Introducere

„Matematica este o întreagă lume, din care nimic nu lipseşte: intuiţie şi logică, experiment şi reflecţie teoretică, emoţie şi gândire analitică, sentimentul infinitului şi revelaţia universurilor de ficţiune, invenţia şi descoperirea, toate sunt acolo pentru cine ştie să le caute”

Rolul profesorului de matematică este esenţial în dezvoltarea gândirii ştiinţifice, logice dar şi practice a elevilor, în dezvoltarea unei atitudini interogative, creative, activ - participative şi nu în ultimul rând etice, sau chiar morale, pentru că aplicaţiile ştiinţei trebuie trecute prin filtrul conştiinţei.

Elevii încă din clasele mici au contact cu inegalităţile, prima dată atunci când învaţă compararea şi ordonarea numerelor naturale. La ciclul gimnazial învaţă o serie de inegalităţi atât la algebră cât şi la geometrie, iar în ciclul liceal, încă din clasa a IX-a au un capitol de inegalităţi: inegalitatea mediilor, inegalitatea lui Cauhy – Buniakovsky – Schwarz, inegalitatea lui Minkovsky, inegalitatea lui Cebâşev, inegalitatea lui Bernoulli, etc. Se spune că relaţia care guvernează cu adevărat matematica este cea de inegalitate, egalitatea fiind un caz special. Pe tot parcursul ciclului liceal elevii se întâlnesc adesea cu inegalităţi fie că discută despre monotonia funcţiilor sau a şirurilor, fie că la Analiza matematică învaţă teoremele de trecere la limită în inegalităţi, criteriul cleştelui, stabilirea semnului unei funcţii, rolul derivatei întâi în studiul funcţiilor, determinarea punctelor de extrem, determinarea intervalelor de convexitate şi concavitate, etc. Rezultatele teoretice asupra monotoniei şi punctelor de extrem ale unei funcţii permit obţinerea unor inegalităţi care, cu ajutorul metodelor elementare ar fi greu de demonstrat.

Având în vedere că la învăţământul gimnazial nu se regăsesc în programă foarte multe inegalităţi, acestea la nivelul şcolii noastre se studiază în cadrul unui opţional, acesta fiind extraordinar de benefic în pregătirea elevilor pentru performanţa şcolară.

Lucrare este structurată în două părţi: prima parte ştiinţifică şi a doua parte, metodică. În partea ştiinţifică sunt cuprinse: funcţiile convexe (concave), forma integrală a unor inegalităţi algebrice clasice şi aplicaţii. Marea majoritate a aplicaţiilor sunt probleme semnificative din cele propuse la olimpiadele româneşti, apărute în reviste de specialitate şi dintre cele care au constituit subiecte pentru Examenul de Bacalaureat.

Această lucrare poate fi un suport pentru : elevii care se pregătesc pentru Bacalaureat, elevii care se pregătesc pentru Olimpiadele şi concursurile şcolare.

Doresc să mulţumesc domnului profesor doctor Dumitru Buşneag pentru sprijinul acordat în elaborarea acestei lucrări.

Capitolul 1: Inegalităţi în analiza matematică

1.1.Funcţii convexe (concave)

Definiţia 1.1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, a,b\in\mathbb{R}, a<b$**. Vom spune că** f **este convexă (concavă) pe** (a,b) **dacă pentru orice** $x_1,x_2\in(a,b)$ **şi orice** $t\in[0,1]$ **avem** $f(tx_1+(1-t)x_2)\le tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$ **(respectiv** $f(tx_1+(1-t)x_2)\ge tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$**).**

Teorema 1.1. Dacă f **este de două ori derivabilă pe** (a,b)**, atunci** f **este convexă pe** (a,b) **dacă şi numai dacă** $f''\ge 0$ **pe** (a,b)**.**

Demonstraţie . Să presupunem că $f''\ge 0$ pe (a,b) şi să demonstrăm că f este convexă pe (a,b). Atunci f' este crescătoare pe (a,b) , deci pentru orice $x_1,x_2\in(a,b), x_1\le x_2\Rightarrow f'(x_1)\le f'(x_2)$

Fie acum $t\in[0,1]$ şi $x_0=tx_1+(1-t)x_2$. Se observă imediat că $x_1<x_0<x_2$.

Conform teoremei lui Lagrange există $c_1\in(x_1,x_0)$ şi $c_2\in(x_0,x_2)$ astfel încât $f'(c_1)=\dfrac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$ şi $f'(c_2)=\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$.

Cum $c_1<c_2\Rightarrow f'(c_1)<f(c_2)$, deci

$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}.$$

Înlocuind la numitori x_0 prin $tx_1+(1-t)x_2$ şi grupând convenabil se ajunge la $f(x_0)\le tf(x_1)+(1-t)f(x_2)\Leftrightarrow f(tx_1+(1-t)x_2)\le tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$,

adică f este convexă.

Invers , să presupunem că f este convexă pe (a,b) şi să demonstrăm că $f''\ge 0$ pe (a,b). Fie $\alpha<\beta<\gamma$ trei numere reale din domeniul de definiţie al lui f .

Vom proba că $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \le \frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$.

În relaţia $f\left(tx_1+(1-t)x_2\right) \le tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$ punem $x_1=\alpha, x_2=\gamma, t=\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}$, deci $1-t=\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$, evident $\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} \in [0,1]$.

Vom obţine prin înlocuire $f\left(\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\cdot\alpha+\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\cdot\gamma\right) \le \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\cdot f(\alpha)+\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\cdot f(\gamma)$, adică $f\left(\frac{\gamma\alpha-\beta\alpha+\beta\gamma-\alpha\gamma}{\gamma-\alpha}\right) \le \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\cdot f(\alpha)+\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}\cdot f(\gamma)$, sau reducând

$f(\beta)\cdot(\gamma-\alpha) \le f(\alpha)\cdot(\gamma-\beta)+f(\gamma)\cdot(\beta-\alpha)$ echivalent cu

$(*)\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \le \frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$

Vom alege acum patru puncte $x_1<\alpha<x_2<\beta$. Din cele deduse anterior scriem $\frac{f(x_2)-f(\alpha)}{x_2-\alpha} \ge \frac{f(\alpha)-f(x_1)}{\alpha-x_1}$ şi $\frac{f(\beta)-f(x_2)}{\beta-x_2} \ge \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Dacă $\alpha \to x_1$ şi $\beta \to x_2$ obţinem $f'(x_2) \ge f'(x_1)$ pentru că $f(x)$ este derivabilă şi cum alegerea lui x_1 şi x_2 este arbitrară, condiţionată numai de $x_1<x_2$ scriem $f'(x_2)-f'(x_1) \ge 0$.

Împărţind cu cantitatea pozitivă x_2-x_1 obţinem $\frac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1} \ge 0$.

Trecând la limită $\lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1} = f''(x_1) \ge 0$ şi afirmaţia este probată.

Observaţie. Evident, f concavă dacă şi numai dacă - f convexă; analog obţinem că f concavă pe (a,b) dacă şi numai dacă $f'' \le 0$ pe (a,b).

Teoremă 1.2. (Jensen). Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, a,b\in\mathbb{R}, a<b$**. Atunci** f **este convexă pe** (a,b) **dacă şi numai dacă pentru orice** $x_1,x_2,...,x_n\in(a,b)$ **şi** $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\in[0,1]$ **cu** $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ **avem** $f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$**.**

Egalitate avem când $x_1=x_2=...=x_n$

Demonstraţie: "$\Leftarrow$". Evident

"$\Rightarrow$". Să observăm pentru început că dacă $x_1,x_2,...,x_n\in(a,b)$, $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\in[0,1]$ cu $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$, atunci $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\in(a,b)$.

Într-adevăr, avem că $a<\min_{1\le i\le n}\{x_i\}\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\le\max_{1\le i\le n}\{x_i\}<b$.

Să revenim acum la demonstraţia teoremei. Dacă $n=2$ totul este clar.

Fie $n=4; x_1,x_2,x_3,x_4\in(a,b), \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\in[0,1]$ şi $\sum_{i=1}^{4}\lambda_i=1$.

Dacă considerăm $y_1=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}x_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}x_2$, $y_2=\frac{\lambda_3}{\lambda_3+\lambda_4}x_3+\frac{\lambda_4}{\lambda_3+\lambda_4}x_4$, $\mu_1=\lambda_1+\lambda_2$ şi $\mu_2=\lambda_3+\lambda_4$, atunci

$$f(\mu_1 y_1+\mu_2 y_2)\le\mu_1 f(y_1)+\mu_2 f(y_2)\Leftrightarrow$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{4}\lambda_i x_i\right)\le(\lambda_1+\lambda_2)f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}x_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}x_2\right)+(\lambda_3+\lambda_4)f\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_3+\lambda_4}x_3+\frac{\lambda_4}{\lambda_3+\lambda_4}x_4\right)\Leftrightarrow$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{4}\lambda_i x_i\right)\le(\lambda_1+\lambda_2)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}f(x_1)+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}f(x_2)\right)+(\lambda_3+\lambda_4)\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_3+\lambda_4}f(x_3)+\frac{\lambda_4}{\lambda_3+\lambda_4}f(x_4)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i f(x_i)$$

Raţionând din aproape în aproape (un fel de inducţie matematică) deducem că implicaţia "$\Rightarrow$" este adevărată dacă n este de forma $n=2^k$ cu $k\in\mathbb{N}$.

Fie acum n un număr oarecare iar k cel mai mic număr natural cu proprietatea că $n\le 2^k$ cu $k\in\mathbb{N}$. Considerăm

$$\mu_j = \begin{cases} \dfrac{\lambda_j}{2^k - n}, \; pentru \; j = 1, 2, ..., n \\ \dfrac{2^k - n - 1}{\left(2^k - n\right)^2}, \; pentru \; j = n+1, n+2, ..., 2^k \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} x_j, \; pentru \; j = 1, 2, ..., n \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \; pentru \; j = n+1, n+2, ..., 2^k \end{cases}$$

Avem

$$f\left(\sum_{j=1}^{2^k} \mu_j x_j\right) \le \sum_{j=1}^{2^k} \mu_j f\left(y_j\right) \Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f\left(x_i\right)}{2^k - n} + \left(2^k - n\right)\left(\frac{2^k - n - 1}{\left(2^k - n\right)^2} f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f\left(x_i\right)}{2^k - n} + \frac{2^k - n - 1}{2^k - n} f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \Leftrightarrow$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f\left(x_i\right)}{2^k - n} + f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) - \frac{f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)}{2^k - n} \Leftrightarrow$$

$$0 \le \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f\left(x_i\right)}{2^k - n} - \frac{f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)}{2^k - n} \Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f\left(x_i\right)$$

Observaţie. Analog deducem că f este concavă pe (a,b) dacă şi numai dacă pentru orice $x_1, x_2, ..., x_n \in (a,b)$ şi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in [0,1]$ cu $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, avem $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \ge \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f\left(x_i\right)$.

Aplicaţii

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ iar $x_1, ..., x_n \in (a,b)$. Dacă f este convexă pe (a,b) atunci $f\left(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}\right) \le \frac{f\left(x_1\right) + ... + f\left(x_n\right)}{n}$; dacă f este concavă pe (a,b) atunci

$$f\left(\frac{x_1+...+x_n}{n}\right)\geq\frac{f\left(x_1\right)+...+f\left(x_n\right)}{n}.$$

Demonstraţie. Totul rezultă din Teorema 7.3.3. luând $\lambda_1=...=\lambda_n=\frac{1}{n}$

***2.* Inegalitatea lui Hölder. Fie** $x_1,...,x_n>0$ **iar** $\lambda_1,...,\lambda_n\in[0,1]$ **cu** $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$**. Atunci avem inegalitatea** $\lambda_1x_1+...+\lambda_nx_n\geq x_1^{\lambda_1}\cdot...\cdot x_n^{\lambda n}$**.**

Demonstraţie. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f\left(x\right)=\ln x$. Atunci $f'(x)=\frac{1}{x}$ şi $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ pentru orice $x\in(0,\infty)$. Deci f este concavă, conform Teoremei 1.1. pe $(0,\infty)$.

Conform Teoremei 1.2. putem scrie

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\right)\geq\sum_{i=1}^{n}\lambda_if\left(x_i\right)\Leftrightarrow\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\right)\geq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\ln\left(x_i\right)$$

$$\Leftrightarrow\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\right)\geq\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{\lambda_i}\right)\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\geq\prod_{i=1}^{n}x_i^{\lambda_i}.$$

Observaţii

1. **Dacă** $\lambda_1=...=\lambda_n=\frac{1}{n}$ **obţinem că,** $\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\geq\sqrt[n]{x_1\cdot...\cdot x_n}$ **, adică inegalitatea mediilor.**
2. **O variantă generalizată a inegalităţii lui Holder este următoarea:**

   $$\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_iy_i\leq\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_iy_i^p\right)^{1/q}$$

   Unde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, p,q,\lambda_1,...,\lambda_n,x_1,...,x_n,y_1,...,y_n>0$ **iar** $n\geq2$
3. **Să se arate că dacă** $a_1,...,a_n\geq0$ **atunci**

$$\left(1+a_1\right)\left(1+a_2\right)...\left(1+a_n\right)\geq\left(1+\sqrt{a_1...a_n}\right)^n$$

(Cauchy)

Soluţie . putem scrie

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)=1+\sum a_1+\sum a_1a_2+...+\sum a_1a_2...a_k+...+a_1a_2...a_n$$

Conform inegalităţii mediilor, pentru $1\le k\le n$ avem

$$\sum a_1a_2...a_k \ge C_n^k\cdot\sqrt[C_n^k]{(a_1a_2...a_n)^{C_{n-1}^{k-1}}} \Leftrightarrow \sum a_1a_2...a_k \ge C_n^k\cdot(a_1a_2...a_n)^{C_{n-1}^{k-1}/C_n^k} \Leftrightarrow$$

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)\ge 1+\sum_{k=1}^{n}\left(\sum a_1a_2...a_k\right)\ge 1+\sum_{k=1}^{n}\left(C_n^k\cdot\sqrt[n]{(a_1a_2...a_n)^k}\right)=\left(1+\sqrt[n]{a_1...a_n}\right)^n$$

$\sum a_1a_2...a_k \ge C_n^k\cdot(a_1a_2...a_n)^{k/n}$, astfel că obţinem:

4. Dacă $a_1,a_2,a_3>0$**, atunci** $\dfrac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{a_1^3+a_2^3+a_3^3}\ge\dfrac{a_1^3+a_2^3+a_3^3}{a_1^4+a_2^4+a_3^4}$**.**

Soluţie: Considerăm funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$, care este convexă pe $(0,\infty)$.

Fie $\lambda_1=\dfrac{a_1^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2},\lambda_2=\dfrac{a_2^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2},\lambda_3=\dfrac{a_3^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

$$x_1=\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2a_2a_3},x_2=\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2a_1a_3},x_3=\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2a_1a_2}.$$

Conform Teoremei 1.2. putem scrie

$$f\left(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i x_i\right)\le\sum_{i=1}^{3}\lambda_i f(x_i)\Leftrightarrow\left(\frac{a_1^2}{2a_2a_3}+\frac{a_2^2}{2a_1a_3}+\frac{a_3^2}{2a_1a_2}\right)\le$$

$$\frac{a_1^2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)}{4a_2^2a_3^2}+\frac{a_2^2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)}{4a_1^2a_3^2}+\frac{a_3^2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)}{4a_1^2a_2^2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2}{4a_1^2a_2^2a_3^2}\le\frac{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(a_1^4+a_2^4+a_3^4)}{4a_1^2a_2^2a_3^2}\Leftrightarrow\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{a_1^3+a_2^3+a_3^3}\ge\frac{a_1^3+a_2^3+a_3^3}{a_1^4+a_2^4+a_3^4}.$$

5. Dacă $a_i\ge 0,\sum_{i=1}^{n}a_i=1$ **şi** $0<x_i\le 1$ **pentru** $i=1,2,...,n$ **să se demonstreze că**

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1+x_i}\le\frac{1}{1+x_1^{\alpha_1}\cdot...\cdot x_n^{\alpha_n}},n\in\mathbb{N}.$$

Soluţie. Putem presupune fără a restrânge generalitatea că $a_i > 0$ pentru $i = 1, 2, ..., n$. Notăm $y_i = \ln(x_i)$. Notăm $x_i \in (0,1]$ şi deoarece $x_i \in (0,1]$, rezultă că $y_i \in (-\infty, 0]$. Considerăm funcţia $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}, f(y) = (1 + e^y)^{-1}$. Această funcţie este de două ori derivabilă şi $f''(y) = e^y (e^y - 1)(e^y + 1)^{-3} \le 0$, pentru orice $y \in (-\infty, 0]$. Deci f este concavă pe intervalul $(-\infty, 0]$ şi conform inegalităţii lui Jensen avem

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1+x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1+e^{y_i}} \le \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n} e^{a_i y_i}} = \frac{1}{1+\prod_{i=1}^{n} e^{a_i y_i}} = \frac{1}{1+x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}}$$

Cu egalitate dacă şi numai dacă $y_1 = y_2 = ... = y_n$, adică $x_1 = x_2 = ... = x_n$

6. **Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval iar $f_1, f_2, ..., f_n : I \to \mathbb{R}_+$ funcţii concave, $n \in \mathbb{N}$. Să se demonstreze că funcţia $\sqrt[n]{f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n}$ este de asemenea concavă.**

Soluţie . Fie $F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot ... \cdot f(x)$. Prin ipoteză avem

$$F(tx + (1-t)y) \ge \prod_{i=1}^{n} (tf_i(x) + (1-t) f_i(y)) = \sum_{k=0}^{n} t^k (1-t)^{n-k} \cdot \sum f_{i_1}(x) ... f_{i_k}(x) f_{i_{k+1}}(x) ... f_{i_n}(x),$$

unde a doua sumă conţine C_n^k termeni corespunzători posibilităţilor de a alege submulţimile $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ ale lui $\{1, 2, ..., 3\}$.

Din inegalitatea mediilor deducem că:

$$\sum f_{i_1}(x) ... f_{i_k}(x) f_{i_{k+1}}(x) ... f_{i_n}(y) \ge C_n^k \left[F(x)^{C_{n-1}^{k-1}} \cdot F(y)^{C_{n-1}^{n-k-1}} \right]^{1/C_n^k} = C_n^k \cdot (F(x))^{\frac{k}{n}} \cdot (F(y))^{\frac{n-k}{n}}.$$

Deci

$$F(tx + (1-t)y) \ge \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \left[t(F(x))^{\frac{1}{n}} \right]^k \cdot \left[(1-t)(F(y))^{\frac{1}{n}} \right]^{n-k} = \left[t(F(x))^{\frac{1}{n}} + (1-t)(F(y))^{\frac{1}{n}} \right]^n =$$
$$= tF(x) + (1-t)F(y)$$

, adică tocmai ceea ce trebuia probat.

1. 2. Forma integrală a unor inegalităţi algebrice clasice

Fie $n \geq 1$ un număr natural $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ şi $\Delta_n = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ o mulţime de puncte intermediare ale intervalului $[a,b]$. Reamintim că prin norma lui Δ_n înţelegem numărul $\|\Delta_n\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$. Prin sistem de puncte intermediare asociate diviziunii Δ_n înţelegem o familie $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ de numere reale astfel încât $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ pentru orice $1 \leq i \leq n$.

Din analiza matematică cunoaştem că dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă (în sens Riemann) atunci pentru orice şir $(\Delta_n)_{n \geq 1}$ de diviziuni ale lui $[a,b]$ astfel încât $\|\Delta_n\| \to 0$ când $n \to \infty$ şi pentru orice alegere a sistemelor $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ de puncte intermediare

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

În particular deducem că

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

Iar dacă $a = 0$ şi $b = 0$ atunci

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx. \tag{3}$$

Să considerăm acum $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ şi $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcţii continue.

Cum pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}, (f - \lambda g)^2 \geq 0$ pe $[a,b]$, deducem că

$$\int_a^b (f(x) - \lambda g(x))^2\,dx \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \int_a^b g^2(x)\,dx - 2\lambda \int_a^b f(x) g(x)\,dx + \int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0$$

Deci cu necesitate

$$\left(\int_a^b f(x) g(x)\,dx\right)^2 - \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(4)\quad \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx,$$

Obţinând astfel varianta integrală a inegalităţii Cauchy-Buniakovski- Schwartz

Egalitate avem dacă $f=\lambda g$ cu $\lambda\in\mathbb{R}$

O altă demonstraţie a lui (4) se poate obţine imediat folosind varianta integrală a identităţii lui Lagrange:

$$\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx-\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2=\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b\left(f(x)g(y)-f(y)g(x)\right)^2dxdy.$$

Să probăm acum forma integrală a inegalităţilor algebrice de tip Cebâşev iar pentru aceasta fie $a,b\in\mathbb{R},a<b$ şi $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcţii integrabile astfel încât $\left(f(x)-f(y)\right)\left(g(x)-g(y)\right)\ge 0$ pentru orice $x\in[a,b]$

Condiţia de mai sus se poate scrie şi sub forma

$f(x)g(x)+f(y)g(y)\ge f(x)g(y)+f(y)g(x)$, astfel că integrând în raport cu x deducem că pentru orice $y\in[a,b]$ avem

$$\int_a^b f(x)g(x)dx+(b-a)f(y)g(y)\ge g(y)\int_a^b f(x)dx+f(y)\int_a^b g(x)dx.$$

Integrând acum în raport cu y deducem că

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx+(b-a)\int_a^b f(y)g(y)dy\ge\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b g(y)d(y)+\int_a^b g(x)dx\cdot\int_a^b f(y)dy\Leftrightarrow$$

$$(5)\quad \int_a^b f(x)g(x)dx\ge\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b g(x)dx.$$

Inegalitatea (5) reprezintă forma integrală a inegalităţilor de tip Cebâşev.

Observaţii

*1.*Astfel, dacă din punct de vedere al monotoniei , f şi g sunt ambele fie crescătoare, fie descrescătoare în (5) avem semnul $\geq$. Dacă f şi g sunt de monotonie diferită atunci (5) capătă forma

(6) $\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b g(x)\,dx$

2. Atât în cazul lui 5 cât şi în cazul lui 6 avem egalitate dacă şi numai dacă una din cele două funcţii este constantă

3. O altă demonstraţie pentru 6 se poate prezenta considerând diviziunea

$\Delta_n : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ cu punctele intermediare $\xi_k = x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ şi aplicând forma discretă a inegalităţii Cebâşev

$$n\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,g(\xi_k) \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i)\,g(\xi_j)\text{ , obţinem}$$

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(\xi_k) \geq \frac{1}{b-a}\left(\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\right)\cdot\left(\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\right)$$

De unde prin trecere la limită după $n \to \infty$ deducem 5 (analog pentru 6)

Să considerăm în continuare $a,b \in \mathbb{R}, a < b$ şi $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă , $m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}, M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$ iar $g:[n,M] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi convexă (concavă)

Conform inegalităţii lui Jensen avem:

$$g\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\right) \leq (\geq)\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n}(g\circ f)(\xi_k)\text{, de unde}$$

$$g\left[\frac{1}{b-a}\cdot\left(\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\right)\right] \leq (\geq)\frac{1}{b-a}\left[\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n}(g\circ f)(\xi_k)\right].$$

Trecând la limită în această formă finală după $n \to \infty$ deducem

$$(7)\ g\left[\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx\right]\le(\ge)\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b g\left(f(x)\right)dx$$

Inegalităţile de tip (7) reprezintă forma integrală a inegalităţii lui Jensen

Egalitate în (7) avem dacă de exemplu g este funcţia identică.

1.2.1 O generalizare a inegalităţii lui Young

Inegalitatea lui Young face parte din categoria inegalităţilor clasice ale analizei matematice. Enunţul său este:

Fie $f:[0,T]\to\left[0,f(T)\right]$ o funcţie continuă, stric crescătoare cu proprietatea $f(0)=0$. Atunci:

$$\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^a f^{-1}(x)\,dx\ge ab,$$

Pentru orice $a\in[0,T]$ şi $b\in\left[0,f(T)\right]$. Egalitatea se realizează dacă şi numai dacă $b=f(a)$.

Datorită interpretării sale geometrice şi a numeroaselor sale aplicaţii , această inegalitate a suscitat interesul unui număr foarte mare de matematicieni. Pentru a prezenta generalizarea inegalităţii lui Young este nevoie de câteva rezultate preliminarii care vor fi enunţate şi demonstrate în paragraful următor. Următoarele leme sunt extrem de utile.

Lema 1.2.1 Fie I,J două intervale de numere reale şi $f:I\to J$ o funcţie strict crescătoare şi surjectivă. Atunci f este continuă şi bijectivă.

Lema 1.2.2. Fie I,J două intervale de numere reale şi $f:I\to J$ o funcţie strict crescătoare şi surjectivă. Atunci f^{-1} este continuă şi bijectivă.

Consideram două intervale nedegenerate $A,B\subset\mathbb{R}$, notaţii pe care le vom păstra în continuarea prezentării.

Propoziţia 1.2.1. Fie $f:A\to B$ o funcţie continuă şi bijectivă. Fie $g:A\to\mathbb{R}$ o funcţie care admite primitive şi $G:B\to\mathbb{R}$ una dintre primitivele sale. Atunci:

a) Funcţia $G\circ f^{-1}:B\to\mathbb{R}$ admite primitive;

b) Dacă $V : B \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei $G \circ f^{-1}$ atunci funcţia

$$H : A \to \mathbb{R}, H(x) = f(x)G(x) - (V \circ f)(x)$$

este o primitivă a funcţiei fg

Demonstraţie.

a) Deoarece f^{-1} este o funcţie continuă atunci $G \circ f^{-1}$ este continuă şi, prin urmare admite primitive.

b) Vom demonstra că H este derivabilă pe A şi $H'(a) = f(a)g(a)$, pentru orice $a \in A$. Pentru acesta, considerăm $a \in A$ şi un şir de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pentru care $a_n \in A, a_n \neq a, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Atunci

$$\frac{H(a_n) - H(a)}{a_n - a} = f(a_n)\frac{G(a_n) - G(a)}{a_n - a} + G(a)\frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} - \frac{V(f(a_n)) - V(f(a))}{a_n - a}$$

Cum f este bijectivă, deci strict monotonă, putem aplica teorema lui Lagrange funcţiei V pe intervalul mărginit de $f(a_n)$ şi $f(a)$, obţinând existenţa unui număr real c_n cuprins între $f(a_n)$ şi $f(a)$ astfel încât:

$$V(f(a_n)) - V(f(a)) = (f(a_n) - f(a))V'(c_n) = (f(a_n) - f(a))(G \circ f^{-1})(c_n).$$

Atunci:

$$\frac{H(a_n) - H(a)}{a_n - a} = f(a_n)\frac{G(a_n) - G(a)}{a_n - a} + (f(a_n) - f(a))\frac{G(a) - G(f^{-1}(c_n))}{a - f^{-1}(c_n)} \cdot \frac{a - f^{-1}(c_n)}{a_n - a}.$$

Dar $f^{-1}(c_n)$ este cuprins între a_n şi a, de unde obţinem:

$$\left|\frac{a - f^{-1}(c_n)}{a_n - a}\right| < 1$$

Deoarece f este continuă şi G este derivabilă, al doilea termen din suma de mai sus are limita nulă, deci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H(a_n)-H(a)}{a_n-a}=f(a)g(a),$$

ceea ce încheie demonstraţia.

Corolarul 1.2.1. Fie $f:A\to B$ o funcţie continuă şi bijectivă.

a) Dacă $F:A\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui f atunci funcţia:

$G:B\to\mathbb{R}, G(x)=xf^{-1}(x)-F\left(f^{-1}(x)\right)$ **este o primitivă pentru f^{-1}**

b) Dacă $G:B\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei f^{-1}, atunci funcţia:

$F:A\to\mathbb{R}, F(x)=xf(x)-G\left(f(x)\right)$

Este o primitivă pentru f.

Demonstraţie.

a) Se aplică Propoziţia 1.2.1 pentru funcţiile $f^{-1}:B\to A$ şi $g:B\to\mathbb{R}, g(x)=1$

b) Se aplică Propoziţia 1.2.1. pentru funcţiile $f:A\to B$ şi $g:A\to\mathbb{R}, g(x)=x$

Propoziţia 1.2.2 Fie $f:A\to B$ o funcţie continuă şi bijectivă. Fie $g:A\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $G:A\to\mathbb{R}$ una dintre primitivele sale

Atunci:

a) $G\circ f^{-1}$ este local integrabilă Riemann pe B

b) Pentru orice $a\in A$, funcţia:

$$H:A\to\mathbb{R}, H(x)=f(x)G(x)-\int_{f(a)}^{f(x)}G\left(f^{-1}(y)\right)dy$$

Este o primitivă a funcţiei fg.

Demonstraţie.

a) Este evident, deoarece f şi G^{-1} sunt contiune.

b) Funcţia:

$$V : B \to \mathbb{R}, V(t) = \int_{f(a)}^{t} G\left(f^{-1}(y)\right)dy$$

Este o primitivă a funcţie $G \circ f^{-1}$. Concluzia se obţine prin aplicarea Propoziţiei 1.2.1

Corolarul 1.2.2 (Generalizarea egalităţii lui Young). Considerăm $f : A \to B$ o funcţie continuă şi bijectivă şi $g : B \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Fie $G : B \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei g. Atunci:

a) fg **şi** $G \circ f^{-1}$ **sunt local integrabile Riemann;**

b) Pentru orice $a, b \in A$ **avem:**

$$\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} G\left(f^{-1}(y)\right)dy = f(b)G(b) - f(a)G(a)$$

Demonstraţie

a) Este evident, datorită continuităţii

b) Funcţia H din Propoziţia 1.2.2 este o primitivă a funcţiei fg, deci:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = H(b) - H(a) = f(b)G(b) - \int_{f(a)}^{f(b)} G\left(f^{-1}(y)\right)dy - f(a)G(a)$$

Care este echivalentă cu concluzia.

<u>Remarcă:</u> Dacă alegem $g(x) = 1$ în Corolarul 1.2.1., obţinem egalitatea lui Young

Cu ajutorul rezultatelor descrise în paragrafele anterioare, suntem în măsură acum să enunţăm şi să demonstrăm rezultatele principale ale acestui subcapitol

Propoziţia 1.2.3. Fie $a, b \in A$ şi $f : A \to B$ o funcţie strict crescătoare şi surjectivă. Fie $g : A \to (0, \infty)$ o funcţie continuă şi $G : A \to \mathbb{R}$ o primitivă a sa . Atunci:

a) fg **şi** $G \circ f^{-1}$ **sunt local integrabile Riemann;**

b) $\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} G\left(f^{-1}(y)\right)dy \geq cG(b) - f(a)G(a)$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $c = f(b)$.

Demonstraţie

a) Cerinţa este o consecinţă a aplicării Lemei 1.2.1

b) Dacă $c = f(b)$, atunci obţinem egalitate folosind punctul b) al Corolarul 1.2.2.

Pentru $c \neq f(b)$ obţinem:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} G\left(f^{-1}(y)\right)dy - \left(cG(b) - f(a)G(a)\right) =$$

$$= f(b)G(b) - f(a)G(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} G\left(f^{-1}(y)\right)dy + \int_{f(a)}^{c} G\left(f^{-1}(y)\right)dy - \left(cG(b) - f(a)G(a)\right) =$$

$$= \int_{f(a)}^{c} G\left(f^{-1}(y)\right)dy - G(b)\left(c - f(b)\right).$$

Utilizând teorema de medie pentru $\int_{f(a)}^{c} G\left(f^{-1}(y)\right)dy$, obţinem existenţa unui număr real φ cuprins între c şi $f(b)$ pentru care avem:

$$\int_{f(a)}^{c} G\left(f^{-1}(y)\right)dy = \left(c - f(b)\right)G\left(f^{-1}(\varphi)\right).$$

Atunci

$$\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} G\left(f^{-1}(y)\right)dy - \left(cG(b) - f(a)G(a)\right) =$$
$$= \left(c - f(b)\right)\left(G\left(f^{-1}(\varphi)\right) - G(b)\right)$$

Deoarece g este o funcţie strict crescătoare pozitivă, G este strict crescătoare. Dacă $c < f(b)$ atunci $c < \varphi < f(b)$ şi $f^{-1}(\varphi) < b$ şi $G\left(f^{-1}(\varphi)\right) < G(b)$. Rezultă $G\left(f^{-1}(\varphi)\right) < G(b)$ şi $\left(c - f(b)\right)\left(G\left(f^{-1}(\varphi)\right) - G(b)\right) > 0$

Procedăm analog şi în cazul $c > f(b)$ şi demonstraţia este încheiată.

Propoziţia 1.2.4.(O generalizare a inegalităţii lui Young). Fie $c, d \in (0, \infty)$ şi $f : [0, c) \to [0, d)$ o funcţie strict crescătoare şi surjectivă. Fie $g : [0, c) \to (0, \infty)$ o funcţie

continuă iar $G:[0,c)\to\mathbb{R}$ o primitivă a sa. Atunci, pentru orice $a\in[0,c)$ şi $b\in[0,d)$ are loc inegalitatea:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx+\int_{f(a)}^{f(b)} G\left(f^{-1}(y)\right)dy\geq bG(a)$$

Egalitatea se obţine dacă şi numai dacă $b=f(a)$.

Demonstraţie.

Din ipoteză, obţinem $f(0)=0$. Concluzia se obţine prin aplicarea Propoziţiei 1.2.3

<u>Remarcă</u>: Pentru $g(x)=1$ se obţine inegalitatea lui Young.

Corolarul 1.2.3. Fie $a,b\in A$ şi $f:A\to B$ o funcţie strict crescătoare şi surjectivă. Atunci inegalitatea :

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{c} f^{-1}(y)\,dy\geq bc-af(a)$$

Este adevărată pentru orice $c\in B$, cu egalitate dacă şi numai dacă $c=f(b)$.

Demonstraţie.

Se aplică Propoziţia 1.2.3. pentru funcţia $g:A\to(0,\infty)$, $g(x)=1$.

Propoziţia 1.2.5. Fie $f:A\to B$ o funcţie crescătoare şi surjectivă . Fie $h:B\to(0,\infty)$ o funcţie continuă, iar $H:B\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei h. Atunci:

a) f^{-1} şi $H\circ f$ este local integrabilă Riemann;

b) Pentru orice $m,n\in B$ şi $p\in A$ avem:

$$\int_m^n f^{-1}(y)\,dy+\int_{f^{-1}(m)}^{p} H\left(f(x)\right)dx\geq pH(n)-f^{-1}(m)H(m)$$

Egalitatea se realizează dacă şi numai dacă $p=f^{-1}(n)$.

Demonstraţie.

Se aplică Propoziţia 1.2.3 pentru funcţiile f^{-1} şi h.

Propoziţia 1.2.6. Fie $a \in A, b \in B$. Fie $f : A \to B$ o funcţie strict crescătoare şi surjectivă. Fie $g : A \to (0,\infty)$ o funcţie continuă şi $G : A \to \mathbb{R}$ una dintre primitivele sale. Considerăm funcţia $L : A \times B \to \mathbb{R}$:

$$L(s,t) = \int_a^s f(x)g(x)\,dx + \int_{f(a)}^t G\left(f^{-1}(y)\right)dy - tG(s) + f(a)G(a).$$

Atunci, pentru orice $(s,t) \in A \times B$ avem:

$$0 \le L(s,t) \le \left[t - f(s)\right]\left[G\left(f^{-1}(t)\right) - G(s)\right]$$

Egalitatea se realizează dacă şi numai dacă $t = f(s)$.

Demonstraţie .

Funcţiile $f, fg, G \circ f^{-1}$ sunt continue, deci construcţia lui L este corectă.

Prima parte a inegalităţii reprezintă, de fapt punctul b) al propoziţiei 1.2.3. Pentru partea a doua, avem:

$$L(s,t) + L\left(f^{-1}(t), f(s)\right) =$$

$$= \int_a^s f(x)g(x)\,dx + \int_{f(a)}^t G\left(f^{-1}(y)\right)dy - tG(s) + f(a)G(a) + \int_a^{f^{-1}(t)} f(x)g(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(s)} G\left(f^{-1}(y)\right) -$$

$$- f(s)G\left(f^{-1}(t)\right) + f(a)G(a) = \left(\int_a^s f(x)g(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(s)} G\left(f^{-1}(y)\right) + f(a)G(a)\right) +$$

$$+ \int_a^{f^{-1}(t)} f(x)g(x)\,dx + \int_{f(a)}^t G\left(f^{-1}(y)\right) - tG(s) + f(a)G(a) - tG(s) - f(s)G\left(f^{-1}(t)\right) =$$

$$= f(s)G(s) + tG\left(f^{-1}(t)\right) - tG(s) - f(s)G\left(f^{-1}(t)\right) =$$

$$= \left(t - f(s)\right)\left(G\left(f^{-1}(t)\right) - G(s)\right).$$

Deoarece $f^{-1}(t) \in A$ şi $f(s) \in B$, are loc $L\left(f^{-1}(t), f(s)\right) \ge 0$ conform Propoziţiei 1.2.3. b), deci $L(s,t) \le \left[t - f(s)\right]\left[G\left(f^{-1}(t)\right) - G(s)\right]$.

Cazul de egalitate este banal.

1.3. Aplicaţii

1. **Fie** $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n \in \mathbb{R}$ **astfel încât** $a_i + b_i = 1$**, pentru orice** $1 \le i \le n$**. Atunci** $\left(a_1b_1 + ... + a_nb_n\right)^2 \ge \left(a_1^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + ... + b_n^2 - n\right)$**.**

Soluţie. Înlocuind $b_i = 1 - a_i$, pentru orice $1 \le i \le n$ şi notând $x = a_1 + ... + a_n$, $y = a_1^2 + ... + a_n^2$ inegalitatea din enunţ va fi echivalentă cu $\left(x - y\right)^2 \ge y\left(n - 2x + y - n\right) \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \ge -2xy + y^2 \Leftrightarrow x^2 \ge 0$, ceea ce este evident. Egalitate avem pentru $a_1 + ... + a_n = 0$

2. **Fie** $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$**. Să se demonstreze că numerele** $x_1, x_2, ..., x_n$ **sunt pozitive dacă şi numai dacă numerele** $\sum x_1, \sum x_1x_2, ..., x_1x_2...x_n$ **sunt pozitive.**

Soluţie. Fie $s_i = \sum x_1x_2...x_i, i = 1, 2, ..., n$. Atunci elementele $x_i, i = 1, 2, ..., n$ sunt soluţii ale ecuaţiei $P\left(X\right) = X^n - s_1X^{n-1} + s_2X^{n-2} - ... + \left(-1\right)^n s_n = 0$

Cum implicaţia de la stânga la dreapta este banală, să presupunem că numerele $s_1, s_2, ..., s_n$ sunt pozitive şi să demonstrăm că $x_1, x_2, ..., x_n \ge 0$. Dacă prin absurd există $i \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel încât $x_i < 0$, atunci (dacă de exemplu, n este impar) deducem că $P\left(x_i\right) < 0 \Leftrightarrow 0 < 0$, absurd. Dacă n este par , obţinem contradicţia $P\left(x_i\right) > 0 \Leftrightarrow 0 > 0$.

3. **Fie** $x_1, ..., x_n$ **numere reale pozitive** ($n \ge 2$)**. Atunci**

$$\frac{x_1 + ... + x_n}{n} - \sqrt[n]{x_1...x_n} \ge \frac{1}{n}\max_{1 \le i, j \le n}\left(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j}\right)^2.$$

Soluţie. Să presupunem că $\max_{1 \le i, j \le n}\left(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j}\right)^2 = \left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2$. Atunci inegalitatea din enunţ devine $\frac{2}{n}\sqrt{x_1x_2} + \frac{x_3 + ... + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1...x_n}$ şi în această formă, inegalitatea rezultă din inegalitatea mediilor aplicată numerelor $\sqrt{x_1x_2}, \sqrt{x_1x_2, x_3...x_n}$.

4. **Fie** $a_1, ..., a_n$ **numere reale strict pozitive şi diferite de 1.**

Atunci funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f\left(x\right) = \left(a_1^x + ... + a_n^x\right)\left(a_1^{-x} + ... + a_n^{-x}\right)$ **este strict crescătoare.**

Soluţie. Dacă $a > 0, a \ne 1$, atunci $f_a : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f_a\left(x\right) = a^x + \frac{1}{a^x}$, pentru orice $x \in [0, \infty)$ este strict crescătoare. Cum $f = n + \sum_{1 \le i < j \le n} f_{a_i/a_j}$, totul este clar.

5. Dacă $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n \geq 0, n \geq 2$, **atunci**

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1...a_n} + \sqrt[n]{b_1...b_n}$$

Soluţie. Dacă de exemplu $b_i = 0$, totul este clar. Să presupunem deci că $b_1,...,b_n > 0$. Împărţind ambii membri ai inegalităţii din enunţ prin $\sqrt[n]{b_1...b_n}$ şi notând $x_i = \frac{a_i}{b_i}$ pentru orice $1 \leq i \leq n$, inegalitatea devine

$$\sqrt[n]{(1+x_1)...(1+x_n)} \geq 1+\sqrt[n]{x_1...x_n} \Leftrightarrow (1+x_1)...(1+x_n) \geq \left(1+\sqrt[n]{x_1...x_n}\right)^n.$$

6. Dacă $a_1,...a_n > 0, n \geq 2$ **şi** $x \in [0,1]$**, atunci**

$$\sqrt[n]{a_1...a_n} \leq \frac{a_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^x + a_2\left(\frac{a_3}{a_2}\right)^x + ... + a_n\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^x}{n} \leq \frac{a_1+...+a_n}{n}.$$

Soluţie. Prima inegalitate se demonstrează imediat cu inegalitatea mediilor. Într-adevăr, avem

$$\frac{a_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^x + a_2\left(\frac{a_3}{a_2}\right)^x + ... + a_n\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^x}{n} \geq \sqrt[n]{a_1...a_n\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^x\left(\frac{a_3}{a_2}\right)^x...\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^x} = \sqrt[n]{a_1...a_n}.$$

Inegalitatea se verifică cu egal pentru

$$a_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^x = a_2\left(\frac{a_3}{a_2}\right)^x = ... = a_n\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^x \Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n.$$

Pentru a proba a doua inegalitate, considerăm funcţia

$f(x) = a_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^x + a_2\left(\frac{a_3}{a_2}\right)^x + ... + a_n\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^x$, $x \in [0,1]$, inegalitatea de demonstrat devenind

$f(x) \leq a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Avem

$$f'(x) = a_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^x \ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + a_2\left(\frac{a_3}{a_2}\right)^x \ln\left(\frac{a_3}{a_2}\right) + ... + a_n\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^x \ln\left(\frac{a_1}{a_n}\right),$$

$$f''(x) = a_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^x \ln^2\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + a_2\left(\frac{a_3}{a_2}\right)^x \ln^2\left(\frac{a_3}{a_2}\right) + ... + a_n\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^x \ln^2\left(\frac{a_1}{a_n}\right)$$

Exceptând cazul banal avem $f''(x) > 0$ pentru orice $x \in [0,1]$, ceea ce înseamnă că f' este strict crescătoare.

Avem

$$f'(0)=a_1\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)+a_2\ln\left(\frac{a_3}{a_2}\right)+...+a_n\ln\left(\frac{a_1}{a_n}\right)=$$

$$\left(a_1\ln(a_2)+a_2\ln(a_3)+...+a_n\ln(a_1)\right)-\left(a_1\ln(a_1)+a_2\ln(a_2)+...+a_n\ln(a_n)\right)$$

Avem $f'(0)<0$ deoarece n-uplele $(a_1,a_2,...,a_n)$ şi $(\ln a_1,\ln a_2,...,\ln a_n)$ sunt la fel de ordonate iar $(\ln a_1,\ln a_2,...,\ln a_n)$ este o permutare circulară a celei de a doua n-uple.

Apoi,

$$f'(1)=a_2\ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right)+a_3\ln\left(\frac{a_3}{a_2}\right)+...+a_1\ln\left(\frac{a_1}{a_n}\right)=$$

$$\left(a_1\ln(a_1)+a_2\ln(a_2)+...+a_n\ln(a_n)\right)-\left(a_2\ln(a_1)+a_3\ln(a_2)+...+a_1\ln(a_n)\right)$$

Şi din nou deducem $f'(1)>0$

Cum $f(0)=f(1)$, conform unei teoreme a lui Rolle există $c\in(0,1)$ cu $f'(c)=0$ şi atunci f este descrescătoare pe $(0,c)$ şi crescătoare pe $(0,1)$, dec $f(x)\le\max\{f(0),f(1)\}$ şi inegalitatea este demonstrată deoarece $f(0)=f(1)=a_1+a_2+...+a_n$.

A doua inegalitate este verificată cu egal când avem fie $a_1=a_2=...=a_n$, fie $x=0$ sau 1.

7. Fiind date n numere pozitive $a_1,a_2,...,a_n$ vom nota prin g_n media lor geometrică. Să se demonstreze că $a_n\ge ng_n-(n-1)g_{n-1}, n\in\mathbb{N}$.

Soluţie. Fie $a=a_n$ şi $b=g_{n-1}$. Avem de demonstrat

$$a\ge n\sqrt[n]{ab^{n-1}}-(n-1)b\Leftrightarrow a+(n-1)b\ge n\sqrt[n]{ab^{n-1}}\Leftrightarrow\frac{a+(n-1)b}{n}\ge\sqrt[n]{ab^{n-1}}$$

Ultima inegalitate reprezintă chiar inegalitatea mediilor aplicată numerelor $a,\underbrace{b,b,...,b}_{de\ n-1\ \text{ori}}$.

8. Fie $a_1,a_2,...,a_n,m,M$ numere reale pozitive astfel încât $m\le a_i\le M$, $i=1,2,...,n$ cu $n\in\mathbb{N}$. Atunci

$$(i)\ n^2\le\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\right)\le\frac{n^2}{4}\left(\sqrt{\frac{M}{m}}+\sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2;\qquad\text{(Schweitzer)}$$

(ii) **Dacă $p_1,p_2,...,p_n>0$ atunci**

$$\left[n\cdot\sqrt[n]{p_1...p_n}\right]^2\le\left(\sum_{i=1}^n p_ia_i\right)\left(\sum_{i=1}^n\frac{p_i}{a_i}\right)\le\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{M}{m}}+\sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2\cdot(p_1+...+p_n)^2\qquad\text{(Kantorivici)}$$

(iii) **Dacă $n\ge2, a_1,a_2,...,a_n\in[1,2]$ atunci**

$$\frac{n^3}{2} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)^2 \le n^3 \qquad \text{(L. Panaitopol)}$$

(iv) **Dacă** $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ **şi** $|z_1| = ... = |z_n| = 1$**, atunci**

$$0 \le \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i}\right) \le n \qquad \text{(Gh. Andrei)}$$

Soluţie.

(i) Conform inegalităţii mediilor , putem scrie

$a_1 + a_2 + ... + a_n \ge n\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} \ge n \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}}$, de unde prin

înmulţire membru cu membru obţinem $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \ge n^2$. Să demonstrăm a

doua inegalitate.

Inegalitatea evidentă $(M - a_i)(a_i - m) \ge 0$ pentru $i = 1, 2, ..., n$ este echivalentă cu

$\left(\frac{M}{a_i} - 1\right)(a_i - m) \ge 0 \Leftrightarrow M - \frac{M \cdot m}{a_i} - a_i + m \ge 0$. Pentru $i = 1, 2, ..., n$ sumăm cele n

inegalităţi obţinute şi avem

$$M \cdot m \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i \le n \cdot (M + m).$$

Cum

$2\sqrt{Mm\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)} \le M \cdot m \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i$ deducem că

$$2\sqrt{Mm\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)} \le n \cdot (M + m) \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \le \frac{n^2}{4}\left(\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2$$

Semnul egal corespunde cazului $a_1 = a_2 = ... = a_n = m = M$.

(ii) Prima inegalitate rezultă din inegalitatea mediilor. Pentru a doua, ca şi în cazul (i)

avem $x_i + Mm \cdot \frac{1}{x_i} \le M + m$, pentru orice $1 \le i \le n$.

Cum $p_i > 0 (1 \le 0 \le n)$, deducem că $p_i x_i + Mm \frac{p_i}{x_i} \le p_i (M + m)$, de unde

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i + Mm\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x_i}\right) \le (M + m)\sum_{i=1}^{n} p_i .$$

Ca în cazul (i) deducem

$$2\sqrt{Mm\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x_i}\right)} \le (M+m)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right), \text{ de unde}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x_i}\right) \le \frac{(M+m)^2}{4Mm}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^2.$$

Pentru $p_i = 1, \quad 1 \le i \le n$, obţinem (i).

(iii) Conform inegalităţii

$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)^2 \ge n^2$, pentru $n \ge 2$ şi $a_1, a_2, ..., a_n \in [1,2]$, deducem

$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)^2 \ge n^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \ge \frac{n^3}{2}$, ultima inegalitate fiind adevărată deoarece pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$ avem $a_i \le 2$ şi $\frac{1}{a_i} \ge \frac{1}{2}$.

În prima inegalitate din enunţ egalul se atinge pentru $a_1 = a_2 = ... = a_n = 2$.

Pentru probarea celei de a doua inegalităţi din enunţ de folos ne+ar putea fi cunoaşterea cazului (unui caz) de egalitate, care, se observă uşor este $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$.

Vrem să probăm că dacă una dintre variabile se înlocuieşte cu 1, indiferent de valorile celorlalte variabile, valoarea expresiei se măreşte, şi astfel a doua inegalitate din enunţ se obţine dintr-un şir de intercalări, căci plecând de la expresia iniţială şi înlocuind pe rând fiecare variabilă cu 1 expresia se măreşte până când toate variabilele sunt înlocuite cu 1, caz în care expresia devine egală cu n^3 şi astfel inegalitatea este probată.

Se pot renota convenabil $a_1, a_2, ..., a_n$ astfel încât cel care urmează să fie înlocuit să fie a_n, renotat , a. Vom nota $S = \sum_{i=1}^{n-1} a_i, T = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i}$.

Ipoteza se transcrie

$$(S+a)\left(T+\frac{1}{a}\right)^2 \le (S+1)(T+1)^2 \Leftrightarrow \frac{2ST}{a} + \frac{S}{a^2} + T^2 a + \frac{1}{a} \le 2ST + S + T^2 + 1 \Leftrightarrow$$
$$0 \le (a-1)\left(2STa + S(a-1) + T^2 a^2 + a\right)$$

Cum pentru fiecare $i \in \{1, 2, ..., n\}$ avem $1 \le a_i \le 2$ avem $a - 1 = a_n - 1 \ge 0$; de asemenea, $a_i \ge \frac{1}{a_i}$, de unde $S \ge T$ şi atunci $2STa \ge 2T^2 a \ge T^2 a^2$.

Deci este confirmată presupunerea făcută; în consecinţă egalul în a doua inegalitate se atinge doar pentru $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$

(iv) Cum $\overline{z_i} = \frac{1}{z_i}$ pentru orice $1 \le i \le n$, deducem că

$$(z_1 + ... + z_n)\left(\frac{1}{z_1} + ... + \frac{1}{z_n}\right) = (z_1 + ... + z_n)\left(\overline{z_1} + ... + \overline{z_n}\right) =$$

$$(z_1 + ... + z_n)\overline{(z_1 + ... + z_n)} = |z_1 + ... + z_n|^2 \ge 0$$

şi cum $|z_1 + ... + z_n|^2 \le |z_1|^2 + ... + |z_n|^2 = n$ deducem cealaltă inegalitate.

9. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ numere reale supraunitare.

Să se demonstreze că $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i} \ge \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}}, n \in \mathbb{N}$.

Soluţie.

Vom arăta la început că inegalitatea este adevărată pentru toate valorile lui n de forma 2^k cu $k \in \mathbb{N}$.

Dacă $n = 2$ inegalitatea de demonstrat devine

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} \ge \frac{2}{1+\sqrt{a_1 a_2}} \Leftrightarrow (2 + a_1 + a_2)\left(1 + \sqrt{a_1 a_2}\right) \ge 2(1+a_1)(1+a_2) \Leftrightarrow$$

$$(a_1 + a_2)\left(\sqrt{a_1 a_2} - 1\right) + 2\sqrt{a_1 a_2}\left(1 - \sqrt{a_1 a_2}\right) \ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a_1 a_2} - 1\right)\left(a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2}\right) \ge 0,$$

Care este evidentă deoarece $a_1 a_2 \ge 1$ iar $\frac{a_1 + a_2}{2} \ge \sqrt{a_1 a_2}$

Dacă $n = 4$, atunci ţinând cont de cazul $n = 2$ obţinem succesiv

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \frac{1}{1+a_3} + \frac{1}{1+a_4} \ge \frac{2}{1+\sqrt{a_1 a_2}} + \frac{2}{1+\sqrt{a_3 a_4}} \ge \frac{2}{1+\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}}$$

Inductiv (după k) deducem că inegalitatea este adevărată pentru toate valorile lui n de forma 2^k cu $k \in \mathbb{N}$.

Fie acum n un număr oarecare iar k cel mai mic număr natural pentru care $n \le 2^k$. Considerăm numerele

$$y_i = \begin{cases} a_i, \text{ pentru } i = 1, 2, ..., n \\ \sqrt[n]{a_1 ... a_n}, \text{ pentru } i = n+1, n+2, ..., 2^k \end{cases}$$

Conform celor stabilite anterior deducem că

$$\frac{1}{1+y_1} + ... + \frac{1}{1+y_n} + \frac{1}{1+y_{n+1}} + ... + \frac{1}{1+y_{2^k}} \ge \frac{2^k}{1+\sqrt[2^k]{y_1 ... y_n y_{n+1} ... y_{2^k}}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1+a_1}+...+\frac{1}{1+a_n}+\frac{2^k-n}{1+\sqrt[n]{a_1...a_n}}\geq\frac{2^k}{1+\sqrt[2^k]{a_1...a_n\left(\sqrt[n]{a_1...a_n}\right)^{2^k-n}}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1+a_1}+...+\frac{1}{1+a_n}+\frac{2^k-n}{1+\sqrt[n]{a_1...a_n}}\geq\frac{2^k}{1+\sqrt[2^k]{a_1...a_n}}\Leftrightarrow\frac{1}{1+a_1}+...+\frac{1}{1+a_n}\geq\frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1...a_n}}$$

Egalitate avem pentru $a_1=a_2=...=a_n=1$.

10) Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+x-3\ln x$**.**

(sau Demonstraţi că $x^2+x-3\ln x\geq 2,\forall x\in(0,+\infty)$ **)**

a) Determinaţi perechea (a,b) **de numere reale pentru care** $y=ax+b$ **reprezintă ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de abscisă** $x_0=1$**.**

b) Arătaţi că funcţia considerată este convexă.

c) Demonstraţi că $f(x)\geq 2,\forall x\in(0,+\infty)$**.**

Soluţie: a) $(a,b)=(0,2)$.

b) $f^{//}(x)=2+\frac{3}{x^2}>0,\forall x\in(0,+\infty)$. c) $x=1$ este punct de minim global, deci $f(x)\geq f(1)=2,\forall x\in(0,+\infty)$.

11) Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+1-2\sqrt{x}$**.**

(sau Demonstraţi că $x+1-2\sqrt{x}\geq 0,\forall x\in[0,+\infty)$**)**

a) Determinaţi perechea (a,b) **de numere reale pentru care** $y=ax+b$ **reprezintă ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de abscisă** $x_0=1$**.**

b) Arătaţi că $f(x)\geq 0,\forall x\in[0,+\infty)$**.**

Soluţie: a) $(a,b)=(0,0)$. b) $x=1$ este punct de minim global, deci $f(x)\geq f(1)=0,\forall x\in[0,+\infty)$.

(Întrebare: se poate găsi şi o soluţie elementară ? Răspuns: DA, anume cu inegalitatea mediilor:

$\frac{x+1}{2}\geq\sqrt{x\cdot 1}\Rightarrow ....$)

12) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\cdot e^{-x}$**.**

a) Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ **la graficul funcţiei** f **.**

b) Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiei f **.**

c) Arătaţi că $(ex)^2 \le 4 \cdot e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$**.**

Soluţie:

a) $y = 0$ este ecuaţia cerută (de ce?).

b) $x_1 = 0, x_2 = 2$ sunt punctele de minim, respectiv de maxim local.

c) $f(x) \le f(2), \forall x \in (0, +\infty)$.

13) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \text{arctg}\, x - \ln(1 + x^2)$**.**

a) Calculaţi $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x}$**.**

b) Arătaţi că f' **este mărginită.**

c) Demonstraţi că $x \cdot \text{arctg}\, x \ge \ln(1 + x^2), \ \forall x \in \mathbb{R}$**.**

Soluţie: a) $f'(x) = arctgx - \dfrac{x}{1 + x^2}$ şi $f''(x) = \dfrac{2x^2}{\left(1 + x^2\right)^2}$. Limita cerută este $f''(0) = 0$. b) $f''(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$; cum $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ şi $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \dfrac{\pi}{2}$, deducem $\left|f'(x)\right| < \dfrac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$. c) se deduce că $x = 0$ este punct de minim global al funcţiei f şi astfel se ajunge imediat la inegalitatea propusă.

14) Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\ln(1 + x^2)}{x}$**.**

a) Arătaţi că graficul funcţiei considerate are o singură asimptotă.

b) Demonstraţi că funcţia f **este strict crescătoare pe intervalul** $(0,1)$**.**

c) Arătaţi că $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\dfrac{4}{3}\right)^{\sqrt{3}}$**.**

Soluţie:

a) $f(0+0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\ln(1 + x^2)}{x^2} \cdot x = 0$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0 \Rightarrow G_f$ admite doar asimptotă orizontală (de ecuaţie $y = 0$).

b) Considerăm funcţia $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{2x^2}{1+x^2}-\ln\left(1+x^2\right)$ (expresie care apare la numărătorul derivatei funcţiei f) şi avem $g'(x)=\dfrac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}>0,\forall x\in(0,1)$. Cum g este strict crescătoare, deducem că $g(x)>g(0)=0,\ \forall x\in(0,1)$ şi astfel se ajunge la $f'(x)>0,\forall x\in(0,1)$, concluzia fiind imediată.

c) $0<\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)<f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; continuarea vă aparţine.

14) Se consideră funcţia $f:\left(-1,+\infty\right)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(1+x)$.

a) Determinaţi perechea (m,n) de numere reale pentru care $y=mx+n$ reprezintă ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $x_0=0$.

b) Arătaţi că $f(x)\le x$, $\forall x\in\left(-1,+\infty\right)$.

c) $\dfrac{1}{3}<\ln\dfrac{3}{2}<\dfrac{1}{2}$.

Soluţie:

a) $(m,n)=(1,0)$.

b) funcţia $g:\left(-1,+\infty\right)\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-x$ este derivabilă, cu derivata $g'(x)=\dfrac{-x}{1+x}$ şi pentru care $x=0$ este punct de maxim global; se ajunge apoi la $g(x)\le g(0),\forall x\in\left(-1,+\infty\right)$, de unde $f(x)\le x,\forall x\in\left(-1,+\infty\right)$.

c) se aplică teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalul $[1,2]$. (sau funcţiei $f:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$ pe $\left[2,3\right]$).

15) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right), f(x)=\operatorname{arctg} x$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4\operatorname{arctg} x-\pi}{x-1}$.

b) Arătaţi că funcţia f este concavă pe $\left(0,+\infty\right)$.

c) Demonstraţi că $\dfrac{5\pi+4}{20}<\operatorname{arctg}2<\dfrac{2\pi+4}{8}$.

Soluţie:

a) $f^{/}(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{arctgx-\dfrac{\pi}{4}}{x-1}=\dfrac{1}{4}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4arctgx-\pi}{x-1}=\dfrac{1}{2}$; limita cerută este astfel egală cu 2.

b) $f^{//}(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}<0,\forall x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ este concavă pe $(0,+\infty)$.

c) Folosiţi teorema lui Lagrange aplicată funcţiei din enunţ pe intervalul $[1,2]$.

16) Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4\ln\sqrt{x}$.

a) Determinaţi perechea (a,b) de numere reale pentru care $y=ax+b$ reprezintă ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de abscisă $x_0=1$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

c) Demonstraţi că $x^2\geq 1+4\ln\sqrt{x},\ \forall x\in(0,+\infty)$.

Soluţie:

a) $(a,b)=(1,0)$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$.

c) $x=1$ este punct de minim global pentru funcţia f, aşadar $f(x)\geq f(1)=1,\forall x\in(0,+\infty)$, inegalitatea propusă fiind astfel imediată.

17) Demonstraţi că, dacă $a,b\in\mathbb{R},a,b>0$ şi $a+b=1$, atunci este adevărată inegalitatea $a\cdot\ln\dfrac{1}{a}+b\cdot\ln\dfrac{1}{b}\leq\ln 2$.

Soluţie:

Considerăm funcţia $g:(0,1)\to\mathbb{R}, g(x)=x\cdot\ln\dfrac{1}{x}$. Se arată imediat că funcţia g este concavă şi astfel $g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\geq\dfrac{g(a)+g(b)}{2},\forall a,b\in(0,1)$. (Jensen)

18) Să se arate că pentru orice $x\geq 1$ sunt adevărate inegalităţile:

$$\frac{x-1}{x}\leq\ln x\leq x-1.$$

Soluţie:

Aplicăm teorema lui Lagrange funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(t)=\ln t$ pe intervalul $[1,x], x>1$.

19) Să se arate că dacă $0 < a < b$, sunt adevărate inegalităţile:

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

Soluţie: Teorema lui Lagrange pentru $h:[a,b] \to \mathbb{R}, h(x) = \ln x$.

20) Să se demonstreze următoarele inegalităţi :

a) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$, $\forall x \geq 0$;

b) $e^x \geq x+1$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

c) $(x+1)\cdot\ln(x+1) > arctgx$, $\forall x > 0$;

d) $\ln(1-x^2) < x + \frac{1}{2}$, $\forall x \in (-1,1)$;

e) $\arcsin x \geq x + \frac{x^3}{6}$, $\forall x \in [0,1]$;

f) $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$, $\forall x > 1$.

Soluţii:

a) Considerăm $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ care este derivabilă, cu $f'(x) = x - \sin x$, $f''(x) = 1 - \cos x \geq 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow f'$ este crescătoare, deci $f'(x) \geq f'(0) = 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow f$ crescătoare, adică $f(x) \geq f(0) = 0, \forall x \geq 0,$ adică exact inegalitatea dorită;

b) Considerăm $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - x - 1,$ derivabilă , cu $f'(x) = e^x - 1$. Obţinem că $x = 0$ este punct de minim global şi deci $f(x) \geq f(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

c) Considerăm $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = (x+1)\cdot\ln(x+1) - arctgx$, derivabilă, cu $f'(x) = \ln(x+1) +$

$+\frac{x^2}{1+x^2} > 0, \forall x > 0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare, aşadar $f(x) > f(0) = 0, \forall x > 0$.

d) $f:(-1,1) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(1-x^2) - x - \frac{1}{2}$ este derivabilă, cu $f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{1-x^2}$, ecuaţia $f'(x) = 0$ are soluţiile $x_1 = 1-\sqrt{2} \in (-1,1)$, $x_2 = 1+\sqrt{2} \notin (-1,1)$. Se obţine x_1 punct de maxim global pentru f, deci $f(x) \leq f(x_1), \forall x \in (-1,1)$. Rămâne de arătat că $f(x_1) < 0$, ceea ce este adevărat deoarece $\ln(1-x_1^2) < 0 < \frac{3}{2} - \sqrt{2}$;

21) Să se arate că $\pi^e < e^\pi$.

Soluţie:

Studiem probabil monotonia funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ şi folosim $e<\pi$...

22) Să se arate că pentru orice $x\geq 2$ **este adevărată inegalitatea**

$$(x+1)\cdot\cos\frac{\pi}{x+1}-x\cdot\cos\frac{\pi}{x}>1.$$

Soluţie

$f(t)=t\cdot\cos\dfrac{\pi}{t}, t\in[2,\infty)$, care este funcţie Rolle pe orice interval $[x,x+1], x\geq 2.$ Cu teorema lui Lagrange avem că există $c\in(x,x+1)$ astfel încât $f(x+1)-f(x)=f'(c)$. În acest moment rămâne de demonstrat că : $\cos\dfrac{\pi}{t}+\dfrac{\pi}{t}\cdot\sin\dfrac{\pi}{t}>1, \forall t\in(2,\infty)$ sau

$\cos y+y\cdot\sin y>1, \forall y\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. (ori de câte ori putem nota, să o facem!). Considerăm

$g:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}, g(y)=\cos y+y\cdot\sin y-1$, derivabilă , cu $g'(y)>0, \forall y\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, deci g este strict crescătoare, adică pentru $y>0$, avem $g(y)>g(0)=0$.

23 a) Să se studieze convexitatea (concavitatea) funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(1+x^2)$ **;**

b) Să se demonstreze că , dacă $x_1,x_2,...,x_n\in(0,1)$ **satisfac** $x_1+x_2+x_n=1$**, atunci**

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\leq(1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdot...\cdot(1+x_n).$$

Soluţie:

a) $f''(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}>0, \forall x\in(-1,1)\Rightarrow f$ este convexă pe $(0,1)$;

b) pe $(0,1)$ inegalitatea lui Jensen conduce la : $f\left(\dfrac{\sum_1^n x_k}{n}\right)\leq\dfrac{\sum_1^n f(x_k)}{n}$,

adică $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\leq\dfrac{1}{n}\ln(1+x_1^2)...(1+x_n^2)\leq\dfrac{1}{n}\ln(1+x_1)...(1+x_n)\Rightarrow\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n\leq$

$\leq(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)$.

24 a) Să studieze convexitatea (concavitatea) funcţiei $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(\sin x)$;

b) Să se arate că în orice triunghi ascuţitunghic *ABC* este adevărată inegalitatea

$$\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Soluţie: a) $f''(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}<0\Rightarrow f$ concavă pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

b) folosim inegalitatea lui Jensen : $f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)+\frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3}$; concluzia este foarte aproape

25) Să se arate că în orice triunghi *ABC* este adevărată inegalitatea $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Soluţie:

convexitatea (sau concavitatea) funcţiei $x\to\sin x$ pe $(0,\pi)$ conduce la ceea ce dorim (sau ceea ce se doreşte de la noi).

26) Se consideră funcţiile $f,g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1-x\cdot\ln x$, $g(x)=\frac{\ln(1+2x)}{x}$.

- **a. Să se arate că :** $f(x)\le 0$, $\forall x\in(0,\infty)$;
- **b. Să se calculeze** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$;
- **c. Folosind eventual a) şi notaţia** $1+2x=t$**, să se arate că funcţia *g* este descrescătoare pe** $(1,\infty)$;
- **d. Să se arate că :** $\left(1+2\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}>\left(1+2\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

Soluţie:

a) $f'(x)=-\ln x$ şi, imediat, $x=1$ este punct de maxim pentru $f\Rightarrow f(x)\le f(0)=0,\forall x>0$;

b) Cum $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{\infty}x\cdot\left(1-\frac{1}{x}-\ln x\right)=-\infty$, ne situăm în cazul exceptat $\frac{\infty}{\infty}$ şi aplicăm regula lui L'Hospital; $\lim\limits_{\infty}\frac{f'(x)}{\left(x^2\right)'}=\lim\limits_{\infty}\frac{-\ln x}{2x}=0\Rightarrow\lim\limits_{\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$;

c) Din $1+2x=t$ avem $x=\frac{t-1}{2}, t>1$ şi apoi

$g(t)=2\cdot\frac{\ln t}{t-1}, g'(t)=\frac{2}{t\cdot(t-1)^2}\cdot(t-1-t\cdot\ln t)=\frac{2}{t(t-1)^2}\cdot f(t)<0, \forall t>1 \Rightarrow g$ este strict descrescătoare pe $(1,\infty)$; d) $1<\sqrt{2}<\sqrt{3}\Rightarrow g(\sqrt{2})>g(\sqrt{3})$; continuaţi !

27) Se consideră funcţiile

$$f, g:\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}\ ,\ f(x)=tgx+\sin x-2x\ ,\ g(x)=\cos x+\ln(\cos x)+x^2.$$

a. **Să se arate că :** $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, $\forall a,b\in(0,\infty)$ **şi** $\cos x\geq\cos^2 x$, $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$;

b. **Să se arate că există** $k\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $f(x)+g'(x)=k$, $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$;

c. **Să se arate că *f* este crescătoare pe** $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$**, iar *g* este descrescătoare pe** $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$;

d. **Să se demonstreze că :** $tgx+\sin x\geq 2x$, $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. **(Huygens)**

Soluţie:

a) gimnaziu şi $\cos x\in[0,1], \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$**;** b) $k=0$;

c) $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}+\cos x-2\geq\frac{1}{\cos x}+\cos x-2\geq$

$\geq 2-2=0, \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow f$ crescătoare pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$; folosind b), avem şi

$g'(x)=-f(x)\leq -f(0)=0\Rightarrow g$ descrescătoare; d) am mai folosit asta :

$f(x)\geq f(0), \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

28) Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot\ln a-a\cdot\ln x$ **, unde** $a>0$.

a. **Să se determine** $a>0$ **astfel încât** $f(x)\geq 0$, $\forall x\in(0,\infty)$;

b. **Să se arate că :** $e^x\geq x^e$ **,** $\forall x\in(0,\infty)$**;**

c. **Să se arate că pentru** $x>0$ **avem** $e^x=x^e$ **dacă şi numai dacă** $x=e$.

d. **Să se determine numerele reale** $b,c>0$ **pentru care**

$$b^x+c^x\geq x^b+x^c\ ,\ \forall x\in(0,\infty)\ .$$

Soluţie:

a) $f(x) \geq 0 = f(a), \forall x \in (0,\infty) \Rightarrow x = a$ este punct de minim şi, cu teorema lui Fermat,

$f'(a) = 0 \Rightarrow a = e;$ e suficientă această condiţie? ;

b) $f(x) \geq f(e), \forall x > 0$;

c) Dacă $x = e$, evident $e^x = x^e$; dacă $e^x = x^e$, avem $x - e \cdot \ln x = 0$ şi considerăm funcţia

$g:(0,\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = x - e \cdot \ln x$, cu $g'(x) = \dfrac{x-e}{x}$. Din studiul variaţiei funcţiei g avem

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$;

d) $b^x + c^x \geq x^b + x^c, \forall x \in (0,\infty)$ conduce, pentru $x = e$; la: $b^e + c^e \geq e^b + e^c \geq b^e + c^e$; avem astfel:

$e^b + e^c = b^e + c^e \Rightarrow e^c = c^e, e^b = b^e \Rightarrow b = c = e.$

29) Se consideră $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi pentru fiecare $k \in \{1,2,...,n\}$ se defineşte funcţia $f_k : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = \dfrac{k}{n} \cdot x^n - x^k$.

a. Să se determine $f_1'(x), x \in [0,\infty)$;

b. Să se arate că $x = 1$ este punct de minim local pentru f_k , $\forall k \in \{1,2,...,n-1\}$;

c. Să se arate că : $\dfrac{k}{n} \cdot x^n \geq x^k + \dfrac{k}{n} - 1$, $\forall x \in [0,\infty)$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi $\forall k \in \{1,2,...,n\}$;

d. Să se demonstreze că pentru orice $x \geq 0$ şi orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ este adevărată inegalitatea $x^n + 1 \geq \dfrac{2}{n+1}\left(x^n + x^{n-1} + ... + x + 1\right)$.

Soluţie:

a) $f'_1(x) = x^{n-1} - 1$;

b) $f_k'(x) = k \cdot \left(x^{n-1} - x^{k-1}\right)$ şi , pentru $x < 1$ avem $f_k'(x) < 0$, iar

pentru $x > 1$ avem $f_k' > 0$;

c) $f_k(x) \geq f_k(1), \forall x \geq 0$;

d) Folosim c) şi avem

$$: \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot x^n \geq \sum_{k=1}^{n} x^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} - n \Rightarrow \frac{n+1}{2} \cdot x^n \geq \frac{n+1}{2} - n + \sum_{k=1}^{n} x^k \ ;$$

Înmulţim cu $\dfrac{2}{n+1}$ şi aproape am terminat.

30) Se consideră funcţiile $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \cos x - \sin x$ şi

$$g:\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{\sin x}{x}.$$

a. **Să se arate că funcţiile date sunt strict descrescătoare ;**

b. **Să se demonstreze că :** $\frac{2}{\pi}\le\frac{\sin x}{x}<1$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Soluţie:

a) $f'(x)=-x\cdot\sin x\le 0,\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow f$ strict descrescătoare ;

$g'(x)=\frac{f(x)}{x^2}\le\frac{f(0)}{x^2}=0,\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow g$ strict descrescătoare;

b) $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\le g(x)<\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1,\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

31) Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2}$ **şi se defineşte şirul** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **prin** $a_n=f(1)+f(2)+...+f(n),\forall n\in\mathbb{N}^*$.

a. **Să se arate că *f* este strict monotonă şi să se deducă** $\frac{25}{144}<\frac{1}{e^2}+\frac{1}{\pi^2}<\frac{52}{144}$;

b. **Să se arate că şirul** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **este convergent ;**

c. **Ştiind că şirul** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **are limita** $\frac{\pi^2}{6}$ **,să se calculeze** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

Soluţie:

a) f este strict descrescătoare şi $2<e<3,3<\pi<4\Rightarrow f(2)+f(3)>f(e)+f(\pi)>f(3)+f(4)$; calcule imediate acum;

b) Folosim $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k},\forall k\ge 2$ şi deducem $0<a_n<2,\forall n\in\mathbb{N}^*$, aşadar şirul este mărginit; stabilirea monotoniei chiar nu pune probleme;

c) Notând cu (b_n) şirul a cărui limită se cere determină, avem: $b_n=a_{2n}-\frac{1}{4}\cdot a_n$ şi $\lim\limits_{\infty}b_n=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{8}$.

32) Să se demonstreze aceste inegalităţi:

a) $\int_0^1 e^{x^2}\,dx \geq \frac{4}{3}$

b) $\int_1^e (x - \ln x)\,dx \geq e - 1$

c) $0 \leq \int_1^2 \frac{x-1}{x+1}\,dx \leq \frac{1}{3}$

d) $\frac{15}{2} \leq \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx \leq \frac{40}{3}$

e) $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot tgx\ dx \leq \frac{\pi^2}{16}$

f) $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{4+x^2}\,dx \leq \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

g) $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx \leq \frac{1}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

h) $\frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^6}} \leq \frac{\pi}{6}$

i) $2\sqrt{e} \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx + \int_0^1 e^{1-x^2}\,dx \leq 1 + e$

j) $\frac{\pi}{6} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} \leq \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

k) $\frac{\pi}{6} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2-x^3}} \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$.

Soluţii:

a) Se integrează (...) pe $[0,1]$ inegalitatea $e^{x^2} \geq x^2 + 1$;

b) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$ are punct de minim global: $x=1$; aşadar $f(x)\geq f(1)=1$, $\forall x\in(0,\infty)\ \Rightarrow\ \int_1^e f(x)dx\geq\int_1^e dx=e-1$.

c) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ este crescătoare, deci $f(1)\leq f(x)\leq f(2)$, $\forall x\in[1,2]$, etc.;

d) Analog;

e) La fel;

f) $0\leq\dfrac{x^n}{4+x^2}\leq x^n$, $\forall x\in[0,1]$;

g) Ca şi la subpunctul anterior;

h) Pentru $x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ avem $1-x^2\leq 1-x^6\leq 1\ \Rightarrow\ 1\leq\dfrac{1}{\sqrt{1-x^6}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; integrăm acum pe $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$;

i) Se stabileşte variaţia funcţiei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}+e^{1-x^2}$;

j) $4-x^2\geq 4-x^2-x^3\geq 4-2x^2$, $\forall x\in[0,1]$;

k) $1-x^2\geq 1-x^2-x^3\geq 1-2x^2$, $\forall x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.

33) Se consideră o funcţie continuă $f:[0,1]\to[a,b]$ pentru care $\int_0^1 f(x)dx=0$.

Să se arate că $\int_0^1 f^2(x)dx\leq -ab$.

Soluţie:

$f(x)\in[a,b]$, $\forall x\in[0,1]\ \Rightarrow\ [f(x)-a]\cdot[b-f(x)]\geq 0$, sau

$f^2(x)\leq(a+b)f(x)-ab$; integrare pe $[0,1]$.

34) Să se demonstreze că $\frac{1}{e} \le \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \le \frac{\pi}{4}$.

35) Să se demonstreze că pentru orice $x > 0$ **avem:** $\int_x^{x+1} \sin\left(y^3\right)dy < \frac{6x+5}{3x^2}$.

Soluţie:

O problemă nu foarte uşoară. Considerăm $I = 1 + \int_x^{x+1} \sin\left(y^3\right)dy =$

$$\int_x^{x+1}\left(1+\sin y^3\right)dy \le \int_x^{x+1}\frac{3y^2}{3x^2}\left(1+\sin^3 y\right)dy = \frac{1}{3x^2}\int_x^{x+1}3y^2dy + \frac{1}{3x^2}\int_x^{x+1}3y^2\sin y^3dy =$$

$\frac{1}{3x^2}\cdot y^3\Big|_x^{x+1} + \frac{1}{3x^2}\int_x^{x+1}\varphi'(y)\sin\varphi(y)\,dy$, unde $\varphi(y) = y^3$. Avem astfel

$$I = \frac{1}{3x^2}\left[(x+1)^3 - x^3\right] + \frac{1}{3x^2}(-\cos y)\Big|_{\varphi(x)}^{\varphi(x+1)} =$$

$$\frac{3x^2+3x+1}{3x^2} + \frac{\cos x^3 - \cos(x+1)^3}{3x^2} \le \frac{3x^2+3x+1}{3x^2} + \frac{2}{3x^2} = 1 + \frac{3x+3}{3x^2} < 1 + \frac{6x+5}{3x^2}.$$

36) Să se demonstreze că $\frac{2}{3} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ **şi să se arate că** $\sin\frac{\sqrt{2}}{4} > \frac{1}{3}$.

Soluţie:

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}$ are punctele de maxim $x=0$, $x=1$ şi punctul de minim $x=\frac{1}{2}$, aşadar $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \le f(x) = f(0) = f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; prin integrare se obţin inegalităţile dorite.

Pe de altă parte, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}dx = 2\arcsin\frac{1}{3}$, etc.

37) Se consideră funcţiile $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = arctgx + \frac{1}{x}$,

$g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x) = 1 + x\cdot arctgx$.

a) **Să se arate că** $\frac{1}{x} > \frac{x}{1+x^2}, \forall x \geq 1$.

b) **Să se arate că f este strict descrescătoare pe** $[1,\infty)$ **, iar** g **este convexă pe** $[1,\infty)$.

c) **Să se arate că funcţia** g **este strict crescătoare pe** $[1,\infty)$.

d) **Să se calculeze** $\int_1^e \frac{f(x)}{g(x)}dx$.

e) **Să se calculeze** $\int_0^1 g(x)dx$.

f) **Să se arate că** $\frac{1}{2008} + arctg\sqrt{2007} \in \left[\frac{\pi+2}{4}, \frac{\pi+4}{4}\right]$.

38) Se consideră funcţiile $f, g : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+1}, g(x) = \frac{1}{\cos x}$.

a) **Să se arate că pentru orice funcţii** $u, v : [a,b] \to (0,\infty), a < b,$ **este adevărată inegalitatea** $\left(\int_a^b u(x)v(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b u^2(x)dx\right) \cdot \left(\int_a^b v^2(x)dx\right)$.

b) **Să se calculeze** $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{1+f(x)}dx$.

c) **Să se arate că** $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

d) **Să se demonstreze că** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{x+1}}{\cos x}dx \leq \frac{\sqrt{\pi(\pi+4)}}{4}$.

39) Fie funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ **derivabilă pe** $[0,1]$ **şi pentru care există** $a \in (0,1]$ **astfel încât** $\int_0^a f(x)dx = 0$ **.Să se arate că** $\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leq \frac{1-a}{2} \cdot \sup_{x\in(0,1)} \left|f'(x)\right|$. **Poate avea loc egalitatea ?**

Radu Gologan, ON, 1984

Soluţie:

Din $\int_0^a f(x)dx = 0$,cu schimbarea de variabilă $x = at = \varphi(t), \varphi : [0,1] \to [0,1]$ derivabilă,deducem $\int_0^1 f(ax)dx = 0$; cu teorema lui Lagrange avem acum $\left|f(x) - f(ax)\right| \leq (1-a)xM$, unde $M = \sup_{x\in(0,1)} \left|f'(x)\right|$.Prin integrarea acestei inegalităţi ajungem la

$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| = \left|\int_0^1 (f(x)-f(ax))dx\right| \le (1-a)M\int_0^1 xdx = \frac{1-a}{2}M$ .Egalitatea se obţine pentru funcţii de forma $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\pm M(x-\frac{a}{2})$.

40) Să se determine funcţiile $f:[0,1]\to[0,\infty)$, continue şi descrescătoare pe întreg domeniul de definiţie,care satisfac simultan următoarele proprietăţi:

a) $\int_0^1 f(x)dx \le 1.$

b) $\int_0^1 f(x^3)dx \le 3\cdot\left[\int_0^1 x\cdot f(x)dx\right]^2.$

I.V.Maftei, ON, 1984

Soluţie:

Soluţia 1. Fie $a\ge 0$ astfel încât $\int_0^1 x\cdot f(x)dx = a$;condiţia b) din enunţ conduce la $\int_0^1 f(x^3)dx \le 3a^2$ .Monotonia funcţiei conduce la

$f\left(x^3\right)\ge f\left(\sqrt[3]{x}\right)\Rightarrow \int_0^1 f\left(x^3\right)dx \ge \int_0^1 f\left(\sqrt[3]{x}\right)dx = \int_0^1 3t^2 f(t)dt$ .Ajungem astfel la condiţiile (1) $\int_0^1 f(t)dt \le 1$, (2) $\int_0^1 tf(t)dt = a$, (3) $\int_0^1 t^2 f(t)dt \le a^2$. Prima inegalitate se înmulţeşte cu a^2 ,iar a doua cu $-2a$ şi prin adunare se ajunge la $\int_0^1\left(t^2-2at+a^2\right)f(t)dt\le 0$, $\int_0^1 (t-a)^2 f(t)dt \le 0$ $\Rightarrow f(t)=0, \forall t\in[0,1]$.

Soluţia 2. Cu notaţia $A=\int_0^1 xf(x)dx$,folosind inegalitatea integrală Cauchy-Buniakovski,ajungem la

$$A^2 = \left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2 \le \left(\int_0^1 x\sqrt{f(x)}\sqrt{f(x)}dx\right)^2 \le$$

$$\le\left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\le\left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)$$ .Deducem de aici

$$3A^2 \le \left(\int_0^1 3x^2 f(x)dx\right) = \int_0^1 f(x)d(x^3) \le \int_0^1 f(x^3)d(x^3) = \int_0^1 f(x)dx \le$$

$\le \int_0^1 f(x^3)dx \le 3A^2$. Obţinem acum $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x^3)dx$ şi apoi $f(x)=f(x^3), \forall x\in[0,1]$,în

final $f(x)=k.$(constant)Din a) avem $0\le k\le 1$,iar din b) : $k\le \frac{3}{4}k^2 \Rightarrow k=0.$

41) Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata descrescătoare şi pentru care $f(0)=0, f'(1)>0$.

Să se arate că $\int_0^1 \frac{dx}{1+f^2(x)} \le \frac{f(1)}{f'(1)}$.

Radu Gologan, OJ 1978

Soluţie:

Pentru $x\le 1$ deducem că $f'(x)\ge f'(1)>0$ şi astfel $\frac{f'(1)}{1+f^2(x)} \le \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}, \forall x\in[0,1]$.Prin integrare obţinem $f'(1)\cdot\int_0^1 \frac{dx}{1+f^2(x)} \le \int_0^1 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = arctgf(1)-arctgf(0)=arctgf(1)$ .Cum $f'(1)>0$ şi $arctgf(1)\le f(1)$,ajungem la $\int_0^1 \frac{dx}{1+f^2(x)} \le \frac{arctgf(1)}{f'(1)} \le \frac{f(1)}{f'(1)}$. De remarcat că inegalitatea este chiar strictă(dacă am avea egalitate,atunci am ajunge la $arctgf(1)=f(1)\Rightarrow f(1)=0$,de unde $\int_0^1 \frac{dx}{1+f^2(x)} \le 0$,fals – e suficient aici să aplicăm teorema de medie,de exemplu).

42) Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă pentru care $\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{4}$.

Să se arate că există $x_0\in(0,1)$ astfel încât $\frac{1}{1+x_0} < f(x_0) < \frac{1}{2x_0}$.

Marcel Chiriţă, ON 1982

Soluţie:

Deoarece $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$,considerăm $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{1}{1+x^2}-f(x)$,care este continuă. Folosim, de exemplu, teorema de medie.

43) Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi injectivă cu proprietatea că $f(1)=1$.

Demonstraţi că dacă există $x_0\in(0,1)$ astfel încât $f(x_0)\ge 2$, atunci $\int_0^1 e^{f(x)}dx>2.$

Lucian Dragomir, OJ Mehedinţi, 1997 (GM)

Soluţie:

f continuă şi injectivă, rezultă f strict monotonă; cum $f\left(x_0\right) \geq 2 > 1 = f(1)$, deducem că funcţia este strict descrescătoare. Acum, pentru $x \in [0,1]$ deducem $f(x) \geq f(1) \Rightarrow e^{f(x)} \geq e$, integrare pe $[0,1]$ şi $e > 2$.

44) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a > 0, 2a + 3b = 6$ şi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie descrescătoare.

Să se arate că : $\int_0^1 f(x)dx \geq \int_0^1 \left(ax^2 + bx\right) \cdot f(x)dx$**.**

OJ Bucureşti, 2000

Soluţie

: Considerând funcţia $g : [0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = ax^2 + bx - 1$, avem că ecuaţia $g(x) = 0$ are o singură soluţie $\alpha, \alpha \in (0,1)$ (De exemplu, observăm că $\int_0^1 g(x)dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} - 1 = 0$, folosim teorema de medie şi remarcăm că ecuaţia are rădăcinile reale, dar de semne contrare).

Avem în continuare: $g(x) \leq 0, \forall x \in [0, \alpha]$ (1) şi $g(x) \geq 0, \forall x \in [\alpha, 1]$;din aceste două relaţii şi faptul că f este descrescătoare,ajungem la $\left(f(\alpha) - f(x)\right) g(x) \geq 0, \forall x \in [0, \alpha]$ şi

$\left(f(\alpha) - f(x)\right) g(x) \geq 0, \forall x \in [\alpha, 1]$, adică oricum $f(x)g(x) \leq f(\alpha)g(x), \forall x \in [0,1]$; prin integrare se ajunge imediat la rezultatul dorit.

45) Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă astfel încât $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1$.

Să se arate că $\int_0^1 f^2(x)dx \geq 4.$

Ioan Raşa, ON, 2004

Soluţie: Unica funcţie de gradul 1 care satisface $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1$ este $g(x) = 6x - 2, \forall x \in [0,1]$ şi astfel avem $\int_0^1 \left(f(x) - g(x)\right)dx = \int_0^1 x\left(f(x) - g(x)\right)dx = 0$,

de unde $\int_0^1 g(x)\left(f(x) - g(x)\right)dx = 0$ şi astfel

$$0 \leq \int_0^1 \left(f(x) - g(x)\right)^2 dx = \int_0^1 f(x)\left(f(x) - g(x)\right)^2 dx$$

$= \int_0^1 f^2(x)dx - 6\int_0^1 xf(x)dx + 2\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f^2(x)dx - 4$;concluzia e imediată.

46) Se consideră mulţimea $\mathcal{F}=\{f:[0,1]\to[0,\infty)/f \text{ continuă}\}$ **şi** $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$**.**

Determinaţi cel mai mic număr real *c* pentru care $\int_0^1 f\left(\sqrt[n]{x}\right)dx \leq c\cdot\int_0^1 f(x)dx$**, pentru orice** $f\in\mathcal{F}$**.**

Gheorghe Iurea, OJ, 2006

*Soluţie***:**

Evident, pentru orice $p>0$,funcţia $f_p:[0,1]\to[0,\infty), f_p(x)=x^p$ este element al mulţimii $\mathcal{F}$ putem scrie $f_p(x)=\begin{cases} e^{p\ln x} & ,x>0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$ şi avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0=f(0)$,etc.)Din $\int_0^1 x^{\frac{p}{n}}dx \leq c\cdot\int_0^1 x^p dx$ ajungem la $\frac{n}{n+p}\leq\frac{c}{p+1}\Rightarrow c\geq\frac{n(p+1)}{n+p}$, de unde, prin trecere la limită pentru $p\to\infty$, ajungem la $c\geq n$ (1). Pe de altă parte, folosind prima formulă de schimbare de variabilă, avem că $\int_0^1 nt^{n-1}f(t)dt=\int_0^1 f\left(\sqrt[n]{x}\right)dx$ şi, deoarece $nt^{n-1}f(t)\leq nf(t),\ \forall t\in[0,1]$, prin integrare deducem

$n\int_0^1 t^{n-1}f(t)dt\leq n\int_0^1 f(t)dt$ şi

deci $\int_0^1 f\left(\sqrt[n]{x}\right)dx\leq n\int_0^1 f(t)dt$, de unde $c\leq n$ (2). Din (1) şi (2) avem că $c=n$.

47) Se consideră funcţiile continue $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ **şi** $g:[0,1]\to[0,\infty)$**.**

Să se arate că dacă *f* este crescătoare, atunci $\int_0^t f(x)g(x)dx\cdot\int_0^1 g(x)dx\leq\int_0^t g(x)dx\cdot\int_0^1 f(x)g(x)dx$ **,**

pentru orice $t\in[0,1]$.

Cezar Lupu, OJ, 2007

Soluţie

: Notăm $k=\int_0^1 g(x)dx>0$ şi,considerând funcţia $g_1=\frac{1}{k}g$ putem presupune,prin înlocuire, că $\int_0^1 g(x)dx=1$.Considerăm acum funcţia derivabilă $F:(0,1]\to\mathbb{R}, F(t)=\frac{\int_0^t f(x)g(x)dx}{\int_0^t g(x)dx}$ şi avem imediat

$$F'(t)=\frac{f(t)g(t)\int_0^t g(x)dx-g(t)\int_0^t f(x)g(x)dx}{\left(\int_0^t g(x)dx\right)^2}=$$

$$=g(t)\frac{f(t)\int_0^t g(x)dx-\int_0^t f(x)g(x)dx}{\left(\int_0^t g(x)dx\right)^2}\geq g(t)\frac{\int_0^t (f(t)-f(x))g(x)dx}{\left(\int_0^t g(x)dx\right)^2}\geq 0,$$

aşadar F este crescătoare şi,în particular,obţinem $F(t)\leq F(1)$,de unde concluzia e imediată.

48) Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ derivabilă,cu derivata continuă pe $[0,1]$.

Să se arate că, dacă $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$,atunci $\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx\geq 12\cdot\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$.

ON 2008

Soluţie:

Conform inegalităţii Cauchy-Schwarz avem:

$$\left(\int_0^{1/2} x\cdot f'(x)dx\right)^2\leq\left(\int_0^{1/2} x^2dx\right)\left(\int_0^{1/2}\left(f'(x)\right)^2dx\right)=$$

$$=\frac{1}{24}\int_0^{1/2}\left(f'(x)\right)^2dx \text{ şi}$$

$$\left(\int_{1/2}^1(1-x)f'(x)dx\right)^2\leq\left(\int_{1/2}^1(1-x)^2dx\right)\left(\int_{1/2}^1\left(f'(x)\right)^2dx\right)=$$
$$=\frac{1}{24}\int_{1/2}^1\left(f'(x)\right)^2dx$$

de unde avem

$$\frac{1}{24}\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx\geq\left(\int_0^{1/2}x\left(f'(x)\right)dx\right)^2+\left(\int_{1/2}^1(1-x)f'(x)dx\right)^2.$$

Integrând prin părţi şi folosind condiţia $f(1/2)=0$, obţinem

şi $\int_{1/2}^1(1-x)f'(x)dx=\int_{1/2}^1 f(x)dx$.

Deducem astfel că

$$\frac{1}{24}\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx\geq\left(\int_0^{1/2}f(x)dx\right)^2+\left(\int_{1/2}^1 f(x)dx\right)^2\geq$$

$\geq \frac{1}{2}\left(\int_0^{1/2} f(x)dx + \int_{1/2}^{1} f(x)dx\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$,de unde ajungem la inegalitatea dorită.

2. Aspecte metodice legate de predarea inegalităţilor cu ajutorul analizei matematice

2.1. Consideraţii metodice generale

Matematica nu este o colecţie nesfârşită de noţiuni şi rezultate expuse succesiv ci este, mai degrabă, un arsenal de metode, oferind totodată un limbaj riguros şi în acelaşi timp flexibil pentru descrierea rezultatelor cunoaşterii. Progresul ştiinţific, economic, al civilizaţiei umane în genere este imposibil fără aportul matematicii, iată de ce învăţarea acestei materii la şcoală asigură dezvoltare puternică pe termen mediu şi lung.

Este foarte important cum se învaţă matematica, cât şi când pentru ca rezultatul să aibă efect maxim cu efort minim, fără pierderi prea mari, pentru obţinerea randamentului maxim în studiul acestei discipline. Deci, ca în studiul oricărei discipline ştiinţifice, se ţine cont de caracteristicile dezvoltării psihice, fizice şi intelectuale ale elevilor, de logica, de evoluţia ştiinţifică şi istorică a fizicii, de necesităţile sociale , de întregul context al lumii moderne.

Se disting mai multe etape în evoluţia didacticii:

1. Etapa didacticii tradiţionale (sec. XVII-XIX) de tip magistrocentrist şi care are următoarele caracteristici
   - Centrată pe predare
   - Principala sursă a cunoaşterii era percepţia
   - Dirijarea autoritară a învăţării
2. Etapa didacticii moderne (sfârşitul sec. XIX – prima jumătate a sec. XX) de tip psihocentrist. Se punea un accent mai mare pe
   - Predare învăţare
   - Pe explicarea dimensiunilor psihologice şi sociale implicate în realizarea funcţiilor de predare – învăţare
3. Etapa didacticii postmoderne de tip curricular, când se evidenţiază interdependenţa celor trei funcţii principale ale procesului de învăţământ: predare – învăţare – evaluare

Matematica se studiază încă din ciclul primar, aritmetica având un rol deosebit în dezvoltarea intelectuală a elevului, în dezvoltarea gândirii logice, adică a unei gândiri consecvente, clare şi precise

Învăţând corect aritmetica, elevii îşi formează deprinderea de concentrare a atenţiei asupra celor studiate, să observe fapte şi relaţii, să le compare şi să le confrunte unele cu altele. Lecţia de matemetică, în învăţământul primar este un bun prilej pentru a le forma elevilor deprinderi folositoare: punctualitatea , exactitatea , autoverificarea , justificarea şi motivarea.

În învăţământul gimnazial demersul didactic este orientat către achiziţiile finale ale elevului de următoarele competenţe

- Identificarea unor date şi relaţii matematice şi corelarea lor în funcţie de contextul în care au fost definite
- Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunţuri Matematice
- Utilizarea algoritmilor şi a conceptelor matematice pentru caracterizarea locală sau globală a unei situaţii concrete
- Exprimarea caracteristicilor matematice cantitative sau calitative ale unei situaţii concrete şi a algoritmilor de prelucrare a acestora
- Analiza şi interpretarea caracteristicilor matematice ale unei situaţii-problemă
- Modelarea matematică a unor contexte problematice variate, prin integrarea cunoştinţelor din diferite domenii

În învăţământul liceal existând mai multe filiere, profiluri şi specializări se impune adaptarea matematicii la cerinţele reale ale dezvoltării elevului. De aceea curriculumul de matematică este structurat pe patru tipuri de programă M1, M2, M3 şi M4

În plus, având în vedere opţiunile multiple ale elevilor, conform curricum-ului la decizia şcolii (CDŞ), ei pot opta pentru următoarele tipuri de opţionale:

- ***Opţionalul de aprofundare***: pentru anumite competenţe ale programei de trunchi comun se vor proiecta conţinuturi noi care vor conduce la aprofundarea competenţelor respective. În programa de opţional se trec competenţele existente în programa de trunchi comun şi se adaugă noi conţinuturi care contribuie la formarea competenţelor respective.
- ***Opţionalul de extindere***: pornind de la competenţele generale ale disciplinei (definite în programa de trunchi comun) se vor deduce noi competenţe specifice care vor fi realizate prin operarea cu noi conţinuturi vizând teme şi capitole care nu sunt cuprinse în programa de trunchi comun. Deci în programa de opţional se trec noi competenţe specifice, eventual în corelare cu cele deja existente în programa de trunchi comun, precum şi conţinuturi cu ajutorul cărora se pot construi aceste competenţe.

- ***Opţionalul ca disciplină nouă***: se vor izola temele, capitolele, unităţile de informaţie cu care operează respectiva disciplină şi ne vom pune apoi întrebarea "de ce dorim parcurse aceste conţinuturi? ". Răspunsul la întrebare trebuie dat în termeni de competenţe pe care le dorim formate la elevi
- ***Opţionalul ca temă integratoare***: se proiectează asemănător cu cel anterior cu diferenţa că unităţile de conţinut vor cuprinde informaţii din mai multe discipline/domenii, iar competenţele vizate vor fi în genere competenţe de integrare şi transfer.

Există două tipuri de competenţe care trebuie formate la elevi:

1. Competenţe generale, care sunt ansambluri structurate de cunoştinţe şi deprinderi; ele se definesc pe obiect de studiu şi se formează pe durata învăţământului liceal.

2. Competenţe specifice, care se definesc pe obiect de studiu şi se formează pe durata unui an de studiu; ele sunt deduse din competenţele generale. O competenţă specifică este corect formulată dacă ea defineşte un rezultat aşteptat al instruirii care poate fi performant şi verificat.

2. 2. Lecţia de matematică

Cuvântul **„lecţie"** are o etimologie latină, provenind de la verbul lego, legere cu sens de lectură cu voce tare a unui manuscris important, audiere, citire din manual şi memorare de texte de către elevi, ceea ce în Evul Mediu se concretiza în lectio, asociată cu meditaţia**,** realizate în principal, sub forma prelegerii, înţeleasă ca prezentare – repetare - memorare, lecţia a fost, mult timp, semnul unui învăţământ rigid, dogmatic.

Treptat, pe măsură ce sistemul pe clase şi lecţii s-a fundamentat şi dezvoltat, accepţiunea dată termenului a cunoscut o largă evoluţie, cantonându-se, din păcate, în **domeniul organizatoricului,** ceea ce, o vreme, a dus la sărăcirea conţinutului noţiunii. Prezint, spre exemplificare, câteva abordări:

1. „Lecţia este un **proces instructiv** - **educativ** prin care profesorul şi elevii unei clase prelucrează o parte din conţinutul unui obiect de studiu conform programei analitice, ora de clasă fiind luată ca unitate de timp".(Şt. Bărsanescu);

2. „Lecţia este activitatea desfăşurată de elevi sub conducerea profesorului prin care îşi însuşesc o temă din programa şcolară într-un timp limitat";

3. „Lecţia constituie **forma organizatorică principală** în care se desfăşoară activitatea profesorului cu elevii unei clase";

4. „Lecţia este **forma principală de** organizare a procesului de învăţământ. în cadrul căreia clasa de elevi desfăşoară o activitate comună de învăţare sub conducerea educatorului, într-o anumită unitate de timp (ora şcolară)”;

5. „Lecţia este o **formă de bază, fundamentală de organizare** a procesului instructiv educativ”;

6. „Lecţia este **forma organizatorică principală** în care se desfăşoară activitatea de predare – învăţare”;

7. „Lecţia este **forma de activitate curenta** a binomului educaţional".

Deşi abordează problematica lecţiei tot cu formă de bază a organizării procesului învăţământ, M. lonescu, I. Radu. I. Nicola au meritul de a face trecerea la un alt mod de înţelegere şi explicare a lecţiei, mai puţin ca un cadru organizatoric, şi mai mult ca structură „substanţiala" de sine stătătoare. I. Cerghit observase, cu mult înainte, că în abordarea lecţiei trebuie modificată perspectiva, prin centrarea acesteia pe **dimensiunea conţinutului său.** Acest punct de vedere este regăsit şi la alţi autori, cum ar fi cei care susţin că:

1. „Lecţia este o **microstructură pedagogică** ce reuneşte într-o unitate funcţională, totalitatea acţiunilor şi mijloacelor implicate în procesul de instruire la o ori şcolară";

2. „Lecţia ne apare ca un **«purtător»** al **mesajului instructiv - educativ,** reprezentând o acţiune programată, dar şi suficient de elastică";

3. „Lecţia este **o unitate didactică fundamentală** (...) prin intermediul căreia o cantitate de informaţie este percepută şi asimilată activ de elevi într-un timp determinat pe calea unei activităţi intenţionate, sistematice, cu autoreglare, provocând în sfera biopsihică a acestora o modificare în sensul formării dorite (...) un **program didactic";**

4. „Lecţia este o **«entitate de instruire» relativ independentă, un microsistem care condensează într-un tot unitar o serie de variabile".**

Toate aceste interpretări s-au constituit pe temeiul observaţiei lui I. Cerghit, după care „lecţia este o entitate de învăţământ, este ceva mai mult decât o formă sau cadru de organizare a instrucţiei, căci presupune mecanisme şi legităţi de structurări şi funcţionare ce trebuie bine cunoscute". Ele sunt relevante pentru progresul realizat în explicarea lecţiei, progres care a permis completarea perspectiv organizatorice cu cea a conţinutului şi a

funcţionalităţii. Imaginea lecţiei constituită în această manieră este mai completă şi, prin aceasta, mai realistă.

În plus, ea deschide calea abordării sistemice a structurii lecţiei. Prin structură a lecţiei înţelegem alcătuirea sa, variabilele ce o compun precum şi reţeaua raporturilor dintre ele. Ea poate fi urmărită atât din punct de vedere static (sincronic)**,** adică al elementelor care o compun în orice moment al derulării sale cât şi dinamic (diacronic, evenimenţial)**,** adică în succesiunea etapelor (verigilor) care o compun. În opinia aceluiaşi autor structura sincronică este dată de următoarele componente: obiectivele instructiv - educative ale lecţiei, conţinutul curricular, alegerea şi folosi strategiilor de instruire, personalitatea profesorului şi personalitatea elevilor, clasa ca grup şcolar, elementul timp, dimensiunea fizica a lecţiei, elementele de conexiune inversă. Aceste părţi ale lecţiei au fost interpretate si sintetizate de I. Cerghit într-un model tridimensional: *funcţional* (ce conţine obiectivele), *structural* (profesor, elev, colectiv, conţinut, timp, mediu fizic, relaţie profesor-elev) şi *operaţional* (strategii, conexiune inversă).

Funcţiile „evenimentelor" celor mai importante în lecţie, ordonate după utilizarea lor, sunt:

- captarea atenţiei elevului prin apelul la interesele sale;
- informarea elevului cu privire la obiectivul urmărit;
- stimularea reactualizării capacităţilor învăţate anterior;
- prezentarea materialului ~ stimul implicat in performanţa care reflectă învăţarea;
- dirijarea învăţării;
- obţinerea performanţei;
- asigurarea feed-back-ului;
- evaluarea performanţei;
- intensificarea retenţiei şi a transferului.

Valoarea acestui mod de structurare „vine” din aceea că evenimentele lecţiei (verificare, predare, fixare, recapitulare, evaluare) realizează funcţiile enumerate anterior combinându-se în tipuri şi variante multiple de lecţie, care se prezintă, fiecare, ca un unicat, generând şi stimulând creativitatea cadrului didactic în conceperea, proiectarea şi realizarea propriu-zisă a lecţiei.

2.3. Locul inegalităţilor în programa şcolară la Elemente de Analiză Matematică

<u>Clasa a XI-a</u>

I. Capitolul: Limite de funcţii

I.1. Tema : Limite de şiruri

Conţinuturi: Trecere la limită în inegalităţi

Criteriul de existenţă cu ε

Criteriul cleştelui

I.2. Tema: Aplicaţii ale Teoremei lui Weierstrass

Conţinuturi: Şirul aproximărilor succesive ale unui număr real

I.3. Tema: Proprietăţi ale funcţiilor care au limită

II. Capitolul : Funcţii continue

II.1.Tema: Proprietăţi ale funcţiilor continue pe interval

Conţinuturi: Existenţa soluţiilor unei ecuaţii

Stabilirea semnului unei funcţii

II.2.Tema: Şirul lui Rolle

II.3. Tema: Rolul derivatei întâi în studiul funcţiilor

Conţinuturi: Determinarea intervalelor de monotonie

Determinarea punctelor de extrem

Demonstrarea unor inegalităţi

II.4. Tema: Rolul derivatei a doua în studiul funcţiilor

Conţinuturi: Determinarea intervalelor de convexitate ţi concavitate

Determinarea punctelor de inflexiune

<u>Clasa a XII-a</u>

I. Capitolul: Funcţii integrabile

II. Capitolul: Aplicaţii ale integralei definite şi metode de calcul

2.4. Tipuri de lecţii

Cuvântul „tip” are o etimologie greacă în „tipos” care înseamnă formă, caracter, aspect dominant. Cu aceasta semnificaţie a fost preluat şi în pedagogie unde tipul de lecţie reprezintă forma concretă pe care o lecţie o îmbracă în derularea sa în funcţie de o variabilă considerată fundamentală. În calitatea sa de „unitate structurală cu valoare orientativă”, orice tip de lecţie se prezintă ca o structură proprie, capabilă de diversificare în actul concretizării sale, ca expresie a variabilelor ce o compun şi a modului în care acestea se combină. De exemplu, o lecţie de comunicare / însuşire de noi conţinuturi se poate baza, în principal, pe metoda expunerii, a problematizării, sau pe conversaţia euristică, poate apela la mijloace clasice, moderne sau I.A.C., se poate desfăşura în clasă sau la muzeu, poate debuta cu o reactualizare sau cu situaţie problemă, se poate finaliza cu un test, o rezolvare de exerciţii sau o temă eseu. Această largă varietate a desfăşurării tipurilor de lecţie se regăseşte teoretic în conceptul de variantă de lecţie, concept ce desemnează forma concretă pe care o îmbracă un tip de lecţie în desfăşurarea sa. Unii autori doar le-au semnalat, alţii le-au integrat analizei realizate pentru tipurile de lecţie, ceea ce înseamnă că reprezintă o realitate care nu mai poate fi ignorată nici de cercetarea pedagogică, nici de practica educativă.

Relaţia dintre lecţie - tip de lecţie - varianta de lecţie este una atât de sistematizare, de organizare, de tip deductiv (de la abstract la concret) cât şi una de generalizare, de concluzionare, de tip inductiv (de la concret la abstract), după schema din figura 5.1.

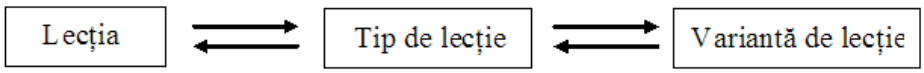

Figura 2.1. Relaţia dintre lecţie - tip de lecţie - varianta de lecţie

În timp ce lecţia, în sine, poate, în funcţie de sarcina sa didactică fundamentală**,** să se multiplice în 5 tipuri de lecţie (de comunicare / însuşire de noi conţinuturi, de formare de priceperi şi deprinderi, de recapitulare şi sistematizare, de evaluare, mixtă), luxare dintre aceste tipuri de lecţie se poate particulariza în « n » variante**,** ceea ce ilustrează dinamica si varietatea câmpului didactic, după schema din figura 5.2.

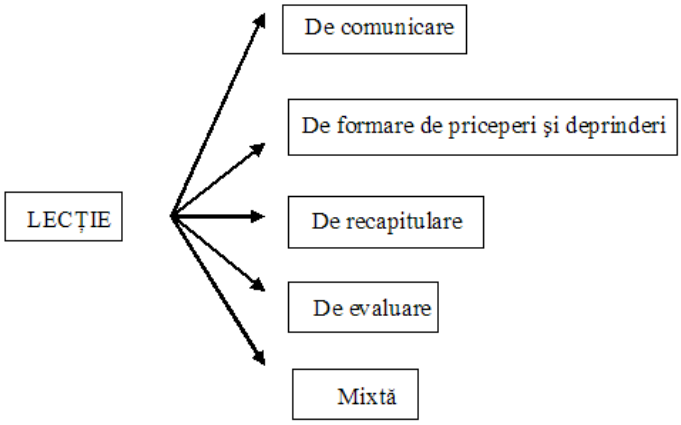

Figura 2.2. Schemă privind clasificarea lecţiilor

Această reprezentare divergentă a abordării procesului de învăţământ prin intermediul lecţiei este şi cel mai solid argument în favoarea ideii că taxonomia lecţiei şi a variantelor de lecţie nu reprezintă, în nici un caz, un şablon sau un impediment în manifestarea creativităţii didactice, ci doar prefigurează cadrul larg de afirmare a acesteia.

De altfel, cunoaşterea tipurilor şi variantelor de lecţie, a distincţiei teoretice şi practice dintre ele, a modului cum prin ele se realizează raportul general - particular în acţiunea didactică, prezintă o serie de efecte pozitive, cum ar fi:

1. optimizarea proiectării şi desfăşurării procesului de învăţământ, în măsura în care se porneşte de la precizări conceptuale foarte fine şi de la o concepţie flexibilă cu privire la organizarea „traseului" fiecărei lecţii în parte;

2. îmbunătăţirea şanselor ca educatorul să conceapă / aleagă, pe baza cunoaşterii teoretice, varianta optimă în raport cu finalităţile stabilite şi condiţiile concrete de desfăşurare a activităţii (număr de elevi, particularităţi ale vârstei, metode şi mijloace, loc de desfăşurare, timp afectat);

3. evitarea a două tipuri de greşeli în conceperea şi desfăşurarea activităţii didactice:

- considerarea tipurilor de lecţie drept şabloane, structuri prestabilite şi obligatorii a căror aplicare mecanică ar conduce cu certitudine la realizarea finalităţilor propuse;

- desconsiderarea taxonomiei lecţiei, considerarea tipurilor de lecţie drept un element teoretic inutil (dată fiind oricum marea diversitate a situaţiilor didactice), care îngreunează munca didactică, obligându-l pe educator să acţioneze rutinier, limitându-i, prin aceasta, creativitatea.

Cea mai bună înţelegere a tipurilor şi variantelor de lecţie este aceea care face din ele instrumente de rigoare teoretică şi practică, cu rol organizatoric şi cu valoare orientativă. Profesorii au dobândit libertatea de a stabili, perfect responsabili, care este cea mai bună organizare a fiecărei lecţii pe care o desfăşoară. De aceea, caracteristicile propuse în continuare pentru tipurile de lecţii evidenţiate au caracter pur ilustrativ.

1. Lecţia de comunicare / însuşire de noi conţinuturi se centrează pe identificarea celei mai bune structuri acţionale care să conducă la asimilarea, înţelegerea şi utilizarea de noi conţinuturi (cunoştinţe, atitudini, valori). În funcţie de vârsta elevilor şi particularităţile vârstei, structura lecţiei se poate modifica de la multistadială (învăţământul primar, gimnaziu, primii ani de liceu) către monostadială (ultimii ani de liceu, învăţământul universitar şi postuniversitar) (lecţie - prelegere, lecţie - dezbatere). Principalele evenimente ale sale, cu care cei mai mulţi pedagogi sunt de acord:

- ✓ organizarea colectivului de elevi;
- ✓ reactualizarea conţinuturilor asimilate anterior şi necesare, utile pentru înţelegerea noilor conţinuturi;
- ✓ pregătirea psihologică a elevilor pentru receptarea noilor conţinuturi (pe bază de conversaţie, situaţie problemă, prezentarea unui caz, a unui material introductiv, citat, exerciţiu sau problemă ce nu pot fi rezolvate);
- ✓ anunţarea temei şi a obiectivelor operaţionale (adecvat şi sintetic);
- ✓ comunicarea / însuşirea noilor conţinuturi;
- ✓ fixarea şi sistematizarea:
- ✓ evaluarea;
- ✓ tema pentru acasă.

Ceea ce trebuie subliniat aici este faptul că, într-o lecţie multistadială, comunicarea /însuşirea pot dura maximum 30 de minute - 35 de minute (prin comprimarea sau eliminarea unora dintre momentele lecţiei: reactualizarea - ce se poate realiza pe parcursul lecţiei, atunci când este necesară, evaluarea), apropiindu-se, astfel, de structura lecţiei combinate (mixtă), în timp ce într-o lecţie monostadială poate ajunge până la 45 de minute.

Cele mai cunoscute variante ale sale sunt:

a. după locul lecţiei în structura temei, capitolului: lecţie introductivă, lecţie de parcurs, lecţie finală;

b. după locul de desfăşurare a lecţiei: lecţie desfăşurată în sala de clasă, lecţie la muzeu, lecţie - excursie, lecţie în mijlocul naturii;

c. după metoda didactică de bază utilizată: lecţie prelegere, lecţie seminar, lecţie problematizată, lecţie bazată pe metoda studiului de caz, lecţie experimental - factuală, lecţie programată, lecţie pe bază de observaţie;

d. după mijloacele didactice utilizate: lecţie realizată cu mijloace clasice, lecţie realizată cu mijloace video, lecţie realizată prin I.A.C.

Proiect de lecţie

Clasa : a XI a

Şcoala : ***Liceul Bănăţean Oţelu Roşu***

Profesorul : ***Cecon Iulia Andreea***

Obiectul : ***Analiză matematică***

Subiectul lecţiei : ***Rolul derivatei a II a în studiul funcţiilor : convexitate, concavitate***

Tipul lecţiei : ***de dobîndire de noi cunoştinţe***

Competenţe specifice:

- ***Exprimarea cu ajutorul noţiunilor de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor propietăţi cantitative şi calitative ale unei funcţii (1)***
- ***Explorarea unor propietăţi cu caracter local şi/sau global ale unor funcţii utilizând continuitatea, derivabilitatea sau reprezentarea grafică (2)***

Stategii didactice: ***expunerea, conversaţia, rezolvarea de exerciţii***

Mijloace de învăţămînt: ***manualul, fişe cu probleme***

Resurse psihopedagogice : ***Elevii cunosc :***

- ***Derivatele funcţiilor elementare***
- ***Derivatele funcţiilor compuse, formule de derivare***
- ***Rolul derivatei intâi în studiul funcţiilor***
- ***Continuitatea şi derivabilitatea funcţiilor***
- ***Teorema lui Lagrange***
- ***Definiţia algebrică a convexităţii/concavităţii***

Desfăşurarea lecţiei

Evenimentele lecţiei	Competenţe specifice	Activitatea	Metode	Procedee de evaluare
Organizarea clasei		Notez eventualii absenţi şi mă asigur că elevii sunt pregătiţi pentru începerea lecţiei	-conversaţia	
Verificarea cunoştinţelor predate anterior şi a temei pentru acasă		Verific noţiunile de continuitate , derivabilitate, modalitatea de calcul a celei de a II a derivate,teorema lui Lagrange, definiţia algebrică a convexităţii /concavităţii	-activitate frontala şi individuală	- analiza răspunsurilor
Enunţarea scopului lecţiei		Modalitatea de a determina forma unei funcţii (concavă sau convexă) ţinând cont de semnul celei de a II a derivate	-conversaţia	
Predarea noilor cunoştinţe şi dirijarea învăţării	1. 2.	Teoremă : Fie f : [a,b]→ℝ, a < b o funcţie de două ori derivabilă pe [a,b]. 1)Dacă $f''(x) \geq 0$, $\forall\, x \in (a,b)$, atunci funcţia f este convexă pe intervalul [a,b]. 2). Dacă $f''(x) \leq 0$, $\forall\, x \in (a,b)$, atunci funcţia f este concavă pe intervalul [a,b]. Demonstraţie. 1).Fie $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$. Pentru fiecare punct $x \in (x_1, x_2)$ se aplică teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalele $[x_1, x], [x, x_2]$ şi deci există $c_1 \in (x_1, x)$ şi $c_2 \in (x, x_2)$ astfel încât: $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1)$, $\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(c_2)$. Cum $c_1 < c_2$ rezultă că $f'(c_1) \leq f'(c_2)$ (din enunţ $f'' \geq 0$ arată că f' este crescătoare) adică $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. Din $x \in (x_1, x_2)$, arbitrar, aceasta este echivalentă	-explicaţia	- observarea elevilor

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>cu scrierea: $x = (1-t)x_1 + tx_2, (\forall)\ t \in (0,1)$. Înlocuind pe x în inegalitatea de mai sus rezultă, $f(x) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$
ceea ce arată că f este convexă pe [a,b].
OBSERVAŢIE :
Este valabilă şi afirmaţia reciprocă :
dacă f : [a,b]→ℝ,este de două ori derivabilă pe [a,b] şi este convexă (concavă), atunci $f'' \geq 0$ ($f'' \leq 0$).
Pentru determinarea intervalelor de convexitate (concavitate) este utilă parcurgerea următoarelor etape :
➢ Se calculează '' .
➢ Se rezolvă ecuaţia $f''(x) = 0$.
➢ Cu ajutorul rădăcinilor derivatei a II a se determină intervalele pe care derivata a doua a păstrează acelaşi semn.
➢ Dacă $f'' > 0$ pe un interval, atunci f este convexă pe acel interval, iar dacă $f'' < 0$ pe un interval, atunci f este concavă pe acel interval.

Faptul că pe un interval $[x_1,x_2]$, f este convexă, se marchează într-un tabel de forma :
<table><tr><td>x</td><td>x_1</td></tr><tr><td>f</td><td>∪∪∪∪∪∪∪∪∪∪∪∪</td></tr><tr><td>f″</td><td>+ + + + + + + + + + + +</td></tr></table>
iar dacă f este concavă :
<table><tr><td>x</td><td>x_1</td></tr><tr><td>f</td><td>∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩</td></tr><tr><td>f″</td><td>- - - - - - - - - - - - - - - -</td></tr></table></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Fixarea cunoştinţelor</td>
<td></td>
<td>Se propun spre rezolvare următoarele exerciţii :
1)să se determine intervalele de convexitate / concavitate pentru următoarele funcţii :
a)f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x$;</td>
<td></td>
<td>-analiza răspunsurilor</td>
</tr>
</table>

		b) $f: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$; c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2e^x$; d) $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x \ln x$; e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x - \cos x$.. 2)Să se demonstreze că într-un triunghi ABC au loc inegalităţile : 1) $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$; 3) $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$.	-conversaţia	- aprecieri verbale argument area alegerii făcute
Tema pentru acasă		Din manual(Elemente de analiză matematică, cl. a XI-a, Mircea Ganga) pagina 318, exerciţiile 3, 4, 6 ,7 , 10 ,12, 16, 17, 22, 23 .	-conversaţia	

Comentariu: pentru clasele de profil tehnic (M_{1-2}) exerciţiile vor avea un grad mai mic de dificultate.

Exerciţiile de lucru în clasă :

- să se determine intervalele de concavitate / convexitate pentru următoarele funcţii :

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x$;
b) $f: \mathbb{R} - \{-3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+3}$;
c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2e^{-x}$;
d) $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 \ln x$;

Tema pentru acasă :

Să se determine intervalele de convexitate /concavitate pentru funcţiile $f: D \to \mathbb{R}$:

1)$f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$;

2)$f(x) = \frac{4x-x^2}{x+2}$;

3)$f(x) = x - \arcsin x$;

4)$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$;

5)$f(x) = (x^2 - x + 2)e^x$.

2. Lecţia de formare de priceperi şi deprinderi poate viza atât domeniul intelectual (formarea deprinderii de a elabora un rezumat, un plan de idei, o compunere, de a rezolva un tip de problemă) cât şi tehnic, motric, estetic.

Structura unei asemenea lecţii poate cuprinde:

- ✓ organizarea colectivului de elevi;
- ✓ anunţarea temei şi a obiectivelor operaţionale;
- ✓ reactualizarea sau asimilarea unor conţinuturi necesare procesului de formare a deprinderilor şi priceperilor;
- ✓ demonstraţia - model;
- ✓ exersarea propriu-zisă (formarea efectivă);
- ✓ evaluarea performanţelor;
- ✓ tema pentru acasă.

Prin specificul său se poate desfăşura la orice nivel de vârstă a copiilor, ceea ce şi deschide posibilitatea de a flexibiliza, întări sau diminua unele dintre evenimentele sale (rolul sporit al evaluării la şcolarii mici, posibilitatea de a reactualiza pe parcurs sau deloc la şcolarii mari). Cele mai utilizate variante sunt:

a. după natura deprinderilor care se formează: lecţia de formare de deprinderi de muncă intelectuale (gramatica, literatura, filosofie, matematică, limbi străine, istoric, geografie); lecţia de formare de deprinderi motrice (educaţie fizică, educaţie tehnologică); lecţia de formare de deprinderi tehnice (informatică, fizică, chimie, biologie, astronomie): lecţia de formare de deprinderi estetice (muzică, desen);

b. după metoda utilizată: lecţia pe bază de exerciţii aplicative, lecţia pe baza fişelor, lecţia pe baza textului programat, lecţia pe bază de muncă cu manualul, lecţia de creaţie;

c. după locul în care se desfăşoară: lecţia cu caracter practic, aplicativ (desfăşurată în afara clasei atelier, lot experimental), lecţia de laborator (biologie, fizică, chimie), lecţia excursie.

Proiect de lecţie

Clasa : a XI a

Şcoala : ***Liceul Bănăţean Oţelu Roşu***

Profesorul : ***Cecon Iulia Andreea***

Obiectul : ***Analiză matematică***

Subiectul lecţiei : ***Rolul primei derivate în studiul funcţiilor***

Tipul lecţiei : <u>Lecţia de formare de priceperi şi deprinderi</u>

Competenţe specifice:

- ***Exprimarea cu ajutorul noţiunilor de limită, continuitate, derivabilitate, monotonie, a unor propietăţi cantitative şi calitative ale unei funcţii (1)***
- ***Explorarea unor propietăţi cu caracter local şi/sau global ale unor funcţii utilizând continuitatea, derivabilitatea sau reprezentarea grafică (2)***

Stategii didactice: ***expunerea, conversaţia, rezolvarea de exerciţii***

Mijloace de învăţămînt: ***manualul, fişe cu probleme***

Resurse psihopedagogice : ***Elevii cunosc :***

- ***Derivatele funcţiilor elementare***
- ***Derivatele funcţiilor compuse, formule de derivare***
- ***Rolul derivatei intâi în studiul funcţiilor***
- ***Continuitatea şi derivabilitatea funcţiilor***
- ***Teorema lui Lagrange***

1. ***Rolul primei derivate în studiul funcţiilor***

Teorema 1.

a) Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie monoton crescătoare pe un interval I. Dacă f este derivabilă pe I atunci $f' \geq 0$ pe intervalul I.

b) Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie monoton descrescătoare pe un interval I. Dacă f este derivabilă pe I atunci $f' \le 0$ pe intervalul I.

Demonstraţie

a) Dacă f este monoton crescătoare pe I atunci $\forall x, x_0 \in I, (x \ne x_0)$ avem $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$ şi trecând la limită rezultă $\lim\limits_{x \to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) \ge 0 \Leftrightarrow f'(x_0) \ge 0 \Rightarrow$ $f' \ge 0$ pe intrvalul I.

b) Dacă f este monoton descrescătoare pe I atunci $\forall x, x_0 \in I, (x \ne x_0)$ avem $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$ şi trecând la limită rezultă $\lim\limits_{x \to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) \le 0 \Leftrightarrow f'(x_0) \le 0 \Rightarrow$ $f' \le 0$ pe intrvalul I.

Teorema 2. Consecinţă a teoremei lui Lagrange.

Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă pe un interval I . Dacă $f'(x) \ge 0, \forall x \in I$ atunci funcţia f este monoton crescătoare pe I iar dacă $f'(x) \le 0, \forall x \in I$ atunci funcţia f este monoton descrescătoare pe I.

Demonstraţie

Să presupunem că $f'(x) \ge 0, \forall x \in I$ şi $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$.

Aplicând functiei f teorema creşterilor finite pe intervalul $[x_1, x_2]$ obţinem că :

$\exists c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(c)$, (1)

Dar $f'(c) \ge 0$ pentru că $c \in I$ si $x_2 - x_1 > 0$, (2)

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă $f(x_2) - f(x_1) \ge 0$.

Am demonstrat astfel că $\forall x_1, x_2 \in I \quad cu \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2) \Rightarrow$ f monoton crescătoare pe intervalul I .

Dacă $f'(x) \le 0, \forall x \in I$ şi $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$. Aplicând functiei f teorema creşterilor finite pe intervalul $[x_1, x_2]$ obţinem că :

$\exists c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(c)$, (3)

Dar $f'(c) \le 0$ pentru că $c \in I$ si $x_2 - x_1 > 0$, (4)

Din relaţiile (3) şi (4) rezultă $f(x_2) - f(x_1) \le 0$.

Am demonstrat astfel că $\forall x_1, x_2 \in I \quad cu \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2) \Rightarrow$ f monoton descrescătoare pe intervalul I .

Aplicaţii.

1. Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^{2009x} \cdot (x-1)$.

a) Să se calculeze $f'(x), x \in R$.

b) Să se rezolve ecuaţia $f'(x) = 0$.

c) Să se studieze monotonia funcţiei f.

Rezolvare

a) $f'(x) = \left[e^{2009x} \cdot (x-1)\right]' = \left(e^{2009x}\right)' \cdot (x-1) + e^{2009x}(x-1)' = e^{2009x} \cdot (2009x - 2008)$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2009x} \cdot (2009x - 2008) = 0 \Leftrightarrow e^{2009x} = 0\,(imposibil)$ *sau* $2009x - 2008 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2008}{2009}$

c) Monotonia funcţie f rezultă din tabelul cu semnul primei derivate.

x	-∞ $\frac{2008}{2009}$ +∞
e^{2009x}	+ + +

$$f(-1) = f'(-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (1-m+n)e^{-1} = 0 \\ (n-1)e^{-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = n+1 \\ n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 1 \end{cases}$$

b). Pentru m = 2 şi n = 1 obţinem $f'(x) = (x^2 + 4x + 3)e^x$. Pentru a studia monotonia funcţiei f alcătuim un tabel cu semnul primei derivate.

Ataşăm ecuaţia $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 3)e^x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \quad sau \quad e^x = 0 \Leftrightarrow$

x = -3 sau x = -1.

x	-∞ -3 -1 +∞
e^x	+ +
$x^2 + 4x + 3$	+ + + + + ++ + + + + 0 - - - - - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + +
$f'(x) = (x^2 + 4x + 3)e^x$	+ + + + + ++ + + + + 0 - - - - - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + +
$f(x)$	↗ f(-3) ↘ f(-1) ↗

Din tabelul anterior rezultă că f este strict crescătoare pe intervalele (-∞,-3] şi [-1,+∞) şi este strict descrescătoare pe intervalul [-3, -1].

<u>3. Lecţia de recapitulare şi sistematizare</u> (fixare, consolidare) se organizează cu scopul sedimentarii, ordonării şi aplicării conţinuturilor asimilate din dorinţa de a contribui la organizarea lor în structuri închegate şi flexibile. Cu toate acestea, lecţia de acest tip are efecte şi în direcţia descoperirii / acoperirii unor lacune, depăşirea unor confuzii şi chiar lărgirea ariei de cunoaştere, toate asigurând întărirea şi extinderea conexiunilor intra şi interdisciplinare, sintetizarea achiziţiilor.

Din alcătuirea unui asemenea tip de lecţie fac parte:

- ✓ organizarea colectivului de elevi;
- ✓ anunţarea conţinutului, obiectivelor şi a unui plan de recapitulare (înainte de lecţie şi / sau la începutul lecţiei);
- ✓ realizarea propriu-zisă a recapitulării - teorie şi / sau aplicaţie;

- ✓ evaluarea;
- ✓ (eventual) temă pentru acasă.

Din multitudinea de variante reţinem;

a. după metoda utilizata: lecţia de recapitulare pe bază de exerciţii, lecţia pe bază de text programat, lecţia pe bază de fişe de muncă independentă, lecţia cu ajutorul I.A.C.;

b. după momentul în care se **realizează:** lecţia de repetare curentă (pe parcursul semestrului), lecţia de recapitulare la sfârşit de capitol sau grup de teme, lecţia de sinteză (realizată în perioadele de evaluare);

c. după locul unde se desfăşoară: lecţia de recapitulare în natură, la muzeu, în întreprindere, în excursie.

4. Lecţia de verificare şi evaluare a rezultatelor şcolare îşi propune să identifice nivelul de pregătire al elevilor atât pentru cunoaşterea în sine a acesteia cat şi pentru optimizarea activităţii didactice în perioada ulterioară.

Structura sa ar putea sa cuprindă:

- ✓ organizarea colectivului de elevi;
- ✓ anunţarea conţinutului ce urmează a fi verificat (înainte de lecţie sau chiar în momentul începerii acesteia);
- ✓ verificarea propriu-zisă;
- ✓ evaluarea rezultatelor (cu anunţarea rezultatelor pe loc sau ulterior);
- ✓ (eventual) temă pentru acasă.

Variantele sale se pot constitui în raport cu:

a. metoda de evaluare utilizată: lecţia de evaluare orală, lecţia de evaluare scrisă, lecţia de evaluare prin lucrări practice;

b. mijloacele de evaluare folosite: lecţia de evaluare cu ajutorul testului docimologic, lecţia de evaluare cu ajutorul programelor computerizate, lecţia de evaluare pe bază de test - grilă sau fişe;

c. locul de desfăşurare: lecţie desfăşurată în atelierul şcolar, lecţie desfăşurată la stadion sau în sala de gimnastica, lecţie desfăşurată în laborator sau în sala de clasă.

5. Lecţia mixtă (combinată), în măsura în care urmăreşte realizarea mai multor sarcini didactice (fixare, comunicare / însuşire, formare de priceperi şi deprinderi, evaluare),

va avea o structură asemănătoare cu cea a lecţiei de comunicare / însuşire dar cu o mai mare dispersie a timpului pe evenimentul reactualizării, respectiv fixării şi evaluării.

Variante pot fi aceleaşi de la lecţia de comunicare, cu sublinierea precedentă (motiv pentru care, în anumite lucrări acest tip de lecţie nu mai este deloc analizat sau analiza se opreşte doar la tipul lecţiei, fără a mai înainta către variante.

Revenind asupra acestui tablou generos al diversităţii activităţii didactice, nu se poate să nu privim cu încredere posibilităţile pe care le oferă domeniul muncii educative atât în formarea elevilor cât şi în manifestarea liberă, creatoare a personalităţii cadrului didactic.

2.5. Lecţia de matematică şi rolul acesteia în procesul de învăţământ

Lecţia este considerată ca forma de bază a desfăşurării procesului instructiv-educativ, forma ştiinţifică de organizare a acestui proces în şcoală.

Lecţia clasică de matematică a fost şi va fi în continuare obiectul unor îmbunătăţiri metodice. Se impune transformarea învăţământului dintr-un învăţământ informativ într-unul cu prioritate formativ. Acesta presupune în primul rând schimbarea raportului profesor-elev în cadrul lecţiei, ***elevul transformându-se din obiect al educaţiei în subiect al acesteia***. Astfel, profesorul care avea rolul de simplu transmiţător al cunostinţelor, are rolul de îndrumare şi coordonare a activităţii de formare a personalităţii elevului. Profesorul va colabora permanent cu elevii situându-se mereu alături de ei şi stimuland astfel autocontrolul, elevii fiind convinşi că munca lor nu este în zadar.

În fiecare clasă de elevi se creează o anumită ambianţă comportamentală, care exprimă climatul de învăţare. Un climat de învăţare participativ şi creativ poate fi dezvoltat numai prin derularea unor situaţii de învăţare adecvate (combinaţii specifice de resurse didactice: metode de învăţare, de predare, materiale şi mijloace didactice, timp, loc de desfăşurare.

În momentul de faţă, când învăţarea depăşeşte graniţele şcolii, devenind o componentă esenţială a vieţii profesionale şi a succesului, trebuie să învăţăm cum să învăţăm, cum să facem faţă exploziei informaţionale de cunoştinţe, cum să selecţionăm, cum să filtrăm, să analizăm, să ordonăm şi să structurăm informaţiile şi mai ales cum să creem altele noi.

Instruirea trebuie concepută nu numai ca transmitere de informaţii, ci şi ca formare de capacităţi noi fără de care asimilarea şi utilizarea informaţiilor nu este posibilă. Tehnologia

instruirii reprezintă modul riguros, sistematic de concepere, realizare şi evaluare a activităţii didactice.

Pentru a realiza activităţi didactice eficiente este necesara o activitate raţională, bazată pe proiectarea didactică. Se admite că orice "*lucru bine facut*" este rezultatul unui "*proiect didactic bine gandit*". A lucra raţional înseamnă să răspunzi precis şi permanent la următoarele 4 întrebări în următoarea ordine:

1. ce voi face?

2. cu ce voi face?

3. cum voi face?

4. cum voi şti dacă ceea ce trebuia realizat s-a realizat?

Profesorul care nu se gândeşte la activitatea pe care o va desfăşura respectând aceste exigenţe va face "*erori educationale*".

Diversificarea metodelor de predare- învăţare, a modurilor şi formelor de organizare a lecţiei, a situaţiilor de învăţare, constituie cheia schimbărilor pe care le preconizează noul curriculum. Asigurarea unor situaţii de învăţare multiple creează premise pentru ca elevii să poată valorifica propriile abilităţi de învăţare.

Principalele metode de învăţare , folosite la matematică

Metode de învăţare	**Centrate pe activitate**	**Centrate pe conţinutul învăţării**
Centrate pe elev	Lucrări practice Învăţarea prin descoperire Învăţarea prin proiecte Învăţarea prin experiment Studiu de caz Incident critic Jocuri didactice Joc de rol Simulare Problematizare	Dezbatere Brainstorming Observaţie în natură Conversaţie Demonstraţie Dialog
Centrate pe profesor	Exerciţiul	Prelegerea

	Instruirea programată Algoritmizarea	Explicaţia Povestirea

A. *Metodele tradiţionale* : expunerea sistematică a cunoştinţelor, metoda conversaţiei, demonstraţia matematică, metoda exerciţiului, metoda lucrului cu manualul
B. *Metode moderne* : problematizarea, învăţarea prin descoperire, modelarea, metoda învăţării pe grupe, învăţarea prin cooperare, algoritmizarea, instruirea programată,
C. *Metode de învăţare active*: brainstorming, metoda mozaicului, , investigaţia, proiectul, experimentul, jocul de rol,
D. *Metode de dezvoltare a creativităţii*: brainstorming, metoda cubului, turul galeriei, metoda ciorchinelui, metoda KWL, metoda INSERT.

Organizarea activităţii se referă la colaborarea dintre elevi şi profesor, respectiv, a elevilor între ei.

Câteva recomandări cu privire la strategiile de organizare a activităţii:

- dacă folosiţi pentru prima dată o anumită metodă (ex. Brainstorming), aplicarea acesteia de către elevi, respectiv gestiunea timpului şi a rezultatelor de către profesor, pot cauza o concentrare mai mică asupra problemei esenţiale vizate . Pentru a evita acest risc, este de preferat să prezentaţi şi să folosiţi metoda la o temă mai simplă, înainte de a o folosi la o temă complexă.

- dacă intenţionaţi să folosiţi forme noi de organizare a clasei (ex. Lucrul în grupuri) recurgeţi pentru prima dată la o astfel de formă de organizare în cadrul unei lecţii de recapitulare, care nu presupune achiziţionarea de noi cunoştinţe

Predarea matematicii trebuie să stimuleze o atitudine ştiinţifică la elevi, caracterizată de:

- curiozitate şi activitate

- scepticism

- raţiune

- informaţie

- strategii

- dăruire

Desigur că nu este recomandat ca, prin predarea matematicii , să apară la elevi antonimul atitudinii ştiinţifice care este caracterizată de:

- pasivitate

- prejudecată

- informaţii greşite

- neglijenţă

- detaşare

De asemenea, pentru ca învăţarea să fie eficientă, predarea trebuie să fie înţeleasă ca organizare a proceselor de evocare, explorare, explicare, esenţializare, exersare, extindere ale celor care învaţă: să formuleze întrebări, să caute răspunsuri în mod activ, să fie tot timpul conşienţi de ceea ce ştiu şi de ceea ce vor să afle.

La începutul unui nou an şcolar, de regulă, fiecare profesor de matematică realizează evaluarea iniţială a elevilor din clasele la care va preda şi prin aceasta el îşi va cunoaşte elevii dotaţi pentru matematică cât şi pe cei cu lipsuri în cunştinţele de la această disciplină.Există elevi cu dificultăţi de învăţare la matematică, în unele clase numărul acestora fiind relativ mic iar în altele destul de mare, astfel că profesorul trebuie să desfăşoare activităţi diferenţiate precum şi activităţi de recuperare – aprofundare. Dintre activităţile diferenţiate cu elevii care au lipsuri sau lacune în cunoştinţele matematice evidenţiem următoarele:

- Învăţarea în grupuri mici

- solicitarea mai desă la răspunsuri

- îmbunătăţirea climatului psihologic

- Tema pentru acasă să fie dată diferenţiat

- Activităţi suplimentare în afara orelor de cur

- Metode speciale pentru cazurile deosebite

Activităţile de aprofundare vizează elevii care au trecut “pragaul notei 5”. Pentru îmbunătăţirea performanţelor, aceştia pot lucra, în funcţie de nivelul abilităţilor dobândite, exerciţii de antrenament sau exerciţii de dezvoltare.

Elevii talentaţi la matematică trebuie descoperiţi de timpuriu şi într-un mod sistematic. Metoda obişnuită de a identifica astfel de elevi sunt testele de aptitudini şi acţiunile cu caracter competiţional. Profesorii de matematică trebuie să identifice elevii talentaţi, să le acorde atenţie, afecţiune, sprijin, pregătire şi recunoaştere.

Pentru elevii dotaţi la matematică, se desfăşoară la nivel de şcoală o serie de activităţi menite a-i sprijini şi a-i încuraja:

- tratarea diferenţiată în cadrul lucrului pe grupe

- antrenarea în cadrul cercurilor de matematică la nivel de şcoală

- participarea cu probleme şi referate pe teme de matematică în cadrul unor manifestări ştiinţifice ale elevilor

- sprijinirea în editarea unei reviste şcoalre conţinând şi probleme de matematică

- Organizarea unor acţiuni competiţionale

2.6. Proiectarea activităţii didactice

Proiectarea activităţii didactice are ca element central programa şcolară. Ea stabileşte ţintele ce urmează a fi atinse, prin intermediul actului didactic, pe baza obiectivelor /competenţelor pe care le impune. În activitatea de proiectare sunt obligatorii obiectivele /competenţele dar acelaşi obiectiv /competenţă se realizează prin mai multe conţinuturi şi resurse, după cum mai multe obiective /competenţe pot fi realizate cu acelaşi conţinut şi aceleaşi resurse. În asocierea acestora intervine experienţa şi creativitatea profesorului.

Proiectarea activităţii didactice presupune :

- lectura programei
- planificarea calendaristică
- proiectarea secvenţială (a unităţilor de învăţare)

În contextul noului curriculum planificarea calendaristică reprezintă un instument de interpretare personală a programei, care asigură un demers didactic concordant cu situaţia concretă din clasă.

Planificarea activităţii didactice presupune aşadar o lectură atentă şi personală a programei şcolare în scopul de a analiza obiectivele /competenţele şi de a inventaria tipurile de activităţi şi resurse necesare.

Pentru elaborarea planificărilor este considerată oportună următoarea etapizare :

1. Citirea atentă a programei ;

2. Stabilirea succesiunii unităţilor de învăţare şi detalierea conţinuturilor tematice ale fiecărei unităţi în raport cu competenţele specifice care le sunt asociate prin programă ;

3. Corelarea detalierilor de la punctul 2, cu oferta de resurse didactice de care dispune profesorul (manuale, ghiduri, caiete,etc.) ;

4. Alocarea timpului considerat necesar pentru fiecare unitate de învăţare în concordanţă cu competenţele specifice vizate.

Pentru realizarea planificării poate fi folosită una dintre următoarele două variante :

Nr. Crt.	Unităţi de învăţare	Competenţe specifice vizate	Conţinuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observaţii

sau :

Nr. Crt.	Unităţi de învăţare	Competenţe specifice vizate	Competenţe derivate	Conţinuturi	Număr de ore alocate	Săptămâna	Observaţii

În cazul în care se optează pentru a doua variantă, completarea celei de-a patra coloane se face pe parcursul anului, cu 1-2 săptămâni înainte de prezentarea respectivelor conţinuturi la clasă.

Întregul cuprins al planificării are valoare orientativă, eventualele modificări determinate de aplicarea efectivă la clasă putând fi consemnate în rubrica “ Observaţii “.

Proiectarea unei unităţi de învăţare.

O unitate de învăţare acoperă una sau mai multe ore de curs (de obicei 2-8 ore).

O unitate de învăţare este :

-coerentă din punct de vedere al competenţelor /obiectivelor vizate ;

-unitară din punct de vedere tematic (adică al conţinutului) ;

-desfăşurată în mod continuu pe o perioadă de timp ;

-finalizată prin evaluare.

Realizarea unei unităţi de învăţare impune un demers didactic proiectat de către fiecare profesor în parte. Metodologia de proiectare a unei unităţi de învăţare constă într-o succesiune de etape, înlănţuite logic, ce contribuie la determinarea conţinuturilor, în vederea formării competenţelor specifice /atingerii obiectivelor de referinţă. Etapele proiectării sunt aceleaşi oricare ar fi unitatea de învăţare vizată.

Proiectarea unei unităţi de învăţare se recomandă a fi făcută ţinând seama de următoarele :

- centrarea demersului didactic pe competenţe /obiective (nu pe conţinuturi) ;

- implicarea în proiectare a următorilor factori : competenţe /obiective (de ce ?) – activităţi (cum ?) şi resurse (cu ce ?) –evaluare (cui ?) ;

- identificarea resurselor, a tipurilor de activităţi şi a secvenţelor de evaluare (precizate în timp).

Resursele cuprind : manuale, texte auxiliare (culegeri, enciclopedii, tabele matematice, etc.),mijloace audio-video, etc. În condiţiile noului curriculum, lectura manualului nu mai este în mod obligatoriu liniară. Programa trebuie parcursă în mod necesar de către toţi, manualul însă se pliază unei citiri personale şi adaptate (conform schemei din figura 5.3).

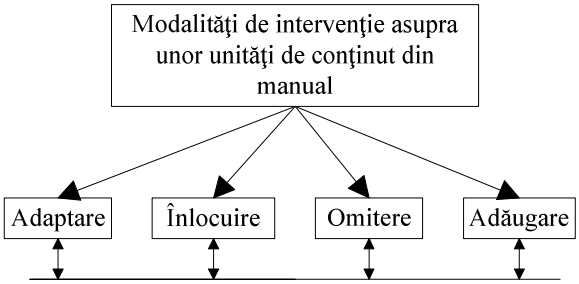

Figura 2.3. Schemă privind parcurgerea unităţilor de conţinut din manual

De asemenea, sunt considerate resurse: timpul, spaţiul în care se desfăşoară ora de curs; resursele umane (elevul cu personalitatea sa, profesorul cu experienţa sa, influenţele comunităţii, etc.). Profesorul va alătura fiecărui obiectiv /fiecărei competenţe sau grup de obiective /grup de competenţe, acele resurse pe care le consideră necesare pentru realizarea demersului didactic.

BIBLIOGRAFIE

[1]. D. BUSNEAG, D. PICIU **;** Lecţii de algebră, Ed. Universitaria, Craiova, 2002.

[2]. D. BUŞNEAG, D. PICIU, Fl. CHIRTEŞ; Probleme de algebră, Ed. Universitaria, Craiova, 2002.

[3] GH. SIREȚCHI, Calcul diferenţial şi integral, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, 1985

[4]. M.O.DRÎMBE **;** Inegalităţi idei şi metode, Ed.Gil, Zalău, 2003.

[5]. A.DRAGOMIR, L. DRAGOMIR**;** Exerciţii şi probleme de matematică pentru clasa a XII-a, Ed. Bîrchi, Bucureşti, 2011.

[6]. A.DRAGOMIR, L. DRAGOMIR**;** Exerciţii şi probleme de matematică pentru clasa a XI-a, Ed. Bîrchi, Bucureşti, 2011.

[7]. L.ARDELEAN,N.SECELEAN; Didactica matematicii, Ed. Universităţii „Lucian Blaga”, 2007

[8]. *** Gazeta matematică, colecţie 1960 – 2013.

[9]. *** Manualele de matematica din ciclul liceal.

[10] LUCRARE METODICO – ŞTIINŢIFICĂ PENTRU OBŢINEREA GRADULUI DIDACTIC I ÎN ÎNVĂŢĂMÂNT, Studiul câmpului electric prin lecţiile de fizică;

Webografie

[1]. www.didactic.ro

[2].http://www.referatele.com/referate/matematica/online3/Rezolvarea-ecuatiilor-de-gradul-III-si-IV-referatele-com.php.

[3]. http://www.scribd.com/doc/24120574/Rezolvarea-Ecuatiilor-de-Gradul-III-Si-IV.

[4].http://www.matematica.com.ro/ro/6.2-Ecuatia-de-gradul-3-ecuatia-de-gradul-al-treilea--a4185.html.