterioare ale unghiurilor $\sphericalangle ABC$, respectiv $\sphericalangle ACB$. Să se demonstreze că punctele *D, E, F, G* sunt coliniare.

Fie *D, E*, proiecţiile lui *A* pe bisectoarele unghiului *ABC*. *ADBE* – dreptunghi, deci *DE* trece prin *C* – mijlocul diagonalei *AB*. Din $m\left(\sphericalangle C'EB\right) = m\left(\sphericalangle ABE\right) =$

$= \frac{1}{2} m\left(\sphericalangle B\right) = m\left(\sphericalangle EBC\right)$, obţinem că *EC* || *BC*.

Paralela prin *C* la *BC* trece prin *B'* – mijlocul laturii *AC*.

Prin urmare punctele *D, E, F, G* aparţin lui $B'C'$, deci sunt coliniare.



Problema 9:

Trapezul isoscel *ABCD* (*BC* || *AD*) este circumscris unui cerc de centru *O*. Punctele de contact ale laturilor (*AB*), (*BC*), (*CD*), (*DA*) cu cercul înscris sunt: *E, F, G, H*. Diagonalele trapezului se intersectează în *O*.

Demonstraţi că *E, O, G* şi *H, O, F* sunt triplete de puncte coliniare.

Demonstraţie:

Ţinând cont că, trapezul *ABCD* este isoscel şi este circumscris unui cerc avem egalităţile: (*EB*) = (*BF*) = (*FC*) = (*CG*) şi (*EA*) = (*AH*) = (*HD*) = (*DG*).

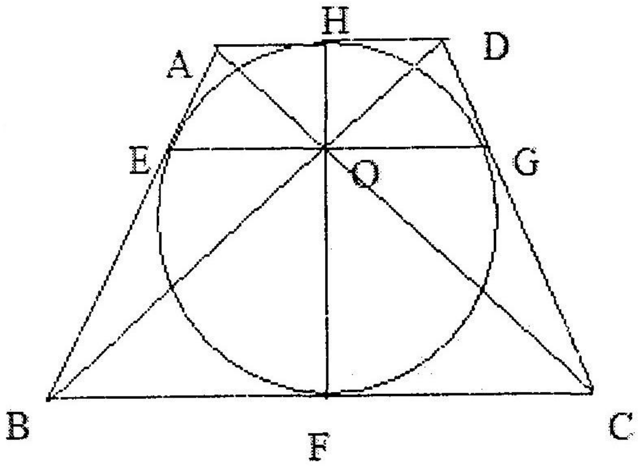
Din asemănarea triunghiurilor formate obţinem că:

$\frac{EB}{EA} = \frac{BF}{AH} = \frac{BC}{AD} = \frac{BO}{OD}$.

Aplicând reciproca teoremei lui Thales:

din triunghiul ΔBAD obţinem $EO \parallel AD$ (1)

iar din triunghiul ΔDAC obţinem $OG \parallel AD$ (2)



Din relaţiile (1) şi (2), ţinând cont de axioma unicităţii paralelei rezultă că punctele *E, O, G* sunt coliniare.

Din $OH \perp AD, OF \perp BC$, şi $AD \parallel BC$ obţinem că punctele *H, O, F* sunt coliniare.

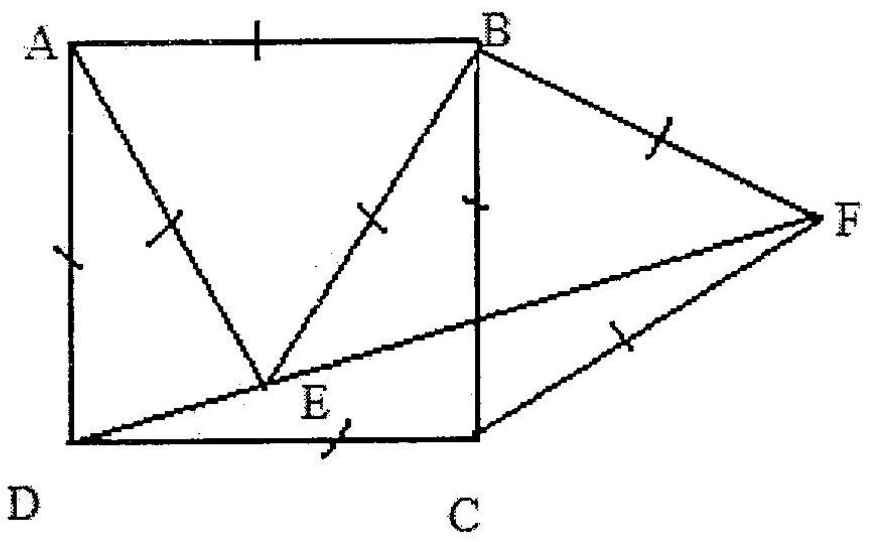
Problema 10:

Fie *E* un punct în interiorul pătratului *ABCD* şi *F* un punct în exteriorul pătratului astfel încât triunghiurile ΔABE şi ΔBCF să fie triunghiuri echilaterale.

Demonstraţi că punctele *D, E, F* – sunt coliniare

Demonstraţie:

Va trebui să demonstrăm că $\sphericalangle CDE \equiv \sphericalangle CDF$ în condiţia în care punctele *E* şi *F* sunt de aceeaşi parte a dreptei *DC*.



Din triunghiul isoscel ΔADE obţinem că $m(\sphericalangle DAE)=30°$, $m(\sphericalangle ADE)=m(\sphericalangle AED)=75°$. Cum $m(\sphericalangle ADE)=m(\sphericalangle ADC)\Rightarrow E$ şi A sunt de aceeaşi parte a lui DC şi $m(\sphericalangle CDE)=15°$.

Din triunghiul isoscel ΔDCF avem $m(\sphericalangle DCF)=90°+60°=150°$ şi $m(\sphericalangle CDF)=m(\sphericalangle CFD)=15°$. cu punctele F şi B de aceeaşi parte a lui DC.

Cum punctele E şi A respectiv F şi B sunt de aceeaşi parte a dreptei DC şi $\sphericalangle CDE=\sphericalangle CDF$ obţinem că punctele D, E, F – sunt coliniare.

Problema 11:

În planul euclidian raportat la un s.c.c.o. $(O;\bar{i},\bar{j})$ se consideră punctele $A(-2;-1), B(4,8)$ şi $C(6,11)$. Arătaţi că punctele sunt coliniare.

Soluţie: În rezolvare vom determina valoarea determinantului:

$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \\ 6 & 11 & 1 \end{vmatrix}=0$ rezultă că punctele A, B, C sunt coliniare.

Problema 12

În planul euclidian raportat la un s.c.c.o. $(O;\bar{i},\bar{j})$ **considerăm punctele** $A(8,0), B(4,8), C(0,3)$. Dreapta BC intersectează axa Ox în D, iar dreapta AB

intersectează axa Oy în E. Arătaţi că mijloacele segmentelor [OB], [AC], [DE] sunt coliniare.

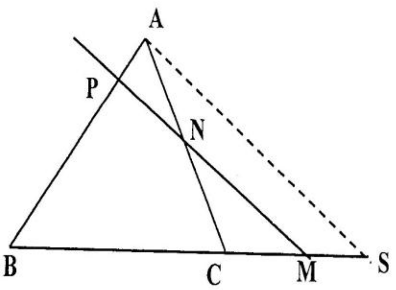
Soluţie: Se determină ecuaţia dreptelor AB şi BC calculând coordonatele punctelor D şi E de intersecţie ale acestora cu axele de coordonate.

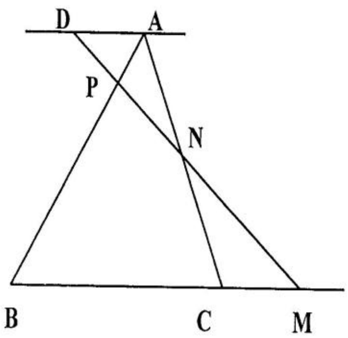
Se obţine $D(-3,0)$ şi $E\left(0,\dfrac{48}{5}\right)$. Se calculează coordonatele mijloacelor [OB], [AC], [DE], respectiv $M\left(\dfrac{3}{2},3\right), N\left(4,\dfrac{3}{2}\right), P\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{24}{5}\right)$ se înlocuiesc aceste valori în determinant, obţinând valoarea determinantului egală cu 0.

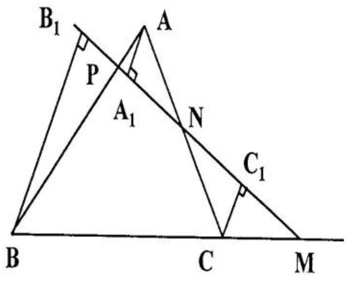
Rezultă că punctele M, N, P sunt coliniare.

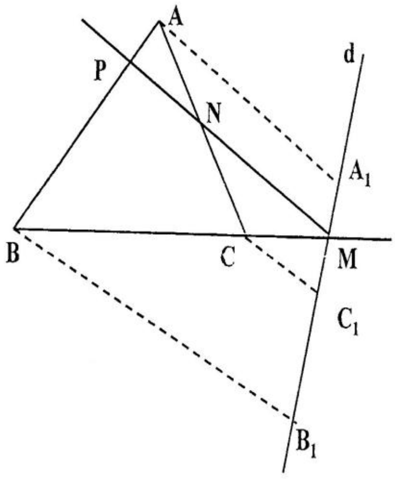
II.2. TEOREMA LUI MENELAUS. APLICAŢII

Fie triunghiul ABC şi punctele $M \in BC, N \in AC$ şi $P \in AB$, diferite de A, B, C. Punctele M, N, P sunt coliniare dacă şi numai dacă are loc relaţia: (1) $\dfrac{PA}{PB} \cdot \dfrac{MB}{MC} \cdot \dfrac{NC}{NA} = 1.$

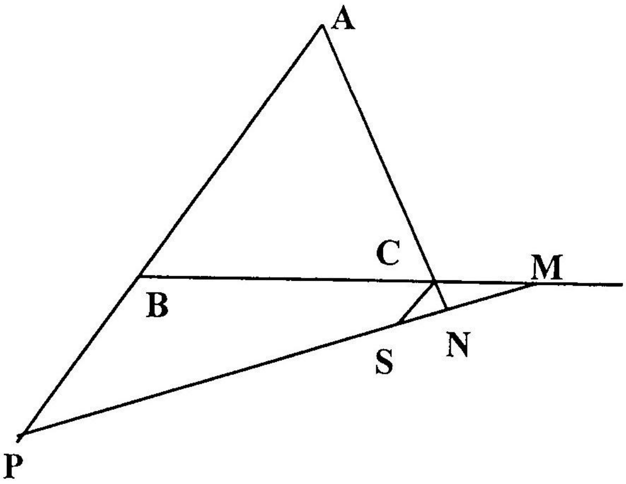








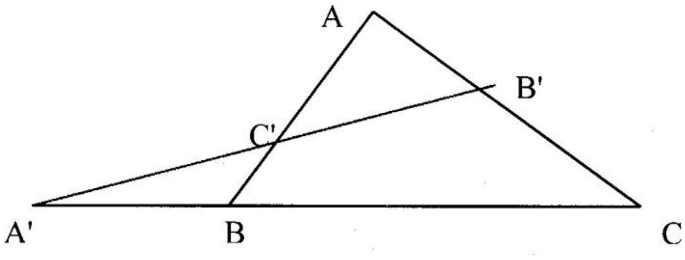
Observaţie: Demonstraţia urmează o cale asemănătoare şi în cazul când transversala intersectează prelungirile laturilor triunghiului dat.



Teorema lui Menelaus

O dreaptă *d* care nu trece prin nici un vârf al ΔABC intersectează dreptele suport ale laturilor ΔABC în punctele A', B', C'.

Atunci $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$.



Reciproca: Dacă A' aparţine lui *BC*, B' aparţine lui *CA*, C' aparţine lui *AB* şi dacă A', B', C' sunt situate două pe laturi şi unul pe prelungirea laturii sau toate trei pe prelungirile laturilor şi dacă $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$ atunci punctele A', B', C' sunt coliniare.

Demonstrarea teoremei lui Menelaus utilizând metoda analitică

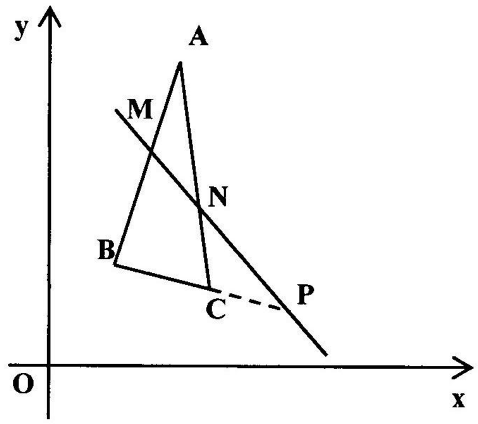
Demonstraţie: Folosind coordonatele punctului ce împarte un segment într-un raport dat, se obţine:

$$M\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right);$$

$$N\left(\frac{x_1+\gamma x_2}{1+\gamma},\frac{y_1+\gamma y_2}{1+\gamma}\right);$$

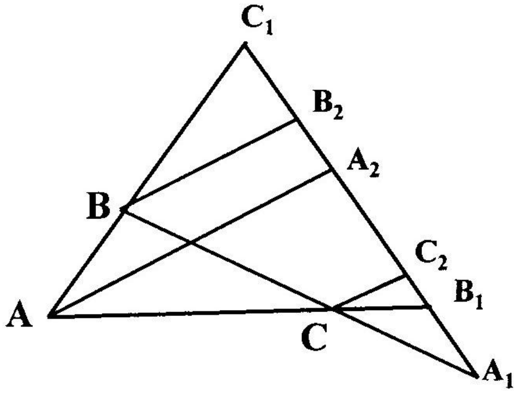
$$P\left(\frac{x_1+\mu x_2}{1+\mu},\frac{y_1+\mu y_2}{1+\mu}\right).$$

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} & \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} & 1 \\ \frac{x_1+\mu x_2}{1+\mu} & \frac{y_1+\mu y_2}{1+\mu} & 1 \\ \frac{x_1+\gamma x_2}{1+\gamma} & \frac{y_1+\gamma y_2}{1+\gamma} & 1 \end{vmatrix}=0 \text{ dacă şi numai dacă } \lambda\cdot\mu\cdot\gamma=1.$$



Demonstrarea teoremei lui Menelaus utilizând metoda transformărilor geometrice

Demonstraţie: Fie *d* transversala dată şi segmentele paralele $[AA_2],[BB_2],[CC_2]$ care intersectează dreapta *d* în A_2,B_2,C_2. Consider omotetiile $H_{A_1}^{k_1};H_{B_1}^{k_2};H_{C_1}^{k_3}$ astfel



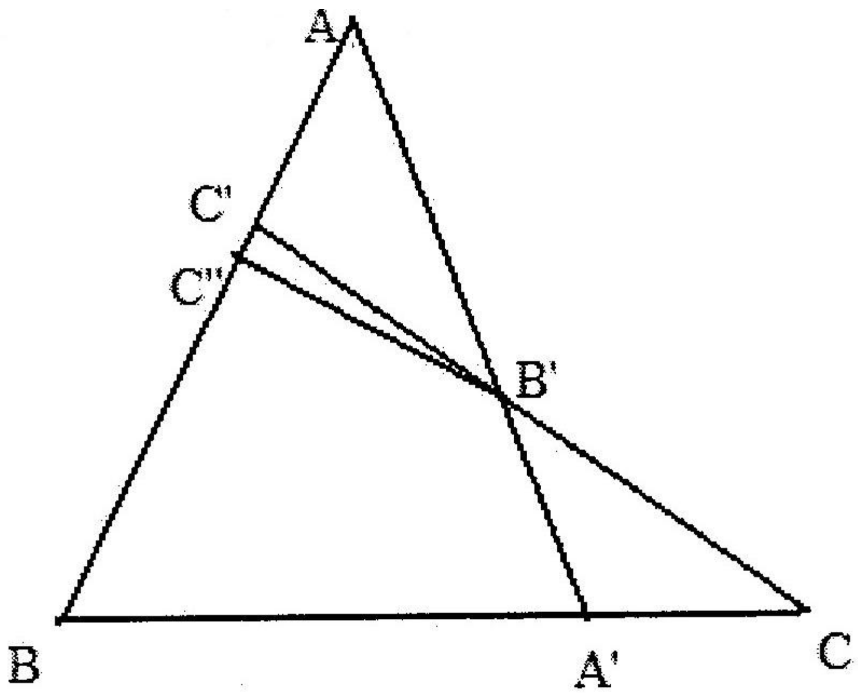
încât: $H_{A_1}^{k_1}(B)=C;H_{B_1}^{k_2}(C)=A;\ H_{C_1}^{k_3}(A)=B$ rezultă $k_1=\frac{A_1B}{A_1C};k_2=\frac{B_1C}{B_1A};k_3=\frac{C_1A}{C_1B}$;

avem $H_{A_1}^{k_1}(B_2)=C_2;H_{B_1}^{k_2}(C_2)=A_2;H_{C_1}^{k_3}(A_2)=B_2$, deci $k_1=\frac{BB_2}{CC_2};k_2=\frac{CC_2}{AA_2};k_3=\frac{AA_2}{BB_2}$ care prin înmulţire vor da: $k_1k_2k_3=1$ şi se obţine relaţia cerută.

Problemă: *(Reciproca teoremei lui Menelaus)*

Considerăm un triunghi *ABC* şi punctele $A'\in(BC),B'\in(CA)$ şi $C'\in(AB)$.

Se presupune că două dintre puncte sunt situate pe două laturi ale triunghiului şi unul este situat pe prelungirea celei de-a treia latură (sau că punctele A',B',C' sunt situate pe prelungirile laturilor triunghiului). Dacă are loc egalitatea: $\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1$ (1) atunci punctele A',B',C' sunt coliniare.



Demonstraţie:

Presupunem că două dintre puncte sunt situate pe două laturi ale triunghiului şi unul este situat pe prelungirea celei de-a treia laturi.

Presupunem că punctele A', B', C' nu sunt coliniare. Atunci dreapta *A'B'* ar intersecta latura *AB* într-un punct *C''* diferit de *C*. Aplicând teorema lui Menelaus pentru punctele coliniare A', B', C'' obţinem: $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C''A}{C''B} = 1$ (2)

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că: $\frac{C'A}{C'B} = \frac{C''A}{C''B}$.

Ar însemna că segmentul [*AB*] este împărţit de punctele interioare *C* şi *C''* în acelaşi raport – contradicţie, eliminând presupunerea făcută ajungem la concluzia că punctele A', B', C' sunt coliniare.

Problemă:

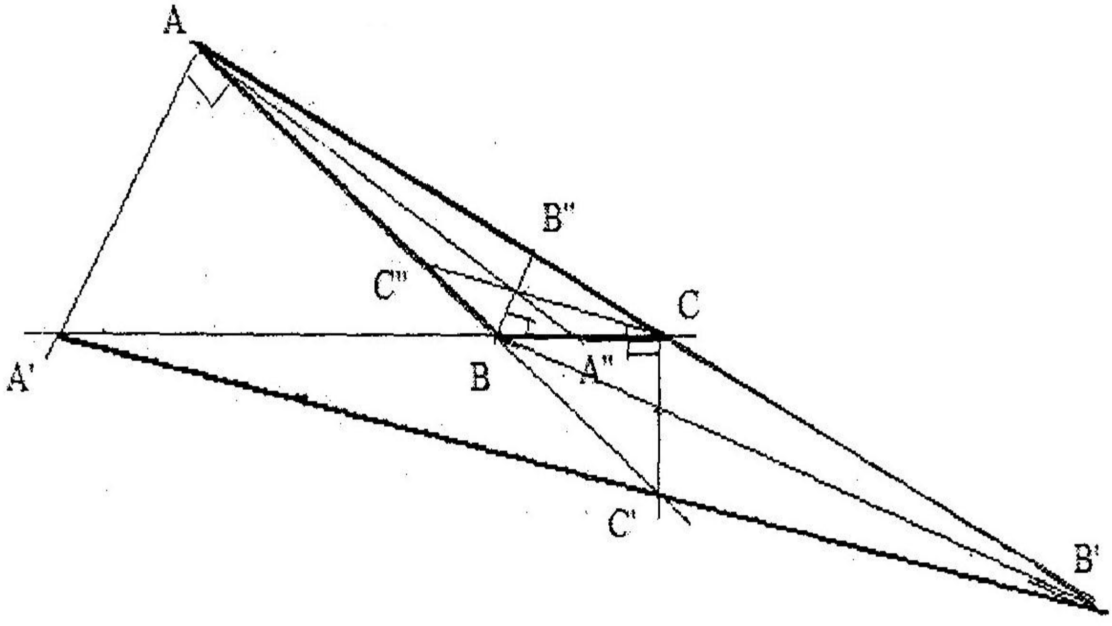
Considerăm triunghiul *ABC* – triunghi neisoscel.

Bisectoarea exterioară a unghiului *A* intersectează dreapta *BC* în *A'*.

Analog: Bisectoarea exterioară a unghiului *B* intersectează dreapta *AC* în *B'*. Bisectoarea exterioară a unghiului *C* intersectează dreapta *AB* în *C*. Să se arate că punctele A', B', C' – sunt coliniare.

Soluţie:

Ştim că bisectoarea interioară este perpendiculară pe bisectoarea exterioară.



$AA'' \perp AA'$

$BB'' \perp BB'$

$CC'' \perp CC'$

Notăm: *AB = c*, *AC = b*, *BC = a*.

Din teorema bisectoarei unghiurilor exteriaore *A*, *B*, *C*, avem:

$\sphericalangle A : \frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$ (1); $\sphericalangle B : \frac{B'C}{B'A} = \frac{a}{c}$ (2) şi $\sphericalangle C : \frac{C'A}{C'B} = \frac{b}{a}$ (3).

Înmulţind cele trei relaţii membru cu membru, obţinem:

$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = 1$ şi folosind *reciproca teoremei lui Menelaus* pentru triunghiul *ABC* şi punctele A', B', C' situate pe prelungirile laturilor triunghiului obţinem că punctele A', B', C' sunt coliniare.

II.3. TEOREME CELEBRE DE COLINIARITATE

Teorema lui Pascal

În orice hexagon înscris într-un cerc, punctele de intersecţie ale laturilor opuse sunt coliniare.

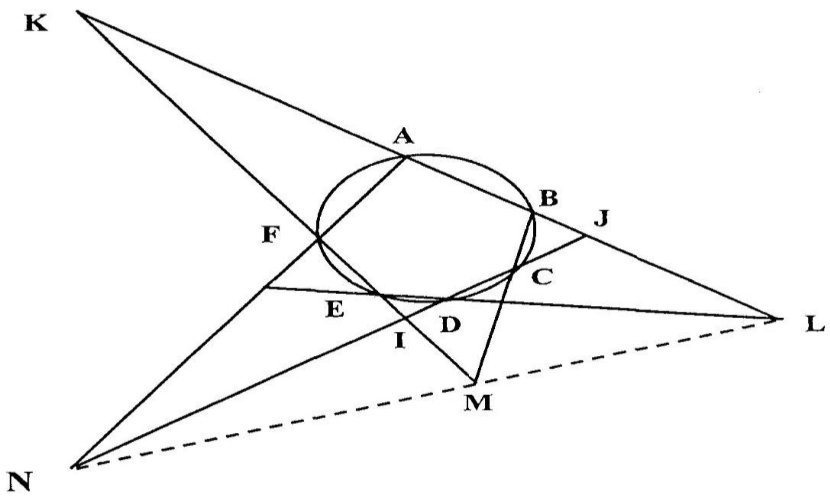
Demonstraţie: Fie $AB \cap DE = \{L\}; CB \cap FE = \{M\}; AF \cap DC = \{N\}$. Consider triunghiul *IJK* format din prelungirile laturilor (*AB*), (*CD*), (*EF*). Aplic teorema lui Menelaus pentru triunghiul *IJK* şi transversale *ED*, *BC*, *AF*.

Obţin următoarele relaţii:

$$\frac{EK}{EI} \cdot \frac{DI}{DJ} \cdot \frac{LJ}{LK} = 1; (1)$$

$$\frac{BJ}{BK} \cdot \frac{CI}{CJ} \cdot \frac{MK}{MI} = 1; (2)$$

$$\frac{AJ}{AK} \cdot \frac{FK}{FI} \cdot \frac{NI}{NJ} = 1; (3).$$



Ţinând cont de relaţiile deduse din scrierea puterilor punctelor *I, J, K* faţă de cerc: $IC \cdot ID = IE \cdot IF$; $JB \cdot JA = CJ \cdot JD$; $KA \cdot KB = KE \cdot KF$ şi înmulţind relaţiile (1), (2) şi (3) membru cu membru obţin: $\frac{LJ}{LK} \cdot \frac{MK}{MI} \cdot \frac{NI}{NJ} = 1 \Rightarrow$ conform reciprocei teoremei lui Menelaus, punctele *L*, *M*, *N* coliniare.

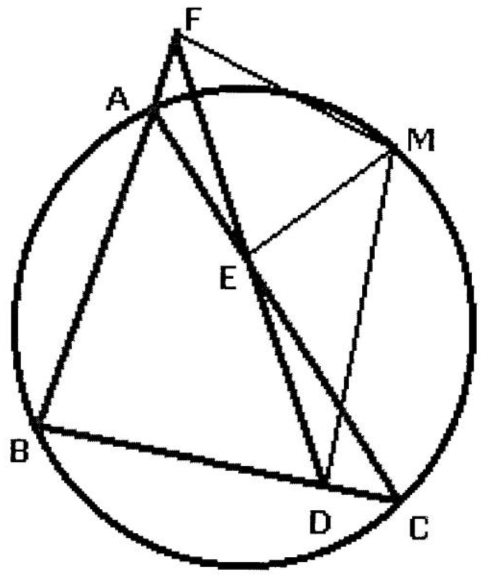
Dreapta lui Simson – Wallace

Enunţ: Proiecţiile ortogonale ale unui punct pe cercul circumscris triunghiului *ABC* pe laturile acestuia sunt coliniare.

Demonstraţie: Fie *D* proiecţia lui *M* pe *BC*, *E* proiecţia lui *M* pe *AC* şi *F* proiecţia lui *M* pe *AB*. Vom uni separat *E* cu *F* şi *E* cu *D*. Patrulaterele *AEMF*, *MEDC*, *FBDM* sunt inscriptibile.

Avem: $\sphericalangle DEC = \sphericalangle DMC = 90° - \sphericalangle DCM = 90° - \sphericalangle FAM = \sphericalangle FMA = \sphericalangle FEA$.

Deci, $\sphericalangle FEA \equiv \sphericalangle DEC$ (opuse la vârf) şi deci *D, E* şi *F* sunt coliniare.



Problemă: ***Dreapta lui Simson***

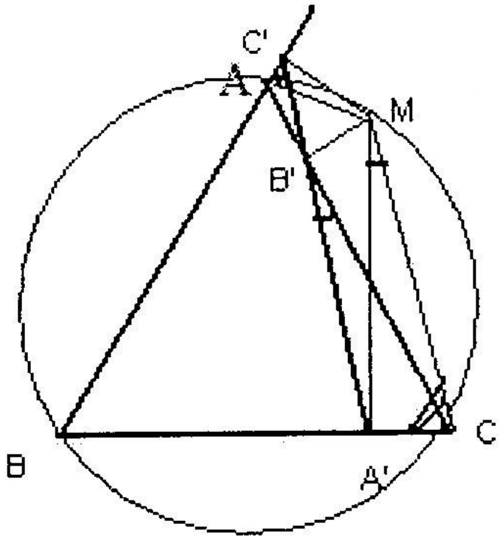
Să se demonstreze că proiecţiile ortogonale ale unui punct *M* de pe cercul circumscris unui triunghi pe laturile acestuia sunt puncte coliniare.

Demonstraţie:

Fie $A' = pr_{BC}M, B' = pr_{AC}M, C' = pr_{AB}M$.

Unim *B'* cu *A'* şi separat *B'* cu C'.

Patrulaterele *ABCM*, *A'CMB'*, $AB'MC'$ sunt inscriptibile.



Avem:

$$m(\sphericalangle A'B'C)=m(\sphericalangle A'MC)=90^\circ-m(\sphericalangle A'CM)=90^\circ-m(\sphericalangle C'AM)=$$

$=m(\sphericalangle C'MA)=m(\sphericalangle C'B'A)$ deci $\sphericalangle A'B'C=\sphericalangle C'B'A \Rightarrow$ punctele A', B', C'- sunt puncte coliniare.

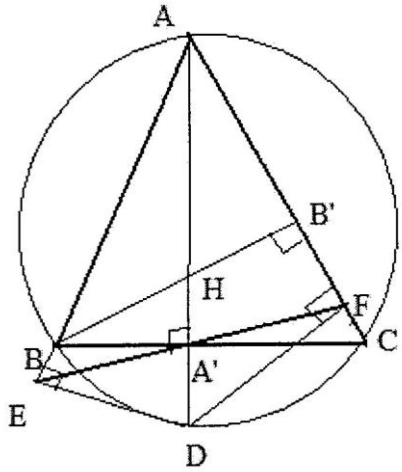
Cu ajutorul reciprocei teoremei lui Simson:

Problemă:

Fie *H* – ortocentrul triunghiului *ABC* şi *A'* – piciorul înălţimii din A. Se notează cu *D* – simetricul lui *H* faţă de *A'* şi fie $E=pr_{AB}D, F=pr_{AC}D$. Să se demonstreze că punctele *E, A'* şi *F* – sunt coliniare.

Demonstraţie:

Din ***Teorema lui Simson,*** *ştim că simetricul ortocentrului unui triunghi se află pe cercul circumscris triunghiului*



Punctele *A', E, F* sunt proiecţiile unui punct D de pe cercul circumscris triunghiului *ABC* pe laturile acestuia.

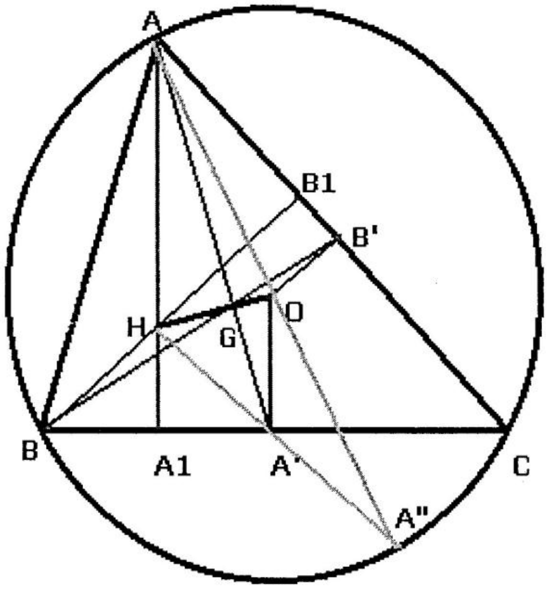
Conform teoremei lui Simson, punctele *A', F* şi *E* sunt puncte de pe dreapta lui Simson a punctului *D* în raport cu triunghiul *ABC*.

Fiind pe aceeaşi dreaptă, punctele *A', F* şi *E* sunt puncte coliniare.

Dreapta lui Euler

Enunţ: În orice triunghi ortocentrul (*H*), centrul de greutate (*G*) şi centrul cercului circumscris triunghiului (*O*), sunt coliniare. Dreapta determinată de aceste puncte se numeşte dreapta lui Euler.

Demonstraţie: 1) Dacă triunghiul *ABC* este isoscel sau dreptunghic, atunci cele trei puncte se găsesc pe o mediană.



2) Fie triunghiul *ABC* ascuţitunghic. În cazul în care *ABC* este obtuzunghic, consideraţiile de mai jos rămân valabile. $\Delta HAB \sim \Delta OA'B'$ (au laturile paralele). Din teorema fundamentală a asemănării avem: $\frac{HA}{OA'} = \frac{HB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{HA}{OA'} = \frac{1}{2}$.

Dar şi $\Delta OGA' \sim \Delta HGA$ conform cazului al doilea de asemănare, de unde $\sphericalangle OA'G \equiv \sphericalangle AGH$. Conform metodei 3, va rezulta că punctele *O, G* şi *H* sunt coliniare.

Dreapta ortică

Enunţ: Fie triunghiul *ABC* şi fie: $A'=\mathrm{Pr}_{BC}A, B'=\mathrm{Pr}_{AC}B$ şi $C'=\mathrm{Pr}_{AB}C$. Fie $BC\cap B'C'=\{M\}, AB\cap A'B'=\{N\}$ şi $AC\cap A'C'=\{P\}$.

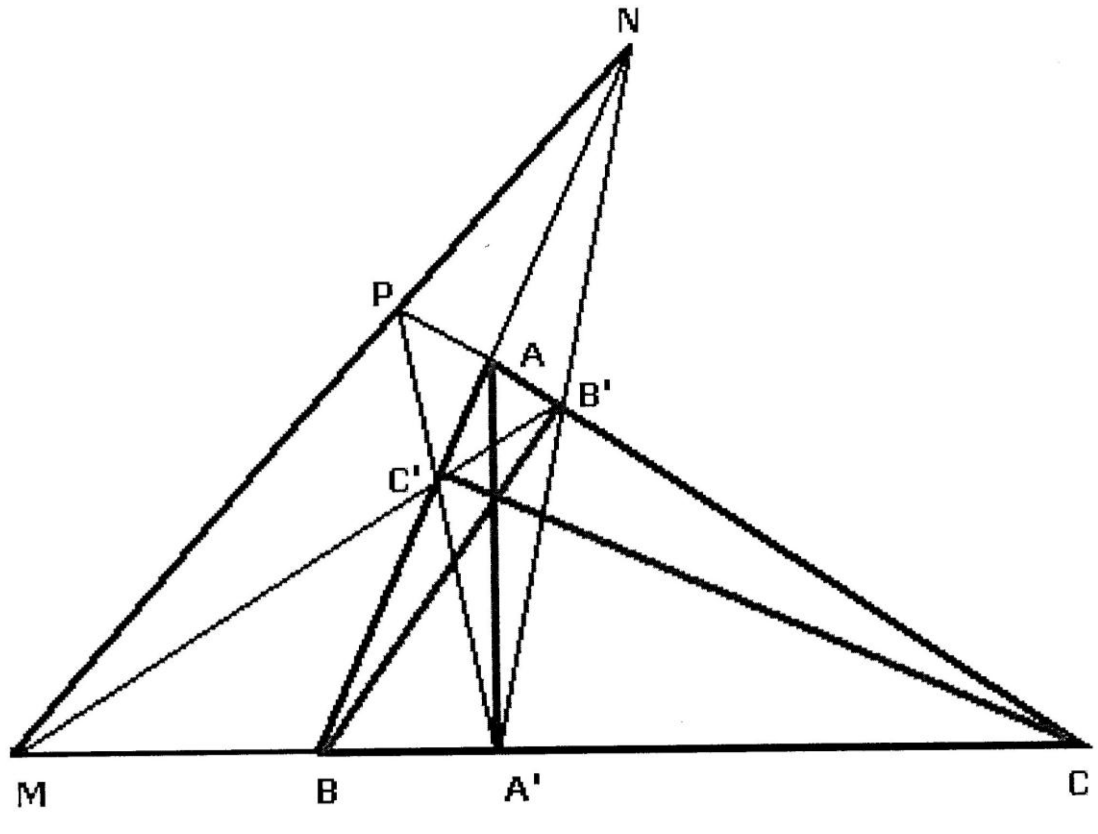
Atunci punctele *M, N* şi *P* sunt coliniare. Dreapta determinată de aceste puncte se numeşte dreapta ortică.

Demonstraţie: Se va aplica metoda a 5-a de demonstrare a coliniarităţii. Se aplică teorema lui Menelaus în următoarele cazuri:

ΔABC şi A',C',P - coliniare; ΔABC şi B',C',M - coliniare;

ΔABC şi A',B',N - coliniare; şi se obţin relaţiile:

$\frac{PA}{PC}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=1$; (1), $\frac{MB}{MC}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$; (2), $\frac{NA}{NB}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1$; (3)

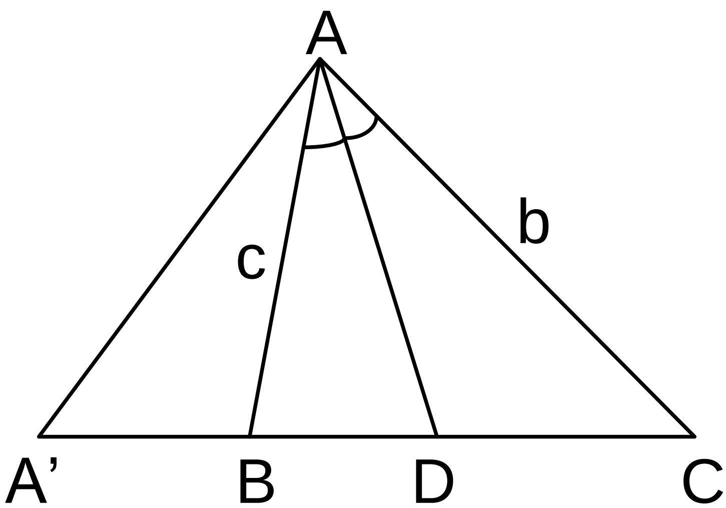


Se aplică apoi în triunghiul *ABC*, teorema lui Ceva, unde: $AA'\cap BB'\cap CC'=\{H\}$ şi avem relaţia: $\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$; (4).

Prin înmulţirea relaţiilor (1), (2), (3) şi (4) se va obţine: $\frac{PC}{PA} \cdot \frac{NA}{NB} \cdot \frac{MB}{MC} = 1$ ceea ce înseamnă că punctele *M, N* şi *P* sunt coliniare.

Dreapta antiortică

Enunţ: Se consideră un triunghi neisoscel *ABC*. Bisectoarea exterioară corespunzătoare vârfului *A* intersectează dreapta *BC* în punctul A'. Analog se obţin punctele B' şi C'. Atunci punctele A', B' şi C' se găsesc pe o aceeaşi dreaptă (numită dreaptă antiortică a triunghiului *ABC*).



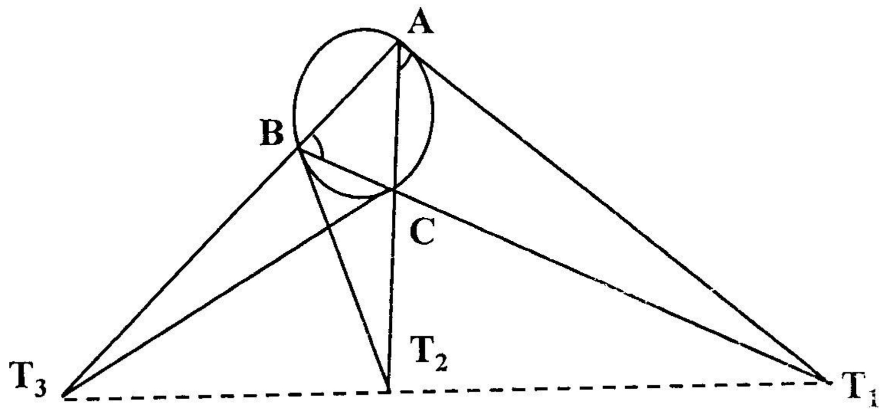
Fie *a, b, c* lungimile laturilor triunghiului. Conform teoremei bisectoarei unghiului exterior, rezultă $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$. Analog se obţin egalităţile: $\frac{B'C}{B'A} = \frac{a}{c}$ şi $\frac{C'A}{C'B} = \frac{b}{a}$. Înmulţind ultimele trei relaţii, se obţine: $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$ şi folosind reciproca teoremei lui Menelaus (pentru triunghiul *ABC* şi punctele A', B', C' situate pe prelungirile laturilor triunghiului) se obţine că punctele A', B', C' sunt coliniare.

Teorema lui Carnot

Tangentele la cercul circumscris triunghiului *ABC* în punctele *A*, *B*, *C* întâlnesc laturile opuse în punctele T_1, T_2, T_3 coliniare.

Observaţie: Problema lui Carnot este un caz particular al problemei lui Pascal. Dreapta care conţine punctele T_1, T_2, T_3 se numeşte dreapta lui Lemoine a triunghiului *ABC*.

Demonstraţie: $\Delta T_1AC \sim \Delta T_1BA$ (conform cazului de asemănare U.U.) $\Rightarrow \frac{T_1A}{T_1B} = \frac{AC}{BA} = \frac{T_1C}{T_1A} \Rightarrow (1)\frac{T_1C}{T_1B} = \frac{AC^2}{AB^2}$.

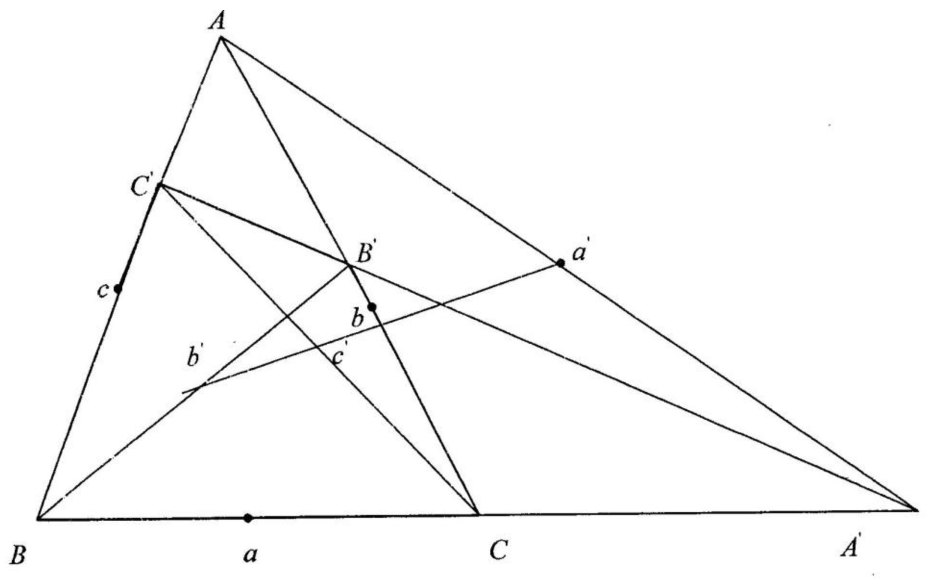


Analog se obţin relaţiile: $(2)\frac{T_2A}{T_2C} = \frac{AB^2}{CB^2}$ şi $(3)\frac{T_3A}{T_3C} = \frac{CB^2}{AC^2}$.

Înmulţind membru cu membru relaţiile (1), (2) şi (3) se obţine: $(2)\frac{T_1C}{T_1B} \cdot \frac{T_2A}{T_2C} \cdot \frac{T_3B}{T_3A} = \frac{AC^2}{AB^2} \cdot \frac{AB^2}{CB^2} \cdot \frac{CB^2}{AC^2} = 1$ conform reciprocii teoremei lui Menelaus, punctele T_1, T_2, T_3 sunt coliniare.

Dreapta lui Gauss a patrulaterului

Să se arate că mijloacele diagonalelor unui patrulater complet sunt trei puncte coliniare.



În demonstraţie vom folosi teorema lui Menelaus. Considerăm patrulaterul complet $BCB'C'A'A$. Aplicăm teorema lui Menalaus pentru ΔABC şi $A'-B'-C'$ puncte coliniare, obţinem:

$$\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1 \text{ (1)}$$

Se consideră triunghiul având ca vârfuri mijloacele *a, b, c* ale laturilor [*BC*], [*CA*], [*AB*] ale ΔABC.

Notăm cu a',b',c' mijloacele diagonalelor $[AA'],[BB'],[CC']$ ale patrulaterului complet. Se observă că paralela dusă prin punctul a' la dreapta *BC* conţine punctele *b* şi *c*. $(a'b \parallel A'C$ şi $a'c \parallel A'B)$. Analog $b' \in ca$ şi $c' \in ab$.

Din relaţia (1) rezultă

$$\frac{\frac{A'B}{2}}{\frac{A'C}{2}}\cdot\frac{\frac{B'C}{2}}{\frac{B'A}{2}}\cdot\frac{\frac{C'A}{2}}{\frac{C'B}{2}}=1 \text{ adică } \frac{a'c}{a'b}\cdot\frac{b'a}{b'c}\cdot\frac{c'b}{c'a}=1.$$

Deoarece $b' \in [ac], c' \in [ba], a' \in [cb]$, putem folosi reciproca teoremei lui Menelaus pentru Δabc şi punctele a', b', c'. Obţinem astfel că punctele a', b', c' sunt coliniare, dreapta pe care se află aceste puncte numindu-se dreapta lui Gauss.

CAPITOLUL III

CONCURENŢĂ

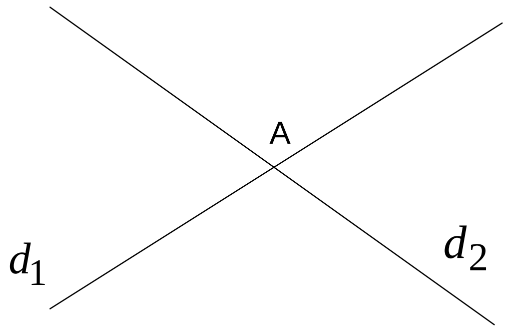
III.1. CE ESTE O PROBLEMĂ DE CONCURENŢĂ? CRITERII DE CONCURENŢĂ (EXEMPLIFICĂRI)

Noţiunea de concurenţă

Problemele de concurenţă a unor drepte reprezintă unele proprietăţi simplu de intuit, dar în a căror demonstraţie sunt incluse raţionamente exacte şi o gamă largă de tehnici specifice, solicitând rezolvitorului perspicacitate şi cultură matematică.

Definiţia 1

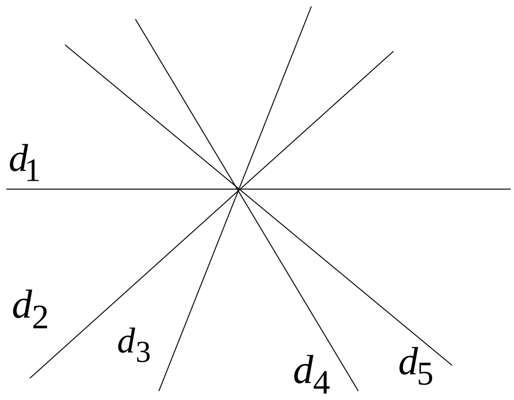
Două drepte coplanare d_1, d_2 se numesc **drepte concurente** dacă au un singur punct comun. Notăm $d_1 \cap d_2 = \{A\}$ sau $d_1 \cap d_2 \neq \phi$, unde punctul *A* se numeşte **punct de concurenţă** sau **punct comun al celor două drepte**.



Observaţie: Dacă cele două drepte coplanare nu sunt concurente, atunci ele fie **coincid** (au o infinitate de puncte comune), fie sunt **paralele** (nu au nici un punct comun).

Definiţia 2

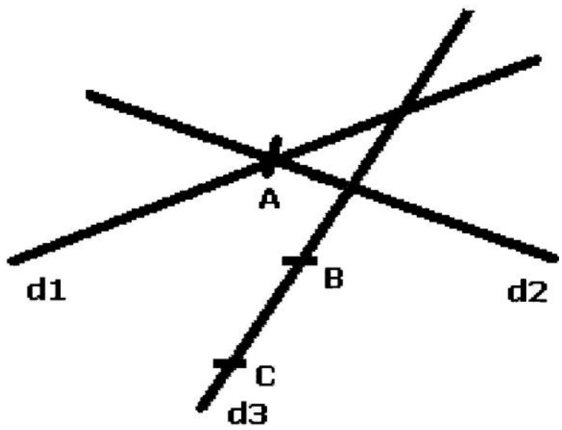
Trei sau mai multe drepte coplanare sau nu, care au un singur punct comun se numesc **drepte concurente** (*O* – punctul de concurenţă).



EXEMPLE ILUSTRATIVE

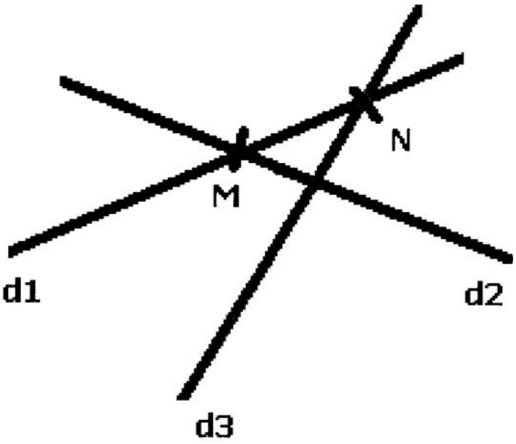
Dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt concurente dacă $d_1 \cap d_2 \cap d_3 = \{O\}$.

1. Fie $\{A\} = d_1 \cap d_2, B, C \in d_3$. Dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt concurente dacă punctele *A, B, C* sunt coliniare.



Observaţie: În acest caz se poate observa cum rezolvarea unei probleme de concurenţă necesită de fapt rezolvarea unei probleme de coliniaritate.

2. Fie $\{M\} = d_1 \cap d_2$ şi $\{N\} = d_1 \cap d_3$. Dreptele considerate sunt concurente numai dacă punctele *M* şi *N* concid.



Observaţie: Procedeul este utilizat în rezolvarea problemelor de concurenţă prin metoda reducerii la absurd.

3. Cele trei drepte sunt *mediane* sau *bisectoare* sau *înălţimi* sau *mediatoare* ale unui anumit triunghi. Demonstrată fiind concurenţa acestora, rezultă că cele trei drepte sunt concurente.

4. Se poate arăta că dacă a doua dreaptă taie şi împarte un segment din prima dreaptă în acelaşi raport în care îl taie şi îl împarte cea de-a treia dreaptă, atunci cele trei drepte sunt concurente.

5. Dreptele A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 sunt concurente dacă şi numai dacă

$$\exists x^1, x^2, x^3 \in \mathbb{R} \left| (1-x^1)\overrightarrow{OA_1} + x^1\overrightarrow{OB_1} = (1-x^2)\overrightarrow{OA_2} + x^2\overrightarrow{OB_2} = (1-x^3)\overrightarrow{OA_3} + x^3\overrightarrow{OB_3} \right.$$

unde O este un punct oarecare, fixat.

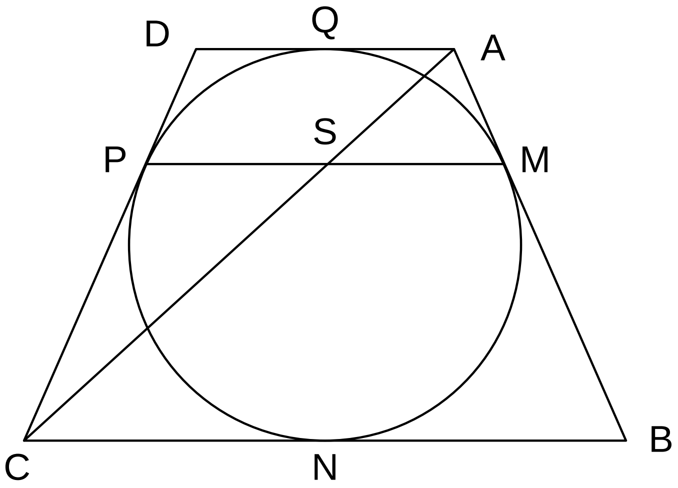
6. Dacă planul euclidian este raportat la un s.c.c.o. şi

$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$
$d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$, d_1, d_2, d_3 sunt concurente dacă şi numai dacă:
$d_3 : a_3x + b_3y + c_3 = 0$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Problema 1:

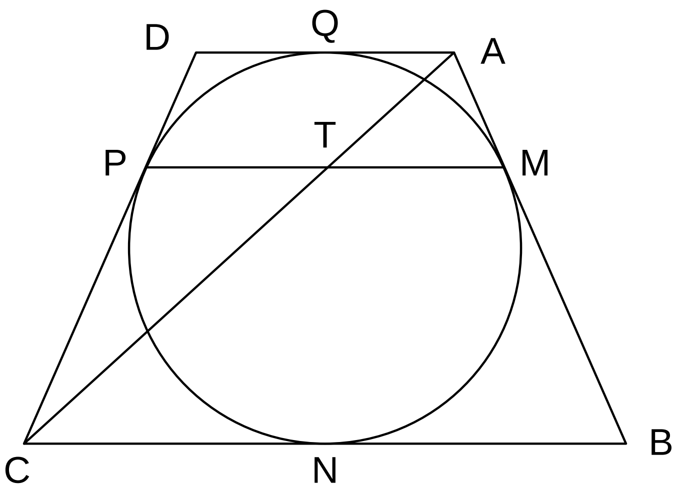
Fie un patrulater circumscriptibil *ABCD* şi $M \in AB, N \in BC, Q \in DA$ punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile. Să se arate că dreptele *AC, BD, MP, NQ* sunt concurente.



Soluţie:

Fie $\{S\} = AC \cap NQ$.

Avem: $m(\sphericalangle AQN) + m(\sphericalangle QNC) = \dfrac{m(\sphericalangle QMN) + m(\sphericalangle NPQ)}{2} = 180°$ şi deci $\sin(\sphericalangle AQS) = \sin(\sphericalangle QNC)$. Aplicând teorema sinusurilor în triunghiurile ΔAQS şi ΔCSN obţinem relaţia $\dfrac{AS}{CS} = \dfrac{AQ}{CN}$ (1).

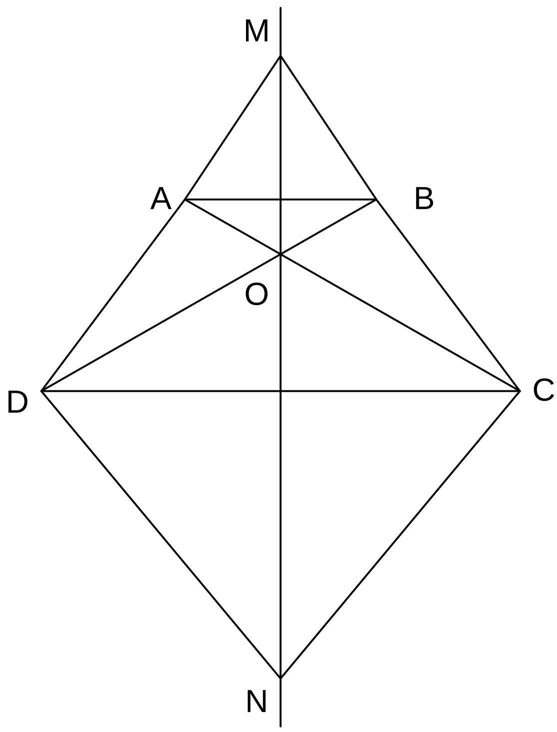


Fie $\{T\} = AC \cap MP$. Analog ca mai sus, obţinem relaţia $\sin(\sphericalangle AMT) = = \sin(\sphericalangle CPT)$ şi aplicând teorema sinusurilor în triunghiurile ΔATM şi ΔCTP obţinem relaţia $\frac{AT}{CT} = \frac{AM}{CP}$ (2).

Deoarece $AM = AQ, CN = CP$, din relaţiile (1) şi (2) rezultă că $\frac{AS}{CS} = \frac{AT}{CT}$, adică punctele *S* şi *T* coincid. Deci dreptele *MP, NQ, AC* sunt concurente.

Problema 2:

Fie un trapez *ABCD* ($AB \parallel CD$). Se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale *ABM* şi *CDM*. Să se arate că dreptele *AC, BD* şi *MN* sunt concurente.



Soluţie:

Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Deoarece $\Delta OAB \sim \Delta OCB$ rezultă $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{DC}$ şi cum $AB = AM, DC = CN$, obţinem: $\frac{OA}{OC} = \frac{AM}{CN}$ (1).

Dar $m(\sphericalangle MAO) = 60 + m(\sphericalangle BAO) = m(\sphericalangle DCN) + m(\sphericalangle OCD) = m(\sphericalangle OCN)$ şi deci $\Delta MAO \sim \Delta NCO$ (conform relaţiei (1)). Obţinem astfel că $m(\sphericalangle MOA) =$ $= m(\sphericalangle NOC)$, adică $O \in MN$ şi dreptele *AC, BD, MN* sunt concurente.

Problema 3:

Se consideră într-un s.c.c.o. următoarele drepte:

$d_1 : 2x - y + 3 = 0$

$d_2 : x + 2y - 4 = 0$

$d_3 : 10x + 5y - 7 = 0$.

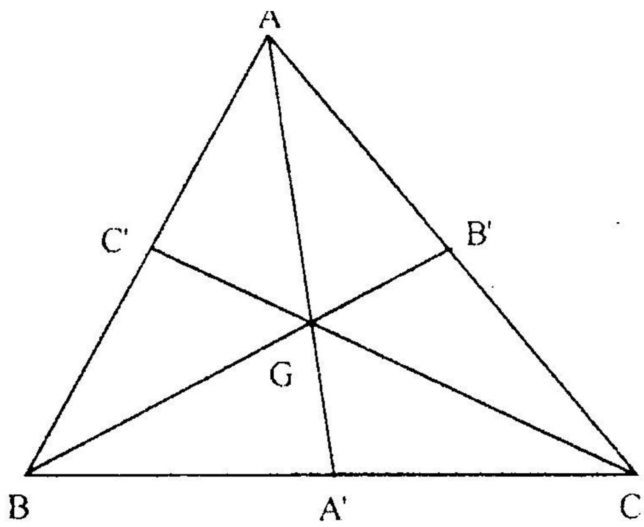
Stabiliţi dacă cele trei drepte sunt concurente.

Soluţie: Calculând: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 10 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 0$. Deci dreptele date în enunţ sunt concurente.

Concurenţa liniilor importante în triunghi

Medianele unui triunghi sunt concurente în punctul G (centrul de greutate al triunghiului).

Demonstraţie: Fie AA', BB', CC' medianele triunghiului *ABC*. Atunci A', B', C' sunt mijloacele laturilor [*BC*], [*CA*], respectiv [*AB*].



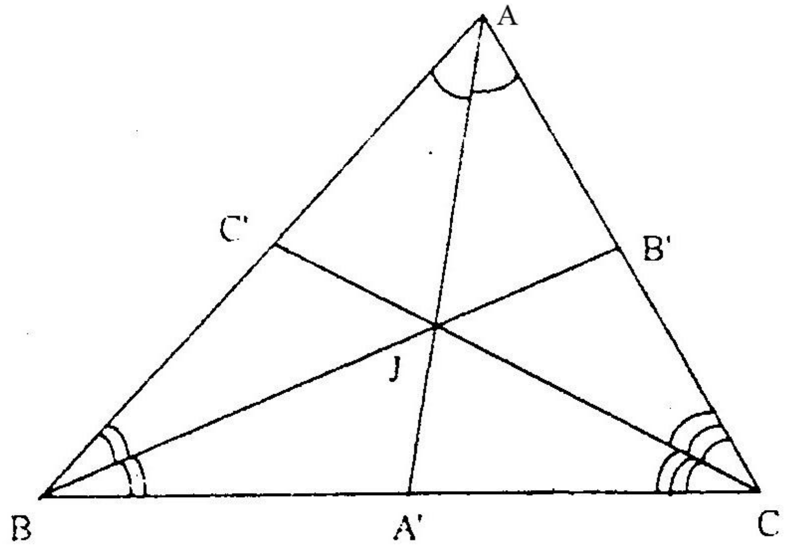
Aplicăm reciproca teoremei lui Ceva şi obţinem: $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$, adică medianele sunt concurente.

Bisectoarele interioare ale unghiurilor unui triunghi sunt concurente în I (cercul cercului înscris).

Demonstraţie: Cu teorema bisectoarei interioare obţinem: $\frac{A'B}{A'C} = \frac{AB}{AC}$, $\frac{B'C}{B'A} = \frac{BC}{BA}$ şi $\frac{C'A}{C'B} = \frac{CA}{CB}$.

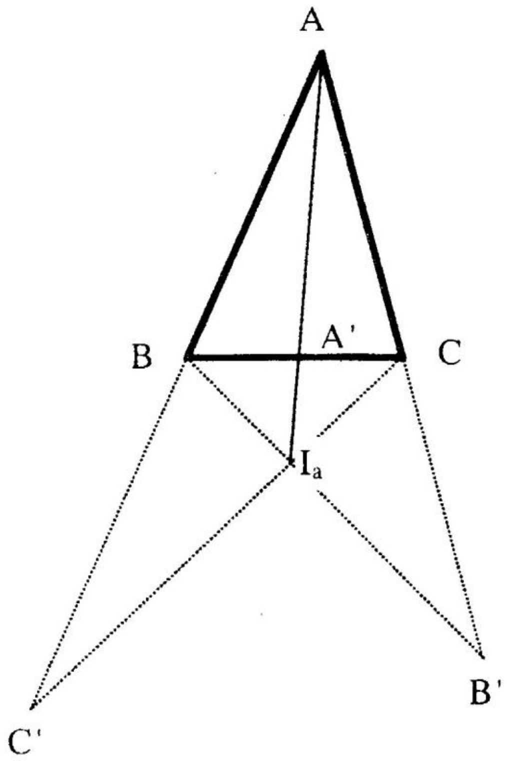
Prin înmulţirea relaţiilor de mai sus membru cu membru obţinem:

$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{CB} = 1$, de unde conform reciprocei teoremei lui Ceva obţinem că bisectoarele interioare ale unghiurilor unui triunghi sunt concurente.



Bisectoarele exterioare a două unghiuri a unui triunghi sunt concurente cu bisectoarea interioară a celui de-al treilea unghi într-un punct I_a (centrul cercului exînscris).

Demonstrație: Cu teorema bisectoarei interioare pentru AA' obținem: $\frac{A'B}{A'C} = \frac{AB}{AC}$. Cu teorema bisectoarei exterioare pentru BB' și CC' obținem: $\frac{B'C}{B'A} = \frac{BC}{BA}$ și $\frac{C'A}{C'B} = \frac{CA}{CB}$.



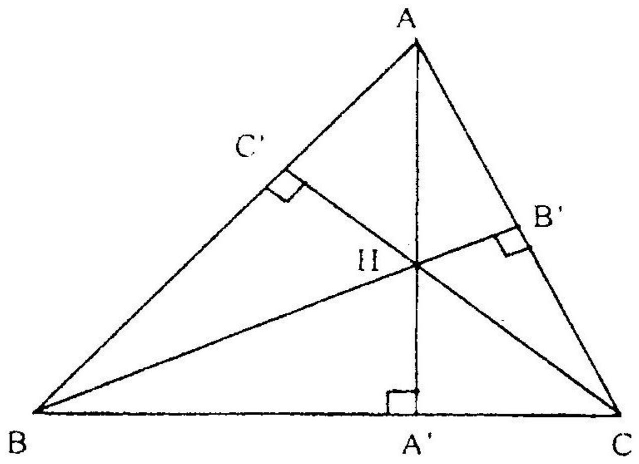
Înmulțind membru cu membru cele trei relații de mai sus obținem:

$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{CB} = 1$ de unde conform reciprocei lui Ceva rezultă că cele două bisectoare exterioare și bisectoarea interioară sunt concurente în I_a.

Înălțimile unui triunghi sunt concurente în punctul H (ortocentrul triunghiului)

Demonstrație: Fie AA', BB', CC' înălțimile triunghiului *ABC*.

Din asemănarea triunghiurilor $A'AB$ și $C'CB$ obținem: $\frac{A'B}{C'B} = \frac{AB}{BC}$. (1)



Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice $BB'C$ şi $AA'C$ obţinem:

$$\frac{B'C}{A'C}=\frac{BC}{AC}.\ (2).$$

Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice $C'CA$ şi $B'BA$ obţinem:

$$\frac{C'A}{B'A}=\frac{AC}{AB}.\ (3)$$

Din relaţiile (1), (2) şi (3) prin înmulţire membru cu membru obţinem:

$$\frac{A'B}{C'B}\cdot\frac{B'C}{A'C}\cdot\frac{C'A}{B'A}=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{BC}{AC}\cdot\frac{AC}{AB}=1,$$

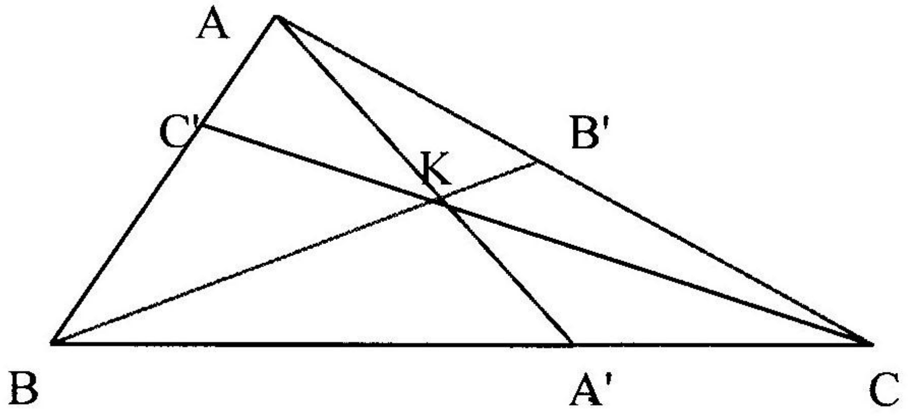
care se mai scrie:

$$\frac{A'B}{C'B}\cdot\frac{B'C}{A'C}\cdot\frac{C'A}{B'A}=1$$

şi conform reciprocei teoremei lui Ceva, înălţimile AA', BB', CC' sunt concurente.

III.2. TEOREMA LUI CEVA. APLICAŢII

Se dă ΔABC şi dreptele concurente $AA', BB', CC' \neq$ laturi atunci $\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1.$



Reciproca: Se dă ΔABC, A' aparţine lui BC, B' aparţine lui CA, C' aparţine lui $AB \neq$ vârfuri, situate pe laturi sau un punct pe o latură şi două pe prelungirile laturilor.

Dacă $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1 \Rightarrow$ dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.

1) În orice triunghi înălţimile sunt concurente.

Soluţia I. Cu reciproca teoremei lui Ceva verificăm dacă: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

$\Delta AB_1B \sim \Delta AC_1C$ pentru că au unghiul A comun $\Rightarrow \frac{AC_1}{B_1A} = \frac{CC_1}{BB_1} = \frac{AC}{AB}$.

$\Delta CB_1B \sim \Delta CA_1A \Rightarrow \frac{CB_1}{A_1C} = \frac{BB_1}{AA_1} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{AC_1}{B_1A} \cdot \frac{BA_1}{C_1A} \cdot \frac{CB_1}{A_1C} = \frac{CC_1}{BB_1} \cdot \frac{AA_1}{CC_1} \cdot \frac{BB_1}{AA_1} = 1$ sau

$\frac{AC_1}{B_1A} \cdot \frac{BA_1}{C_1A} \cdot \frac{CB_1}{A_1C} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} = 1$ deci conform reciprocei teoremei lui Ceva $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = \{H\}$ ortocentrul triunghiului.

Soluţia a II-a. Cu ajutorul funcţiilor trigonometrice:

$AC_1 = AC \cdot \cos(\sphericalangle A)$

$C_1B = BC \cdot \cos(\sphericalangle B)$

$BA_1 = AB \cdot \cos(\sphericalangle B)$

$$A_1C = AC \cdot \cos(\sphericalangle C)$$

$$CB_1 = BC \cdot \cos(\sphericalangle C)$$

$$B_1A = AB \cdot \cos(\sphericalangle A)$$

$$\Rightarrow \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC \cdot \cos(\sphericalangle A)}{BC \cdot \cos(\sphericalangle B)} \cdot \frac{AB \cdot \cos(\sphericalangle B)}{AC \cdot \cos(\sphericalangle C)} \cdot \frac{BC \cdot \cos(\sphericalangle C)}{AB \cdot \cos(\sphericalangle A)} = 1$$ deci

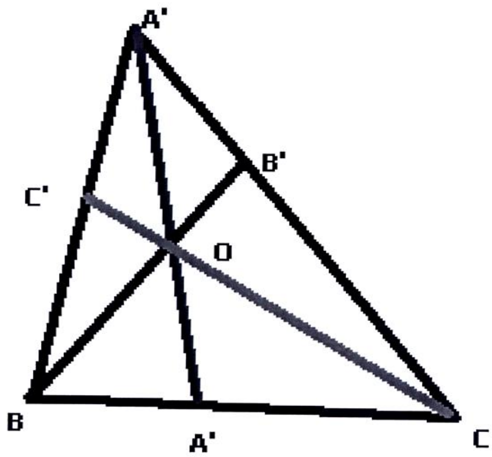
conform teoremei lui Ceva înălţimile sunt concurente.

2) Demonstraţi că bisectoarele unui triunghi sunt concurente.

Soluţie: Verificăm dacă: $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$

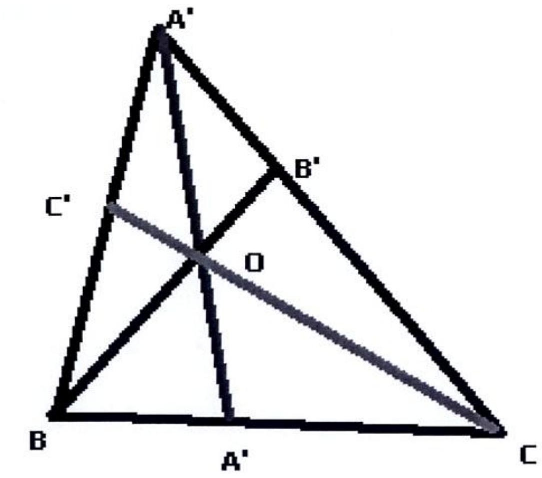
Reciproca teoremei lui Ceva

Trebuie demonstrată relaţia: $\frac{AB'}{CB'} \cdot \frac{CA'}{BA'} \cdot \frac{BC'}{AC'} = 1.$



Reciproca teoremei lui Ceva sub formă trigonometrică

Trebuie demonstrată relaţia: $\frac{\sin(\sphericalangle BAB')}{\sin(\sphericalangle CAA')} \cdot \frac{\sin(\sphericalangle ACC')}{\sin(\sphericalangle BCC')} \cdot \frac{\sin(\sphericalangle CBB')}{\sin(\sphericalangle ABB')} = 1.$

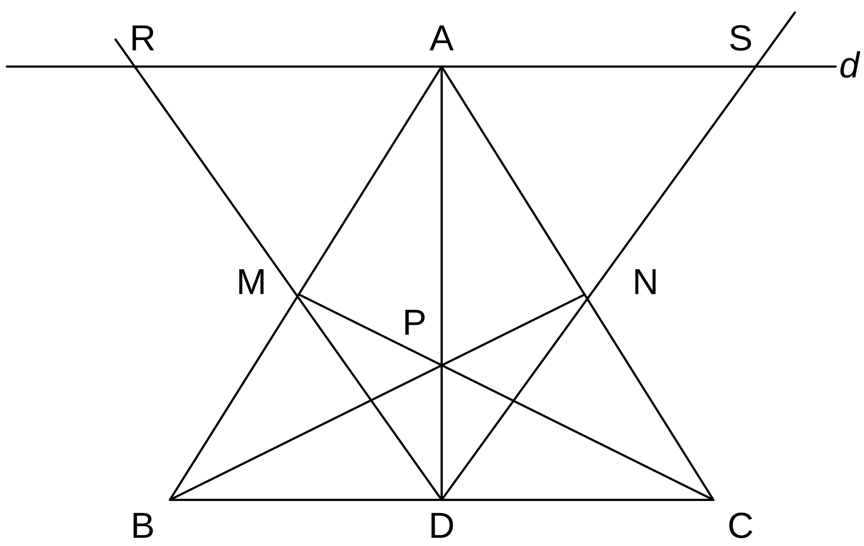


Problemă:

Se consideră triunghiul *ABC*, înălţimea [*AD*] şi punctele $M \in (AB), N \in (AC)$. Să se demonstreze că (*DA* este bisectoarea unghiului *MDN* dacă şi numai dacă dreptele *AD*, *BN* şi *CM* sunt concurente.

Soluţie:

Construim prin *A* dreapta *d* paralelă cu *BC*. Dreapta *d* intersectează dreptele *DM* şi *DN* în punctele *R* şi *S*. Observăm că $\Delta ARM \sim \Delta BDM$ şi $\Delta ASN \sim \Delta CDN$ rezultând astfel $\frac{AR}{BD} = \frac{AM}{BM}$ respectiv $\frac{AS}{CD} = \frac{AN}{CN}$. Obţinem astfel: $AR = \frac{AM \cdot BD}{BM}$ respectiv $AS = \frac{AN \cdot CD}{CN}$.



Dar [AD] este înălţime şi pentru ΔDRS. Astfel (DA este bisectoarea unghiului $\sphericalangle RDS$ dacă şi numai dacă ΔDRS este isoscel sau dacă şi numai dacă [AD] este mediană a sa, rezultă că $AR = AS$.

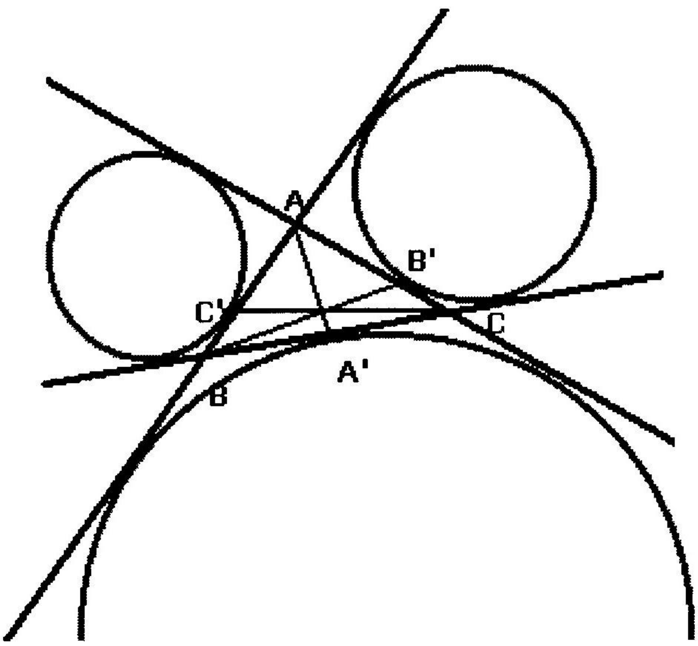
Această egalitate este echivalentă cu: $\frac{AM \cdot BD}{BM} = \frac{AN \cdot CD}{CN}$ care mai poate fi scrisă astfel: $\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CN}{AN} = 1$. Deci AD, BN, CM sunt drepte concurente.

III.3. TEOREME CELEBRE DE CONCURENŢĂ

Punctul lui Nagel

Enunţ: Dacă A', B' şi C' sunt punctele de contact ale cercurilor exînscrise cu laturile triunghiului ABC $\left(A' \in (BC), B' \in (AC), C' \in (AB)\right)$ atunci dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente într-un punct (numit punctul lui Nagel).

Demonstraţie: Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului $(BC = a, AC = b, AB = c)$ şi fie p semiperimetrul triunghiului. Notăm $x = BA', y = A'C$ şi avem: $x + y = a$ şi $x + c = y + b \Rightarrow 2x + c = a + b$, adică $x = p - c$ şi $y = p - b$. Prin urmare obţinem: $\frac{A'B}{A'C} = \frac{p-b}{p-c}$.



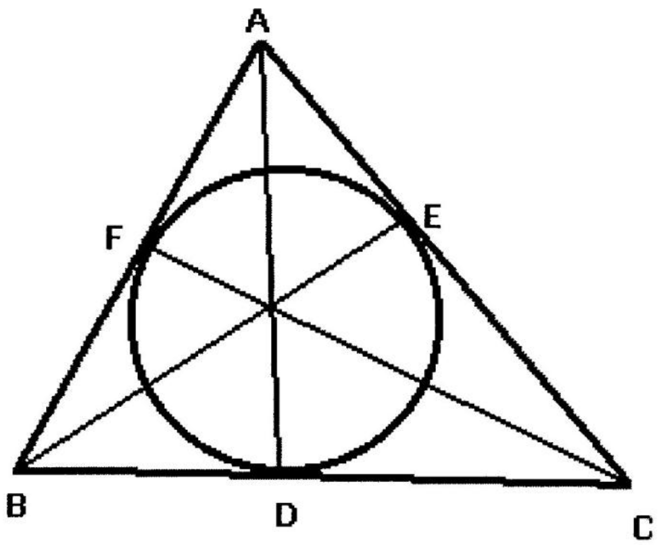
Procedând în mod analog, se obţin relaţiile: $\frac{B'C}{B'A}=\frac{p-a}{p-c}$ şi $\frac{C'A}{C'B}=\frac{p-b}{p-a}$.

Înmulţind aceste trei relaţii obţinem $\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1$ şi conform reciprocei teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente.

Punctul lui Gergonne

Enunţ: Într-un triunghi *ABC* dreptele care unesc vârfurile triunghiului cu punctele de contact ale cercului înscris cu laturile opuse sunt concurente într-un punct (numit punctul lui Gergonne).

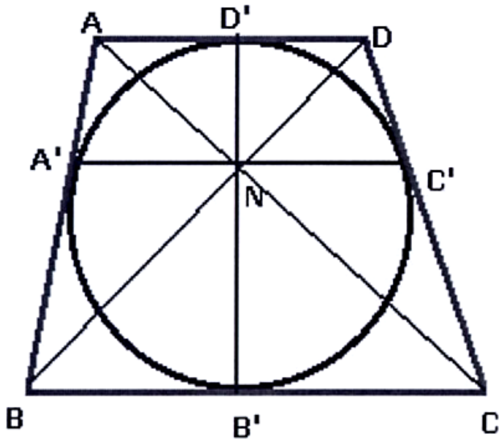
Demonstraţie: Notăm punctele de contact cu *D, E* şi *F*, unde $D\in BC, E\in AC$ şi $F\in AB$. Vom folosi reciproca teoremei lui Ceva pentru a arăta că are loc relaţia: $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1(*)$. Dar $BD\equiv BF, CE\equiv CD$ şi $AE\equiv AF$ (tangentele duse dintr-un punct exterior la un cerc sunt congruente). Deci relaţia (*) este evidentă, ceea ce înseamnă că *AD, BE* şi *CF* sunt concurente într-un punct.



Punctul lui Newton

Enunţ: Fie *ABCD* un patrulater circumscriptibil şi fie A', B', C' şi D' punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile patrulaterului. Atunci dreptele *AC, BD,* $A'C'$ şi $B'D'$ trec prin acelaşi punct *N* (numit punctul lui Newton).

Demonstrație: Notăm $\{N\} = AC \cap B'D', a = m(\sphericalangle AD'N)$ şi $b = m(\sphericalangle AND')$. Se observă că $m(\sphericalangle AD'N) + m(\sphericalangle NB'C) = 180°$. Vom aplica teorema sinusurilor în triunghiurile NAD' şi $NB'C$. Vom obține: $\frac{AD'}{\sin b} = \frac{AN}{\sin a}$ şi $\frac{B'C}{\sin b} = \frac{NC}{\sin a}$.



Din aceste două egalități vom avea că $\frac{AN}{NC} = \frac{AD'}{B'C}$ (1).

Fie $\{N'\} = AC \cap A'C'$. Procedăm ca în cazul anterior şi obținem: $\frac{AN'}{N'C} = \frac{AA'}{C'C}$ (2). Deoarece $AA' \equiv AD', CC' \equiv CB'$, din (1) şi (2) rezultă, ceea ce dovedeşte că $N = N'$, adică AC trece prin intersecția segmentelor $A'C'$ şi $B'D'$.

Analog se demonstrează că $N \in BD$.

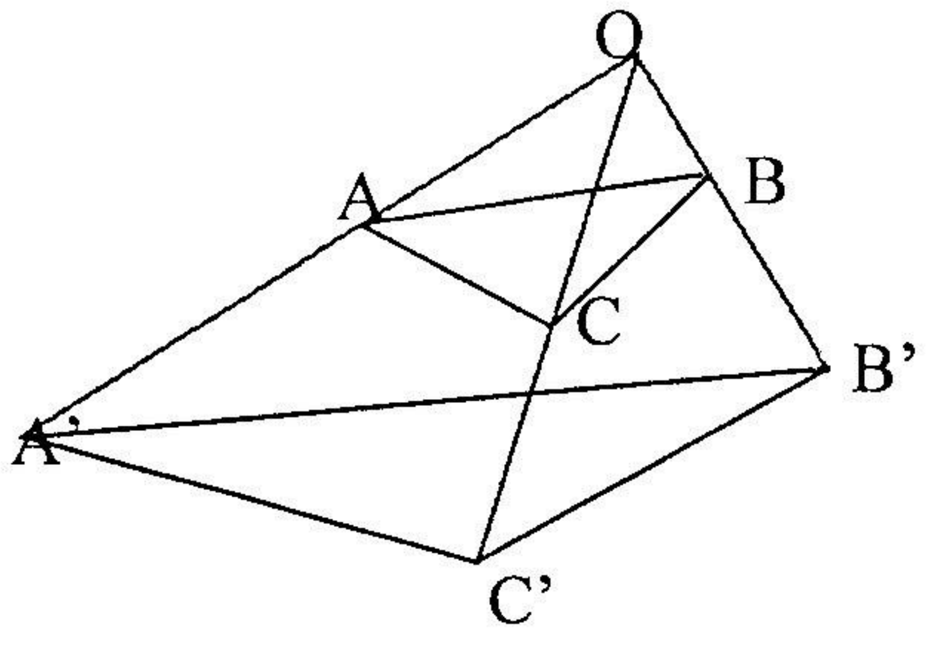
CAPITOLUL IV

CONSIDERAŢII METODICE

IV.1. DUALITATEA COLINIARITATE – CONCURENŢĂ

Problemele de coliniaritate şi concurenţă reprezintă, în general, adevăruri uşor de intuit, dar a căror demonstraţie include raţionamente exacte, şi o gamă largă de tehnici specifice care solicită rezolvitorului de probleme nu numai cultura matematică ci şi inventivitate.

Între problemele de concurenţă şi cele de coliniaritate există o strânsă legătură. Astfel pentru a demonstra că trei drepte d_1, d_2, d_3 sunt concurente, se consideră punctul *P* comun dreptelor d_1 şi d_2, precum şi punctele *M* şi *N* pe dreapta d_3. Atunci problema iniţială – stabilirea concurenţei celor trei drepte date – se reduce la a arăta că punctele *M, N, P* sunt coliniare.



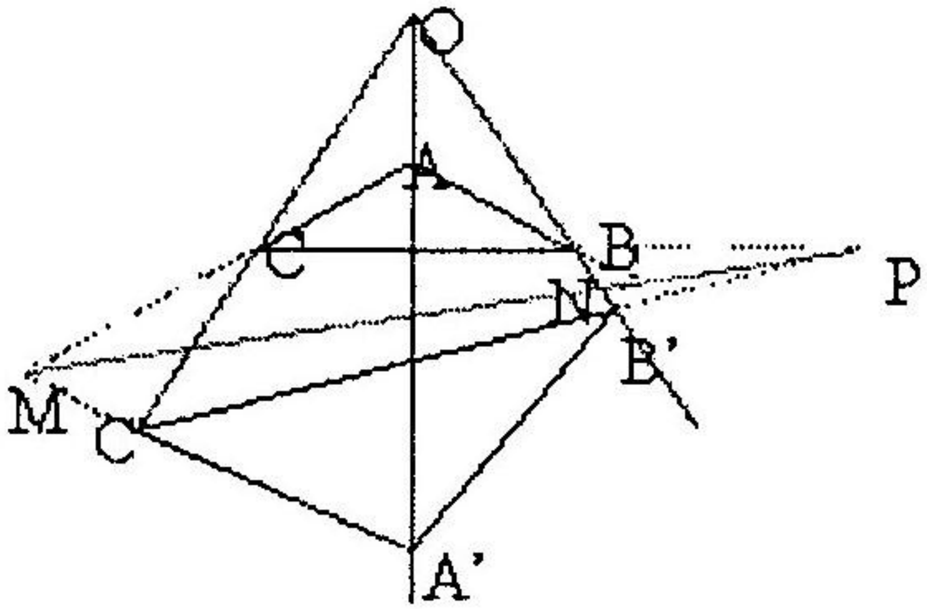
În geometria plană există un număr mare de propoziţii matematice foarte frumoase, care pun în evidenţă unele proprietăţi de coliniaritate a unor puncte, respectiv de concurenţă a unor drepte. O astfel de propoziţie matematică este teorema lui Desargues şi reciproca.

Definiţie: Triunghiurile *ABC* şi $A'B'C'$ se numesc omologice, dacă dreptele AA', BB', CC' sunt concurente. Punctul de concurenţă al acestor drepte, se numeşte centru de omologie al triunghiurilor *ABC* şi $A'B'C'$.

TEOREMA LUI DESARGUES

Dacă două triunghiuri *ABC* şi $A'B'C'$ sunt astfel situate încât dreptele AA', BB', CC' concurente, atunci laturile corespunzătoare *BC* şi $B'C$, *CA* şi CA', *AB* şi $A'B'$ se intersectează în puncte coliniare.

Demonstraţie: Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiurile *OBC* şi transversala $B'C', OCA$ şi transversala $A'C'$ şi *OAB* cu transversala $A'B'$ se obţin pe rând: $\frac{MB}{MC}\cdot\frac{CC'}{C'O}\cdot\frac{B'O}{BB'}=1; \frac{NC}{NA}\cdot\frac{AA'}{A'O}\cdot\frac{C'O}{CC'}=1; \frac{PA}{PB}\cdot\frac{BB'}{B'O}\cdot\frac{A'O}{AA'}=1;$ înmulţind cele trei relaţii membru cu membru se obţine $\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=1;$ deci conform reciprocei teoremei lui Menelaus, *M*, *N*, *P* coliniare.



Comentariu:

1. Dreapta care conţine punctele *M, N, P* se numeşte axa de omologie a celor două triunghiuri.

2. Dacă dreptele AA', BB', CC' sunt necoplanare şi toate trei se întâlnesc într-un punct *O*, astfel încât laturile triunghiurilor *ABC* şi $A'B'C'$ să nu fie respectiv paralele, atunci dreptele *BC* şi $B'C'$, *CA* şi $C'A'$, *AB* şi $A'B'$ se intersectează în puncte coliniare.

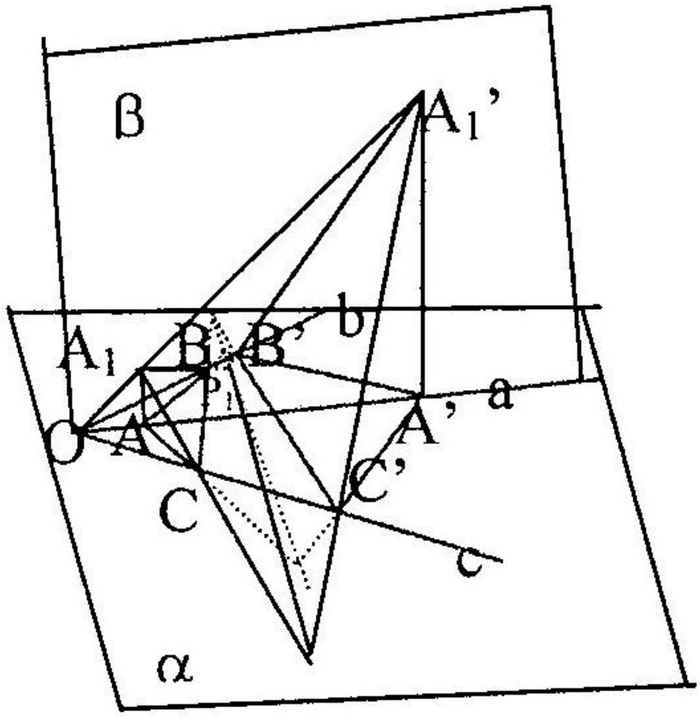
Demonstraţie: Punctele A, C, A', C' sunt situate pe dreptele concurente AA' şi CC', deci sunt coplanare. Dreptele *AC* şi $A'C'$ nu sunt paralele deci sunt concurente. Fie punctul lor de intersecţie *M*. Analog *AB* şi $A'B'$ se întâlnesc în *N* şi *BC* şi $B'C'$ sunt concurente în *P*. Dar punctele *M, N, P* aparţin pe de o parte planului *ABC* dar şi planului $A'B'C'$, deci sunt situate pe dreapta de intersecţie a celor două plane. Rezultă coliniaritatea punctelor *M, N, P*.

Observaţia 1: Dacă două din laturile triunghiurilor sunt paralele de exemplu *BC* şi $B'C'$, restul enunţului rămânând acelaşi, se dovedeşte uşor că $BC \parallel NM \parallel B'C'$.

Observaţia 2: Dacă laturile triunghiurilor *ABC* şi $A'B'C'$ sunt respectiv paralele, deci $(ABC) \parallel (A'B'C')$ şi convenind că două drepte paralele au un punct comun la infinit, respectiv două plane paralele au o dreaptă comună la infinit, în enunţul teoremei lui Desargues nu mai este nevoie de specificaţia că laturile triunghiurilor *ABC* şi $A'B'C'$ nu sunt respectiv paralele. Enunţul se simplifică, dar în acelaşi timp capătă un plus de încărcătură prin generalizare.

3. Teorema lui Desargues în plan mai poate fi demonstrată şi prin metoda proiecţiei. Această metodă permite rezolvarea unor probleme de geometrie plană cu ajutorul geometriei în spaţiu.

Demonstraţie: Fie *a, b, c* trei drepte în plan, concurente în *O* şi triunghiurile *ABC* şi $A'B'C'$ au vârfurile respectiv pe aceste drepte, laturile corespunzătoare nefiind paralele. Notând cu α planul dreptelor *a, b, c* şi β planul perpendicular pe α care trece prin *O* şi printr-o dreaptă a', care se proiectează pe planul α după dreapta *a*. Fie $pr_\alpha A_1 = A$ şi $pr_\alpha A_1' = A'$. Laturile triunghiurilor A_1BC şi $A_1'B'C'$ care îndeplinesc condiţia teoremei lui Desargues în spaţiu, se intersectează în punctele coliniare M_1, N_1, P_1, Pi care se vor proiecta în *M, N, P* pe planul α. Cum proiecţia unei drepte pe un plan este o dreaptă, sau un punct – însă în acest caz cum M_1N_1 nu este perpendiculara pe α, proiecţia nu poate fi un punct atunci ea este o dreaptă, deci *M, N, P* colineare.



Reciproca teoremei lui Desargues:

Fie triunghiurile *ABC* şi $A'B'C'$. Dacă laturile corespunzătoare *BC* şi $B'C'$, *AC* şi $A'C'$, *AB* şi $A'B'$ se intersectează în puncte colineare, atunci triunghiurile *ABC* şi $A'B'C'$ sunt omologice.

Demonstraţie: Presupunând ca *M, N, P* coliniare, atunci *M* este centru de omologie al triunghiurilor NCC' şi PBB', deci aceste triunghiuri au o axă de omologie care conţine punctele *O, A* şi *A'* definite astfel: $CC' \cap BB' = \{O\}$, $CN \cap BP = \{A\}$, $NC' \cap PB' = \{A'\}$, deci dreptele BB' şi CC' se intersectează în *O* situat pe AA' sau triunghiurile *ABC* şi $A'B'C'$ sunt omologice.

IV.2. REZOLVAREA PROBLEMELOR DE COLINIARITATE ŞI CONCURENŢĂ PRIN METODE ALTERNATIVE. EXEMPLIFICĂRI

În matematică, **prin metodă înţelegem calea care trebuie urmată în vederea rezolvării unei probleme.** În formarea priceperilor şi deprinderilor intervine cunoaşterea **metodelor generale** precum ar fi **analiza, sinteza, metoda reducerii la absurd** etc, valabile în toate ramurile matematicii şcolare, precum şi a metodelor specifice capitolului studiat.

După cum spunea matematicianul american G.Polya în lucrarea sa „Cum rezolvăm o problemă?”, în matematică nu există „o cheie magică” prin care s-ar deschide toate uşile şi ar rezolva toate problemele, ci se pot da numai sfaturi de abordare a rezolvării. Sfaturile date de profesor precum: descompunerea problemei în elemente componente, căutarea unor analogii, abordarea cazurilor particulare, folosirea desenului şi multe altele sunt binevenite, dar adevărata învăţare se realizează prin însăşi desfăşurarea acestei activităţi.

În lucrarea amintită anterior, Polya scria: „**Dacă vreţi să rezolvaţi o problemă trebuie... să rezolvaţi probleme**”. Este bine şi necesar să menţionăm două aspecte, aparent paradoxale:

l. De multe ori se învaţă mai cu folos prin rezolvarea unei probleme... rezolvate (folosindu-ne de alte metode);

2. Uneori, nerezolvarea unei probleme poate fi mai utilă pentru formarea priceperilor, decât rezolvările dintr-o bucată dar care în afară de satisfacţia succesului imediat s-ar putea să nu lase „urme” care să fie folosite şi la alte probleme.

Formarea deprinderilor ţine de însuşirea unor automatisme. Din punct de vedere metodic apare contradicţia între tendinţa de a face multe exerciţii pentru formarea acestor deprinderi şi grija de a nu cădea în rutină, în formalism. Desigur, **prin acumulări cantitative, priceperile se transformă în deprinderi**.

În continuare, merită prezentate câteva **metode generale** de rezolvare a problemelor de matematică.

Analiza. Analiza constă în următoarele:

Se porneşte de la o propoziţie necunoscută P1, care se reduce la altă propoziţie P2, apoi P2 la altă propoziţie necunoscută P3 etc. până se ajunge la propoziţia cunoscută P. Între prima şi ultima propoziţie se interpune un număr oarecare de propoziţii necunoscute, iar propoziţiile consecutive sunt echivalente din punct de vedere logic.

Sinteza. Prin această metodă se poneşte de la o propoziţie cunoscută P1 şi se trece la o propoziţie P2 până se ajunge la propoziţia care trebuie demonstrată P. După cum se observă, această metodă urmează o cale inversă metodei analizei.

Metoda reducerii la absurd. Aceasta se bazează pe principiul „terţului exclus". Pentru a demonstra o teoremă este suficient să demonstrăm contrara reciprocei ei, deoarece cele două propoziţii sunt echivalente din punct de vedere logic. Cu alte cuvinte, **prin reducere la absurd, presupunând concluzia teoremei directe falsă, se va ajunge prin deducţii logice succesive la o contradicţie** (de regulă cu ipoteza teoremei), acest lucru ar echivala cu faptul că este falsă contrara teoremei reciproce.

Prin urmare, presupunerea făcută este falsă, deci concluzia teoremei este adevărată. Când se prezintă elevilor această metodă trebuie insistat asupra obligativităţii includerii a acestui ultim aspect în cadrul oricărei demonstraţii în care se utilizează această metodă.

Metoda algebrică. Această metodă constă în considerarea uneia sau a mai multor mărimi ce trebuiesc determinate, ca necunoscutele unor ecuaţii sau a unor sisteme de ecuaţii. Aceste ecuaţii (respectiv sisteme de ecuaţii) se formează cu ajutorul relaţiilor de legătură ce se stabilesc între cerinţe şi datele problemei, precum şi prin intermediul unor rezultate matematice deja cunoscute. Un lucru important în acest demers îl constituie alegerea corectă a necunoscutelor, formare ecuaţiilor (care de multe ori se poate dovedi dificilă) precum şi verificarea soluţiilor găsite. Dacă la formarea ecuaţiilor, elevii întâmpină dificultăţi, este recomandat ca ei să construiască şi un model grafic al problemei. Acest model le-ar putea uşura (în mod intuitiv) descoperirea relaţiilor de legătură dintre datele problemei. Verificarea soluţiilor găsite ne perniţe să analizăm "fiabilitatea" modelului construit şi poate să descoperim alte metode de rezolvare.

Cum îmi aleg problemele?

În vederea selectării problemelor ce vor fi rezolvate de către elevi, în cadrul lecţiei, este util să urmărim următoarele aspecte: **gradul de dificultate să crească treptat de la simplu la complex; să fie accesibile fiecărui elev; să aibă un caracter aplicativ** (chiar legate de experienţa de zi cu zi a elevilor, dacă este posibil); să posede un grad cât mai mare de atractivitate.

Etapele rezolvării unei probleme.

Spre deosebire de exerciţiu, care constă în aplicarea directă a noţiunilor teoretice învăţate, rezolvarea unei probleme necesită gândirea creatoare, imaginaţia matematică şi ingeniozitatea elevilor, în vederea rezolvării unei probleme, trebuie să ţinem cont de următoarele:

Înţelegerea problemei. Iată întrebările care trebuie să ni le formulăm în această primă etapă: **Care este necunoscuta? Care sunt datele? Care este condiţia**? Este suficientă condiţia pentru a determina cerinţa? **Trebuie să facem un desen**? Care sunt noutăţile corespunzătoare? Care sunt diversele părţi ale condiţiei? Segmentele condiţiei se pot scrie în limbaj matematic?

Întocmirea planului (construirea modelului matematic).

Am învăţat vreo teoremă care ar putea fi aplicată aici? Cunoaştem vreo problemă înrudită având aceeaşi necunoscută, sau căreia am putea să-i folosim metoda de rezolvare? **Nu am putea să introducem un element auxiliar pentru a o face utilizabilă**? Am putea-o reformula? Ne putem imagina o problemă mai generală? Dar una particulară? Au fost utilizate toate datele problemei?

Enunţăm relaţiile dintre date şi necunoscute. Aceste relaţii pot fi egalităţi, inegalităţi sau de altă formă şi ele vor forma aşa-numitul **model matematic al problemei.**

Rezolvarea modelului matematic. Transformăm elementele care ni se dau şi cele necunoscute, încercăm să introducem elemente noi, mai apropiate de datele problemei. Generalizăm. Examinăm cazurile particulare. Aplicăm analogii.

Verificarea soluţiei găsite.

Se interpretează datele obţinute. Se aleg soluţiile practice. Nu există oare o altă cale mai directă care să ne ducă la acelaşi rezultat? Se consemnează soluţiile găsite şi în acest fel, schema rezolvării unei probleme a luat sfârşit.

Metode de rezolvare a problemelor de concurenţă

Între problemele de concurenţă şi coliniaritate există o strânsă legătură. Astfel, pentru a demonstra că dreptele d_1, d_2 şi d_3 sunt concurente putem considera punctul *A* comun dreptelor d_1 şi d_2 şi punctele *B* şi *C* situate pe d_3 şi arătăm că punctele *A, B, C* sunt coliniare.

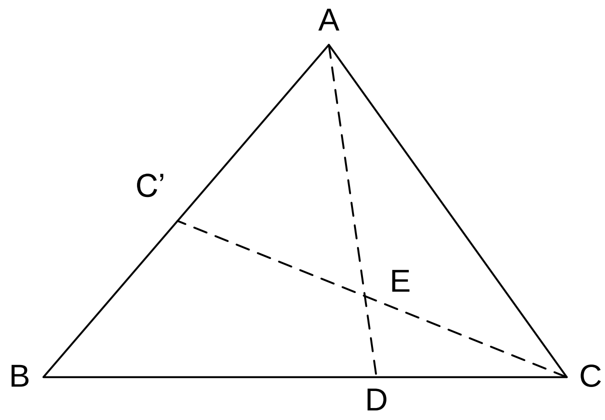
Există şi căi specifice pentru a demonstra concurenţa unor drepte. Iată câteva metode specifice ilustrate prin probleme:

1. Orice punct de pe bisectoarea unui unghi este egal depărtat de laturile unghiului şi reciproc orice punct egal depărtat de laturile unui unghi aparţine bisectoarei unghiului respectiv.
2. Orice punct de pe mediatoarea unui segment este egal depărtat de capetele segmentului şi reciporc orice punct din planul unui segment este egal depărtat de capetele unui segment aparţine mediatoarei segmentului.
3. În plan două drepte distincte sunt sau paralele sau concurente.
4. Într-un triunghi două mediatoare sunt concurente.
5. Într-un triunghi două mediane sunt concurente.
6. Într-un triunghi două bisectoare sunt concurente.
7. Diagonalele unui paralelogram sunt concurente.
8. Dacă avem ordinea *A-E-M*, *B-E-N*, *C-E-P*, atunci dreptele *AM*, *BN* şi *CP* sunt concurente.
9. Două puncte interioare unui segment ce formează anumite rapoarte egale coincid.

Metode alternative de rezolvare a problemelor de coliniaritate

Problemă

Fie un triunghi *ABC* şi punctul $D \in [BC]$ astfel încât $BC = 3DC$. Fie C', mijloacele segmentelor $[AB],[CC']$. Arătaţi că punctele *A*, *E* şi *D* sunt coliniare.



Soluţia 1. (***metoda raţionamentului geometric***)

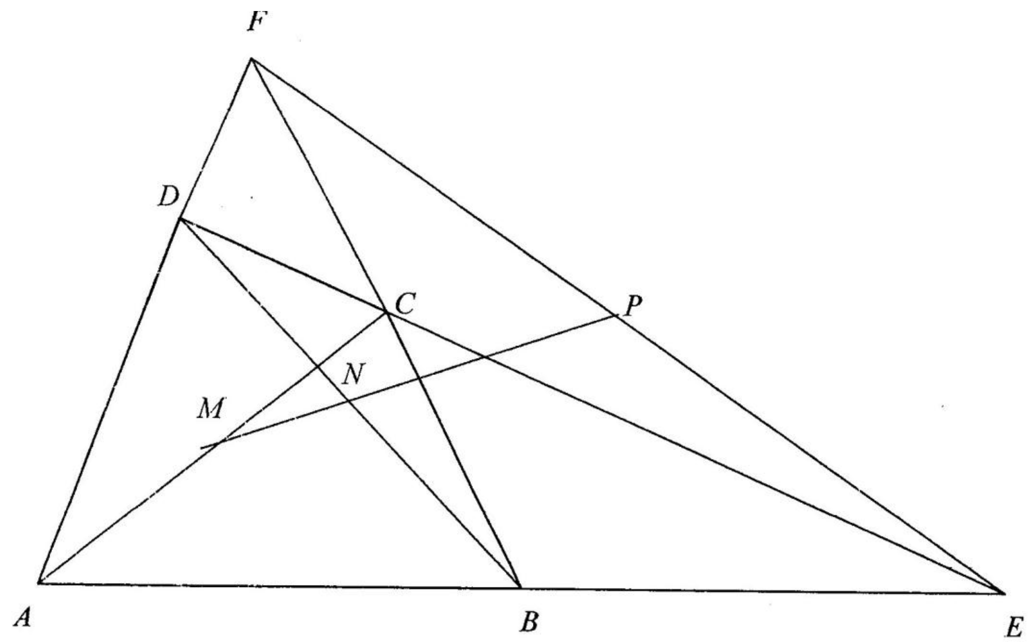
Din $BC = 3DC$ rezultă $BD = 2DC$. Avem $\frac{AC'}{AB} = \frac{1}{2}; \frac{DB}{DC} = 2$ şi $\frac{EC}{EC'} = 1$ deci $\frac{AC'}{AB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EC'} = 1$. Conform teoremei lui Menelaus rezultă că *A, E* şi *D* sunt coliniare.

Soluţia 2. (***metoda vectorială***)

Vom arăta că există $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât $\overrightarrow{AE} = \alpha \overrightarrow{DE}$. În acest scop vom exprima $\overrightarrow{AE}$ şi $\overrightarrow{DE}$ în funcţie de doi vectori necoliniari din configuraţie, de exemplu $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

Cum $EC' = EC$, avem $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$. Avem $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)$. Înlocuind $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$, obţinem: $\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$. Prin urmare, $2\overrightarrow{AE} = -6\overrightarrow{DE}$, deci $\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{DE}$. În concluzie, punctele *A, D, E* sunt coliniare.

Problemă: Să se arate că mijloacele diagonalelor unui patrulater complet sunt trei puncte coliniare.(***dreapta lui Gauss a patrulaterului***).



Soluţia 1**: **(metoda vectorială):

Fie *ABCD* un patrulater complet şi $AB \cap CD = \{E\}, BC \cap AD = \{F\}$. Laturile patrulaterului complet sunt (*ABE*), (*ADF*), (*BCF*), (*DCE*); vârfurile lui sunt: *A, B, C, D, E, F* iar diagonalele (*AC*), (*BD*), (*EF*). Am notat cu *M*, *N* şi *P* mijloacele diagonalelor [*AC*], [*BD*], [*EF*].

Fie $\overrightarrow{AB} = \overline{u}$, iar $\overrightarrow{AE} = \lambda \overline{u}, \overrightarrow{AF} = \mu \overline{v}$ unde $\lambda, \mu \in (1, +\infty)$. Prin urmare $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\left(\overline{u} + \overline{v}\right), \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\left(\lambda \overline{u} + \mu \overline{v}\right), \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Cum $C \in BF$ şi $C \in DE$, există $x, y > 0$ astfel încât $\overrightarrow{AC} = \frac{\overline{u} + x\mu \overline{v}}{1+x} = \frac{\overline{v} + y\lambda \overline{u}}{1+y}$ de unde se impun relaţiile: $\frac{1}{1+x} = \frac{\lambda y}{1+y}$; $\frac{\mu x}{1+x} = \frac{1}{1+y}$ care conduc la $xy = \frac{1}{\lambda \mu}$, $x = \frac{\lambda - 1}{\lambda(\mu - 1)}$.

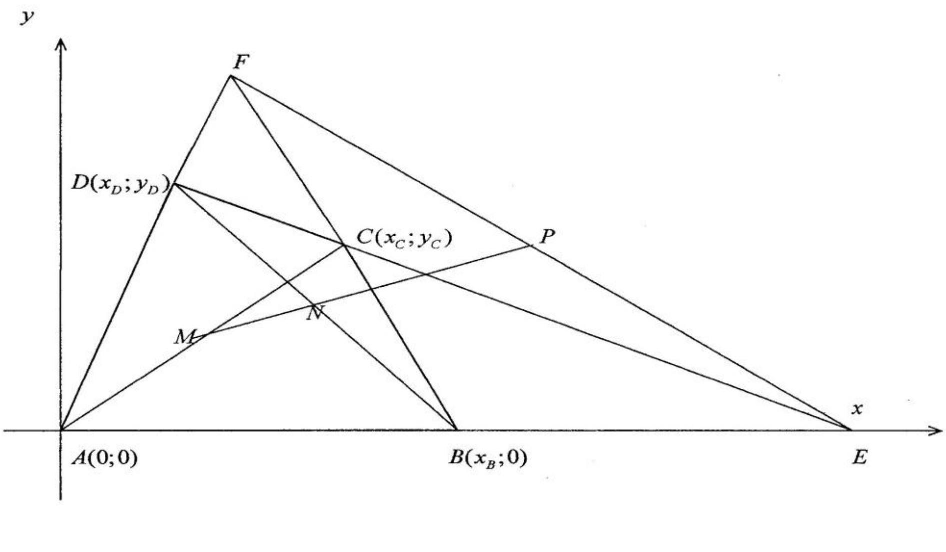
Prin urmare $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{\lambda(\mu - 1)\overline{u} + \mu(\lambda - 1)\overline{v}}{2(\lambda\mu - 1)}$.

Acum se arată că vectorii $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NP}$ sunt coliniari.

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \frac{(1-\lambda)\overline{u} + (1-\mu)\overline{v}}{2(\lambda\mu - 1)};$$

$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AN} = \frac{(\lambda - 1)\overline{u} + (\mu - 1)\overline{v}}{2}$, deci $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{1 - \lambda\mu}\overrightarrow{NP}$, adică *M, N, P* sunt coliniare.

Soluţia 2**: **(metoda coordonatelor):



Considerăm un s.c.c.o. astfel încât: $A(0,0);B(x_B,0);C(x_C,y_C);D(x_D,y_D)$. Vom calcula coordonatele punctelor *M, N, P* care reprezintă mijloacele diagonalelor [*AC*], [*BD*], [*EF*].

$(AD): y_D x - x_D y = 0$

$(BC): y_C x + (x_B - x_C)y - x_B y_C = 0$

Rezolvăm sistemul de ecuaţii de mai sus şi obţinem coordonatele punctului *F*

$$F\left(\frac{x_B x_D y_C}{x_D y_C + x_B y_D - x_C y_D};\frac{x_B y_C y_D}{x_D y_C + x_B y_D - x_C y_D}\right).$$

$(DC): x(y_C - y_D) + y(x_D - x_C) + x_C y_D - x_D y_C = 0$.

Determinăm coordonatele punctului *E*: $E\left(\frac{x_D y_C - x_C y_D}{y_C - y_D};0\right)$.

Punctul *P* fiind mijlocul segmentului [*EF*], coordonatele acestui punct sunt:

$$P\left(\frac{x_B x_D y_C}{2(x_D y_C + x_B y_D - x_C y_D)};\frac{x_B y_C y_D}{2(x_D y_C + x_B y_D - x_C y_D)}\right).$$

Scriem ecuaţia dreptei care trece prin punctele $M\left(\frac{x_C}{2},\frac{y_C}{2}\right)$ şi $N\left(\frac{x_D + x_B}{2};\frac{y_P}{2}\right)$;

$(MN): x(2y_C - 2y_D) - y(2x_C - 2x_D - 2x_B) + x_C y_D - x_D y_C = 0$.

Se înlocuiesc coordonatele punctului *P* în ecuaţia dreptei *MN* şi se obţine identitate, astfel obţinem că punctele *M, N, P* sunt coliniare.

Metode alternative de rezolvare a problemelor de concurenţă

Problemă:

Fie triunghiul *ABC* şi punctele A',B',C' care divid bipunctele (*B*, *C*), (*C*, *A*), respectiv (*A*, *B*) în rapoartele α,β respectiv γ, astfel încât dreptele AA',BB',CC' să nu fie paralele două câte două. Sunt echivalente propoziţiile:

1) AA',BB',CC' sunt concurente;

2) $\alpha\beta\gamma=-1$ (teorema lui Ceva 1647-1719)

Soluţie vectorială:

Din ipoteză: $\overrightarrow{A'B}=\alpha\overrightarrow{A'C}$, $\overrightarrow{B'C}=\beta\overrightarrow{B'A},\overrightarrow{C'A}=\gamma\overrightarrow{C'B}$.

Fie $AA'\cap BB'=\{M\},AA'\cap CC'=\{N\}$.

$\overrightarrow{MA}=\lambda\overrightarrow{MA'},\overrightarrow{NA}=\mu\overrightarrow{NA'}$. Se deduce $\overrightarrow{BA'}=\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB}=(1-\alpha)\overrightarrow{CA'}$.

Teorema lui Menelaus pentru $\Delta AA'C$ şi punctele coliniare M,B,B' implică $\lambda\cdot\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\cdot\beta=1$, respectiv $\lambda=\dfrac{\alpha-1}{\alpha\beta}$. Teorema lui Menelaus pentru $\Delta AA'C$ şi punctele coliniare N,C,C' implică $\gamma\cdot(1-\alpha)\cdot\dfrac{1}{\mu}=1$ respectiv $\mu=\gamma(1-\alpha)$.

Acum AA',BB',CC' sunt concurente $\Leftrightarrow M=N\Leftrightarrow\lambda=\mu\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\dfrac{\alpha-1}{\alpha\beta}=\gamma(1-\alpha)\Leftrightarrow\alpha\beta\gamma=-1$.

Soluţie analitică:

Se consideră sistemul de coordonate carteziene cu originea *C* şi axele *CA, CB,* deci $C(0,0),A(1,0),B(0,1)$. Se deduce că $A'\left(0,\dfrac{1}{1-\alpha}\right)$, $B'\left(\dfrac{-\beta}{1-\beta},0\right)$, $C'\left(\dfrac{1}{1-\gamma},\dfrac{-\gamma}{1-\gamma}\right)$.

Ecuaţiile dreptelor AA',BB',CC' sunt:

$AA':x+(1-\alpha)y-1=0$;

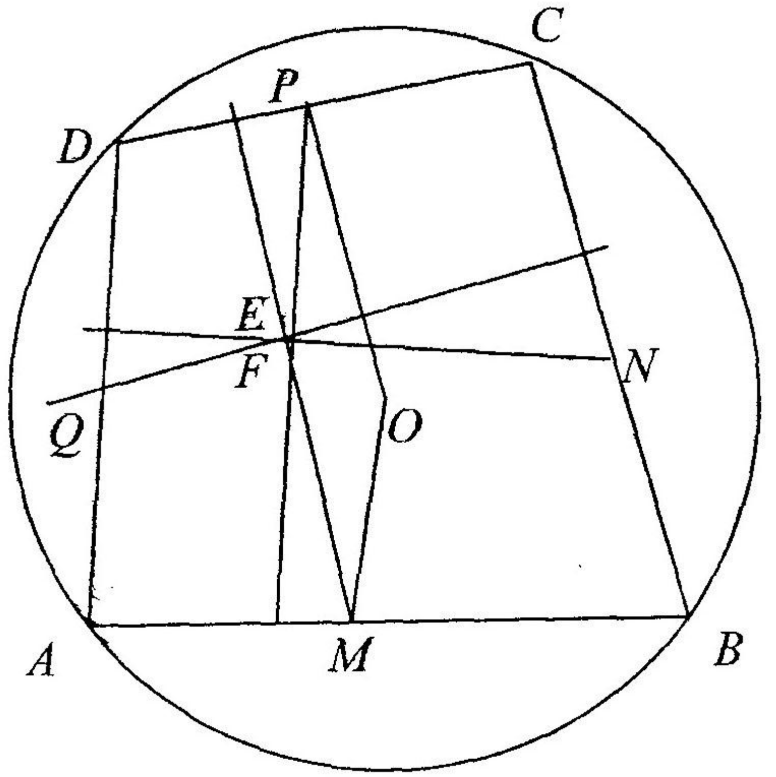
$BB':(1-\beta)x-\beta y+\beta=0$;

$CC':\gamma x+y=0$.

Condiţia ca AA', BB', CC' să fie concurente este exprimată prin relaţia $\alpha\beta\gamma + 1 = 0$.

Problemă:

Fie patrulaterul inscriptibil *ABCD* şi *M, N, P, Q* mijloacele laturilor [*AB*],[*BC*],[*CD*],[*DA*]. Să se arate că perpendicularele din *M* pe *CD,* din *N* pe *DA,* din *P* pe *AB* şi din *Q* pe *BC* sunt concurente, punctul de intersecţie numindu-se ***anticentrul lui ABCD*** (*punctul lui Mathot*).



***Soluţia 1**: (**metoda vectorială**)*:

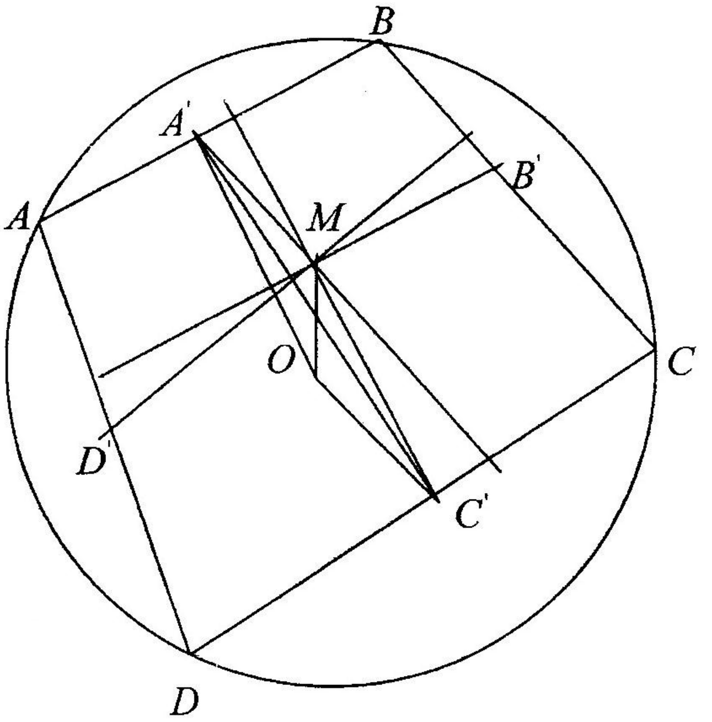
Fie *O* centrul cercului circumscris lui *ABCD, E* intersecţia perpendicularelor din *M* pe *CD* şi din *P* pe *AB,* iar *F* intersecţia perpendicularelor din *N* pe *AD* şi din *Q* pe *BC. OMEP* şi *ONFQ* sunt paralelograme, deci:

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right),$$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}\right).$$

Rezultă că $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OF}$ şi *E* = *F*.

***Soluţia 1**: (**metoda raţionamentului geometric**)*:



Fie O centrul cercului circumscris patrulaterului inscriptibil $ABCD$ şi A', B', C', D' mijloacele laturilor $[AB],[BC],[CD],[DA]$. Deoarece punctul O se află pe mediatoarele laturilor patrulaterului, rezultă că: $OA' \perp AB, OB' \perp BC, OC' \perp CD,$ $OD' \perp AD$.

Bimedianele patrulaterului sunt concurente într-un punct E. Fie M simetricul lui O faţă de E. Patrulaterul $MA'OC'$ este paralelogram deoarece diagonalele se înjumătăţesc. Rezultă $MA' \| OC'$. Deoarece $OC' \perp CD$, rezultă că $MA' \perp CD$. Analog se arată că $MB' \perp AD, MC' \perp AB$ şi $MD' \perp BC$. Prin urmare perpendicularele duse din mijloacele laturilor unui patrulater inscriptibil pe laturile opuse sunt concurente. Punctul M de concurenţă se numeşte *punctul lui Mathot*.

IV.3. COLINIARITATE ŞI CONCURENŢĂ ÎN PROGRAMELE ŞCOLARE. CHESTIUNI DE EVALUARE

Prin predarea geometriei în şcoala generală şi la liceu, se urmăreşte ca elevii să-şi însuşească un număr de cunoştinţe matematice, cu precădere cele din programa şcolară, dar nu numai. În mod deosebit, geometria este chemată să dezvolte gândirea, mai ales gândirea vie, activă şi complexă, capacitatea de a analiza şi generaliza, de a extrage esenţialul, de a deprinde legăturile raţionale dintre elemente, dezvolta iniţiativa personală şi în gândire.

În însuşirea de cunoştinţe se urmăreşte ca toate noţiunile şi conceptele dobândite să devină pentru elevi bunuri proprii, instrumente de lucru, nu numai să fie reţinute pur şi simplu. De aceea, scopul instructiv se împleteşte strâns cu cel educativ, cu activitatea concretă, practică.

Este necesar ca predarea geometriei să se facă astfel încât în liceu studiul să se poată baza pe cunoştinţele acumulate în şcoala generală. Dacă nu se asigură existenţa acestor punţi de legătură între ciclurile şcolare, predarea ignoră ceea ce elevii au învăţat anterior.

În geometria elementară, rezolvarea problemelor de coliniaritate a unor puncte sau de concurenţă a unor drepte continuă să reprezinte o constantă în procesul rezolvării unor probleme de larg interes aplicativ, folosind metode şi principii matematice.

Studiul problemelor de coliniaritate şi rezolvarea lor cu metoda raţionamentului geometric se face începând cu clasa a IV-a, atunci când, pentru a demonstra că trei puncte sunt coliniare se apelează la axioma paralelelor.

Cu ajutorul noţiunilor de matematică pe parcursul clasei a VII-a, elevul poate rezolva probleme de coliniaritate, fie cu ajutorul criteriului referitor la „unghiuri opuse la vârf” sau cel referitor la „unghiul alungit”. La nivel de clasa a VII-a, elevul poate rezolva probleme de concurenţă a dreptelor, folosind în special „proprietăţile liniilor importante în triunghi”. Acest criteriu constă în a găsi, în funcţie de datele problemei, un triunghi în care dreptele respective să fie înălţimi, mediane, bisectoare sau mediatoare.

Programa şcolară actuală nu prevede studiul teoremelor lui Ceva şi a lui Menelaus, însă la clasele cu nivel de cunoştinţe destul de ridicat, pentru obţinerea performanţelor şcolare, în cadrul orelor de opţional, acest lucru poate fi realizat. Foarte multe probleme de coliniaritate şi concurenţă pot fi „elegant” rezolvate folosind raţionamentul geometric, utilizând relaţiile ce apar în aceste două teoreme (teorema directă, respectiv reciprocă a lui Ceva şi Menelaus).

În clasele de liceu, problemele de coliniaritate şi concurenţă pot fi tratate utilizând „metoda vectorială” (clasa a IX-a, respectiv a X-a). Până nu demult programa analitică la geometrie pentru clasele a IX-a, respectiv a X-a conţinea sistemul axiomatic al lui Birkhoff iar demonstrarea teoremelor se făcea cu ajutorul metodei raţionamentului geometric. Actualele programe de învăţământ liceal prevăd studiul vectorilor şi al transformărilor geometrice începând cu clasa a IX-a. S-a renunţat prea uşor la o prealabilă tratare riguroasă a noţiunilor şi proprietăţilor fundamentale ale geometriei euclidiene (elementare) ca demers absolut necesar pentru introducerea conceptelor de „vector” şi „transformare geometrică”.

În aceste condiţii, responsabilitatea revine exclusiv profesorului. El este nevoit ca, în limita numărului de ore alocate prin planul de învăţământ, să reia acele cunoştinţe de geometrie elementară care-i permit să explice conţinutul noţiunii de vector, operaţii cu vectori şi ca aplicaţie: coliniaritatea a doi vectori.

În ceea ce priveşte rezolvarea problemelor de coliniaritate şi concurenţă cu ajutorul „metodei vectoriale” subliniem două aspecte importante:

- Dacă enunţul conţine vectori, atunci obligatoriu, rezolvarea sa va utiliza metoda vectorială.
- Dacă enunţul nu conţine vectori, atunci soluţia vectorială poate oferi doar o alternativă de rezolvare a problemei.

În ambele situaţii este indicată interpretarea geometrică, în spiritul enunţului, a rezultatelor exprimate vectorial.

Studiul problemelor de geometrie se poate face şi cu ajutorul metodei coordonatelor care apare în programa şcolară a clasei a XI-a, profilul real.

Astfel elevii pot rezolva probleme de coliniaritate şi concurenţă utilizând metoda coordonatelor. Însă, chiar şi în acest context, în care programa şcolară pune accentul pe rezolvarea problemelor de geometrie, fie cu „metoda vectorială”, fie cu „metoda coordonatelor”, nu trebuie neglijată „metoda raţionamentului geometric”, ca şi variantă de rezolvare a unor probleme.

Geometria elementară cu aşa numita „metoda raţionamentului geometric”, este cea care prefigurează arhitectura sistemului de gândire al elevului, pentru toată viaţa.

Dificultăţi în tratarea problemelor de coliniaritate şi concurenţă

În rezolvarea problemelor de geometrie o greşeală frecventă care apare este aceea de a presupune adevărată afirmaţia care trebuie demonstrată.

O altă greşeală frecventă este aceea de a folosi ca justificare, o teoremă care este, de fapt, o consecinţă a afirmaţiei care trebuie demonstrată. O astfel de situaţie creează aşa numitul cerc vicios şi este fără valoare ca demonstraţie logică. Un exemplu de cerc vicios ar fi următorul: în demonstrarea teoremei să folosim ca justificare a unui pas însăşi teorema.

La rezolvarea problemelor de coliniaritate, o greşeală frecventă pe care o fac elevii în rezolvare este aceea de a considera pe parcursul demonstraţiei sau a rezolvării problemei tocmai coliniaritatea punctelor. O altă greşeală care poate apărea este cea a scrierii incorecte a relaţiei din teorema lui Menelaus.

În cazul problemelor de concurenţă, greşeala ce poate fi întâlnită este dată de folosirea în rezolvare tocmai a concurenţei dreptelor, adică a ceea ce trebuie demonstrat. O altă greşeală care poate apărea este cea a scrierii incorecte a teoremei lui Ceva.

Utilizarea metodei vectoriale în rezolvarea problemelor de coliniaritate şi concurenţă nu este adecvată atunci când:

- există alte metode mai rapide, mai eficiente şi mai interesante;
- soluţia vectorială este doar o transpunere în limbaj vectorial a soluţiei geometrice, dovedindu-se astfel un simplu exerciţiu, gratuit şi interesant.

Evitarea dificultăţilor de acest tip în rezolvarea problemelor de coliniaritate şi concurenţă se face prin precizarea cât mai exactă a elementelor care se cunosc, printr-un desen realizat riguros în cadrul raţionamentului geometric, prin alegerea adecvată a metodei ce duce la o soluţie cât mai interesantă şi mai „elegantă”.

BIBLIOGRAFIE

[1] I.D. Albu, I.D. Bîrchi, *Geometrie vectorială în liceu*, Editura Bîrchi, Timişoara, 2004;

[2] I.D.Albu, *Geometrie. Concepte şi metode de studiu*. *Partea I: Construcţia axiomatică a geometriei euclidiene*, Editura Mirton, Timişoara, 1998;

[3] A. Coţa, *Manual de geometrie pentru clasa a IX-a*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989;

[4] A. Coţa, *Manual de geometrie pentru clasa a X-a*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989;

[5] L. Nicolescu, V. Boskoff, *Probleme practice de geometrie,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1990;

[6] G. Ţiţeica, *Probleme de geometrie,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1990;

[7] Ştefan Sabău, Dumitru Săvulescu, *Probleme de geometrie plană,* Editura Paralela'45, 1995.

Declaraţie

Subsemnatul Szucs Alexandru, CNP 1801029114906, posesor al CI, seria KS, nr. 393538 domiciliat în judeţul Caraş-Severin, oraş Bocşa, str. Semenicului, bl. 16 C, ap. 29 declar pe propria răspundere următoarele cu privire la lucrarea metodico-ştiinţifică pentru obţinerea gradului didactic I cu titlul "Coliniaritate şi concurenţă în plan" :

1. a) lucrarea a fost elaborată personal si aparţine în întregime candidatului;
2. b) nu au fost folosite alte surse decât cele menţionate în bibliografie;
3. c) nu au fost preluate texte, date sau elemente de grafică din alte lucrări sau din alte surse fără a fi citate si fără a fi precizată sursa preluării, inclusiv în cazul în care sursa o reprezintă alte lucrări ale candidatului;
4. d) lucrarea nu a mai fost folosită în alte contexte de examen sau de concurs.

Timişoara, 22 august 2013 Semnătura