UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIŞOARA

DEPARTAMENTUL PENTRU PREGĂTIREA PERSONALULUI DIDACTIC

**LUCRARE METODICO - ŞTIINŢIFICĂ**

**PENTRU OBȚINEREA GRADUL DIDACTIC I**

Coordonator ştiinţific:

PROF. UNIV. DR. ION DORU ALBU

Candidat:

Profesor DANIELA RODICA BORDÎNC

Unitatea de învățământ: Liceul Tehnologic

”IOSIF CORIOLAN BURACU”

Prigor, Caraș - Severin

Timișoara

2013

UNIVERSITATEA DE VEST DIN TIMIOARA

DEPARTAMENTUL PENTRU PREGĂTIREA PERSONALULUI DIDACTIC

**Metodica rezolvării problemelor**

**de coliniaritate şi concurenţă**

Coordonator științific:

PROF. UNIV. DR. ION DORU ALBU

Candidat:

Profesor DANIELA RODICA BORDÎNC

Unitatea de învățământ: Liceul Tehnologic

”IOSIF CORIOLAN BURACU”

Prigor, Caraș - Severin

Timișoara

2013

**CUPRINS**

METODICA REZOLVĂRII PROBLEMELOR DE COLINIARITATE

ȘI CONCURENȚĂ

Introducere ………………………………………………………………………….......…….4

CAP.I. NOȚIUNI PRELIMINARE ……………………………………………...............….5

§1. Planul euclidian (axiomele lui Birkhoff)…………………………………........…...5

§2. Spațiul vectorilor geometrici din planul euclidian (operații, proprietăți de calcul vectorial)……………………………………………………………………………….......…14

§3. Reper cartezian, sistem de coordonate în planul euclidian…………………......…21

Cap.II. COLINIARITATE………………………………………………….........................25

§1. Ce înseamnă o problemă de coliniaritate?

Criterii de coliniaritate...........................................................................................25

§2. Teoreme şi probleme de coliniaritate (aplicații).....................................................45

Cap.III. CONCURENȚĂ.........................................................................................................60

§1. Ce înseamnă o problemă de concurență?

Criterii de concurență.............................................................................................60

§2. Teoreme şi probleme de concurență (aplicații).......................................................77

Cap.IV. DUALITATEA COLINIARITATE – CONCURENȚĂ............................................89

§1. Teorema lui Desargues............................................................................................89

§2. Proprietatea de dualitate polară (în raport cu un unghi, un cerc)............................93

Cap.V. CONSIDERAȚII METODICE................................................................................100

§.1. Observații metodice (locul și rolul problematicii în programele școlare)............100

§.2. Chestiuni de evaluare...........................................................................................103

**INTRODUCERE**

Coliniaritatea şi concurenţa sunt concepte fundamentale în geometrie. Atât sub aspectul teoretic, cât şi sub cel al problemelor , al aplicaţiilor , ele au preocupat pe geometri încă din antichitatea greacă ; contribuţiile lui Euclid, Arhimede, Menelaus, Pappus, Apollonius au trecut proba timpului rămânând până azi rezultate importante în domeniul abordat de noi. Problematica a rămas în atenţia multor nume ilustre din perioada Renaşterii şi epocii moderne : Leonardo da Vinci, Federigo Commandino, Gérard Desargues, Evangelista Torricelli, Blaise Pascal, Giovanni Ceva, Isaac Newton, Leonard Euler, Carl Friedrich Gauss, Victor Poncelet, Michel Chasles, Jacob Steiner ş.a. Interesul pentru această temă este motivat de existenţa unui număr mare de propoziţii matematice foarte elegante, care concluzionează proprietăţile de concurenţă şi coliniaritate, în ipoteze, fie foarte generale, fie foarte speciale. Problemele de coliniaritate şi concurenţă reprezintă adevăruri în general uşor de intuit, dar a căror demonstrare riguroasă necesită raţionamente precise şi o gamă variată de tehnici specifice, solicitând rezolvatorului nu numai cultură matematică, dar şi inventivitate. Se poate vorbi despre importanţa lor în didactica geometriei la toate nivelurile, în special în ceea ce priveşte metodele diverse de abordare şi de rezolvare. Spre exemplu, propoziţia binecunoscută : "În orice trapez mijloacele bazelor, punctul de intersecţie a laturilor neparalele şi punctul de intersecţie a diagonalelor sunt coliniare" poate fi stabilită la clasa a VII-a utilizând asemănarea triunghiurilor, eventual reciprocele teoremelor lui Menelaus şi Ceva, la clasa a IX-a cu calcul vectorial, la nivelul clasei a X-a folosind numere complexe, iar la nivelul clasei a XI-a cu metoda coordonatelor carteziene sau utilizând transformări geometrice.

Nu în ultimul rând, remarcăm că, în ultimii ani, tot mai multe probleme de concurenţă şi coliniaritate se propun la concursuri. Aparent proprietăţi disparate, coliniaritatea şi concurenţa sunt de fapt complementare, într-o relaţie directă mai mult decât formală, ele determinându-se reciproc în exprimarea dualismului armonic sau a dualismului polar. Cel mai simplu argument este că , uneori, a arăta că trei drepte sunt concurente se reduce la a arăta că punctul de intersecţie a două dintre ele este coliniar cu două puncte distincte aparţinând celei de a treia. Structura lucrării urmează firesc scopul propus. O prezentare a cadrului geometric şi a tehnicilor şi "instrumentelor de lucru" necesare (plan euclidian,vectori geometrici sisteme de coordonate, raport simplu ) face obiectul Capitolului I. Preliminarii. Capitolele II şi III tratează coliniaritatea şi respectiv concurenţa, după acelaşi program: criterii, teoreme importante şi aplicaţii, iar Capitolul IV este dedicat corelaţiilor de dualitate care se pot stabili între coliniaritate şi concurenţă. Bibliografia conţine peste 15 referinţe citate pe parcursul lucrării, din mult mai numeroasele surse pe care le-am consultat în timpul elaborării acestei sinteze.

Metodica rezolvării problemelor de coliniaritate și concurență

**CAPITOLUL I**

**PRELIMINARII**

([1], [2], [5], [10], [14])

**§1. Planul euclidian (cu axiomatica după Birkhoff)**

În construcţia riguroasă a geometriei este nevoie de unele cunoştinţe preliminare din teoria mulţimilor şi de proprietăţile algebrice, de ordine, de continuitate şi metrice ale mulţimii numerelor reale **R** . De asemenea , se consideră o serie de noţiuni, numite *noţiuni primare* sau *fundamentale,* precum şi o serie de *relaţii primare* sau *fundamentale*. Aceste noţiuni şi relaţii primare nu primesc în geometrie o definiţie directă, informaţii despre conţinutul lor fiind furnizate de un sistem de axiome , care este o colecţie minimală de propoziţii independente , numite *axiome*. Axiomele sunt admise fără demonstraţie şi reprezintă punctul de plecare în construcţia geometriei.

Celelalte noţiuni geometrice ( *noţiuni derivate*) sunt introduse treptat, cu ajutorul noţiunilor primare şi al altor noţiuni derivate , prin *definiţii* directe. Proprietăţile geometrice stabilite (deduse) prin demonstraţii, cu ajutorul axiomelor şi definiţiilor, se numesc *teoreme* (cele de importanţă mai mică sau care pregătesc alte teoreme se mai numesc *leme* sau *propoziţii* sau *observaţii*). Unele consecinţe directe ale unei teoreme se numesc *corolare*.

Există diverse posibilităţi de a alege ansamblul noţiunilor şi relaţiilor primare, precum şi al propoziţiilor primare ( axiomelor). În axiomatica lui G.D.Birkhoff (1884-1944) pentru geometria plană se consideră următoarele noţiuni fundamentale: *punct, dreaptă, funcţia distanţă între două puncte şi funcţia măsură a unghiurilor.* În alte sisteme axiomatice noţiunile fundamentale pot fi altele; de exemplu, în axiomatica lui Hilbert noţiunile fundamentale sunt: punct, dreaptă, incidenţa, relaţia ”între” şi congruenţa.

Axiomele geometriei în plan ,după Birkhoff, se grupează în: *axiome de apartenenţă, axioma riglei, axioma de separare, axiomele unghiului, axioma de congruenţă şi axioma paralelelor.* Structura matematică definită de aceste axiome se numeşte **planul euclidian** şi constituie cadrul geometric în care vom trata problematica de coliniaritate şi concurenţă.

**I.** **Axiomele de apartenenţă (** sau de **incidenţă** )

Primul grup de axiome se enunţă astfel:

I.1 ***Planul*** *este mulţimea punctelor, pe care o notăm cu E.*

I.2 *Orice dreaptă este o submulţime a lui E.*

I.3 *Orice dreaptă conţine cel puţin două puncte. În plan există trei puncte care nu aparţin*

*aceleaşi drepte.*

I.4 *Pentru două puncte distincte există o dreaptă şi numai una care le conţine*.

Dacă A este un punct şi *d* este o dreaptă, relaţia se citeşte astfel: punctul A aparţine dreptei *d* sau *d* conţine A sau punctul A şi dreapta *d* sunt incidente. Punctele A, B, C se zic *coliniare*, dacă există o dreaptă *d* , astfel ca  Fie A şi B două puncte distincte. Potrivit axiomei I.4 există o singură dreaptă *d* , astfel încât ; această dreaptă *d* va fi notată cu **AB.** O primă consecinţă se obţine prin metoda *reducerii la absurd.* Ea constă în a arăta că ipoteza şi negarea concluziei teoremei conduc la o contradicţie.

**Teoremă:** Două drepte diferite au cel mult un punct comun.

De asemenea, se poate formula prima definiţie importantă.

**Definiţie.** Fie d1 , d2  două drepte distincte din plan. Se spune că dreptele d1 şi d2  sunt **paralele** şi se scrie d1 || d2 , dacă d1 ∩ d2 = ∅ .În caz contrar, d1 şi d2  se numesc **secante**.

Un sistem de drepte care conţin un punct A∈*E* se numeşte *fascicul de drepte cu centrul* A. O familie de drepte paralele două câte două se numeşte *fascicul de drepte paralele*. Familia tuturor dreptelor paralele cu o dreaptă d se numeşte *direcţia* lui d.

**II. Distanţa şi axioma riglei**

Ştim din experienţă că fixând o „unitate de măsură” (un segment etalon) şi folosind procedeul de măsurare, fiecărei perechi de puncte putem face să-i corespundă un număr real (nenegativ) unic, „distanţa dintre cele două puncte”. În axiomatica lui Birkhoff funcţia distanţă este o noţiune fundamentală. Admitem deci, că oricare ar fi punctele A,B ∈ E există un număr real unic, notat cu AB sau δ(A,B), care se numeşte **distanţa între** A şi B. Pentru două puncte oarecare A şi B, distanţa AB este un număr real unic.

Cu imaginea reprezentării numerelor reale pe o dreaptă putem defini o corespondenţă biunivocă între mulţimea punctelor unei drepte şi mulţimea numerelor reale **R**. Prin axioma următoare admitem existenţa şi precizăm proprietăţile unei astfel de funcţii .

**Axioma riglei**: *Fie d o dreaptă oarecare şi O, A ∈ d două puncte distincte. Există o unică funcţie f : M∈ d→ ∈* ***R*** *, astfel încât să fie satisfăcute următoarele condiţii:*

1. *f este o funcţie bijectivă ;*

2. ** ;

3. *oricare ar fi punctele P,Q∈ d , are loc relaţia:*(*formula distanţei*)

Prin această axiomă se mai precizează că funcţia  definită prin f(M) = , este determinată în mod unic de condiţiile 1), 2) şi 3).

**Definiţie**. Funcţia  se numeşte **sistem de coordonate** **carteziene** **normale** (s.c.c.n.)pe dreapta d, punctul A **originea** lui,iar numărul  **abscisa** sau **coordonata** punctului M **relativ la** *f* .

**Teoremă:** Oricare ar fi punctele P, Q, R coliniare, au loc următoarele proprietăţi:

****

Se spune că punctul M *separă* punctele A şi B sau că M *este între* A şi B , scriind A - M - B sau B - M - A , dacă A, B, M sunt coliniare şi AM + MB = AB.

Se numeşte *segmentul deschis* cu extremităţile A şi B figura :

(AB) := {M | A - M - B} .

Figura [AB] := (AB) ∪ {A,B} este *segmentul închis* asociat.

Dacă d este o dreaptă, atunci fiecare pereche de puncte O , A ∈ d determină pe d două figuri :

d1 := {M∈d\{O}| O nu separă A şi M} ; d2 := { M∈d\{O}| O separă A şi M}

numite *semidreptele deschise (opuse) determinate* *de* O *pe* d. d1 se mai noteză cu (OA . [OA:= (OA∪{O} este *semidreapta închisă cu originea* O, care conţine pe A.

Pe mulţimea semidreptelor deschise (închise) ale unei drepte d se defineşte relaţia de echivalenţă : semidreptele (AB şi (CD *au acelaşi sens* dacă (AB ∩ (CD este o semidreaptă. În caz contrar, (AB şi (CD *au sensuri opuse*.

Două segmente [AB] şi [CD] se numesc *congruente* şi se scrie [AB] ≡ [CD] , dacă [AB] şi [CD] au aceeaşi lungime i.e. AB = CD. Se scrie [AB] ≤ [CD] dacă AB ≤ CD .

*Mijlocul* segmentului [AB] este unicul punct M∈(AB) , pentru care [AM] ≡ [MB].

Fie punctele coliniare A, B, M pe dreapta d , M ≠ B.

**Definiţie**. Se numeşte **raportul în care** M **divide bipunctul** sau **segmentul orientat** (A, B) numărul k∈ **R** \ {1} definit prin :



Un *unghi*  în E este reuniunea a două semidrepte închise (*laturile* sale) având aceeaşi origine (*vârful* său). Dacă h = [AB , k = [AC , atunci unghiul determinat de h şi k este , care se mai notează prin : ∠BAC , ∠CAB, ,  sau .este un *unghi nul*, dacă h = k ; este un *unghi alungit* dacă h , k sunt semidrepte opuse ; în celelalte cazuri este un *unghi propriu*.

Un *poligon cu n laturi* A1A2...An (unde n ≥ 3) este o linie poligonală închisă , cu proprietate că oricare două laturi adiacente au suporturi distincte şi oricare două laturi neadiacente sunt disjuncte. Ak  sunt *vârfurile*, iar [AkAk+1] sunt *laturile* sale ().

O figură F ⊂ E se numeşte *figură convexă* dacă

A, B ∈ E ⇒ [AB] ⊂ F .

Prin definiţie, ∅ şi F ={A}, ∀ A∈ E , sunt figuri convexe.

**III. Axioma de separare a planului**

**Definiţie**.Fie *d* o dreaptă şi A,B două puncte ale planului E, nesituate pe *d*. Se spune că **dreapta** *d* **separă punctele** A şi B sau că A şi B sunt **de o parte şi de alta a** lui *d*,dacă segmentul (AB) are un punct comun cu *d* i.e. d ∩ (AB) ≠ ∅ . În caz contrar se spune că A şi B sunt **de aceeaşi parte a** dreptei *d* sau că d **nu separă** A şi B .

***Axioma de separare a planului***: *Fie o dreaptă d şi trei puncte distincte A, B, C ∈* E \ d . *Dacă d separă punctele A, B şi d nu separă punctele B, C, atunci d separă punctele C , A .*

**Consecinţă**. O dreaptă care intersectează un triunghi, dar nu conţine niciun vârf al său, intersectează exact două laturi ale triunghiului.

**Definiţie.** Fie A un punct nesituat pe dreapta d. Figura

(dA := { M∈ E | d nu separă A, M}

se numeşte *semiplanul (deschis) limitat de* d *care conţine* pe A, iar dreapta d este *frontiera* sa.

[dA :=(dA ∪ d este *semiplanul închis* asociat.

**Observaţii.**1) Dacă B∈(dA , atunci (dA = (dB.

2) Figura S' := {M∈ E | d separă A, M} se numeşte *semiplanul opus* lui (dA în raport cu d. Dacă P(dA şi QS’, atunci d separă P , Q.



3) (dA şi S' sunt nevide , disjuncte , iar (dA ∪ S' = E \ d.

4) (dA şi S' sunt figuri convexe.

Fie un unghi propriu  şi b = **AB** , c = **AC** dreptele suport ale laturilor sale. Se numeşte *interiorul unghiului*  figura :

() := (bC ∩ (cB .

() este o figură convexă .

(BAC)

c

b

A

B

C

Un poligon A1A2...An se numeşte *poligon convex* dacă oricare ar fi k∈{1,2,...,n}, toate vârfurile diferite de Ak şi Ak+1 sunt de aceeaşi parte a dreptei AkAk+1 (An+1 = A1). În caz contrar, A1A2...An se numeşte *poligon concav*.

Se numeşte *interiorul poligonului convex* A1A2...An figura

(A1A2...An) := (∩ ∩ ... ∩ (.

Se numeşte *suprafaţa poligonală convexă cu frontiera* A1A2...An figura

[A1A2...An] := A1A2...An ∪ (A1A2...An) .

B1

B2

B3

B4

A1

A2

A3

A4

A5

A6

A7

B5

B6

B7

B8

Se numeşte *suprafaţă poligonală* reuniunea unui număr finit de suprafeţe poligonale convexe cu interioare disjuncte.

**Teoremă**. Orice suprafaţă poligonală convexă cu n laturi (n > 4) admite cel puţin o triangulare în n-2 suprafeţe triunghiulare. Orice suprafaţă poligonală este triangulabilă .

**IV. Axiomele unghiului**

Vom nota cu U mulţimea unghiurilor din E. Ultima noţiune fundamentală pe care o introducem este inspirată de procedeul de măsurare a unghiurilor cu raportorul.

Admitem existenţa unei funcţii m: U→[0,180], numită **funcţia măsură a unghiurilor** (în grade), care satisface următoarele axiome:

**U.1. ***dacă şi numai dacă este un unghi nul; dacă şi numai dacă este un unghi alungit.*

**U.2. *(Axioma de construcţie a unghiurilor)*** *Fie (OA o semidreaptă şi S un semiplan limitat de dreapta* ***OA****. Pentru orice număr există o semidreaptă unică (OB inclusă în S , astfel ca .*

**U.3. *( Axioma adunării unghiurilor)*** *Dacă  şi  sunt unghiuri adiacente cu (OB sau unghiuri adiacente suplementare, atunci*

.

În particular, suma măsurilor unghiurilor adiacente suplementare este egală cu 180. Două unghiuri se numesc *suplementare* (respectiv, *complementare*) dacă suma măsurilor lor este 180 (respectiv, 90). Două unghiuri , se numesc *opuse la vârf* dacă au acelaşi vârf şi laturile lor sunt semidrepte opuse, de pildă (h,h') , (k,k') sunt perechi de semidrepte opuse.

Două unghiuri , ∈ U se numesc *congruente* şi se scrie  ≡ , dacă m() = m(). Un unghi  este un *unghi drept* dacă este congruent cu un suplement al său , echivalent , dacă m() = 90.

Două unghiuri sunt în relaţia  < , dacă  < .

**Teoreme.** 1) Două unghiuri care au acelaşi suplement ( respectiv, complement) sunt congruente.

2) Două unghiuri opuse la vârf sunt congruente.

3) Toate unghiurile drepte sunt congruente.

Două *drepte* se numesc *perpendiculare* dacă formează un unghi drept. Dacă d şi d' sunt drepte perpendiculare, atunci se notează d ⊥ d' sau d' ⊥ d.

**Teoreme**. 1) Două drepte perpendiculare formează patru unghiuri drepte.

2) Dată o dreaptă d şi un punct A∈d , există o unică dreaptă d', astfel încât A∈d' şi d' ⊥ d.

Semidreapta [OC se numeşte *bisectoarea unghiului* propriu  dacă (OC ⊂ () şi ≡. Bisectoarea unui unghi propriu există şi este unică.

Se numeşte *mediatoarea segmentului* [AB] dreaptacare conţine mijlocul lui [AB] şi este perpendiculară pe **AB** .Mediatoarea unui segment există şi este unică.

Se numeşte *unghi exterior al unui triunghi* un unghi care este adiacent şi suplementar unuia dintre unghiurile triunghiului. Un triunghi are şase unghiuri exterioare, câte două în fiecare vârf ; unghiurile exterioare corespunzătoare unui vârf sunt congruente.

Se numeşte *unghiul a două drepte* cel mai mic dintre unghiurile formate de cele două drepte. Dacă d1 , d2 sunt două drepte din planul E , atunci m(∈[0, 90].

m(= 0 ⇔ d1 || d2  ; m(= 90 ⇔ d1 ⊥ d2 .

**Definiţie.** Două **triunghiuri** ΔABC şi ΔA’B’C’ se numesc **congruente** şi se notează ΔABC ≡ ΔA’B’C’, dacă există o corespondenţă (omologie) între vârfuri,

A ↔ A' , B ↔ B' , C ↔ C',

astfel încât



, , .

Congruenţa se poate extinde la poligoane convexe, respectiv la suprafeţe poligonale convexe, definiţiile fiind analoage celei pentru triunghiuri. Două suprafeţe poligonale sunt congruente dacă pot fi descompuse simultan în suprafeţe poligonale convexe respectiv congruente.

**V.Axioma de congruenţă**

Pentru a simplifica studiul proprietăţilor de congruenţă a triunghiurilor se impune o axiomă specială, care este independentă de axiomele precedente şi care se exprimă simultan cu congruenţa unor unghiuri şi congruenţa unor segmente.

**Axioma LUL** . *Fie două triunghiuri ΔABC şi ΔA'B'C'. Dacă [AB] ≡ [A'B'], [AC] ≡ [A'C'] şi ≡' , atunci ΔABC ≡ ΔA'B'C’.*

Principalele consecinţe ale axiomei LUL sunt noţiuni şi teoreme importante de *geometrie* *absolută*, care au aplicaţii în problematica tratată de noi în lucrare.

**Teorema de congruenţă ULU**. Fie triunghiurile ΔABC şi ΔA'B'C'. Dacă [AB] ≡ [A'B'],  ≡ ' şi ≡ ' , atunci ΔABC ≡ ΔA'B'C' .



**Teorema de congruenţă LLL**. Fie triunghiurile ΔABC şi ΔA'B'C'. Dacă [AB] ≡ [A'B'], [BC] ≡ [B'C'], [AC]≡[A'C'] atunci ΔABC ≡ ΔA'B'C' .

**Teorema** **unghiului exterior în geometria absolută*.*** În orice triunghi, un unghi exterior este mai mare decât fiecare din unghiurile interioare neadiacente lui.

**Teorema LUU**. Fie triunghiurile ΔABC şi ΔA'B'C'. Dacă [AB] ≡ [A'B'],  şi , atunci ΔABC ≡ ΔA'B'C' .

**Teoremele inegalităţilor într-un triunghi**. Pentru orice triunghi ΔABC , au loc următoarele relaţii :

1) [AB] ≥ [AC]echivalent cu  ≥  ;

2) AB + BC > CA , BC + CA > AB , CA + AB > BC .

**Teorema de loc geometric a mediatoarei**. Mediatoarea unui segment este locul geometric al punctelor din plan situate la egală distanţă de extremităţile segmentului.

**Teorema de existenţă şi unicitate a perpendicularei.** Fie dreapta d şi punctul A∈ E. Există o unică dreaptă care conţine pe A şi este perpendiculară pe d.

**Teorema de existenţă a paralelei**. Fie dreapta d şi punctul A ∉ d. Există cel puţin o dreaptă care conţine pe A şi este paralelă la d.

**Definiţie.** Fie dreapta d şi punctul A∈ E . Se numeşte **distanţa lui (de la)** A **la** d numărul real (nenegativ)

δ(A, d) := inf {δ(A,M) | M∈ d}.

Dacă M0 ∈ d este astfel încât AM0 ⊥ d , atunci δ(A, d) = AM0 .

**Teorema de loc geometric a bisectoarei**. Bisectoarea unui unghi este locul geometric al punctelor din interiorul unghiului situate la egală distanţă de laturile unghiului, reunit cu vârful unghiului.

**Criteriul de paralelism**. Daca două drepte distincte d1 , d2 formează cu o secantă comună d o pereche de unghiuri alterne interne ( respectiv corespondente , respectiv alterne externe) congruente, atunci d1 şi d2 sunt paralele.

**Teorema triunghiului în geometria absolută**. Pentru fiecare triunghi ΔABC din E are loc relaţia :

.

**VI.** **Axioma paralelelor**

Pentru a obţine *geometria euclidiană* este necesară

**Axioma paralelelor.** *Fiind date o dreaptă oarecare şi un punct oarecare exterior dreptei, cel mult o dreaptă conţine punctul dat şi este paralelă la dreapta dată.*

Vom enunţa cele mai importante teoreme de geometrie euclidiană plană.

**Teorema de unicitate a paralelei**. Fie o dreaptă d şi un punct A ∉ d . Există o dreaptă unică d’ , astfel încât A ∈ d’ şi d’ || d .

**Teorema de paralelism**. Dacă două drepte d1 , d2 sunt paralele, atunci ele formează cu orice secantă comună perechi de unghiuri alterne interne congruente, corespondente congruente, alterne externe congruente.(această teoremă este reciproca criteriului de paralelism ; ambele propoziţii sunt frecvent utilizate în aplicaţii)

Următoarele teoreme sunt echivalente cu axioma paralelelor.

**Teorema unghiului exterior**. În orice triunghi măsura unui unghi exterior este egală cu suma măsurilor unghiurilor interioare neadiacente lui.

**Teorema triunghiului în geometria euclidiană**. Pentru fiecare triunghi ΔABC din E are loc relaţia :

.

**Corolar 1**. Unghiurile ascuţite ale unui triunghi dreptunghic sunt complementare.

**Corolar 2.** Suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu n laturi este 180(n-2).

**Corolar 3.** Suma măsurilor unghiurilor exterioare ale unui poligon convex cu n laturi este 360.

Dacă a şi d sunt două drepte secante din E , atunci se numeşte *proiecţia paralelă cu* a *a lui* E *pe dreapta* d aplicaţia care asociază fiecărui punct M∈ E punctul M'∈ d , cu proprietatea **MM'** || a. Dacă a ⊥ d , atunci se numeşte proiecţia paralelă cu a se numeşte *proiecţia ortogonală a lui* E *pe dreapta* d.

Alte rezultate importante de geometrie euclidiană sunt :

**Teorema de determinare a unui triunghi**. Date trei numere pozitive a, b, c , astfel încât

a + b < c , b + c < a , c + a < b ,

există un triunghi unic determinat (până la o congruenţă) având laturile de lungimi a, b, c. [această teoremă este reciproca teoremei inegalităţilor unui triunghi ; v. 2) de mai sus]

**Teorema unghiurilor cu laturile paralele ( perpendiculare)**. Două unghiuri care au laturile respectiv paralele ( respectiv perpendiculare) sunt congruente sau suplementare.

**Teoremele de concurenţă a liniilor importante într-un triunghi.** În orice triunghi ΔABC ,

1) mediatoarele sunt concurente într-un punct O , care este *centrul cercului* *circumscris* lui ΔABC ;

2) bisectoarele sunt concurente într-un punct I , care este *centrul cercului înscis* în ΔABC ;

3) înălţimile sunt concurente într-un punct H, numit *ortocentrul* lui ΔABC ;

4) medianele sunt concurente într-un punct G, numit *centrul de greutate* al lui ΔABC;

5) simedianele sunt concurente într-un punct K, numit *punctul lui Lemoine* al lui ΔABC ; (o *simediană* este simetrica unei mediane printr-un vârf în raport cu bisectoarea care are originea în acel vârf)

În cele ce urmează vom presupune cunoscută o serie de alte noţiuni, relaţii şi proprietăţi, care fac parte din edificiul geometric al planului euclidian : geometria paralelogramelor şi trapezelor, asemănarea figurilor geometrice, teorema lui Thales, teorema bisectoarei, teoremele de asemănare a triunghiurilor, relaţii metrice în triunghi, cercul şi proprietăţile sale, măsura arcelor de cerc şi a unghiurilor incidente la cerc, inscriptibilitate şi circumscriptibilitate, lungimea arcului de cerc şi a cercului, puterea în raport cu un cerc, ariile figurilor geometrice plane etc. De asemenea, vom admite utilizarea funcţiei măsură în radiani a unghiurilor, atunci când este cazul. Trecerea de la o unitate de măsură la cealaltă este dată prin :  .

**§2.** **Spaţiul vectorilor geometrici din planul euclidian**

**Direcţie şi sens în plan**

Se numeşte *direcţie* în E definită de o dreaptă d mulţimea  formată din d şi toate dreptele din E paralele cu d.

d' ∈  echivalent cu d' = d sau d' || d.

**Observaţii.** Oricare dintre dreptele unei direcţii determină direcţia respectivă. Două direcţii distincte sunt disjuncte. Fiecare dreaptă din E aparţine unei singure direcţii. Prin fiecare punct din E există câte o dreaptă unică din fiecare direcţie.

Pentru o direcţie dată se introduce noţiunea de sens. Se consideră semidreptele [OA , [O'A' având aceeaşi direcţie i.e. **OA** = **O'A'** sau **OA** || **O'A'** . Pentru cazul **OA** = **O'A'** , se spune că [OA şi [O'A' *au acelaşi sens* dacă [OA ⊂ [O'A' sau [O'A' ⊂ [OA (v. şi §1.II). Pentru cazul **OA** || **O'A'**, se spune că [OA şi [O'A' *au acelaşi sens* dacă dreapta **OO'** nu separă A, A'.

Se numeşte *sensul* determinat de semidreapta [OA pe direcţia dreptei **OA** mulţimea formată din [OA şi toate semidreptele din E care au acelaşi sens cu [OA.

A'

O'

O"

A"

O

A

d

Pe fiecare direcţie din E există exact două sensuri, numite *sensuri opuse*. O direcţie se numeşte *orientată* dacă s-a fixat unul din cele două sensuri pe ea. Două semidrepte din direcţii diferite nu se consideră nici de acelaşi sens, nici de sensuri opuse. Fiecare punct din plan este originea unei semidrepte unice din fiecare sens.

Se numeşte *unghiul a două direcţii* unghiul a doi reprezentanţi din cele două direcţii. Dacă  este unghiul direcţiilor  şi , atunci

m() = m( ∈ [0, 90] ; μ() = μ(∈ [0, π].

Două direcţii se numesc *perpendiculare* (*normale*,*ortogonale*) dacă există o pereche de drepte din cele două direcţii care sunt perpendiculare.

 ⊥  ⇔ d ⊥ d' ⇔ m(= 90 echivalent cu m() = 90 ⇔ μ() =

*Unghiul a două sensuri*  cu reprezentanţii [OA şi [OB este unghiul , iar măsura în grade a unghiului a două sensuri este cuprinsă în intervalul [0, 180], respectiv măsura în radiani a unghiului a două sensuri aparţine lui [0, π] .

**Vectori geometrici în plan**

Produsul cartezian E × E este mulţimea **bipunctelor** (perechi ordonate de puncte) sau **segmentelor orientate** din E . Bipunctul (A,B) ∈ E × E are originea A , extremitatea B şi reprezentarea grafică o "săgeată" orientată de la A spre B. Un bipunct (A,B) determină segmentul [AB] , dar şi un sens pe dreapta **AB**, anume sensul semidreptei [AB . Un bipunct de forma (A,A) determină segmentul nul {A} şi este reprezentat grafic printr-un singur punct. Două *bipuncte* sunt *egale* dacă au aceeaşi origine şi aceeaşi extremitate.

Două bipuncte (A,B) , (A',B') se numesc *bipuncte echipolente* şi se scrie (A,B) ≈ (A',B'), dacă segmentele [AB'] şi [A',B] au acelaşi mijloc. Prin definiţie, toate bipunctele nule (A,A) , cu A∈ E , sunt echipolente.

**Definiţie**. Se numeşte **vector geometric** sau **vector liber** sau **vector** din E , cu reprezentantul (A,B) , mulţimea , notată cu , a tuturor bipunctelor echipolente cu (A,B).

:= {(M,N)∈ E × E | (M,N) ≈ (A,B)} ;

 ⇔ (A,B) ≈ (A',B') ⇔ (A',B')∈⇔ (A,B)∈.

Vectorul  se numeşte *vectorul nul* , iar vectorul se numeşte opusul vectorului .

Deoarece un vector este unic determinat de oricare dintre reprezentanţii săi, se admite notarea vectorilor , independent de reprezentanţi, prin: Vectorul nul se notează cu , iar mulţimea tuturor vectorilor din E , numită *spaţiul vectorilor geometrici*, se va nota cu .

**Teoremă.** Fiecare punct din E este originea unui reprezentant unic al unui vector dat. i.e.

 E ,  rezultă ∃1 B ∈ E | . (♥)

Unui vector nenul i se asociază trei elemente care împreună îl caracterizează : direcţie, sens şi lungime (modul).

Se numeşte *direcţia vectorului*  direcţia dreptei suport AB.

 rezultă **AB** = **CD** sau **AB** || **CD**.

Vectorul nul ∈ are direcţia nedeterminată.

Doi vectori se numesc *vectori coliniari* dacă au aceeaşi direcţie. Vectorul nul este , prin definiţie, coliniar cu orice vector din .

**Observaţie**. Trei puncte A, B, C sunt coliniare dacă şi numai dacă oricare doi dintre vectorii  sunt coliniari.

Se numeşte *sensul vectorului*  sensul semidreptei [AB pe direcţia sa .

 rezultă [AB şi [CD au acelaşi sens.

Doi vectori  sunt *de sensuri opuse(contrare)* dacă semidreptele [OA şi [O'A' au sensuri opuse. Vectorul opus lui  este -, deci are sensul opus lui .

Se numeşte *lungimea* sau *modulul vectorului*  lungimea segmentului [AB] şi se notează cu ||.

|| = AB ; || ≥ 0 ; || = 0 ⇔ =  ; || = || .

Un vector  cu proprietatea || = 1 se numeşte *vector unitar* sau *versor*.

**Observaţie.** Doi vectori sunt egali dacă şi numai dacă ei au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi lungime.

Se numeşte *unghiul a doi vectori*  şi unghiul determinat de doi reprezentanţi ai vectorilor  şi , cu aceeaşi origine, respectiv măsura acestuia. Dacă , , atunci unghiul lor este ∠(:= ∠ AOB şi

m(∠() := m(∈[0, 180] ; μ(∠() := μ(∈ [0, π] .

Dacă m(∠() = 90 sau μ(∠() =  , atunci  şi se numesc *vectori ortogonali* sau *perpendiculari*. Se scrie ⊥. Vectorul nul este, prin definiţie, ortogonal pe orice vector din .

**Observaţie.** Doi vectori  şi sunt coliniari dacă şi numai dacă m(∠() ∈{0, 180} sau μ(∠() ∈{0, π}.

**Operaţii cu vectori.**

Fie doi vectori nenuli ,  din . Se numeşte **suma vectorilor**  şi  vectorul , unde C este simetricul punctului O faţă de mijlocul segmentului [AB] . Dacă unul dintre vectorii  şi este nul, de exemplu, = , atunci, prin definiţie,  + = =  + = . Operaţia prin care se asociază la doi vectori suma lor se numeşte **adunarea vectorilor** din . Vectorul  se numeşte **diferenţa vectorilor**  şi .







C

B

A

O

A

B

C









**Observaţie**. Adunarea vectorilor este corect definită, căci suma nu depinde de alegerea reprezentanţilor lui  şi . Se spune că pentru adunarea vectorilor am aplicat "*regula paralelogramului*" . Suma a doi vectori se poate exprima, de asemenea, cu "*regula triunghiului*" : dacă , , atunci = , adică are loc relaţia

 , ∈ E . (♣)

Din relaţia (♣) se obţine scrierea unui vector arbitrar , ca diferenţă a doi vectori :

 , ∀ O ∈ E . (♠)

Relaţiile (♥) , (♣) şi (♠) sunt fundamentale în calculul vectorial.

**Observaţie**. Adunarea vectorilor este asociativă şi comutativă, are element neutru pe  şi are simetrie (simetricul lui ∈  este opusul său - ∈ ).

Fie un vector nenul  din  şi un număr λ din **R** . Se numeşte **produsul vectorului**  **cu numărul real** (**scalarul**) λ vectorul λ := , unde D este un punct coliniar cu O şi A, determinat de valoarea şi semnul lui λ, astfel : dacă λ < 0, atunci D - O - A şi OD = - λ OA ; dacă λ = 0, atunci D = O ; dacă λ > 0, atunci D∈ (OA şi OD = λ OA. Dacă vectorul  este vectorul nul , atunci , prin definiţie, λ= , ∀ λ ∈**R** . Operaţia prin care se asociază unui vector şi unui număr real produsul vectorului cu numărul respectiv se numeşte **înmulţire cu scalari a vectorilor** din .

A



O

D

O

A







D

**Observaţie**. Înmulţirea vectorilor cu scalari este corect definită, căci vectorul λ nu depinde de alegerea reprezentantului lui . Vectorii  şi λ sunt coliniari, de acelaşi sens dacă λ > 0 şi de sensuri opuse dacă λ < 0 . În particular, (-1)  = -, ∀∈. De asemenea, au loc proprietăţile :

1) λ=  ⇔ =  sau λ = 0 ;

2) λ(μ) = (λμ);

3) λ (+) = λ + λ;

4) ( λ + μ)= λ + μ.

**Teoremă**. Doi vectori  şi  sunt coliniari dacă şi numai dacă există un număr real λ , astfel încât λ= .

**Observaţie**. Relaţiile următoare arată comportarea modulului în raport cu adunarea şi înmulţirea cu scalari a vectorilor :

**R** . (♦)

**Teoremă**. Dacă se notează cu (A,B;M) raportul în care punctul M ≠ B divide bipunctul (A,B) , atunci sunt echivalente următoarele egalităţi :

1) (A,B;M) = k , k∈**R** \{1} ;

2)  , k∈**R** \{1} ;

3)  , k∈**R** \{1}.

În particular,

M este mijlocul lui [AB] ⇔  ⇔ .

Se consideră doi vectori necoliniari  şi din. Pentru fiecare vector din , există două numere reale unic determinate x, y∈**R** , astfel încât . Se spune că  este o *combinaţie liniară* a vectorilor  şi , cu coeficienţii x, y. x şi y se numesc *coordonatele lui*  *în raport cu* (,) şi se scrie (x,y) relativ la (,).





O

M

X

Y

M'

M"



**Observaţie**. Fie vectorii , ∈  şi scalarul λ∈**R** . Atunci

1) ⇔ x = x' , y = y' ;

2)  ;

3) ;

4) coliniari ⇔  ;

5) Dacă  şi sunt unitari şi ortogonali, atunci .

Fie doi vectori nenuli ,  din  şi θ ∈[0, π], unghiul vectorilor şi , adică θ = μ((∠() = μ(. Se numeşte *produsul scalar al vectorilor* şi numărul real



Produsul scalar al vectorilor şi se poate exprima cu ajutorul unor proiecţii :

 ;  ;  ; ,

unde A' = pOB(A) , B' = pOA(B) ,  , .

O

A

B

θ

B'

A'





**Observaţie**. Produsul scalar are următoarele proprietăţi :

1) ;

2)  ;

3)  ;

4) ;

5) ( ;

6) .

**Teoremă**. Fie doi vectori şi din . Sunt verificate proprietăţile :

1) , unde  ("pătratul scalar al lui ") ;

2)  (*inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz*) ;

3) şi sunt coliniari ⇔  ; ⊥ ⇔ .

**Observaţie**. Dacă  şi  sunt doi vectori unitari şi ortogonali , atunci pentru oricare doi vectori , ∈  se pot exprima în coordonate produsul scalar şi unghiul celor doi vectori :

 ; cos θ = .

**§3.** **Repere carteziene şi sisteme de coordonate**

**carteziene în planul euclidian**

**Repere carteziene**

Fie d o dreaptă în planul euclidian. Se numeşte *reper cartezian* pe d o pereche *R* = (O;), unde O∈ d este un punct numit *originea* lui *R* , iar ∈este un vector nenul având direcţia lui d, numit *baza* lui *R*. Dacă  este un versor, atunci *R* se numeşte *reper cartezian normal* (r.c.n.). Dreapta d înzestrată cu un reper cartezian se numeşte *axă* (de coordonate) .

**Definiţie.** Se numeşte **reper cartezian** (r.c.)în planul euclidian E un ansamblu *R* = (O;), format dintr-un punct O∈ E şi doi vectori necoliniari ∈ . O se numeşte *originea* lui *R* , iar () se numeşte *baza* lui *R*. Dacă , atunci *R* se numeşte **reper cartezian normal** (r.c.n.) . Dacă  , atunci *R* se numeşte**reper cartezian ortogonal** . Dacă  şi , atunci *R* se numeşte **reper cartezian ortonormal** (r.c.o.)

Reperele carteziene sunt instrumente matematice pentru *coordonatizarea planului* euclidian, respectiv pentru implementarea *metodei coordonatelor* *în plan*.

d

O

X

O





X

Y

M



M

Fie o dreaptă d raportată la r.c.n. *R* = (O;) şi punctul X∈d, pentru care . Dacă M∈d, atunci  se numeşte *vectorul de poziţie* *al punctului* M ; vectorii şi sunt coliniari, deci există un număr unic x∈**R** , astfel încât = x . x se numeşte *coordonata lui* M *relativ la* r.c.n. *R* = (O;) ; se scrie M(x) relativ la *R*.

Fie acum planul E raportat la un r.c.o. *R* = (O;) şi un punct oarecare M∈ E . Vectorul ∈ se numeşte *vectorul de poziţie* *al punctului* M şi admite o exprimare unică de forma = x+ y ; (x,y) se numesc *coordonatele lui* M *relativ la* *R*; se scrie M(x,y) relativ la *R*.

În aplicaţii se vor considera, de regulă, doar repere carteziene ortonormale (r.c.o.).

**Sisteme de coordonate carteziene** **(ortogonale)**

Alte instrumente matematice de coordonatizare a planului euclidian sunt sistemele de coordonate carteziene ortogonale.

Aşa cum s-a precizat în prima secţiune, un sistem de coordonate carteziene normale (s.c.c.n.) pe o dreaptă d este o funcţie bijectivă s : M∈ d → s(M) = x ∈ **R** , cuajutorul căreia distanţa între punctele lui d se calculează cu formula :

δ(M,N) = | x - y | , unde x = s(M) , y = s(N) , M, N ∈d .

Punctul O = s-1(0)∈d este *originea* s.c.c.n. s , iar X = s-1(1)∈d este *punctul unitate* al lui s.

**Observaţie**. Există o corespondenţă biunivocă între mulţimea s.c.c.n. pe dreapta d şi mulţimea r.c.n. pe d. Astfel, unui s.c.c.n. s : d → **R** , cu originea O şi punctul unitate X, îi corespunde r.c.n. *R =* (O;) . Invers, unui r.c.n. *R* = (O;) i se asociază s.c.c.n. s : d → **R**

determinat unic (prin axioma riglei) de punctele O şi X∈ d, pentru care = ; dacă M∈d şi , atunci s(M):= x∈**R** .

M(x) relativ la s ⇔ M(x) relativ la *R* .

**Definiţie.** Se numeşte **sistem de coordonate carteziene ortogonale** (s.c.c.o.) pe E o funcţie S : E → **R2** , care verifică următoarele proprietăţi :

1) S este o funcţie bijectivă ;

2) oricare ar fi punctele P,Q∈ E, are loc relaţia:

, (*formula distanţei*)

unde = S(P), = S(Q) se numesc **coordonatele carteziene** ale punctelor P, respectiv Q , relativ la S.

**Observaţii**. 1) Un s.c.c.o. pe E poate fi construit , dacă se dau două drepte perpendiculare într-un punct O∈ E , notate **OX** , **OY**,pe care se consideră câte un s.c.c.n. cu originea O, mai precis, s' : **OX** → **R** , s" : **OY** → **R** , s' (O) = s"(O) = 0 , s'(X) = s"(Y) = 1. Funcţia S : M∈E → (s'(M'),s"(M"))∈**R2** , undeM' , M" sunt proiecţiile ortogonale ale lui M pe **OX** , respectiv pe **OY**,defineşte un s.c.c.o. pe E .Dreptele OX , OY se numesc *axele de* *coordonate* ale lui S .De aceea, s.c.c.o. se mai notează S =: OXY .

2) Există o corespondenţă biunivocă între mulţimea s.c.c.o. pe E şi mulţimea perechilor ordonate de semidrepte perpendiculare cu origine comună din E .

**Observaţie**. Există o corespondenţă biunivocă între mulţimea s.c.c.o. pe E şi mulţimea r.c.o. din E. Fie S = OXY un s.c.c.o. pe E (se poate considera că OX = OY = 1). Lui S i se asociază în mod natural r.c.o. *R* := (O ; ) . Invers, dacă *R* = (O ; ) este un r.c.o., atunci s.c.c.o. asociat lui *R* este S := OXY , unic determinat prin condiţiile: .

R.c.o. *R* = (O ; ) şi s.c.c.o. S = OXY asociat determină aceeaşi coordonatizare pe E, căci :

M(x,y) relativ la S ⇔ S(M) = (x,y) ⇔  ⇔ M(x,y) relativ la *R*.

**Teoremă.** Dacă E este raportat la un r.c.o. , respectiv la s.c.c.o. , iar A(xA,yA) , B(xB,yB) sunt puncte din E , atunci :

1)  ;

2) AB =  ;

3) (A,B;M) = k ⇔  ⇔ k =  ,

unde M(xM,yM) ∈ **AB** , M ≠ B .

O mulţime de forma *S* = {A1(a1), A2(a2), ... ,An(an)} , unde A1, A2,..., An ∈ E este un sistem de puncte, iar a1, a2, ..., an ∈**R** este un sistem de numere reale cu proprietatea că a1 + a2 + ...+ an≠ 0, se numeşte *sistem de puncte ponderate* . Numerele a1, a2, ..., an se numesc ponderile sau masele punctelor A1, A2,..., respectiv An din *S* .

**Definiţie.** Un punct G se numeşte **baricentrul** sistemului *S* = {A1(a1), A2(a2), ... ,An(an)} dacă verifică următoarele condiţii echivalente :

1. , unde O este un punct din E ;

2.  .

În particular, dacă a1 = a2 = ...= an = a ≠ 0 , atunci G se numeşte **izobaricentrul** sau **centrul de** **greutate** al sistemului de puncte echiponderate *S* ={{A1(a), A2(a), ... ,An(a)}.

**Observaţie**. G este centrul de greutate al sistemului *S* = {A1, A2, ..., An} dacă şi numai dacă este verificată una din următoarele condiţii :

1. , unde O este un punct din E ;

2. 

**Observaţie**. Fie A1(x1,y1) , A2(x2,y2),...,An(xn,yn) din planul E raportat la un r.c.o. Coordonatele carteziene ale baricentrului sistemului *S* = {A1(a1), A2(a2), ... ,An(an)}sunt :

 , .

În particular , centrul de greutate al sistemului *S* = {A1, A2, ... ,An} are coordonatele :

, .

Metodica rezolvării problemelor de coliniaritate și concurență

**CAPITOLUL II**

**COLINIARITATE**

([2], [5], [7], [8], [9], [11], [13])

**§1. Criterii de coliniaritate**

O problemă de coliniaritate înseamnă ”a stabili proprietatea că două sau mai multe figuri geometrice (puncte, segmente, semidrepte) sunt pe aceeași dreaptă (sunt coliniare)”.

Întrucât nu există un algoritm general pentru stabilirea unei astfel de proprietăți, se pot evidenția câteva modalități de a demonstra, cu precădere, coliniaritatea a 3 sau mai multe puncte, le vom grupa în două categorii:

1. criterii geometrice,
2. criterii algebrice: - metoda vectorială

* metoda cu coordonate.

**I. Criterii geometrice de demonstrare a coliniarității**

**C.1.** *Punctele A, B, C sunt coliniare cu A – B – C dacă m()=180º.*

A B C

**Motivație.** În adevăr,dacă *m()=180º* , atunci unghiul **este alungitși A,B,C sunt coliniare, cu A – B – C .

**Exemple:**

1. Fie punctul E interior pătratului ABCD și punctul F exterior pătratului, astfel încât triunghiurile ΔABE si ΔBCF să fie echilaterale. Să se arate că punctele D, E și F sunt coliniare.

Demonstrație:

D C

E

E

F

A B

Unind punctele D cu E și E cu F se obțin triunghiurile DAE și EBF isoscele.

Avem: 



rezultă că D, E, F – coliniare.

1. Se dă un ΔABC oarecare; prin C se consideră paralela la AB şi prin B paralela la AC. Mediana din vârful C intersectează paralela din B la AC în C', iar mediana din vârful B intersectează paralela din C la AB în B'. Să se arate că A, B' şi C' sunt coliniare.

C'

A

B'

C

B

M

Demonstrație:

Fie M mijlocul [AB]. Din ΔAMC ≡ ΔBMC’ implică [AC] ≡ [BC’] şi cum AC || C'B rezultă că ACBC' este un paralelogram. Urmează că . Analog se arată că patrulaterul ABCB' este un paralelogram , deci . Atunci:=

=1800 şi cum B' şi C' sunt de o parte şi de alta a dreptei AC , rezultă că punctele C', A, B' sunt coliniare.

1. Se dau cercurile de centre O şi O', secante în punctele A şi B. Se consideră diametrul MN paralel cu O'A şi diametrul M'N' paralel cu OA, punctele M, M' şi A fiind de aceeaşi parte a dreptei OO'. Să se demonstreze că punctele M, A şi M' sunt coliniare.

Demonstrație:

Avem (unghiuri interne de aceeaşi parte a secantei). Însă şi  (corespondente).

Prin urmare şi cum M, M' sunt de o parte şi de alta a dreptelor AO şi AO' rezultă că M, A' şi M' sunt coliniare.

M'

A

L'

B

N'

N

O

L

M

O'

**C.2.** *Punctele A, B, C sunt coliniare cu A – B – C (sau B – C – A) dacă* *.*

**Motivație**: Dacă atunci laturile (AB si (ACcoincid,prin urmare,

A – B - C sau A – C - B.

**Exemple:**

1. Fie ∆ABC, A, D sunt intersecțiile înălțimii și bisectoarei duse din A pe BC, cu BC. Fie B proiecția lui B pe AD și C proiecția lui D pe AC. Să se arate că punctele A, B și C sunt coliniare. (Se va considera AB < AC.)

Demonstrație: A

B

C

B A D C

ABAB și AADC sunt patrulatere inscriptibile. Avem :

 și ; cum (AD bisectoare, rezultă :  rezultă că .

**C.3.** *Demonstrarea coliniarității folosind reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf.*

**Teoremă.** *Dacă punctul B este situat pe dreapta EF, iar punctele A și C sunt situate de o parte și de alta a dreptei EF și , atunci punctele A, B, C sunt coliniare.*

A

E B F

C

**Exemple:**

1. Intersecţia diagonalelor AC şi BD ale rombului ABCD este punctul O, iar mijlocul segmentului AB este M. Să se decidă dacă M, O şi mijlocul segmentului CD sunt trei puncte coliniare.

Demonstrație:Fie P mijlocul [CD].

şi(L.L.L.) , atunci  rezultă M, O şi P sunt coliniare.

A

D

M

B

O

C

P

1. **Dreapta lui Simson.** Proiecţiile ortogonale ale unui punct M pe laturile unui triunghi ΔABC sunt coliniare dacă şi numai dacă punctele A, B, C, M sunt conciclice.

Demonstrație:

C

P

B

O

Q

A

R

M

Fie P, Q, R proiecţiile lui M pe laturile [BC], [CA] şi [AB]. Considerăm cazul când ΔABC este ascuţitunghic şi punctul M aparţine arcului AC care nu conţine punctul B. Din se deduce că arcul AC ce conţine punctul M este arc mic, deci şi atunci proiecţia Q a punctului M pe [AC] aparţine segmentului. Dacă proiecţiile lui M pe [AB] şi [BC] sunt A, respectiv C, atunci, proiecţiile pe laturi A, Q, C sunt coliniare.

Considerăm cazul când unul din unghiurile  este ascuţit şi celălalt obtuz. Presupunem că este obtuz. În acest caz, proiecţia R a lui M pe [AB], conduce la A[BR].

Deoarece ∠BCMeste ascuţit rezultă P [BC]. (Dacă, de exemplu C [BP], ΔCMP are un unghi drept şi altul obtuz ceea ce este fals). Rezultă că punctele P şi R sunt în semiplane opuse determinate de dreapta AC. Punctele Q şi R aparţin cercului de diametru AM şi cum Q∈ [AC], rezultă că punctele Q şi R sunt în semiplane opuse determinate de dreapta AM rezultă că patrulaterul AMQR este inscriptibil. Avem 900900900 . Din  şi [QC şi [QA semidrepte opuse deci [QP şi [QR opuse vom avea că P, Q, R coliniare.

Reciproc**:** Fie P, Q, R proiecţiile unui punct M pe laturile unui ΔABC, astfel încât P, Q, R coliniare. Presupunem P[BC], Q[AC]. Rezultă, conform axiomei de separare că A[BR] sau B[AR]. Presupunem A[BR]. 900 deci PQMC inscriptibil avem că (♣)

. Din 900+900=1800 deci MQAR inscriptibil.

Rezultă (♥).

Din (♣) şi (♥) rezultă că , cum 1800, avem 1800 atunci BCMA este patrulater inscriptibil rezultă B, C, M, A sunt conciclice.

**C.4.** *Demonstrarea coliniarității folosind postulatul lui Euclid ( Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă și numai una la o dreaptă dată.)*

*Dacă dreptele AB și BC sunt paralele cu o dreaptă d, atunci în baza postulatului lui Euclid, punctele A, B, C sunt coliniare.*

**Exemple:**

1. Fie B' şi C' mijloacele laturilor [AC], respectiv [AB], ale unui triunghi ΔABC. Să se demonstreze că mijloacele înălţimii, bisectoarei şi medianei corespunzătoare vârfului A se află pe dreapta B'C'.

A

M N P

B` C`

C`

B D E F C

Demonstrație:

Fie M, N şi P mijloacele înălţimii, bisectoarei şi respectiv, medianei din vârful A. B’C’ fiind linie mijlocie în triunghiul ABC rezultă că B’C’|| BC.

Din ΔABD, avem B'M || CD şi cum D ∈ BC rezultă că M ∈ B'C'. În ΔACE, [B'N] este linie mijlocie şi folosind acelaşi raţionament rezultă N ∈ B'C'. La fel se arată că P∈B'C'. Prin urmare, punctele B', P, N, M, C' sunt coliniare.

1. Punctul de intersecţie al diagonalelor unui paralelogram se află pe dreapta ce uneşte mijloacele a două laturi ale paralelogramului.

B C

O

M N

A D

Demonstrație:

Fie paralelogramul ABCD, O punctul de intersecţie al diagonalelor [AC] şi [BD], iar M şi N mijloacele laturilor [AB] şi respectiv, [CD]. În triunghiul ΔABC, OM este linie mijlocie şi, deci OM || BC, iar ON este linie mijlocie în triunghiul ΔBCD şi avem ON || BC. Rezultă M, O şi N sunt puncte coliniare.

1. Fie ABCD un trapez oarecare. [AB] baza mare şi [CD] baza mică. Dacă M este simetricul punctului A faţă de mijlocul P al laturii [BC], iar N este simetricul punctului B faţă de mijlocul R al laturii [AD], să se arate că punctele N, D, C, M sunt coliniare.

B

M

C

D

N

A

R

P

Demonstrație:

Din construcţie, pentru că [AR]≡[RD] şi [NR]≡[RB] rezultă că ABDN este paralelogram rezultă DN || AB. Cum, prin ipoteză, DC || AB, rezultă că punctele N, D, C sunt coliniare. Analog, se demonstrează că şi punctele D, C, M sunt coliniare. Prin urmare, M, N ∈ DC şi deci punctele N, D, C şi M sunt coliniare.

1. Fie un ΔABC înscris într-un cerc de centru O. Perpendiculara BE pe diametrul AD taie, din nou cercul în F. Paralelele prin F la CD şi CA, taie CA şi CD în G, respectiv H. Să se arate că punctele E, G şi H sunt coliniare.

Demonstrație:

A

F

H

C

D

B

E

G

O

Patrulaterul AEGF este inscriptibil deoarece 900.

Atunci , de unde EG || BC. Patrulaterul CHFG este dreptunghi (fiind paralelogram cu un unghi drept) şi deci .

Cum  rezultă , adică GH || BC. Cum EG || BC şi GH || BC rezultă că E, G, H coliniare.

**C.5.** *Demonstrarea coliniarității pornind de la teorema lui Menelaus.*

**Teorema lui Menelaus**

Fie un ΔABC şi punctele A', B', C' situate pe dreptele BC, CA, AB (două pe segmentele laturilor triungiului iar celalalt în exterior sau toate 3 situate în afara laturilor triunghiului) distincte de vârfurile triunghiului. Punctele A', B', C' sunt coliniare dacă şi numai dacă are loc relaţia: 

Demonstraţie:

(d)

A'

C'

B'

D

C

B

A

*Implicaţia directă:* Presupunem B'∈[AC], C'∈ [AB], B∈ [A'C], A', B', C'∈d şi vrem să demonstrăm că are loc relaţia enunţată în teorema lui Menelaus. Construim CD || AB, D∈d. Conform teoremei fundamentale a asemănării avem ΔA'BC'~ΔA'CD şi ΔAC'B'~ΔCDB' rezultă că ; înmulţind membru cu membru aceste egalităţi, găsim:  vom avea că 

*Implicaţia reciprocă:*Presupunem că B'∈[AC], C∈[AB], B∈[A'C] şi (1)şi să demonstrăm că A', B', C'∈d (sunt coliniare). Vom demonstra că dreptele A'B' şi AB nu sunt paralele.

Presupunem prin reducere la absurd că A'B' || AB vom avea , înlocuind în relaţia (♥) rezultă ceea ce este fals.

Deci A'B'∩AB={C''}. Avem C''∈[AB] (conform axiomei de separare a planului), punctele A', B', C'' sunt coliniare şi aplicând (♥) găsim: , relaţia care împreună cu (♥) conduce la , deci A', B', C' coliniare.

**Observaţie:** Demonstraţia teoremei este asemănătoare şi în cazul când toate punctele se găsesc pe prelungirile laturilor.

**Exemple:**

1. **Teorema Newton-Gauss**

Într-un patrulater complet, mijloacele celor trei diagonale sunt coliniare.

Definiţie:Pentru un patrulater ABCD, se numeşte patrulater complet patrulaterul ABCDEF, unde {E}=AB∩CD şi {F}=BC∩AD. Segmentele [AC], [BD], [EF] se numesc diagonale ale patrulaterului complet.

D

A

B

C

F

E

Demonstrație:

A

D

F

N

E

G

B

L

M

K

H

C

Fie patrulaterul complet ABCDEF, unde AB∩CD={E}, AD∩BC={F} şi L, M, N mijloacele diagonalelor AC, BD, EF. În ΔBCE se notează cu G, H, K mijloacele laturilor [BE], [EC], [CB]. Avem următoarele: HK || AE deci HK trece prin mijlocul L al diagonalei AC; GK || ED, deci GK trece prin mijlocul M al diagonalei BD, GH || BF, deci GH trece prin mijlocul N al diagonalei EF.

Considerăm ΔGHK şi punctele M∈GK, N∈GH, L∈KH. Să demonstrăm că (♣) .

Punctele A, D, F fiind coliniare, putem scrie relaţia lui Menelaus în raport cu ΔBCE: (♠). Folosind proprietatea liniei mijlocii avem: , care înlocuite în (♠) conduc la relaţia(♣) . Dreapta celor trei puncte L, M, N se numeşte **dreapta lui** **Newton-Gauss.**

1. **Teorema lui Carnot**

Tangentele la cercul circumscris unui triunghi în vârfurile lui, intersectează toate laturile opuse în puncte coliniare.

Demonstrație:

C'

C

A

B

A'

B'

Fie A', B', C' punctele în care tangentele la cerc duse în vârfurile A, B, C întâlnesc laturile opuse [BC], [CA], [AB].

şi  vom avea

 rezultă

 şi analog pentru tangentele BB' şi CC' are loc 

Înmulţind relaţiile (1), (2), (3) membru cu membru, obţinem:  A', B', C' sunt coliniare. Dreapta celor trei puncte A', B', C' se numeşte **dreapta Lemoine** a triunghiului.

1. **Teorema lui Pascal**

Laturile opuse ale unui hexagon înscris într-un cerc se taie două câte două în trei puncte coliniare.

Demonstrație:

Laturile AB, CD, EF se taie formând ΔGHK. Pentru a demonstra că punctele L, M, N sunt coliniare, arătăm că punctele L, M, N de pe suporturile laturilor ΔGHK verifică relaţia lui Manelaus. În ΔGHK, folosind teorema lui Manelaus pentru transversala DE, avem:

 (♠); analog pentru transversala AF şi BC. Avem:

(♣) şi (♥). Scriind pe rând puterile punctelor G, H, K faţă de cerc, rezultă:  (♦)





Înmulţind între ele relaţiile (♠), (♣), (♥) şi folosind relaţiile (♦) rezultă că , ceea ce conform teoremei lui Menelaus implică coliniaritatea punctelor L, M, N

M

N

L

E

F

K

A

B

G

C

D

H

**Observaţii:**

1. Teorema lui Pascal rămâne valabilă şi pentru hexagonul concav înscris într-un cerc.

2. Teorema lui Pascal este valabilă şi pentru pentagonul inscriptibil (degenerat dintr-un hexagon cu două vârfuri confundate).

În acest caz o latură este înlocuită cu tangenta la cerc în punctele de contact confundate.

3. Teorema este adevărată şi pentru patrulaterul inscriptibil; punctele de intersecţie ale laturilor opuse şi ale tangentelor în vârfurile opuse la cerc, sunt patru puncte coliniare.

4. În cazul triunghiului înscris, obţinem **teorema lui Carnot.**

**C.6.** *Demonstrarea coliniarității prin identificarea unei drepte ce conține punctele respective.*

Altfel spus, „Punctele A, B, C au proprietatea „p” iar locul geometric al punctelor din plan cu propietatea „p” este situat pe o dreaptă”.

**Observație.** Aplicarea acestui procedeu presupune evident, cunoașterea de către rezolvator a unor propietăți „p” în condițiile specificate.

**Exemple:**

1. Fie trapezul ABCD (AD || BC) şi fie M, N mijloacele bazelor AD şi BC, iar P şi O punctele de intersecţie ale laturilor neparalele, respectiv diagonalelor. Să se demonstreze că punctele M, O, N şi P sunt coliniare.

P

D

A

F

C

N

B

E

O

M

Demonstrație:

Fie E şi F punctele de intersecţie cu laturile AB, respectiv CD ale paralelei la baze dusă prin O.

Din ΔAEO~ΔABC, avem şi din ΔDFO~ΔDCB, avem . Însă, şi atunci rezultă că  de unde  deci O mijlocul lui [EF]. Prin urmare, punctele M, N şi P sunt coliniare fiind situate pe mediana din P a ΔAPD.

1. Fie un triunghi ABC şi D, E, F, G proiecţiile lui A pe bisectoarele interioare şi exterioare ale unghiurilor şi . Să se arate că punctele D, E, F, G sunt coliniare.

Demonstrație:

A

G

C

B

D

F

C'

B'

E

Fie D, E proiecţiile lui A pe bisectoarele din B. Patrulaterul ADBE este dreptunghi şi atunci DE trece prin mijlocul C' al [AB].

Cumşi ΔEC'B isoscel) şi  (alt. int.) rezultă că C'E || BC.

Deoarece paralela prin C' la BC este linie mijlocie în ΔABC rezultă că C'E trece şi prin B', mijlocul [AC]. Prin urmare, punctele D şi E se află pe dreapta C'B'.

Analog, se arată că, punctele F şi G se află pe dreapta B'C'. Am identificat astfel, dreapta B'C' pe care sunt situate punctele D, E, F şi G.

**II. Criterii vectoriale de demonstrare a coliniarității**

**C.7.** *Fie A, B, C trei puncte distincte în plan. Punctele A, B, C sunt coliniare dacă și numai dacă există α****R*** *astfel încât .*

*( Relaţia exprimă condiţia necesară şi suficientă ca vectorii*  *şi*  *să fie coliniari).*

**Observație.** Propoziția rămâne adevărată dacă înlocuim condiția **cu  etc.

**Exemple:**

1. Într-un triunghi centrul cercului circumscris, centrul de greutate şi ortocentrul sunt puncte coliniare.

Demonstrație: Fie ΔABC şi O, G, H punctele specificate. Din relaţia lui Leibniz avem  ; pentru M = O se obţine că . Aşadar  şi  sunt vectori coliniari, deci punctele O, G, H sunt coliniare şi GH = 2OG. Dreapta pe care se află punctele O, G, H se numeşte **dreapta lui Euler.**

1. Se consideră paralelogramul ABCD şi punctele M ∈ [AB], N ∈ [DM] astfel încât AM = MB şi MD = 3MN. Să se demonstreze că punctele A, N, C sunt coliniare.

Demonstrație: Folosind operaţiile cu vectori se obţin relaţiile  = +  şi

 = + . Se înmulţeşte prima relaţie cu 2 şi prin adunare cu a doua egalitate se obţine: 2 +  = 2 + 2 + +  = 2 + 2− 2− 2= 0

Aşadar 2 +  = 0, deci vectorii  şi  sunt coliniari. Rezultă că punctele A, N, C sunt coliniare.

***C.8.*** *Punctele A, B, C sunt coliniare dacă și numai dacă există două numere x, y****R*** *cu propietatea x + y = 1, astfel încât, pentru orice punct O* **E** *să avem .*

A

C

O B

Demonstrație:

*Implicația directă:* Fie raportul în care punctul C împarte segmentul , deci avem , rezultă

 sau .

Notăm = x, = y, deci x + y = 1 și .

*Implicația reciprocă:* Fie x, y două numere reale nenule, cu x + y = 1, astfel încât .

Avem 

Cum x + y = 1 vom avea  rezultă că  vom avea că punctele C, A, B sunt coliniare.

**Observație:**

*Punctele A, B, C sunt coliniare dacă și numai dacă există un număr t****R****, t ≠ 0 astfel încât , * ***E*** *(consecință a propietății anterioare).*

**C.9.** *Fie A, B, C trei puncte în plan de afixe* ***C.*** *A, B, C sunt coliniare dacă și numai dacă* 

**Exemplu:**

1. Arătați că punctele A(1;2), B(-5;-1), C(7;5) sunt coliniare.

Demonstrație: Considerăm afixele celor trei puncte:

** * * avem de arătat că **

Într-adevăr: **

**III. Criterii de coliniaritate a trei puncte cu ajutorul coordonatelor**

**C.10*.*** *Trei puncte  sunt coliniare dacă și numai dacă*

* (adică cele două drepte au coeficenții unghiulari egali).*

**Exemplu:**

1. Arătați că punctele A(1;2), B(-5;-1), C(7;5) sunt coliniare.

Demonstrație: Determinăm coeficienții unghiulari (pantele) ai dreptelor AB și AC iar dacă sunt egali rezultă coliniaritatea celor 3 puncte.





Adică  deci punctele A, B, C sunt coliniare.

**C.11.** *Trei puncte  sunt coliniare dacă și numai dacă*

.

**Exemple:**

1. În planul euclidian raportat la un  se consideră  şi . Arătaţi că punctele sunt coliniare.

Demonstrație:

*A*, *B*, *C* coliniare dacă şi numai dacă: 

  , deci *A*, *B*, *C* coliniare.

1. În planul euclidian raportat la un  fie punctele . Dreapta *BC* intersectează axa *OX* în *D*, iar dreapta *AB* intersectează axa *OY* în *E*. Arătaţi că mijloacele segmentelor  sunt coliniare.

Demonstrație.

Fie 

Se determină ecuaţia dreptelor *AB* şi *BC* calculând coordonatele punctelor *D* şi *E*.

*BC*: 

*BC*: 

*BC*: 

*BC*: 

*BC*: 

*BC*: 



y = 0 deci 5x + 12 = 0 rezultă că 

*AB*: 

*AB*: 

*AB*: 

*AB*: 

*AB*: 



Rezultă E(0,16)

Dacă *M* – mijlocul  atunci 

Dacă *N* – mijlocul  atunci 

Dacă *P* – mijlocul  atunci 

*M*, *N*, *P* coliniare dacă şi numai dacă: 



 *M*, *N*, *P* coliniare.

**§2. Teoreme şi probleme de coliniaritate (aplicaţii)**

1. ***Teorema lui Menelaus***

Fie ABC un triunghi și D, E și F trei puncte coliniare distincte astfel încât DBC, EAC și FAB (două din puncte situate pe laturile triunghiului iar celalalt pe prelungirea celei de-a treia laturi sau toate trei situate pe prelungirile laturilor triunghiului) . Atunci are loc relația: .

*Demonstrația teoremei lui Menelaus folosind triunghiuri asemenea:*

Demonstrație: A

B`

F

A`

E

C`

B C D

Proiectăm vârfurile A, B și C ale triunghiului pe dreapta D – E – F, în punctele A`, B` și C`.

Aplicăm teorema fundamentală a asemănării în urmatoarele perechi de triunghiuri:

∆DB`B∆DC`C rezultă 

∆AA`F∆BB`F rezultă 

∆CC`E∆AA`E rezultă .

Înmulțind cele trei relații obținem: .

*Demonstrația teoremei lui Menelaus folosind omotetia*

Demonstrație:

A

M E

F

B C D

Vom folosi transformări geometrice, adică omotetia. Fie BM ll AC, unde MDE. Vom considera omotetia de centru D și de raport .

Avem M=T(E) și B=T(C) rezultă că  (♠).

Vom considera acum omotetia T` de centru F și raport .

Avem A=T`(B) și B=T`(M) avem  (♣).

Înmulțind cele două relații de mai sus (♠) și (♣) obținem .

*Demonstrarea teoremei lui Menelaus utilizând metoda analitică*

Demonstraţie:

Fie planul raportat la un sistem de coordonate carteziene ortogonale OXY. Fie A(), B(), C(x3,y3) . Dacă  sunt rapoartele în care punctele  divid bipunctele *(B,C), (C,A), (A,B)* atunci: A'

** **

 coliniare rezultă dacă şi numai dacă 

*Demonstrarea teoremei lui Menelaus folosind metoda vectorială*

Demonstraţie:

Fie  rapoartele în care punctele  divid bipunctele *(B,C), (C,A), (A,B)*

Deoarece   

  

Dar, 



Din  coliniare rezultă  şi  sunt vectori coliniari

 deci  obținem  rezultă că 

**Reciproca teoremei lui Menelaus**

Fie , dacă  aparţine lui *BC*,  aparţine lui *CA*,  aparţine lui *AB* şi dacă  sunt situate două pe laturi şi unul pe prelungirea laturii sau toate trei pe prelungirile laturilor şi dacă **(♠) atunci punctele  sunt coliniare.

Demonstraţie:

C'

C''

A

B'

A'

B

C

Presupunem că două dintre puncte sunt situate pe două laturi ale triunghiului, iar unul este situat pe prelungirea celei de-a treia laturi.

Presupunem că punctele  nu sunt coliniare.

Atunci dreapta  ar intersecta latura *AB* într-un punct *C"* diferit de .

Aplicând teorema lui Menelaus pentru punctele coliniare ,*C"* obţinem: ** (♣)

Din relaţiile (♠) şi (♣) rezultă că .

Ar însemna că segmentul  este împărţit de punctele interioare *C'* şi *C"* în acelaşi raport – contradicţie (există un singur punct interior unui segment care împarte segmentul într-un raport dat). Rezultă *C"= C'* şi deci punctele  sunt coliniare

1. **Aplicație directă la teorema lui Menelaus**

În figura de mai jos avem: AP = 6, PB = 16, BC = 30, CQ = 18 și CA = 24. Punctele P, Q și R sunt coliniare. Să se arate că R este mijlocul lui AC.

A

P

R

B C Q

Rezolvare:

În ∆ABC aplicăm teorema lui Menelaus pentru punctele coliniare P, Q și R, avem:

 avem , deci AR = RC, ceea ce înseamnă că R este mijlocul lui AC.

1. **Teorema lui Euler**

În orice triunghi ABC, ortocentrul, centrul de greutate și central cercului circumscris triunghiului sunt coliniare (sunt situate pe aceiași dreaptă, numită dreapta lui Euler).

Demonstrație:

Fie A` mijlocul segmentului BC, A`` punctul diametral opus lui A, H intersecția înălțimilor, G centrul de greutate și O centrul cercului circumscris. Deoarece BH || CA`` și CH || BA``

A

B C

A``

rezultă că BHCA`` este paralelogram ; A` este mijlocul segmentului HA`, deci OA ll AH și OA`= AH.

Fie {G} = HOAA`. Avem ∆AHG∆A`OG, raportul de asemănare fiind 

rezultă AG = 2GA`, ceea ce arată că G este tocmai centrul de greutate al ∆ABC.

Deci punctele H, G și O sunt coloiniare și HG = 2GO.

Demonstrația 2:

Fie A` mijlocul laturii BC și proiecția lui A pe BC, analog considerăm punctele B` și .

∆AHB∆A`OB` (au laturile paralele), .

Vom uni pe G cu H și G cu O. Pentru a arăta că  se observă că = 2,

G fiind centru de greutate, iar  deci ∆AHG~∆GA`O, adică semidreptele [GH și [GO sunt în prelungire ; în plus HG = 2GO.

1. **Dreapta ortică**

Fie ABC un triunghi neisoscel și nedreptunghic și fie A` proiecția lui A pe BC, B` proiecția lui B pe AC și C` proiecția lui C pe AB (A`, B`, C` sunt vârfurile triunghiului ortic). Fie {M} = BCB`C`, {P} = ACA`C`, {N} = ABA`B`. Atunci M, N și P se găsesc pe o aceiași dreaptă (numită dreapta ortică a triunghiului).

Demonstrație:

N

P A

C` B`

M B A` C

Se aplică teorema lui Menelaus în cazurile: ∆ABC unde A`, C`, P – coliniare; ∆ABC unde B`, C`, M – coliniare ; ∆ABC unde A`, B`, N – coliniare; se obțin relațiile:

 (♥)

 (♣)

 (♠).

Se aplică în ∆ABC, teorema lui Ceva, unde {H} = AA`BB`CC` și avem relația:

 (♦).

Prin înmulțirea relațiilor (♥), (♣), (♠), (♦)se va obține . Deci punctele M, N și P sunt coliniare.

1. **Dreapta antiortică**

Se consideră un triunghi neisoscel ABC. Bisectoarea exterioară corespunzătoare vârfului A intersectează latura BC in A`, analog se obțin și punctele B` și C`. Atunci punctele A`, B` și C` se găsesc pe o aceiași dreaptă (numită dreapta antiortică a triunghiului ABC).

Demonstrație:

Vom nota a, b și c lungimile laturilor triunghiului. Conform teoremei bisectoarei unghiului exterior, rezultă . Dacă înmulțim aceste trei relații obținem

 și din reciproca teoremei lui Menelaus pentru ∆ABC și punctele A`, B` și C` situate pe prelungirile laturilor triunghiului se obține că punctele A`, B` și C` sunt coliniare.

1. **Dreapta lui Newton-Gauss**

Mijloacele diagonalelor unui patrulater circumscriptibil și centrul cercului înscris sunt situate pe aceeași dreaptă numită dreapta lui Newton-Gauss.

Demonstrație (folosind metoda numerelor complexe):

D

Q

A P

C

M N

B

Considerăm că originea sistemului de axe de coordonate ortogonale coincide cu centrul cercului înscris în patrulaterul ABCD, notat I, iar raza acestui cerc se consideră egală cu unitatea. Fie MAB, NBC, PCD, QAD, punctele de tangență ale patrulaterului ABCD cu cercul înscris. Notăm a, b, c și d afixele vârfurilor patrulaterului ABCD și cu m, n, p și q afixele punctelor de tangență.

Așadar |m| = |n| = |p| = |q| = 1.

Deoarece IPDP rezultă că (p – 0)(p – d) = 0 și având în vedere definiția produsului real al numerelor comlexe, rezultă că:

 sau 

În mod similar, din IQAD se ajunge la .

Ultimile două relații permit exprimarea lui d astfel: .

În mod analog se obțin egalitățiile: .

Afixile punctelor E și F se exprimă astfel:

.

Dar punctele E(e) și F(f), distincte și diferite de I(i) sunt coliniare dacă și numai dacă ef = 0

(produsul complex al numerelor e și f). Utilizând definiția produsului complex avem:

ef ==0

Deci punctele E, I și F sunt coliniare.

7.Fie ∆ABC și M(BC). Prin M se duc paralelele la AB și AC care intersectează pe (AC) și (AB) în B`, respectiv C`. Paralela dusă din C la AB, taie dreapta BB` inB``, iar paralela din B la AC, taie dreapta CC` în C``. Să se arate că A, B, C sunt coliniare.

Demonstrație:

Unim A cu B`` și A cu C``.

Cum MB` || B``C și MB` || AB rezultă ∆BB``C∆BB`M și ∆ABC∆B`MC, de unde:

B``

A

C``

B`

B M C

 (♥)

Analog din MC` || AC și MC` || BC`` obținem (♣)

Relațiile (♥) și (♣) conduc la  și cum 

 ∆C``AB∆AB``C.

Prin urmare: 

180⁰.

Deci punctele A, B`` și C`` sunt coliniare.

8.Fie ∆ABC cu D(AB), E(AC) astfel încât . Să se arate că mijloacele segmenelor [AB], [AC], [DE] sunt coliniare

A

M

F E

C` B`

D

B C

Demonstrație:

Fie C`, B`, M mijloacele lui [AB], [AC], [DE] și F(AB) astfel încât EF ll BC.

Avem 

adică (DB) = (FA) și deci C` este mijlocul lui [DF].

Cum M este mijlocul lui [DE] avem: C`M || FE || BC.

Avem de asemenea C`B` || BC și deci C` - B` - M sunt coliniare.

1. Fie un ΔABC înscris într-un cerc de centru O. Perpendiculara BE pe diametrul AD taie, din nou cercul în F. Paralelele prin F la CD şi CA, taie CA şi CD în G, respectiv H. Să se arate că punctele E, G şi H sunt coliniare.

Demonstrație: Patrulaterul AEGF este inscriptibil deoarece 900.

Atunci , de unde EG || BC. Patrulaterul CHFG este dreptunghi (fiind paralelogram cu un unghi drept) şi deci .

Cum , adică GH || BC. Cum EG || BC şi GH || BC  E, G, H coliniare.

A

F

H

C

D

B

E

G

O

1. În trapezul isoscel ABCD (BC || AD), circumscris unui cerc, fie E, F, G, H punctele de tangenţă ale cercului cu laturile AB, BC, CD şi DA, iar O punctul de intersecţie al diagonalelor. Să se arate că punctele E, O şi G sunt coliniare.

F

C

B

E

A

H

D

G

O

Fig.2.4

Demonstrație: [EB] ≡ [BF], [EA] ≡ [AH] ca tangente duse dintr-un punct exterior la un cerc.

Atunci avem:; .

Din  şi conform R.T. Thales rezltă că EO || AD. Analog se arată că OG || AD şi atunci rezultă că punctele E, O şi G sunt coliniare.

1. Un patrulater inscriptibil are diagonalele perpendiculare. Să se arate că perpendiculara dusă din punctul de intersecţie al diagonalelor pe una din laturi trece prin mijlocul laturei opuse.

Demonstrație:

A

E

D

E'

P

O

F

C

B

Fie patrulaterul inscriptibil ABCD cu ACBD şi fie P punctul de intersecţie al diagonalelor. Fie apoi PF BC şi E mijlocul [AD]. Prelungim FP şi fie E' punctul de intersecţie al dreptelor FP şi AD. Avem . Însă  (opuse la vârf) şi deci  rezultă ΔE'AP isoscel rezultă că E'P = E'A.

Analog se arată că ΔE'PD este isoscel rezultă E'P = E'D. Din E'P = E'A şi E'P = E'D vom avea E'A = E'D rezultă că E' mijlocul [AD], de unde E=E'. Aşadar dreapta FP trece prin mijlocul [AD], adică punctele F, P şi E sunt coliniare.

1. În ΔABC se consideră punctele M, N, P pe laturile [BC], [CA] şi respectiv [AB], astfel încât . Se notează cu D mijlocul [BC], iar prin Q simetricul lui A faţă de mijlocul [MN]. Să se demonstreze că punctele P, D şi Q sunt coliniare.

Demonstrație:

A

P

S

B

M

D

C

N

Q

Paralela dusă prin N la BC taie latura [AB] în S, atunci: şi, deci, SM || AC.

Din , urmează că SB = PA şi SA = BP.

Patrulaterul MSNC este paralelogram şi, deci, SC trece prin mijlocul segmentului [AQ]; urmează că patrulaterul ASQC este paralelogram. Am redefinit astfel punctul D ca fiind mijlocul diagonalei [PQ] a paralelogramului BQCP, de unde urmează că P, D şi Q sunt coliniare.

1. Fie ΔABC înscris în cercul de centru O, cu . Să se demonstreze că mijlocul M al laturii [AC], centrul O al cercului şi proiecţia D a lui A pe latura [BC] sunt coliniare.

Demonstrație:

Deoarece AM=MCOMAC. Notăm D' intersecţia dreptelor OM şi BC; atunci ΔD'MC este dreptunghic isoscel pentru că . Rezultă că D'M=MC=MA vom avea că ΔAD'C este dreptunghic şi deci AD'BC. Cum din ipoteză ADBC rezultă că D' = D. Prin urmare, M, O, D sunt puncte coliniare.

A

B

C

D

M

O

**600**

**450**

1. Fie paralelogramul  şi punctele *E*, *F* astfel încât  şi . Demonstraţi că punctele *C*, *F*, *E* sunt coliniare.

Demonstrație:

B

C

A

F

D

E

Unim *F* cu *C* şi *F* cu *E*. Deoarece  rezultă  isoscel,

deci  (♥)

Din  rezultă  alterne-interne (♣)

 rezultă  corespondente (♦)

Deoarece  rezultă  isoscel, deci  (♠)

Din relaţiile (♥), (♣), (♦), (♠) rezultă .

Deoarece  şi  formează cu dreapta  unghiurile congruente , rezultă că  şi  sunt în prelungire, deci punctele *C*, *F*, *E* sunt coliniare.

Metodica rezolvării problemelor de coliniaritate și concurență

**CAPITOLUL III**

**CONCURENŢĂ**

([2], [5], [7], [8], [9], [11], [13])

**§1. Criterii de concurenţă**

O problemă de concurență înseamnă ”a stabili proprietatea că două sau mai multe figuri geometrice (drepte, cercuri, plane, curbe, suprafețe) au un punct comun”.

În cele ce urmează ne vom referi la criterii geometrice, dar și la criterii algebrice de concurență.

1. **Criterii geometrice de demonstrare a concurenței**

**C.1.** *Fie  şi . Dreptele  şi  sunt concurente dacă și numai dacă punctele M şi N coincid.*

**Exemple:**

1. Fie ABCD un patrulater oarecare. O paralelă la diagonala BD intersectează latura [AB] în E și latura [AD] în F, iar a doua paralelă la BD intersectează latura [BC] în G și latura [CD] în H. Dreptele EG, FG și AC sunt concurente.

Demonstrație: H M=N

D CG

F

A  **E** B

Fie EGAC = {M}, FHAC = {N}.

Se aplică teorema lui Menelaus pentru triunghiul ABC și punctele coliniare E, G, N:

.

Se aplică teorema lui Menelaus pentru triunghiul DAC și punctele coliniare F, M, H:

.

Cum  și  (conform teoremei lui Thales), rezultă , din care se deduce M=N și EGFHAC = {M}.

1. Fie un patrulater circumscriptibil *ABCD* şi , ,  punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile sale. Să se arate că dreptele *AC*, *BD*, *MP*, *NQ* sunt concurente.

Demonstrație:

D

A

B

C

N

O

T

Q

M

P

Fie 

Avem:  şi deci



Aplicând teorema sinusului în triunghiurile Δ*AQS* şi Δ*CSN* obţinem relaţia:  (1)

Fie . Analog se arată că  şi aplicând teorema sinusului în triunghiurile Δ*ATM* şi Δ*CTP* obţinem relaţia:  (2)

Deoarece , , din relaţiile (1) şi (2) rezultă , adică punctele *S* şi *T* coincid. Deci dreptele *MP*, *NQ*, *AC* sunt concurente în *T*.

**C.2.** *Dreptele**,, sunt concurente dacă şi numai dacă  şi .*

**Exemple:**

1. Fie un trapez ABCD (). Se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABM şi CDN. Să se arate că dreptele AC, BD şi MN sunt concurente.

*M*

A B

O

D C

N

Demonstrație:

Fie 

Deoarece ΔOAB~ΔOCB rezultă  şi cum  obţinem :  (♣)

Dar 

şi deci ΔMAO ~ ΔNCO (conform relaţiei (♣)). Obţinem astfel că ,

adică  şi dreptele *AC, BD, MN* sunt concurente.

1. Fie *ABCD* un patrulater convex şi ,, şi . Dacă dreptele *MN, PQ* şi *AC* sunt concurente să se arate că dreptele *NP, MQ* şi *BD* sunt concurente sau paralele.

*O*

C

P

N

B

SOD

MQ

A

Demonstrație:

Fie 

Aplicăm teorema lui Menelaus şi obţinem:





Împărţind relaţiile de mai sus rezultă:

 (♣)

Presupunem că  şi arătăm că .

Din rezultă că  (♥)

Înlocuind (♥) în (♣) obţinem: , adică  (situaţie când cele trei drepte sunt paralele).

Presupunem că , conform teoremei lui Menelaus avem:

 (♠)

Folosind relaţiile (♣) şi (♠) obţinem:

, adică conform reciprocei teoremei lui Menelaus punctele *M, Q* şi *S* sunt coliniare. Punctul , adică dreptele *NP,MQ, BD* sunt concurente în *S*.

**C.3.** *Dreptele**,, sunt concurente, deoarece conţin un punct remarcabil sau sunt linii importante într-un triunghi.*

Observații:

În unele probleme de geometrie, demonstrarea concurenţei unor drepte se reduce la a găsi un triunghi în care acele drepte sunt înălţimi, sau mediane, sau bisectoare, sau mediatoare.

În actualele manuale de geometrie, concurenţa liniilor importante din triunghi se demonstrează folosind proprietăţile acestora ca locuri geometrice (cazul bisectoarelor şi al mediatoarelor), sau proprietăţile liniei mijlocii (cazul medianelor); pentru a demonstra concurenţa înălţimilor se construieşte un alt triunghi în care acestea devin mediatoare.

Se poate însă demonstra concurenţa liniilor importante folosind o metodă unitară şi anume, construind paralela la una din laturile triunghiului prin vârful opus.

**Exemple:**

1. Bisectoarele interioare ale unui triunghi sunt concurente.

Demonstrație:

Fie ABC în care AA’, BB’ şi CC’ sunt bisectoare interioare. Notăm

{I} = AA’  BB’. Conform teoremei bisectoarei avem : (1)

A

C'’

C’

B

A''

B''

C

I

Ducem paralela prin C la AB şi notăm

cu A” şi B” punctele de intersecţie ale

dreptelor AA’, respectiv BB’ cu această paralelă. B’

Fie {C”}= CI  AB. A`

Din IAC”~IA”C, avem:  (2)

Analog, din IBC”~ (3)

Din relaţiile (2) şi (3) rezultă  sau  (4)

Dar din m(A”) =  isoscel rezultă CA” = CA (5)

Şi din m(B”) =  (6)

Ţinând seama de relaţiile (5) şi (6), egalitatea (4) devine :  (7)

Comparând relaţiile (1) şi (7) obţinem C’= C”, deci cele trei bisectoare interioare ale triunghiului ABC sunt concurente.

Punctul I se numeşte centrul cercului înscris în triunghi deoarece se găseşte la aceeaşi distanţă faţă de cele trei laturi ale triunghiului.

1. Înălţimile unui triunghi sunt concurente.

B''

C

A''

A'

B

C''

C'

H

B'

A

Demonstraţie:

Fie {H}=AA’BB’ şi {C} = CHAB

Ducem paralela prin C la AB şi notăm cu A” şi B” punctele de intersecţie ale acestei paralele cu dreptele AA’, respectiv BB’.

Din  (1).

Analog, din (2)

Din relaţiile (1) şi (2) obţinem:  (3)

Dar din  de unde  (4)

Analog, din  (5)

Cu relaţiile (4) şi (5), egalitatea (3) devine :

 şi din **lema 2**, avem

Aplicând **lema 1** obţinem :



 deci , adică  şi deci trei înălţimi sunt concurente.

Punctul H se numeşte ortocentrul triunghiului.

**Observaţie:** Faptul că în demonstraţia de mai sus s-a folosit un triunghi ascuţitunghic nu este esenţial, demonstraţia se face la fel şi în cazul unui triunghi obtuzunghic.

Cazul triunghiului dreptunghic este banal.

1. Medianele unui triunghi sunt concurente.

**Demonstraţie:**Fie  în care [AA’], [BB’], [CC’] sunt mediane.

A B``

C`` B`

C`

B A` C

A’’

Fie {G} =AA’BB’

Deoarece [CC’] este mediană, avem C’A = C’B (1)

Ducem paralela prin C la AB şi notăm cu A” şi B” punctele de intersecţie a dreptelor AA’, respectiv BB’ cu această paralelă. Fie {C”}=CGAB.

Din .

Analog, din 

Din relaţiile (2) şi (3) obţinem : 

Dar, din .

Analog, din .

Cu relaţiile (5) şi (6), realţia (4) ne conduce la .

Comparând relaţiile (1) şi (7), obţinem că deci cele trei mediane ale  sunt concurente. În plus, din relaţia (2) :  deducem că  ceea ce exprimă faptul că G se află pe mediana GC” la 2/3 de vârful C şi la 1/3 de punctul C” de pe AB.

Punctul G se numeşte centrul de greutate al triunghiului.

1. Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente*.*

Demonstraţie:

Mediatoarele sunt concurente căci sunt înălţimi în triunghiul median A’B’C’ al triunghiului dat ABC. Punctul O de intersecţie al mediatoarelor triunghiului se numeşte centrul cercului circumscris triunghiului.

1. Fie I, punctul de intersecţie al diagonalelor trapezului ABCD, E şi F mijloacele bazelor [AB’] şi [CD] ale trapezului, iar G şi H mijloacele diagonalelor [AC] şi [BD]. Se iau punctele I’ şi I”, simetrice punctului I în raport cu G, respectiv H. Să se arate că dreptele EF, HI’ şi GI” sunt concurente şi 2GK =KI”, unde K este punctul de intersecţie al dreptelor GI” şi HI’.

Demonstrație:

Cum I’ este simetricul lui I faţă de G, iar I” este

B

C

D

A

I'

G

H

I’’

I

F

E

K

simetricul lui I faţă de H rezultă  şi

 .

Prin urmare, GI” şi HI’ sunt mediane în  şi

Deci EF, HI’ şi GI” sunt concurente, iar 2·GK = KI”.

**C.4.** *Demonstrarea concurenței folosind teorema lui Ceva*

**Teorema lui Ceva** :

Fie ΔABC şi punctele M ∈ AB, N ∈ BC şi P ∈ AC astfel încât , ,  și dreptele AN, BP, CM să nu fie paralele două câte două. Atunci dreptele AN, BP, CM sunt concurente dacă şi numai dacă.

Observații:

Formularea clasică a teoremei lui Ceva este următoarea: În ∆ABC punctele A`(BC), B`(AC), C`(AB) sau doar unul din punctele A`, B`, C` aparțin triunghiului și AA`, BB`, CC` nu sunt paralele două câte două, în aceste condiții:

AA`, BB`, CC` sunt concurente .

Cu precauțiile necesare, ambele formulări sunt utilizate.

Folosind reciproca teoremei lui Ceva se pot regăsi uşor concurenţa medianelor şi bisectoarelor.

De obicei implicația directă se numește ”teorema lui Ceva” sau teorema cevienelor” iar implicația indirectă se numește ”reciproca teoremei lui Ceva”.

A

M P

B N C

O

B N C

Demonstraţie:Notăm{O} = BP ∩ AN, {S} = MC ∩ AN. Aplicăm teorema lui Menelaus pentru triunghiul ΔABN şi transversala CM. Se obţine relaţia  sau , (1). Din teorema lui Menelaus în triunghiul ΔACN şi transversala BP obţinem : , de unde rezultă că , (2). Dreptele AN, BP, CM sunt concurente dacă şi numai dacă O = S. Din relaţiile (1) şi (2) se obţine că = sau )=0.

Dacă ≠1 atunci  şi teorema este demonstrată.

Dacă  atunci  sau 

**Exemple:**

1. În triunghiul ΔABC cu m() =900, construim AD  BC, D[BC] şi bisectoarea [AE, E[BC]. Notăm cu L şi F proiecţiile punctului E pe catetele [AB] şi

[ AC]. Să se arate că dreptele AD, BF şi CL sunt concurente.

Demonstrație:

Fie a, b, c lungimile laturilor [BC], [AC], [AB].

Aplicând teorema bisectoarei, avem:

(1)EF ||AC rezultă  (2)

A

B

C

D

E

L

F

Din (1) şi (2) rezultă  (3)

EF||AB rezultă că  (4)

C

Din (1) şi (4) vom avea  (5)

Conform teoremei catetei, obţinem c2=BD⋅ a şi b2 = CD ⋅ a, deci, (6)

Din (3), (5)şi (6) :  şi conform teoremei lui Ceva, dreptele AD, BF şi CL sunt concurente.

1. **(Teorema lui Gergonne).** Fie triunghiul ΔABC şi D, E, F punctele de contact ale cercului înscris cu dreptele BC, CA, AB. Să de demonstreze că AD, BE şi CF sunt concurente.

**Demonstraţie:**

Avem AE = AF, BF=BD şi CD =CE ca tangente

A

F

B

D

CD

ED

GD

duse dintr-un punct exterior la cerc. Ţinând

seama de aceste egalităţi, avem:

deci, conform reciprocei teoremei lui Ceva, dreptele AD, BE şi CF sunt concurente sau paralele.

Mai mult, D [BC] şi [BC] Int () rezultă că

DInt (). Aplicând teorema transversalei, rezultă că [AD [BE]∅; de aici rezultă că [AD] nu poate fi paralelă cu BE.

Deci dreptele AD, BE şi CF sunt concurente.

Punctul de concurenţă se notează cu G şi se numeşte **punctul lui Gergonne**.

**Observaţie:** Dreptele care unesc punctele de contact ale fiecărui cerc exînscris unui triunghi cu vârfurile opuse sunt concurente (**teoremele adjuncte ale lui Gergonne**). Demonstraţia este asemănătoare. Punctele Ra, Rb şi Rc se numesc **puncte adjuncte ale lui** **Gergonne**.

**C.5.** *Izogonalele a trei ceviene concurente sunt drepte concurente.*

În particular, simedianele unui triunghi sunt concurente (punctul lui Lemoine al triunghiului).

Dreptele CM şi CM’ sunt izogonale în raport cu unghiul C dacă ele fac acelaşi unghi cu laturile acestuia, sau, altfel spus, două drepte izogonale sunt egal înclinate pe bisectoarea unghiului.

Cevienele izogonale cu medianele unui triunghi se numesc simedianele triunghiului.

**Exemple:**

1. **(Teorema lui Steiner).**

Dacă două ceviene izogonale din vârful A al unui triunghi taie latura opusă [BC] în punctele D şi E, atunci are loc relaţia : .

Demonstație:

Ducem prin punctele B şi C dreptele d şi d’, paralele la AC, respectiv AB şi considerăm punctele d ∩ AD = {M}, d’  AE = {N}.

Fie AD şi AE ceviene izogonale din vârful A al triunghiului ABC rezultă m(1) = m().

Din d||AC rezultă 

A

C

N

M

B

D

E

(d')

(d)

Din d'||AB rezultă 

Din m()= m() (prin ipoteză )şi m()

=m()

(unghiuri cu laturile respectiv paralele)

rezultă că 

Înmulţind membru cu membru cele trei egalităţi, obţinem .

1. Înălţimea AA’ şi dreapta AO care uneşte vârful A al triunghiului ΔABC cu centrul cercului circumscris sunt ceviene izogonale.

Demonstrație:

În  vom avea

A

C

A'

B

D

O

 În  



Deci 

1. **Criterii vectoriale de demonstrare a concurenței**

**C.6.**  *Dreptele , ,  sunt concurente dacă şi numai dacă există , ,  cu proprietatea , unde O este un punct oarecare, fixat.*

O demonstrație imediată a acestui criteriu este următoarea:

, ,  sunt concurente exită un unic P astfel încât P, P, P

 astfel încât  =

 oricare ar fi punctual O.

Poziția lui P pe fiecare din dreptele , ,  se poate preciza considerând

O = P. Astfel  = ,

deci , , , adică

, , .

**Exemple:**

1. Fie triunghiul *ABC* şi  cele trei înălţimi. Dacă  atunci .

Demonstrație:

A

B

C

A'

B'

H

Fie înălţimile *AA'* şi *CC'* şi *H* punctul lor de intersecţie. Se uneşte B cu H şi se prelungeşte segmentul  până în  Atunci  

Relaţiile ,  sunt echivalente cu:  

Aceste două egalităţi implică  adică  sau 

1. Medianele unui triunghi sunt concurente.

Demonstraţie:

Fie A, B, C puncte necoliniare. Notăm cu M mijlocul segmentului [BC] şi fie G centrul de greutate al triunghiului ΔABC.

Avem relaţia +  = 2. Din condiţia  + + = 0 se obţine că  + 2= 0 sau  = 2. Rezultă că vectorii  şi  sunt coliniari, deci punctele A, G, M sunt coliniare şi AG = 2GM. Analog se arată că G aparţine fiecărei mediane a triunghiului ΔABC pe care o va împărţi în acelaşi raport.

1. Fie ΔABC un triunghi şi M un punct în planul său. Notăm cu A, B, C simetricele lui M faţă de mijloacele A, B, C ale laturilor [BC], [CA], [AB]. Să se arate că dreptele AA, BB, CC sunt concurente.

Demonstrație:

Avem şi analoagele.

Un punct de pe dreapta AA are vector de poziţie de forma:

AA: , t∈R.

Analog:BB: = , s∈R. CC:  u∈R. Pentru t = s = u = se obţine acelaşi punct:



 Punctul de intersecţie N se află pe dreapta GM

1. **Criterii de concurență a trei puncte cu ajutorul coordonatelor**

**C.7.** *Dacă planul euclidian este raportat la un sistem de coordonate carteziene ortogonal şi:*

* *

* *

* *

*Dreptele , ,  sunt concurente dacă şi numai dacă: *

Observație: Criteriul reflectă propietatea că dreptele *,,*

sunt concurente dacă și numai dacă sistemul de ecuații liniare:



este compatibil nedeterminat adică determinantul caracteristic (eliminantul) al sistemului este nul.

**Exemple:**







Stabiliţi dacă dreptele , şi  sunt concurente.

Demonstrație:

Calculând 

Deci dreptele , şi  sunt concurente.

1. Se consideră într-un s.c.c.o următoarele drepte:







Stabiliţi dacă dreptele , şi  sunt concurente.

Demonstrație:

Calculând 

Deci dreptele , şi  nu sunt concurente.

**§2. Teoreme şi probleme de concurenţă (aplicaţii)**

1. Demonstrarea teoremei lui Ceva folosind metoda analitică

În ∆ABC punctele A`(BC), B`(AC), C`(AB) sau doar unul din punctele A`, B`, C` aparțin triunghiului și AA`, BB`, CC` nu sunt paralele două câte două, în aceste condiții:

AA`, BB`, CC` sunt concurente, echivalent cu .

Demonstraţie:

Considerăm  rapoartele în care punctele *A'*, *B'*, *C'* divid bipunctele (*B,C*); (*C,A*) respectiv (*A,B*).

Fie sistemul de coordonate carteziene cu originea C şi axele *CA*, *CB* deci *C*(0,0); *A*(1,0); *B*(0,1)

Se deduce   

Ecuaţiile dreptelor *AA'*, *BB'*, *CC'* sunt:

*AA'*: 

*BB'*: 

*CC'*: 

Dreptele *AA'*, *BB'*, *CC'* sunt concurente, rezultă:  dacă şi numai dacă .

1. Reciproca teoremei lui Ceva sub formă trigonometrică

Fie un triunghi ABC şi punctele , ,  astfel încât să aibă loc relaţia (♣)  unde , ,  atunci dreptele *AA'*, *BB'*, *CC'* sunt concurente.

Demonstraţie:

A

B

C

A'

B'

M

Se presupune că  este ascuţit.

Considerăm *M* punctul de intersecţie a cevienelor (dreapta care uneşte un vârf al unui triunghi cu un punct al laturii opuse) *AA'*, *BB'* şi fie  =.

Se va demonstra că 

Deoarece cevienele *AM*, *BM*, *CM* sunt concurente rezultă relaţia

(♠) 

Se notează valoarea acestui raport cu *t*. Deoarece  este ascuţit este suficient să se demonstreze că ecuaţia  are soluţie unică 

Cum această ecuaţie are obligatoriu soluţia , rezultă . Deci problema s-a redus la a arăta că ecuaţia are soluţie în intervalul .

Pentru aceasta se efectuează calculele necesare şi se obţine:

. Rezultă: 

Dar  deci ecuaţia considerată are soluţie unică ce aparţine intervalului  şi cum  era de asemenea soluţie cu această proprietate, rezultă , deci dreptele *AA'*, *BB'*, *CC'* sunt concurente.

1. Teorema lui Gergonne. Într-un triunghi *ABC* dreptele care unesc vârfurile triunghiului cu punctele de contact ale cercului înscris cu laturile opuse sunt concurente (Punctul de concurenţă a celor trei drepte se numeşte punctul lui Gergonne).

Demonstraţie:

A

B

C

G

F

E

Fie *E*, *F*, *G* punctele de contact ale cercului înscris în triunghiul *ABC* cu laturile triunghiului.

Se foloseşte reciproca teoremei lui Ceva, deci se demonstrează că produsul

 . Dar *BE* = *BG*, *CE* = *CF*, *AF*= *AG* (tangente dintr-un punct exterior). Deci dreptele sunt concurente.

1. Teorema lui Newton.Fie *ABCD* un patrulater circumscriptibil şi fie *A'*, *B'*, *C'*, *D'*, punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile patrulaterului. Atunci dreptele *AC*, *BD*, *A'C'* şi *B'D'* trec printr-un acelaşi punct *N* (punctul *N* se numeşte punctul lui Newton).

Demonstraţie:

Notăm: , , .

Observăm că: 

Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiurile Δ*NAD'* şi Δ*NB'C*.

A

D

B

C

A'

C'

D'

N

B'

Rezultă: ; 

Din aceste două egalităţi se deduce:  (♣)

Fie punctul *N'* astfel încât . Procedând ca în cazul anterior se obţine:

 (♦)

Deoarece *AA'* = *AD'*, *CC'* = *CB'*, din (♣) şi (♦) rezultă , ceea ce dovedeşte că

N = N', adică *AC* trece prin intersecţia [*A'C'*] şi [*B'D'*]. Analog se obţine că .

1. Teorema lui Mathot.Într-un patrulater inscriptibil perpendicularele duse din mijloacele laturilor pe laturile opuse sunt concurente. (Punctul de concurenţă se numeşte punctul lui Mathot).

Demonstraţie:

A

B

C

D

A'

B'

D'

C'

M

E

x

O

Notăm *O* centrul cercului circumscris patrulaterului inscriptibil *ABCD* şi fie *A'*, *B'*, *C'*, *D'* mijloacele laturilor [*AB*], [*BC*], [*CD*], [*DA*]

Deoarece punctul *O* se află pe mediatoarele laturilor patrulaterului rezultă că: , , , 

Bimedianele patrulaterului sunt concurente într-un punct *E*. Fie *M* simetricul lui *O* faţă de *E*. Patrulaterul *MA'OC'* este paralelogram deoarece diagonalele se înjumătăţesc.

Rezultă . Deoarece  rezultă că . Analog se arată că ,  şi .

Prin urmare perpendicularele duse din mijloacele laturilor unui patrulater inscriptibil pe laturile opuse sunt concurente. Punctul *M* de concurenţă se numeşte punctul lui Mathot.

1. Teorema lui Nagel**.** Dacă *A'*, *B'*, *C'* sunt punctele de contact ale cercurilor exînscrise cu laturile triunghiului ABC, , , , atunci dreptele *AA'*, *BB'*, *CC'* sunt concurente (Punctul *N* de concurenţă al celor trei drepte se numeşte punctul lui Nagel).

Demonstraţie:

A

B

C

C'

A'

B'

N

Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului (*BC* = *a*, *AC* = *b*, *AB* = *c*) şi fie *p* semiperimetrul triunghiului.

Fie , , atunci: şi 

Rezultă: , adică  şi 

Se obţine: . În mod analog se obţin relaţiile: ; 

Rezultă:  şi din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele *AA'*, *BB'*, *CC'* sunt concurente.

1. Fie un paralelogram *ABCD* şi fie *E*, *F* astfel încât . Se notează , , , . Să se arate că dreptele *AC*, *EF*, *LH* sunt concurente.

A

D

C

B

M

G

H

L

O

F

E

Demonstrație:

Triunghiurile Δ*ADE* şi Δ*BCF* sunt congruente (*AD*=*BC*, , ) rezultă relaţia  (♥)

Triunghiurile Δ*ADF* şi Δ*BCE* sunt congruente (*AD* = *BC*, , ) rezultă relaţia  (♣)

Din (♥) şi (♣) rezultă că patrulaterul *AECF* este paralelogram.

Deci dreptele *AC* şi *EF* trec prin punctul *O* (mijlocul segmentului  şi al segmentului ).

Rezultă că dreptele *AC*, *EF* şi *LH* sunt concurente.

1. Bisectoarele exterioare a două unghiuri a unui triunghi sunt concurente cu bisectoarea interioară a celui de-al treilea unghi într-un punct ** (**centrul cercului exînscris).

Demonstraţie:

Aplicăm teorema bisectoarei interioare  obţinem:  (♥)

A

B

C

A'

Ia

C'

B'

Aplicăm teorema bisectoarei exterioare  şi  obţinem:  (♣)

 (♦)

Înmulţim relaţiile (♥), (♣) şi (♦) membru cu membru obţinem:

,

de unde conform reciprocei teoremei lui Ceva obţinem că bisectoarele  sunt concurente.

1. Se consideră triunghiul *ABC*, înălţimea [*AD*], şi punctele  . Să se demonstreze că (*DA* este bisectoarea unghiului *MDN* dacă şi numai dacă *AD*, *BN* şi *CM* sunt concurente.

Demonstrație:

R

A

S

d

M

P

D

B

C

N

Construim prin *A* dreapta *d* paralelă cu *BC*. Dreapta *d* intersectează dreptele *DM* şi *DN* în punctele *R* şi *S*.

Avem că  şi  rezultă: , respectiv .

Obţinem astfel: , respectiv 

Dar [*AD*] este înălţime şi pentru Δ*DRS*. astfel (*DA* este bisectoarea unghiului  dacă şi numai dacă Δ*DRS* este isoscel sau dacă şi numai dacă [*AD*] este mediană a sa, rezultă că *AR* = *AS*.

Această egalitate este echivalentă cu:  care mai poate fi scrisă:, de unde folosind teorema reciprocă a teoremei lui Ceva rezultă că *AD*, *BN* şi *CM* sunt concurente.

1. Considerăm paralelogramul ABCD şi fie E, F puncte pe diagonala BD, astfel încât BE=EF=FD. Se notează cu G, H, L, M punctele de intersecţie ale perechilor de drepte BC şi AE, CD şi AF, AB şi CE, respectiv AD şi CF. Să se demonstreze că dreptele AC, EF şi LH sunt concurente.

Demonstrație:

A

M

D

H

C

G

B

L

E

O

F

AD=BC, , DE=BF, rezultă că ADE≡BCF atunci AE = CF

AD=BC, , DF=BE, rezultă că ADF≡BCE atunci AF = EC

Rezultă că AECF paralelogram şi EF trece prin mijlocul O al diagonalei [AC].

Cum AF || EC, AHCL paralelogram şi prin urmare, diagonala [LH] trece prin mijlocul O al diagonalei [AC]. Aşadar, dreptele AC, EF şi LH sunt concurente.

1. Să se arate că perpendicularele prin mijloacele laturilor unui triunghi pe laturile triunghiului ortic (determinat de picioarele înălţimilor triunghiului dat) sunt concurente.

Demonstrație:

Fie D, E şi F picioarele înălţimilor în  şi fie A’, B’, C’ mijloacele laturilor [BC], [CA], [AB]. Ducem A’M  şi  În  dreptunghic, A’E este mediana relativă la ipotenuză şi deci

 Analog A’F este mediană în dreptunghic

A

A'

D

B

C'

F

A

E

B'

N

Q

P

M

Aşadar,  este isoscel. Cum A’M este înălţimea relativă la bază în  isoscel rezultă că A’M este şi mediatoarea segmentului [EF]. Analog, se arată că B’P şi C’N sunt mediatoarele laturilor [FD], respective [DE]. Prin urmare, dreptele A’M, B’P şi C’N, fiind mediatoarele laturilor triunghiului ΔFDE sunt concurente într-un punct Q.

Metodica rezolvării problemelor de coliniaritate și concurență

**CAPITOLUL IV**

**DUALITATEA COLINIARITATE – CONCURENŢĂ**

([1],[8],[9],[11],[13])

**§1. Teorema lui Desargues**

La puncte coliniare corespund drepte concurente şi la drepte concurente corespund puncte coliniare, această corespondenţă se numeşte **dualitate** .

Ideea dualității concurență – coliniaritate este foarte bine ilustrată de teorema lui Desargues.

*Definiţie***:** Triunghiurile  şi  se numesc **omologice**, dacă dreptele *AA'*, *BB'*, *CC'* sunt concurente. Punctul de concurenţă al acestor drepte se numeşte **centrul de omologie** al triunghiurilor  şi .

O

A

A'

B

B'

C

C'

**Teorema lui Desargues**

**Teoremă:** *Fie  şi  două triunghiuri cu proprietatea că există punctele , ,  astfel încât , , . Dacă dreptele , ,  sunt concurente, atunci punctele , ,  sunt coliniare.*

Demonstraţie:

O

B

A

C













Se notează cu *O* punctul de intersecţie a dreptelor ,  şi  deci 

Se aplică teorema lui Menelaus pentru triunghiul şi punctele coliniare , , . Atunci: .

Permutând circular *A*, *B*, *C* şi , ,  se obţin alte două relaţii analoage:

; .

Înmulţind ultimele trei egalităţi se obţine: .

Punctele ,  şi  se află pe prelungirile laturilor triunghiului .

Aplicând reciproca teoremei lui Menelaus, rezultă că punctele ,  şi  sunt coliniare.

Observaţii:

1. Dreapta  se numeşte **axă de omologie** a celor două triunghiuri

2. Dacă dreptele , ,  sunt necoplanare şi toate trei se întâlnesc într-un punct *O*, astfel încât laturile triunghiurilor  şi să nu fie respectiv paralele, atunci dreptele *BC* şi , *CA* şi , *AB* şi  se intersectează în puncte coliniare.

**Reciproca teoremei lui Desargues**

*Se consideră două triunghiuri  şi  cu proprietatea că există punctele , ,  astfel încât: , , . Se mai presupune că dreptele  şi  nu sunt paralele. Dacă punctele , ,  sunt coliniare, atunci dreptele , ,  sunt concurente.*

Demonstraţie:

O

B

A

C













Se notează cu O punctul de intersecţie a dreptelor  şi . Se observă că triunghiurile  şi  au vârfurile pe trei drepte concurente în punctul  şi anume .

Conform teoremei lui Desargues dreptele suport ale laturilor triunghiurilor  şi  se intersectează două câte două în trei puncte coliniare *O*, *C*,  unde: , , .

Am obţinut că dreapta  conţine punctul *O*. Prin urmare dreptele , ,  sunt concurente în *O*.

Observaţie:

Un caz particular important este cel al triunghiurilor înscrise unul în altul. În acest caz dreapta  se numeşte ***polară triliniară*** iar punctul *O* ***pol triliniar***.

**§2. Proprietatea de dualitate polară**

*P1***.** *POLARA UNGHIULARĂ*

Un alt exemplu de dualitate concurenţă – coliniaritate este dualismul pol – polară (concurenţa unor drepte într-un punct numit **pol** este condiţionată reciproc de coliniaritatea unor puncte pe o dreaptă numită **polară**).

***A doua teoremă a lui Pappus***

Fie d şi d' două drepte concurente în O şi punctele A, B, C  d, A', B', C'  d'. Să presupunem că există BC'∩B'C={M}, AC'∩A'C={N} şi AB'∩A'B={P}. Atunci punctele M, N, P sunt coliniare.

Demonstrație:

Fie MP∩d={D}, aplicând Teorema lui Menelaus în ΔAB'C cu transversala M-P-D, avem :

.

Iar în ΔOB'C cu transversala B-M-C' : . În ΔOB'A cu transversala B-P-A: . Înlocuind relaţiile (2) şi (3) în (1) rezultă 

M

(d)

(d')

P

N

A'

C'

B'

B

C

A

D

O

D'

 sau

:=: sau

(A,C;D,B) = (A',C';O,B')(4)

Se constată că punctul D este

independent de modul cum

am ales două puncte, M şi P din

cele trei puncte M, N, P.

Notând cu {D'}=NP∩d', analog aplic Teorema lui Menalus în ΔB'C'A cu transversala

D'-N-P rezultă că .

În ΔOB'A cu transversala B – P – A' se obţine:

.

În ΔOC'A cu transversala A' – N – C are loc:

.

Înlocuind relaţiile (7), (6) în (5) obţinem: 

rezultă  de unde :

:: sau (C',B';D',A')=(C,B;O,A) (8).

Din (4) şi (8) se constată că punctele M, N, P sunt pe dreapta DD'.

Problemă: Fie ΔABC şi un punct M interior lui. Dreptele AM, BM, CM intersectează laturile opuse BC, AC şi AB în punctele A1, B1, C1 în raport cu vârfurile triunghiului de pe latura căruia aparţin şi care sunt coliniare.

Demonstrație**:**

Fie A2 conjugatul armonic al lui A1 în raport cu B şi C, B2 conjugatul armonic al lui B1 în raport cu A şi C şi C2 conjugatul armonic al lui C1 în raport cu A şi B.

Pentru că AA1∩BB1∩CC1={M}, conform Teoremei lui Ceva în ΔABC, avem că: .

C2

B2

A2

C

A1

B1

C1

B

A

M

Pentru că A2, ­­ B2, C2 sunt conjugatele armonice ale punctelor A1, B1, C1 rezultă  relaţii care înlocuite în (1), avem că:  rezultă că punctele A2, B2, C2 sunt coliniare.

Astfel pentru orice punct M interior îi va corespunde o dreaptă d din plan şi reciproc: pentru orice dreaptă care intersectează prelungirile laturilor unui triunghi oarecare ABC în punctele A2, B2, C2 atunci conjugatele lor armonice în raport cu vârfurile triunghiului de pe laturile cărora le aparţin, determină cu vârfurile opuse drepte concurente.

Observaţii:

Dacă punctul M este interior ΔABC atunci polara d intersectează prelungirile laturilor; dacă M este exterior ΔABC atunci intersectează două din laturile triunghiului în interior.

Dacă unul din punctele A1, B1, C1 este mijlocul unei laturi a triunghiului atunci polara este paralelă cu acea latură, căci conjugatul armonic al mijlocului este dus la infinit.

Dacă M este centru de greutate al ΔABC, atunci polara d este o dreaptă de la infinit; deci dualitatea pol – polară are loc pentru oricare punct din planul ΔABC, cu excepţia punctelor de pe „linia poligonală” a triunghiului.

*P2. POLARITATEA ÎN RAPORT CU UN CERC*

Pentru a prezenta dualitatea între pol – polară faţă de un cerc, vom da definiția diviziunii armonice faţă de un cerc şi vom prezentara proprietăţi legate de un segment de dreaptă.

Definiţie**:** se consideră un cerc C(O, R). Două puncte A şi B se numesc armonic conjugate faţă de segmentul [CD], unde C şi D sunt punctele în care dreapta AB intersectează cercul C, adică are loc .

Proprietate : Jumătatea unui segment de dreaptă este medie proporţională între distanţele de la mijlocul acestui segment la două puncte care îl împart armonic.

Fie segmentul CD, punctele A şi B care-l împart armonic şi fie O mijlocul segmentului AB. Din faptul că punctele A, B, C, D formează o diviziune armonică

D

A

O

C

B

rezultă că are loc  care prin orientarea segmentelor în raport cu punctul O devine .

Exprimând întâi suma apoi diferenţa numărătorilor se obţine: , dar OB=-OA ceea ce conduce la:  adică OA2=OC·OD (1)

Probemă:Fie un punct A nesituat pe C(O,R). Punctul P armonic conjugat cu A în raport cu C(O,R) se află pe o dreaptă d numită polara lui A în raport cu C.

Fig. 4.7

Demonstrație:

N

D

O

B

C

A

E

M

P

Fie C(O,R), A exterior lui şi o secantă ce conţine punctul A şi intersectează cercul în M, N. Conjugatul armonic al lui A faţă de C îl notăm cu P, iar mijlocul lui [AP] cu E. Din faptul că punctele A şi P sunt conjugate armonic faţă de M şi N, conform proprietăţii prezentate anterior are loc: EA2=EC·ED, ceea ce exprimă că punctul E are aceeaşi putere faţă de A şi C(O,R), adică aparţine axei radicale a lor.

Deoarece P este transformatul lui E prin omotetia de centru A şi raport k = 2 şi va deveni o dreaptă perpendiculară pe OA în punctul B, conjugatul armonic a lui A în raport cu C şi D (unde C şi D sunt puncte unde AO intersectează C(O,R)). Deci locul geometric al punctului P este o dreaptă numită polara punctului A în raport cu cercul, iar A se numeşte polul dreptei.

Observaţii:

Dacă secanta devine tangentă în T la cerc, atunci punctele M, N, P coincid cu T, deci polara unui punct exterior cercului este coarda ce uneşte punctele de contact ale tangentelor duse din acel punct la cerc.

Dacă AC(O,R) atunci polara lui A este tangenta în acel punct la cerc.

Dacă A este interiorul cercului, diferit de centrul O, atunci polara este exterioară cercului, iar dacă A coincide cu O atunci polara este „aruncată” la infinit.

Problemă:

Fie d o dreaptă ce nu este tangentă cercului C(O,R) şi nu trece prin O. Există un punct unic A numit polul lui d în raport cu C, astfel încât d să fie polara lui A în raport cu C.

Demonstrație: Dreapta d poate fi exterioară cercului, atunci A va fi interior cercului sau d poate fi secantă. Construim diametrul [CD] perpendicular pe dreapta d (CD∩d={B}). Deoarece A este pol al dreptei d el aparţine dreptei OB şi din [OD]≡[OC] conform proprietăţii (1) a mijlocului segmentului [CD] are loc OB·OA=OD2, adică OB·OA=R2 . Cunoscând polara d faţă de cerc C determinăm polul A în mod unic ducând perpendiculara OB pe polară aşa încât segmentul OA=.

C

B

D

d

O

Problemă**:**

Fie un cerc C(O,R) şi o dreaptă d. Polarele punctelor situate pe dreapta d faţă de C(O,R) sunt concurente într-un punct B – polul dreptei d.

Demonstrație:

Fie d o dreaptă exterioară C(O,R) şi B – polul său în raport cu C(O,R) şi A un punct oarecare a lui d. Notăm cu A1 piciorul perpendicularei OB pe polara d şi cu B1 piciorul perpendicularei din B pe dreapta OA. Din (=900) se observă că patrulaterul AB­1BA1 este inscriptibil şi atunci exprimând puterea punctului faţă de cercul circumscris se obţine: OB·OA1=OB1·OA.

Folosind proprietatea mijlocului segmentului (CD) din (A,B;C,D) putem scrie: OB·OA1 = OC2 = R2, deci şi OB1·OA = R2 ceea ce exprimă că polara punctului A faţă de C(O,R) este dreapta BB1.

A

1

A

d

B1

B

O

D

c

Probemă:

(Teorema lui Brianchon)**.** Fie ABCDEFA un poligon circumscris unui cerc. Dreptele AD, BE, CF sunt concurente sau paralele.

Demonstrație:

O

Fie A', B', C', D', E', F' punctele de contact cu cercul C ale dreptelor enumerate în enunţ. Polarele punctelor A şi D vor fi p(A)=(A'F') şi p(D)=(C'D'). Dacă există un punct P' comun dreptelor C'D' şi F'A', atunci (AD)=p(P'). Analog pentru M'∈A'B'∩D'E' şi N'∈B'C'∩E'F' rezultă (BE)=p(M'), (CF)=p(N'). Dar A'B'C'D'E'F' este un hexagon înscris în cercul C şi conform teoremei lui Pascal există o dreaptă d ce conţine punctele M', N', P'. Fie P polul dreptei d; rezultă imediat că P este comun dreptelor AD, BE, CF, adică AD∩BE∩CF={P}.

A

A'

B

B'

C

C'

D

D'

E

E'

F

F’

F'

Metodica rezolvării problemelor de coliniaritate și concurență

**CAPITOLUL V**

**CONSIDERAŢII METODICE**

([3],[4],[6],[10],[12],[14])

**§1. Observaţii metodice**

**(locul şi rolul problematicii în programele şcolare)**

Problemele de coliniaritate și concurență se regăsesc în programele școlare de gimnaziu și liceu, încă din clasa a VI-a, când sunt introduse noțiunile de dreaptă, unghiuri, triunghiuri congruente, paralelism și perpendicularitate, linii importante în triunghi (înălțime, bisectoare, mediană și mediatoare), profesorul urmărește să dezvolte la elevi operații mentale fundamentale precum analiza, comparația, sinteza, abstractizarea și generalizarea ce vor fi folosite la demonstrare coliniarității și concurenței (concurența înălțimilor și a medianelor este acceptată fără demonstrație în clasa a VI-a căci implică noțiuni care se studiază în clasa a VII-a) în care elevul trebuie să îmbine diferite ipoteze și prin raționamente logice să descopere soluția; realizându-se în acest sens o unitate dialectică între formativ și informativ.

În programa clasei a VI-a problemele de coliniaritate și concurență apar în cadrul capitolului ”Dreapta” putând fi abordate la temele:

1. Poziții relative ale unui punct față de o dreaptă: puncte coliniare;
2. Poziții relative a două drepte: drepte secante sau concurente, drepte paralele.

Competențele specifice urmărite în abordarea problemelor de coliniaritate și concurență pot fi următoarele:

1. Stabilirea coliniarității unor puncte.
2. Verificarea faptului că mai multe drepte sunt sau nu concurente.
3. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculului de lungimi de laturi sau măsuri de unghiuri ce intervin.
4. Interpretarea informațiilor conținute în reprezentări geometrice în corelație cu determinarea unor lungimi de segmente și a unor măsuri de unghiuri.

Dacă în programa de clasa a VI-a problemele de coliniaritate și concurență apar în mod explicit, în programa de la clasa a VII-a ele nu se regăsesc sub forma unei tematici distincte, ci se pot regasi în lecții de consolidare sau recapitulare la o anumită temă. De exemplu teorema lui Menelaus se poate prezenta ca aplicație la sfârșitul unității de învățare ”Asemănarea triunghiurilor”. Elevii de clasa a VII-a trebuie să stăpânescă deja metodele de rezolvare a problemelor de geometrie precum metoda analizei, sintezei și metoda reducerii la absurd.

Tematica coliniarității și concurenței se reia în clasa a IX-a în cadrul capitolului: ” Paralelism, coliniaritate, concurență– calcul vectorial în geometria plană” cu următoarele conținuturi pentru clasele cu:

M2 (3 ore pe săptămînă)

* Vector de poziție al unui punct;
* Vector de poziție al punctului care împarte un segment într-un raport dat, teorema lui Thales (condiții de paralelism);
* Vector de poziție al centrului de greutate al unui triunghi (concurența medianelor unui triunghi);

M1 (4 ore pe săptămînă)

* Vector de poziție al unui punct. Vector de poziție al punctului care împarte un segment într-un raport dat, teorema lui Thales (condiții de paralelism);
* Vector de poziție al centrului de greutate al unui triunghi (concurența medianelor unui triunghi);
* Teorema bisectoarei, vectorul de poziție al centrului cercului înscris într-un triunghi; ortocentrul unui triunghi; concurența înălțimilor;
* Teorema lui Menelaus, teorema lui Ceva.

Observăm că la specialitatea M1, programa este mai generoasă cu tematica coliniarității și concurenței.

Se urmărește formarea următoarelor competențe specifice prin parcurgerea acestui capitol:

1. Descrierea sintetică și vectorială a propietăților unor configurații geometrice.
2. Caracterizarea sintetică și/sau vectorială a unei configurații geometrice date.
3. Alegerea metodei adecvate de rezolvare a problemelor de coliniaritate, concurența sau paralelism.
4. Trecerea de la caracterizarea sintetică la cea vectorială și invers a unei configurații geometrice date.
5. Interpretarea coliniarității, concurenței sau paralelismului în relație cu propietățile sintetice sau vectoriale ale unei configurații geometrice.
6. Analiza comparativă a rezolvărilor vectorială și sintetică ale aceleiași probleme.

În clasa a X-a, la toate specializările, se studiază un singur capitol de geometrie cu următorul conținut:

* Reper cartezian în plan, coordonate carteziene în plan, distanța dintre două puncte;
* Coordonatele unui vector în plan, coordonatele sumei vectoriale, coordonatele produsului dintre un vector și un număr real;
* Ecuații ale dreptei în plan, calcule de distanță și arii;
* Condiții de paralelism, condiții de perpendicularitate a două drepte în plan.

Se urmărește formarea următoarelor competențe specifice prin parcurgerea acestui capitol:

1. Descrierea unor configurații geometrice analitice.
2. Descrierea analitică, vectorială sau sintetică a relației de concurențe și a relației de coliniaritate.
3. Analizarea informațiilor oferite de o configurație geometrică.
4. Exprimarea analitică, sintetică sau vectorială a caracteristicelor matematice ale unei configurații geometrice.
5. Modelarea unor configurații geomentrice analitic, sintetic sau vectorial.

Indiferent de specializarea urmată programa matematică este structurată pe un același ansamblu de competențe generale și anume:

1. Identificarea unor date și relații matematice și corelarea lor în funcție de contextul în care au fost ele definite.
2. Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural și contextual cuprinse în enunțurile matematice.
3. Utilizarea algoritmilor și conceptelor matematice pentru caracterizarea locală sau globală a unei situații concrete.
4. Exprimarea caracteristicilor matematice cantitative sau calitative ale unei situații concrete și a algoritmilor de prelucrare a acestora.
5. Interpretarea și analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații problemă.
6. Modelarea matematică a unor concepte problematice variate, prin integrarea cunoștințelor din diferite domenii.

În ciclul inferior al liceului studiul matematicii urmărește, de asemenea, înzestrarea elevului cu un set de valori și atitudini menite să contribuie la formarea unei culturi comune pentru toți elevii și determinînd pe de altă parte, trasee individuale de învățare:

1. Dezvoltarea unei gândiri deschise, creative, a independenței în gândire și acțiune.
2. Manifestarea inițiativei, a disponibilității de a aborda sarcini variate, a perseverenței și a capacității de concentrare.
3. Dezvoltarea simțului estetic și critic, a capacității de a aprecia ordinea, rigoarea, eleganța în arhitectura unei probleme sau a construirii unei teorii.
4. Formarea obișnuinței de a recurge la concepte și metode matematice în abordarea unei probleme cotidiene sau pentru rezolvarea unor probleme practice.
5. Formarea motivației pentru studierea matematicii ca domeniu relevant pentru viața sociala și profesională.

În ciclul superior al liceului accentul este pus pe algebră și analiză matematică, iar problemele de coliniaritate și concurență se regăsesc în tratarea unor teme ca ”Aplicații ale determinanților: Ecuația unei drepte determinată de două puncte distincte. Aria unui triunghi. Coliniaritatea a trei puncte în plan”.

**§2. Chestiuni de evaluare**

**2.1. Definirea conceptului. Funcţiile evaluării**

Este de reținut faptul că în evoluția conceptului de evaluare sunt identificate trei categorii de definiții (Hadji, Stufflebeam, 1980, C. Cucoș, 2008).

Definiții ”vechi”, care pun semnul egalității între evaluare și măsurare; definiții care interpretează evaluarea prin raportare la obiectivele educaționale operaționalizate; definiții ”moderne”; evaluarea fiind concepută ca emitere de judecăți de valoare despre procesul și produsul învățării pe baza criteriilor calitative.

Definiții mai recente, deși diverse au note în comun, semnalându-se:

* trecerea de la valoarea estimativă bazată pe cantitate, predominant sumativă, la evaluarea apreciativă, bazată pe calitate, cu puternice accente formative;
* deplasarea accentului de la înțelegerea evaluării ca examinare și control la ”evaluarea școlară ca parte integrată a procesului de învățare și jalon al acesteia” (Y. Abernot).

Iată câteva definiții semnificative ale evaluării:

* ”Constă în măsurarea și aprecierea cu ajutorul criteriilor, a atingerii obiectivelor sau a gradului de apropiere sau de proximitate a unui produs al elevului în raport cu o normă”;
* Înseamnă ”a verifica, a judeca, a estima, a situa, a reprezenta, a determina, a da un verdict, etc.” (Hadji);
* Este ”actul prin care referitor la un subiect sau un obiect, se emite o judecată având ca referință unul sau mai multe criterii” (Noizet, 1978);
* ”Examinează gradul de corespondență între un ansamblu de informații privind învățarea de către elevi și un ansamblu de criterii adecvate obiectivului fixat, în vederea luării unei decizii (Ketele, 1982).

Evaluarea este o componentă esențilă a procesului de învățământ îndeplinind anumite funcții:

* *Constatativă - de cunoaștere a stării, fenomenului, obiectului de evaluat;*
* *diagnostică – de explicare a situației existente;*
* *predictivă* - de prognosticare și orientare a activității didactice, atât de predare cât și de învățare, concretizată în deciziile de ameliorare sau reproiectare curriculară;
* *selectivă* - asigură ierarhizarea și clasificarea elevilor într-un mediu competitiv;
* *feed-back* (de reglaj și autoreglaj) - analiza rezultatelor obținute cu scopul de reglare și autoreglare a conduitei ambilor actori;
* *social-economică* - evidențiază eficiența învățământului, în funcție de calitatea și valuarea ”produsului școlii”;
* *educativă* - menită să conștientizeze și să motiveze, să stimuleze interesul pentru studiu, pentru perfecționare și obținerea unor performanțe cât mai înalte;
* *socială* - prin care se informează comunitatea și familia asupra rezultatelor obținute de elevi.

**2.2. Forme şi tipuri de evaluare**

După **modul în care se integrează în desfăşurarea procesului didactic**, putem identifica trei strategii:

♦ *evaluare iniţială,* realizată la începutul demersurilor instructiv-educative, pentru a stabili nivelul la care se situează elevii;

♦ *evaluare formativă (continuă),* care însoţeşte întregul parcurs didactic, organizând verificări sistematice în rândul tuturor elevilor din toată materia;

♦ *evaluarea sumativă,* care se realizează de obicei, la sfârşitul unei perioade mai lungi de instruire;

Prezentăm în continuare o analiză comparativă a celor trei strategii de evaluare, urmărind criteriile: scopul, principiul temporalităţii, obiectul, funcţiile, modalităţile de realizare, avantajele, dezavantajele şi notarea:

**SCOPUL URMĂRIT**

* + Evaluarea iniţială:
* identifică nivelul achiziţiilor iniţiale ale elevilor în termeni de cunoştinţe, competenţe şi abilităţi, în scopul asigurării premizelor atingerii obiectivelor propuse pentru etapa imediat următoare;
* “este indispensabilă pentru a stabili dacă subiecţii dispun de pregătirea necesare creării de premise favorabile unei noi învăţări” (Ioan Cerghit, 2002).
* Evaluarea formativă:
  + urmăreşte dacă obiectivele concrete propuse au fost atinse şi permite continuarea demersului pedagogic spre obiective mai complexe; “Unicul scop al evaluării formative este să identifice situaţiile în care întâmpină elevul o dificultate, în ce constă aceasta şi să-l informeze” (De Landsheere, 1975)*,* atât pe el cât şi pe profesor.
    - Evaluarea sumativă:
      * stabileşte gradul în care au fost atinse finalităţile generale propuse (fie dobândirea unei atitudini sau a unei capacităţi), comparându-i pe elevi între ei (interpretare normativă), ori comparând performanţele manifestate de fiecare cu performanţele aşteptate (interpretarea criterială).

**PRINCIPIUL TEMPORALITĂŢII**

Evaluarea iniţială:

se efectuează la începutul unui program de instruire (ciclu de învăţământ, an şcolar, semestru, începutul unui capitol şi chiar al unei lecţii).

Evaluarea formativă:

axată pe proces şi internă, se face pe parcursul învăţării;

frecventă, la sfârşitul fiecărei unităţi de studiu.

* Evaluarea sumativă:
  + este finală şi de regulă externă, având loc după învăţare;
  + regrupează mai multe unităţi de studiu, face bilanţul.

**OBIECTUL EVALUĂRII**

* + - * Evaluarea iniţială:
        + este interesată de “acele cunoştinţe şi capacităţi care reprezintă premise pentru asimilarea noilor conţinuturi şi formarea altor competenţe” (I. T. Radu), premise “cognitive şi atitudinale” capacităţi, interese, motivaţii), necesare integrării în activitatea următoare.
      * Evaluarea formativă:
* vizează cunoştinţele, competenţele şi metodologiile în raport cu o normă prestabilită, dar şi cu o sarcină mai complexă de învăţări ulterioare despre care elevul îşi face o reprezentare” (I. T. Radu);
* se extinde şi asupra procesului realizat.
  + - * Evaluarea sumativă:
* “se concentrează mai ales asupra elementelor de permanenţă ale aplicării unor cunoştinţe de bază, ale demonstrării unor abilităţi importante dobândite de elevi într-o perioadă mai lungă de instruire” (S.N.E.E.)

**FUNCŢII ÎNDEPLINITE**

* + - * Evaluarea iniţială:
        + funcţie diagnostică;
        + funcţie prognostică.
      * Evaluarea formativă:
* “funcţie de constatare a rezultatelor şi de sprijinire continuă a elevilor” (I.T.Radu);
* funcţie de feed-back;
* funcţie de corectare a greşelilor şi ameliorare şi reglare a procesului;
* funcţie motivaţională.
  + - * Evaluarea sumativă:
* funcţie de constatare şi verificare a rezultatelor;
* funcţie de clasificare;
* funcţia de comunicare a rezultatelor;
* funcţie de certificare a nivelului de cunoştinţe şi abilităţi;
* funcţie de selecţie;
* funcţie de orientare şcolară şi profesională.

**MODALITĂŢI DE REALIZARE**

* + - * Evaluarea iniţială:
* harta conceptuală;
* investigaţia;
* chestionarul;
* testele.
  + - * Evaluarea formativă:
* observare curentă a comportamentului şcolar al elevului;
* fişe de lucru;
* examinări orale;
* tehnica 3-2-1;
* metode R.A.I.;
* probe de autoevaluare.
  + - * Evaluarea sumativă:
        + examene (susţinute prin rezolvarea unor probe scrise, orale sau practice);
        + portofoliul;
        + proiectul.

**AVANTAJELE**

* + - * Evaluarea iniţială:
        + oferă profesorului cât şi elevului posibilitatea de a avea o reprezentare cât mai exactă a situaţiei existente (potenţialul de învăţare al studenţilor, lacunele ce trebuiesc completate şi remediate) şi a formula cerinele următoare;
        + pe baza informaţiilor evaluării iniţiale se planifică demersul pedagogic imediat următor şi eventual a unor programe de recuperare.
      * Evaluarea formativă:
* permite elevului să-şi remedieze erorile şi lacunele imediat după apariţia ei şi înainte de declanşarea unui proces cumulativ;
* oferă un feed-back rapid, reglând din mers procesul;
* este orientată spre ajutorul pedagogic imediat;
* oferă posibilitatea tratării diferenţiate (I. Cerghit);
* dezvoltă capacitatea de autoevaluare la elevi;
* reduce timpul destinat actelor evaluative ample, sporindu-l pe cel destinat învăţării;
* sesizează punctele critice în învăţare.
  + - * Evaluarea sumativă:
* rezultatele constatate pot fi folosite pentru preîntâmpinarea greşelilor la alte serii de cursanţi;
* permite aprecieri cu privire la prestaţia profesorilor, a calităţii proceselor de instruire, a programelor de studii;
* oferă o recunoaştere socială a meritelor.

**DEZAVANTAJELE**

* + - * Evaluarea iniţială:
        + nu permite o apreciere globală a performanţelor elevului şi nici realizarea une ierarhii;
        + nu-şi propune şi nici nu poate să determine cauzele existenţei lacunelor în sistemul cognitiv al elevului.
      * Evaluarea formativă:
* “aplicarea acestei strategii de evaluare, foarte pretenţioasă, necesită o organizare riguroasă a predării, competenţă în precizarea obiectivelor, în stabilirea sarcinilor, în alegera tehnicilor de evaluare” (Ioan. Cerghit);
* “recursul la evaluarea formativă este testul unei pedagogii a rigorii, a lucidităţii şi a eficienţei” (I. Cerghit).
  + - * Evaluarea sumativă:
* nu oferă suficiente informaţii sistematice şi complete despre măsura în care elevii şi-au însuşit conţinutul predat şi nici dacă un elev stăpâneşte toate conţinuturile esenţiale predate;
* are efecte reduse pentru ameliorarea/reglarea şi remedierea lacunelor, efectele resimţindu-se după o perioadă mai îndelungată, de regulă, pentru seriile viitoare;
* deplasează motivaţia elevilor către obţinerea unui rang mai înalt în ierarhia grupului, punând accent pe competiţie;
* nu favorizează dezvoltarea capacităţii de autoevaluare la elevi;
* nu oferă o radiografie a dificultăţilor în învăţare;
* generează stres, teamă, anxietate.

**DIN PUNCT DE VEDERE AL NOTĂRII**

* + - * Evaluarea iniţială:
    - nu îşi propune aprecierea performanţelor globale ale elevilor şi nici ierarhizarea lor.
      * Evaluarea formativă:
    - “*Acest tip de evaluare nu se exprimă în note şi cu atât mai puţin în scoruri.*” (I. T. Radu)
    - nu realizeară ierarhii şi clasificări între elevi;
    - oferă premise pentru notare.
      * Evaluarea sumativă:
* Evaluarea sumativă se traduce printr-un scor… Prin scor desemnăm rezultatele obiective obţinute în urma unui test sau a oricărei alte forme de evaluare prin adunare sau scădere de puncte după reguli fixe.
* constată performanţele şi clasifică (ierarhizează) elevii în funcţie de acestea.

***Evaluarea traditională*** tinde să fie tot mai mult înlocuită cu ***evaluarea alternativă, dialogată,* (“dialogical evaluation”)**

Diferenţele dintre cele două modele de evaluare, adaptate la nivelul învăţământului sunt:

**EVALUAREA TRADIŢIONALĂ**

* este o căutare a obiectivităţii şi a modalităţilor ştiintifice de evaluare cu proceduri standard. Accentul se pune pe *profesorul-evaluator*.
* este interesată mai mult de măsurarea *aspectelor cantitative.* Aspectele calitative fiind dificil de măsurat tind să fie ignorate.
* are un grad înalt de *control managerial* al procesului de evaluare de către evaluator, singurul care pune întrebările. Ceilalţi participanţi care sunt afectaţi de constatările evaluării au o influenţă slabă în procesul evaluării şi anume în a formula întrebările care pot fi puse, în a-şi exprima părerea despre modalităţile de evaluare ori să discute cu profesorul despre concluziile la care acesta a ajuns. Elevul nu e direct implicat în procesul de evaluare. El e exterior acestuia prin faptul că se supune intervenţiei profesorului. Acesta este cel care vine cu propunerea: când, cum şi ce se evaluează.
* nu exista o cooperare între evaluator şi elev privind modalităţile de evaluare; din acest motiv profesorul evaluator poate fi perceput negativ.

**EVALUAREA ALTERNATIVĂ**

* este privită ca parte integrantă a procesului de dezvoltare şi schimbare şi implică *judecata reflexivă*
* este centrată pe dialog, *pe cercetarea calitativă* mai mult decât pe măsurarea cantitativă; foloseşte mai puţin metodele formale.
* funcţia principală este de *energizare din interior* a procesului, depăşind concepţia prin care evaluarea este un proces de control care acţionează din exteriorul procesului de învăţare. Se pleacă de la ideea că fiecare este unic, având propriul stil de lucru, diferite modalităţi de percepţie, gândire şi acţiune. Elevul participă *activ* la procesul de evaluare. Negocierea şi consensul constituie elemente importante, iar profesorul discută cu elevii rezultatele şi le face recomandări.
* rolul evaluatorului este cel de *facilitator* din interior al procesului de învăţare mai mult decât un observator neutru. El uşurează învăţarea şi evaluarea, plecând de la premiza ca evaluarea îndeplineşte funcţii mai degrabă de ameliorare şi de corectare decât de sancţionare şi de speculare a greşelilor.

**2.3. Metode şi tehnici de verificare şi evaluare**

Sistemul metodologic al verificării randamentului școlar este constituit din mai multe metode și tehnici: observarea curentă a modului cum învață elevul (mecanic, logic, creativ, ritmic, în salturi), probele orale, scrise și practice, analiza unor referate sau creații personale, teste de cunoștințe și deprinderi, proiecte, portofolii, etc.

***Metoda de evaluare orală***

Este una dintre cele mai răspândite şi se poate aplica individual sau pe grupe de elevi. Marele avantaj al acestei metode îl constituie posibilitatea dialogului profesor-elev, în cadrul căruia profesorul îşi poate da seama nu doar „ce ştie” elevul, ci şi cum gândeşte el, cum se exprimă, cum face faţă unor situaţii problematice diferite de cele întâlnite pe parcursul instruirii. Cu prilejul examinării orale, profesorul îi poate cere elevului să-şi motiveze răspunsul la o anumită întrebare şi să-l argumenteze, după cum tot el îl poate ajuta cu întrebări suplimentare atunci când se află în impas.

Metoda are însă şi unele dezavantaje: ea este mare consumatoare de timp, timp care, adesea, le lipseşte profesorilor ale căror discipline sunt prevăzute în planul de învăţământ cu un număr mic de ore, deci care au mai mulţi elevi cărora trebuie – potrivit reglementărilor în vigoare – să le atribuie cel puţin trei note „în oral” pentru a li se încheia media semestrială.

Un alt dezavantaj este şi acela referitor la dificultatea de a selecţiona, pentru toţi elevii examinaţi, întrebări cu acelaşi grad de dificultate. Pentru a elimina aceste dezavantaje se pot stabili anumite restricţii cu privire la durata acestor examinări orale, în funcţie de vârstă; întrebările vor fi stabilite din vreme pentru a fi cât mai uniforme, ca grad de dificultate, pentru întregul grup de elevi supus verificării, formularea lor făcându-se clar şi precis, fără ambiguităţi.

Ca să-i fie mai uşor, profesorul poate avea în faţă, pe durata examinării, *o fişă de evaluare orală*.

***Metoda de evaluare scrisă***

Este utilizată sub diferite forme: extemporal, teză, test, chestionar, eseu, referat, temă executată acasă, portofoliu, proiect etc.

Prin această metodă se asigură uniformitatea subiectelor (ca întindere şi ca

dificultate îndeosebi) pentru elevii supuşi evaluării, ca şi posibilitatea de a examina

un număr mai mare de elevi în aceeaşi unitate de timp.

Ea îi avantajează pe elevii emotivi şi-i pune la adăpost pe profesorii tentaţi

să evalueze preferenţial prin metoda orală.

Ca şi metoda de evaluare orală şi cea scrisă are unele dezavantaje sau limite: la teste, de exemplu, elevii pot ghici răspunsurile la itemii cu alegere multiplă; la extemporale şi teze se poate copia.

Indiferent de forma utilizată, în cazul probelor scrise este dificil de apreciat

anumite răspunsuri, când acestea sunt formulate ambiguu, deoarece profesorul care

corectează lucrarea nu-i poate cere lămuriri autorului.

În general, metoda de evaluare scrisă nu oferă aceleaşi posibilităţi de investigare a pregătirii elevilor (cunoştinţe, deprinderi, abilităţi, capacităţi, competenţe etc.) ca evaluarea orală. În realitate, combinarea celor două metode amplifică avantajele şi diminuează dezavantajele, aşa încât e preferabilă folosirea unui sistem de metode pentru a realiza o evaluare cât mai apropiată de adevăr.

Ca şi în cazul evaluării orale, pentru evaluarea scrisă, este necesar să se stabilească unele *criterii de apreciere.*

La cerinţele de conţinut, ar trebui să se ţină cont de *volumul* şi *corectitudinea* cunoştinţelor, de *rigoarea* demonstraţiilor (acolo unde este cazul). Important este întotdeauna să nu se omită *cunoştinţele esenţiale* din materia supusă verificării (examinării). Prezentarea conţinutului să se facă sistematic şi concis, într-un limbaj *inteligibil* (riguros din punct de vedere ştiinţific şi corect din punct de vedere gramatical). Forma lucrării presupune şi o anumită organizare a conţinutului (în funcţie de specificul acestuia), unele sublinieri, realizarea unor scheme, tabele şi grafice, pentru a pune în valoare unele idei principalele şi a-i permite corectorului să urmărească, mai uşor, aceste idei. Când se recurge la citate, este necesar să se indice şi sursa.

***Metoda de evaluare practică***

Le permite profesorilor să constate la ce nivel şi-au format şi dezvoltat elevii anumite deprinderi practice, capacitatea de „a face” (nu doar de „a şti”). Şi această metodă se realizează printr-o mare varietate de forme, în funcţie de specificul obiectului de studiu de la probele susţinute de elevi la educaţia fizică, unde există baremuri precise, la lucrările din laboratoare şi ateliere unde elevii pot face dovada capacităţii de a utiliza cunoştinţe asimilate prin diverse tehnici de lucru: montări şi demontări, executări de piese sau lucrări, efectuarea unor experienţe etc. Şi, la această categorie de probe, evaluatorii trebuie să stabilească unele criterii, norme şi/sau cerinţe pedagogice, pentru că, de fapt, evaluarea din învăţământ, prin oricare dintre metode s-ar realiza are, prin excelenţă, o valoare, o semnificaţie pedagogică. Aceste cerinţe nu trebuie să difere de cele formulate pe parcursul instruirii, în schimb, ele trebuie să fie cunoscute şi de elevi, împreună cu baremurile (standardele) de notare.

***Evaluarea cu ajutorul calculatorului***

Noile tehnologii ale informării şi comunicării (N.T.I.C), cu largi aplicaţii în toate domeniile, au pătruns – e adevărat, destul de greu – şi în învăţământ. Studii internaţionale de profil menţionează că aplicaţiile N.T.I.C „au fost experimentate în toate etapele procesului educativ: motivare, diagnoză, prezentarea informaţiilor, pregătire, memorare, rezolvare de probleme, verificare, notare” (O. I. D. I., 1990).

Învăţământul asistat de calculator – marea „minune” a tehnicii actuale care zdruncină din temelii învăţământul tradiţional fundamentat de Comenius în celebra sa lucrare *Didactica Magna*, acum mai bine de trei secole – îşi propune obiective ambiţioase, cum sunt: „dezvoltarea raţionamentului, imaginaţiei şi creativităţii, precum şi a capacităţii de a emite o apreciere critică asupra rezultatului dialogului om - maşină” (O.I.D.I, 1990).

Experţii remarcă, pe bună dreptate, că „Informatica are un potenţial educativ foarte mare faţă de ceea ce ar putea oferi alte tehnologii. Informatica permite adaptarea învăţământului la cerinţele fiecărui elev, la ritmul de muncă, la aptitudinile intelectuale şi la nivelul său de cunoştinţe, deci, diversificarea modalităţilor pedagogice şi personalizarea învăţământului”.

Utilizat în evaluare, calculatorul le oferă, atât profesorilor cât şi elevilor, o mare diversitate de modalităţi. Spre deosebire de metodele de evaluare tradiţionale, evaluarea cu ajutorul calculatorului este debarasată de orice elemente de subiectivism, ca şi de emoţiile

care-i însoţesc pe cei mai mulţi dintre elevi la verificările curente şi la examene.

Ea economiseşte timpul şi efortul evaluatorilor care, astfel, pot fi utilizate în alte domenii. Se schimbă, deci, însuşi raportul profesor-elev, prin creşterea încrederii elevilor în obiectivitatea profesorilor. Mai mult, elevii înşişi se pot autoevalua pe parcursul muncii independente pe care o depun zilnic, beneficiind de feed-back-ul atât de necesar unei învăţări eficiente şi performante. Deşi metoda de evaluare cu ajutorul calculatorului este folosită, încă prea puţin, în şcoala românească de toate gradele, începuturile sunt promiţătoare iar numărul adepţilor utilizării ei în evaluarea curentă şi la examene creşte.

Integrată procesului de instruire, evaluarea asistată de calculator ar trebui să capete o mai mare extindere în rezolvarea de probleme (mai dificile pentru elevi). După Nisbet şi Sbucksmith (1986), citaţi de A. K. Jalaluddin (1990), „procesul de rezolvare a problemelor poate fi redus la următoarele operaţii: examinarea problemei model, prelucrarea modelului în vederea efectuării necesare şi exprimării problemei în funcţie de aceste condiţii”.

Acest proces permite studiul pe bază de experienţă (diferit de cel static) care, asociat cu utilizarea materialului imprimat pe calculator, îi oferă elevului un mod interactiv de construire şi asimilare a noilor cunoştinţe, concomitent cu posibilitatea de a verifica dacă ceea ce a învăţat este corect sau nu.

***Alte metode de evaluare***

În practica şcolară sunt folosite şi alte metode de evaluare a nivelului de pregătire al elevilor, atât pe parcursul instruirii cât şi la sfârşitul ei.

Menţionăm câteva, întâlnite mai des, în activitatea profesorilor:

• observarea;

• referatul;

• eseul;

• fişa de evaluare;

• chestionarul;

• investigaţia;

• proiectul;

• portofoliul;

• disertaţia/lucrarea de diplomă.

Multe dintre ele, cum este cazul eseului, referatului, fişei de evaluare, chestionarului, proiectului şi disertaţiei/lucrării de diplomă, pot fi incluse în categoria metodelor de evaluare scrisă.

*OBSERVAREA* (înţeleasă aici ca metodă de cunoaştere a elevului sub diverse aspecte) poate fi folosită şi ca metodă de *evaluare*, cu condiţia să respecte aceleaşi *cerinţe psihopedagogice*, ca şi în cazul unei cercetări (investigaţii) pe o temă dată: să aibă *obiective clare* (exemplu: stimularea interesului elevilor pentru o anumită disciplină; ameliorarea rezultatelor şcolare; creşterea caracterului aplicativ al predării şi învăţării); să se efectueze *sistematic,* pe o perioadă mai îndelungată (semestru sau an şcolar); să se *înregistreze operativ,* într-o fişă specială sau într-un caiet, rezultatele observării.

Obiectul observării îl constituie: activitatea elevilor, comportamentul lor, produsele unor activităţi realizate în conformitate cu cerinţele programelor şcolare

sau combinaţie a lor.

Rezultatele observării vor fi comparate cu rezultatele la învăţătură, în urma unor analize calitative şi cantitative (matematice şi statistice).

Observarea va fi folosită, mai ales, pentru sesizarea cât mai exactă a cauzelor care determină obţinerea unor rezultate slabe la învăţătură la anumiţi elevi şi oscilaţiile (variaţiile) prea mari în pregătirea altora, dar şi pentru a evita erorile de apreciere prin atribuirea unor note (fie prea mari, fie prea mici) sub impresia momentului, a unor evaluări conjuncturale.

În mod deosebit, prin observarea sistematică a comportamentului şi activităţii elevilor, se evită, atât supraestimarea unor elevi ca urmare a impresiei bune create despre ei, cât şi subestimarea celor despre care există o impresie proastă.

În toate cazurile însă, valoarea observării depinde de rigoarea cu care este făcută şi de competenţa evaluatorului.

*REFERATUL* (folosit ca bază de discuţie în legătură cu o temă dată fiind menit să contribuie la formarea sau dezvoltarea deprinderilor de muncă independentă ale elevilor din clasele mari sau ale studenţilor), este şi o posibilă probă de evaluare a gradului în care elevii sau studenţii şi-au însuşit un anumit segment al programei, cum ar fi o temă sau o problemă mai complexă dintr-o temă.

El este întocmit fie pe baza unei bibliografii minimale, recomandate de profesor, fie pe baza unei investigaţii prealabile, în acest din urmă caz, referatul sintetizând rezultatele investigaţiei, efectuate cu ajutorul unor metode specifice (observarea, convorbirea, ancheta etc.).

Când referatul se întocmeşte în urma studierii anumitor surse de informare, el trebuie să cuprindă atât opiniile autorilor studiaţi în problema analizată, cât şi propriile opinii ale autorului.

Nu va fi considerat satisfăcător referatul care va rezuma sau va reproduce anumite lucrări studiate, cu speranţa că profesorul, fie nu cunoaşte sursele folosite de elev sau de student, fie nu sesizează plagiatul.

Referatul are, de regulă trei-patru pagini şi este folosit doar ca element de portofoliu sau pentru acordarea unei note parţiale în cadrul evaluării efectuate pe parcursul instruirii.

Deoarece el se elaborează în afara şcolii, elevul putând beneficia de sprijinul altor persoane, se recomandă susţinerea referatului în cadrul clasei/grupei, prilej cu care autorului i se pot pune diverse întrebări din partea profesorului şi a colegilor.

Răspunsurile la aceste întrebări sunt, de regulă, edificatoare în ceea ce priveşte contribuţia autorului la elaborarea unui referat, mai ales când întrebările îl obligă la susţinerea argumentată a unor idei şi afirmaţii.

*FIŞA DE EVALUARE* este un formular de dimensiunea unei coli de hârtie A4 sau A5 (în funcţie de numărul şi complexitatea sarcinilor de îndeplinit), pe care sunt formulate diverse exerciţii şi probleme ce urmează a fi rezolvate de elevi în timpul lecţiei, de regulă după predarea de către profesor a unei secvenţe de conţinut şi învăţarea acesteia, în clasă, de către elevi.

În aceste condiţii, fişa de evaluare se foloseşte, mai ales, pentru obţinerea feedback-ului de către profesor, pe baza căruia el poate face precizări şi completări, noi exemplificări etc., în legătură cu conţinutul predat.

Nu este, deci, obligatoriu ca elevii să fie notaţi, fişa de evaluare având, în felul acesta, un pronunţat caracter de lucru, de optimizare a învăţării, ceea ce o şi deosebeşte de testul de evaluare care se foloseşte, prioritar, pentru aprecierea şi

notarea elevilor.

Fişa de evaluare mai poate fi folosită şi pentru înregistrarea rezultatelor observării sistematice a comportamentului şi activităţii elevilor, în această situaţie evaluarea având un rol sumativ.

*CHESTIONARUL,* folosit pe scară largă în anchetele de teren de către sociologi, precum şi ca metodă de cercetare psihopedagogică, poate fi folosit şi ca instrument de evaluare, mai ales atunci când profesorul doreşte să obţină informaţii

despre felul în care elevii percep disciplina predată sau stilul lui de predare şi de evaluare.

Cu ajutorul chestionarului se pot obţine informaţii despre opţiunile elevilor şi atitudinea lor faţă de disciplină sau faţă de anumite probleme cuprinse în programă şi manual, ceea ce înseamnă că, pe această cale, putem obţine informaţii şi despre nivelul lor de motivaţie la o anumită disciplină.

Nu este însă mai puţin adevărat că, prin intermediul chestionarului, se pot obţine şi informaţii referitoare la pregătirea elevilor (chestionarea putându-se face atât oral, cât şi în scris), cu toate că, în practică, sunt preferate alte metode şi instrumente ce permit obţinerea unor informaţii mai relevante (testul, de exemplu, fiind bazate o mare varietate de itemi, asigură o apreciere mult mai riguroasă decât chestionarul).

Când doreşte însă o informare operativă cu privire la stăpânirea de către elevi a unor probleme esenţiale, dintr-o lecţie, dintr-o temă sau dintr-un capitol, profesorul poate recurge la chestionar.

Pe baza răspunsurilor primite de la elevi, el poate face nu doar aprecieri privind gradul de însuşire a unor cunoştinţe, ci şi precizări, completări, dezvoltări etc., care să conducă la o mai bună cunoaştere a unei anumite părţi din materia parcursă.

*INVESTIGAŢIA* (în sensul de cercetare, descoperire) se foloseşte, de regulă, ca metodă de învăţare, pentru a-i deprinde pe elevi să gândească şi să acţioneze independent, atât individual cât şi în echipă.

La începutul semestrului, profesorul stabileşte lista de teme pe care elevii urmează să le abordeze cu ajutorul investigaţiei, perioada investigaţiei, modul de lucru, de prezentare şi de valorificare a rezultatelor.

Investigaţia se poate realiza individual sau colectiv.

Este de preferat ca rezultatele să fie analizate cu clasa de elevi, pentru ca profesorul să poată formula observaţii, aprecieri şi concluzii.

Pe baza analizei activităţii elevilor şi a rezultatelor obţinute de ei în cadrul

investigaţiei, profesorul poate acorda note, valorificând, în felul acesta, funcţia evaluativă a investigaţiei.

*PROIECTUL* are, de asemenea, un dublu rol: el poate fi folosit cu elevii din clasele mari de liceu şi cu studenţii pentru învăţarea unor teme mai complexe, care se pretează la abordări pluridisciplinare, interdisciplinare şi transdisciplinare sau ca metodă de evaluare (pe parcursul instruirii sale) sumativă. Cu ajutorul lui elevii/studenţii, pot face dovada că au capacitatea de a investiga un subiect dat, cu metode şi instrumente diferite, folosind cunoştinţe din diverse domenii. Uneori, proiectul este folosit ca probă de evaluare la absolvirea unei şcoli profesionale, a unui liceu industrial sau cu profil artistic, precum şi la absolvirea unei facultăţi din domeniile tehnicii, artei, arhitecturii etc.

Ca şi în cazul investigaţiei, profesorul stabileşte lista temelor de proiect, perioada de realizare şi-i iniţiază pe elevi sau pe studenţi asupra etapelor şi a tehnicilor de lucru (individual sau colectiv).

Elevii/studenţii trebuie să fie orientaţi şi îndrumaţi şi (eventual) sprijiniţi de profesor în colectarea datelor necesare (potrivit temei alese sau repartizate), iar pe

parcursul realizării proiectului să beneficieze de consultaţii şi de evaluări parţiale.

La aceste evaluări, ca şi la evaluarea finală (când proiectul se prezintă sau se susţine), profesorul operează cu anumite criterii, referitoare, atât la proces (documentarea, utilizarea datelor şi a informaţiilor în formularea concluziilor etc.),

cât şi la produs (structura proiectului, concordanţa dintre conţinut şi temă, capacitatea de analiză şi sinteză, relevanţa concluziilor, caracterul inedit al rezultatelor etc.). Aceste criterii se recomandă să fie cunoscute şi de elevi/studenţi.

*PORTOFOLIUL*, este o metodă de evaluare mai veche, folosită, îndeosebi, în învăţământul primar, unde învăţătorii le cereau elevilor să realizeze o seamă de lucrări, pe parcursul instruirii, care constituiau un fel de carte de vizită a lor. Aceste lucrări, cuprinzând compuneri, rezolvări de probleme, diverse produse executate la lucrul manual, ierbare, insectare, colecţii minerale şi altele asemenea, erau apreciate şi notate, iar cele mai reuşite erau prezentate în cadrul unor expoziţii organizate la sfârşitul anului şcolar.

„Descoperită” după anul 1989 şi numită „portofoliu”, metoda s-a extins şi la celelalte trepte de învăţământ, dându-i-se un conţinut mai precis.

Adrian Stoica o include între metodele „complementare” de evaluare, alături de observare, de investigaţie şi de proiect, nici ele noi dar mai bine definite, evidenţiindu-li-se valenţele formative şi apartenenţa la ceea ce autorul numeşte „evaluare autentică”, prin care înţelege „un concept relativ nou” ce „se referă la evaluarea performanţelor elevilor prin sarcini de lucru complexe” (Stoica, A., 2003).

În această perspectivă, Adrian Stoica include în portofoliu diverse rezultate ale activităţii desfăşurate de elevi pe parcursul instruirii, înregistrate fie cu ajutorul metodelor considerate „tradiţionale” (orale, scrise şi practice), fie cu ajutorul celor numite „complementare” (observarea, proiectul, investigaţia).

Fără a minimaliza valoarea portofoliului şi a celorlalte metode „complementare”, suntem de părere că oricare dintre metodele de evaluare (mai vechi sau mai noi, „tradiţionale” sau „moderne”) trebuie utilizate de profesori şi apreciate în raport cu „fidelitatea” lor, adică cu gradul în care ele reuşesc să măsoare cât mai riguros ceea ce vrem să măsurăm, măsurarea fiind o caracteristică importantă a oricărei evaluări.

Ideea pentru care pledăm este aceea de a nu absolutiza nici o metodă de evaluare ci, aşa cum menţionăm într-un alt paragraf al lucrării, de a utiliza un sistem de metode, amplificându-le astfel avantajele şi diminuându-le dezavantajele.

Să nu uităm că elementele portofoliului sunt lucrări executate de elev, de regulă, în cadrul activităţii independente din afara şcolii, el putând beneficia de îndrumarea altor persoane sau prelua de la acestea lucrări gata făcute.

Aşadar, şi portofoliul va putea fi folosit ca o alternativă, alături de alte metode, conţinutul său fiind precizat de evaluator, în funcţie de specificul disciplinei de studiu, la începutul semestrului sau al anului de învăţământ.

*DISERTAŢIA* este folosită sub această denumire sau sub denumirea de lucrare de absolvire, de licenţă sau de diplomă, la încheierea unei şcoli sau a unei facultăţi.

Disertaţia este o lucrare ştiinţifică mai amplă, susţinută public, în faţa unei comisii de examen. Pe parcursul realizării, autorul (elev sau student) beneficiază de îndrumarea unui profesor, specialist în domeniul din care a fost aleasă tema lucrării.

**2.4. Tehnica testării cu ajutorul itemilor**

Din punct de vedere al obiectivității în notare, itemii se clasifică în:

* itemi obiectivi;
* itemi semiobiectivi;
* itemi subiectivi.

1. *Tehnica testării cu ajutorul itemilor obiectivi*

Testele de progres școlar cuprind itemi obiectivi care structurează sarcinile propuse elevilor în concordanță cu obiectivele asumate de teste. În categoria itemilor obiectivi intră:

* itemi cu alegere duală (adevărat/fals);
* itemi de tip pereche;
* itemi cu alegere multiplă.

Trăsătura fundamentală a itemilor obiectivi o reprezintă obiectivitatea ridicată în evaluarea rezultatelor învățării.

Avantaje şi dezavantaje ale itemilor obiectivi

Avantaje

• Itemul obiectiv poate ﬁ folosit pentru a măsura aproape toate comportamentele care vizează domeniul randamentului şcolar, cu o condiţie: elevii să poată să le exprime verbal.

• Datorită unei reprezentativităţi mai mari şi mai diversiﬁcate, itemul obiectiv, la timp egal, are o mai mare capacitate de control decât itemul subiectiv. El este mai eﬁcace.

• Este mai uşor să sporim ﬁdelitatea evaluarii, căci tehnicile sale de redactare sunt mai bine elaborate şi dezvoltate decât cele ale itemului subiectiv.

• Din cauza speciﬁcităţii sarcinilor, favorizează claritatea în expunerea problemei de rezolvat şi în prezentarea informaţiilor, permiţând rezolvarea lor.

• Dat ﬁind faptul că elevul nu a scris decât un simbol pentru a indica răspunsul său, elimină posibilitatea ascunderii ignoranţei răspunsului.

• Chiar dacă este corectat mecanic, îşi păstrează ﬁdelitatea şi validitatea.

• Tratamentul / prelucrarea statistică a rezultatelor este mai uşoară.

Dezavantaje

• Itemul obiectiv vizează de obicei sarcini relative la primele niveluri ale taxonomiei: cunoaştere şi înţelegere. Rar abordează celelalte niveluri ale aplicării, analizei, sintezei sau evaluării.

• Din aceste motive, examenul realizat numai cu itemi obiectivi nu înglobează decât parţial manifestările unei competenţe complexe. Pertinenţa riscă să scadă.

• Un instrument de evaluare constituit numai din itemi obiectivi este foarte greu şi costisitor de redactat. Sub aspectul redactării cere mult timp, efort şi resurse mai ales umane.

• Sunt puţine persoane care sunt familiarizate cu regulile redactării acestui tip de itemi.

• Nu permite elevului să se exprime în cuvinte proprii.

• Faptul că permite răspunsul la întâmplare scade uneori ﬁdelitatea.

**Itemi cu alegere duală**

Elevilor li se cere să asocieze unul sau mai multe enunțuri cu una dintre variantele: adevărat/fals, corect/greșit, da/nu, etc.

Exemple:

1. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele A(1;0), B(2;3), C(1;11) și dreapta d: x + y – 1 = 0.

Încercuiți litera A dacă afirmația este adevărată și litera F dacă afirmația este falsă.

A F 1. Punctul A aparține dreptei d.

A F 2. Dreptele d și AC sunt concurente.

A F 3. Dreptele AC, OB și d sunt concurente.

1. Dacă apreciezi că rezultatul este adevărat, încercuiește DA, în caz contrar încercuiește NU și apoi scrie în spațiul subliniat rezultatul corect.

DA NU .................... Ecuația dreptei ce trece prin punctele A(2,1) și B(5,3) este

x + 2y – 4 = 0.

**Itemi de tip pereche**

Tehnica itemilor de tip pereche solicită din partea elevilor stabilirea unor corespondențe între cuvinte, propoziții numere, litere sau alte categorii de simboluti așezate pe două coloane. Elementele primei linii, numite premise, constituie enunțul itemului, iar elementele din coloana a doua reprezintă răspunsurile.

Utilizarea acestei tehnici se limitează la măsurarea abilității de a identifica relația existentă între două categorii (reguli – exemple, termeni – definiții, metode – exemplificări, etc.).

Exemple:

1. Stabiliți o corespondență între afirmațiile dintre coloanele X și Y.

X Y

1. Fie dreptele de ecuații: a. (2, 1)

a: x + y + 2 = 0 b. concurente

b: 2x – y – 1 = 0 c. paralele

c: x + 2y = 0 d. (-1, 2)

Atunci ele sunt: e. secante două câte două

1. Fie dreptele din plan

a: x + y – 1 = 0

b: 2x + y = 0

Punctul lor de intersecție are

coordonatele:

1. Centrul de greutate al triunghiului

format din punctele A(1, 3), B(1, 5),

C(4, -5) are coordonatele:

1. Înscieți în spațiul din fața fiecărui număr din coloana A litera din coloana B care indică punctul ce aparține dreptei din coloana A.

A B

.......... 1. x + 1 = 0 M(-1, 0)

.......... 2. 2x – y – 1 = 0 N(5, 7)

.......... 3. y – 3 = 0 Q(2, 2)

.......... 4. x + y – 4 = 0 P(25, 3)

R(1, 1)

**Itemi cu alegere multiplă**

Itemul cu alegere multiplă are două părţi:

• enunţul sau „trunchiul“ sau „premisa“; acesta este o întrebare, un enunţ sau o frază incompletă;

• alternativele sau soluţiile posibile de răspuns din care elevul va selecta răspunsul sau răspunsurile pe care le consideră corecte. Elevul trebuie să aleagă un singur răspuns corect sau cea mai bună alternativă

(în al doilea caz, în unele variante, sunt necesare instrucţiuni speciale pentru modul de alegere a celei mai bune alternative/a alternativei complete); celelalte răspunsuri (incorecte, dar plauzibile) se numesc distractori.

Itemii cu alegere multiplă se numesc de selecţie, căci elevul trebuie să aleagă unul sau mai multe răspunsuri bune dintre mai mule variante, unde, alături de răspunsul/ răspunsurile corecte se aﬂă şi distractori (răspunsuri care au funcţia de a induce în eroare elevul).

Avantaje şi dezavantaje ale itemului cu alegere multiplă (IAM)

Avantaje

• Dintre toate tipurile de itemi cu corectare obiectivă, itemul cu alegere multiplă (IAM) este cel mai ﬂexibil. El poate veriﬁca toate tipurile de achiziţii, de unde marea sa răspândire în practica evaluativă.

• Acest tip de item este eﬁcient şi practic mai ales în cazul deﬁniţiilor, asemănărilor, diferenţelor, relaţiilor cauză-efect sau invers, de identiﬁcare, de evaluare, de generalizare şi de discriminare.

• Maniera de prezentare a unei probleme în enunţ tinde să reducă ambiguitatea răspunsului.

• Enunţarea problemei este simpliﬁcată. Nu este necesară prezentarea unei situaţii şi a unui răspuns ideal, căci este suﬁcient ca un răspuns să ﬁe mai bun decât altul.

• Acest item obişnuieşte elevul să discrimineze: el trebuie să aleagă dintre mai multe variante de răspuns.

• Din cauza celor trei sau patru variante false/ capcane/ răspunsuri greşite care însoţesc răspunsul corect, itemul cu alegere multiplă, dacă este bine redactat, reduce probabilitatea de a ghici; efectul hazardului este neimportant.

• Dacă se analizează răspunsurile greşite alese de elevii care au luat note mici, acest item favorizează diagnosticul erorilor individuale sistematice sau ocazionale.

Dezavantaje

• Itemul cu alegere multiplă nu permite evaluarea anumitor aspecte ale randamentului şcolar: caligraﬁa, exprimarea orală, abilitatea de a manipula obiectele etc.; pe scurt, nu permite evaluarea altor abilităţi decât cele cognitive.

• Dintre toate tipurile de itemi obiectivi, este cel mai greu de redactat. Trebuie respectate multe reguli.

• Capcanele/ distractorii/ variantele false eﬁciente sunt diﬁcil de găsit în număr suﬁcient.

• Sub acest aspect, profesorul cu mai multă experienţă este mai avantajat decât profesorul începător. El cunoaşte erorile frecvente ale elevilor.

• Adesea, evaluarea bazată pe itemi cu alegere multiplă conţine prea multe cerinţe care se raportează la procese mentale simple: cunoaştere sau înţelegere. Competenţa celui care redactează astfel de itemi poate suplini această lipsă, evitând astfel atomizarea/fărâmiţarea conţinuturilor de evaluat.

• Este diﬁcil de prevăzut timpul necesar elevilor pentru terminarea probei care conţine mai mulţi itemi de acest fel.

Exemple:

1. Să se determine t real astfel încât dreptele de ecuații:

a: x + 2y – 2 = 0

b: 2x – 4y + 3 = 0

c: tx + y – 1 = 0 să fie concurente.

a). t = 1 b). t = - 1 c). t = -  d). t =  e). t = 0.

1. Fie punctele A(1, 3), B(1, 5) și C(4, -5). Coordonatele centrului de greutate G al triunghiului determinat de punctele A, B și C sunt:

a). G(1, 2) b). G(-1, 2) c). G(2, 1) d). G(2, 2)

1. *Tehnica testării cu ajutorul itemilor semiobiectivi*

Itemii semiobiectivi sunt de două categorii: cu răspuns scurt/de completare și cu întrebări structurate; în primul caz se folosește o întrebare directă, iar în al doilea caz o afirmație incompletă.

Itemul semiobiectiv sau itemul cu răspuns construit scurt vizează o problemă formulată de cadrul didactic sub forma unei întrebări foarte exacte sau a unui consemn/ordin/ dispoziţie care poate ﬁ însoţit(ă) sau nu de un suport (carte, graﬁc, ilustraţie etc.) sau de un text mai detaliat. Răspunsul la întrebarea formulată trebuie să ﬁe foarte scurt (un cuvânt sau o expresie) şi speciﬁc. Elevul trebuie să dea răspunsul exact şi să-l scrie respectând ﬁe conţinutul, ideea, ﬁe conţinutul şi aspectul exprimării, al verbalizării (o singură expresie este

acceptabilă). Itemul cu răspuns construit scurt permite o corectare semiobiectivă; în anumite situaţii, când răspunsul este extrem de scurt, corectarea tinde către obiectivitate, căci diversitatea răspunsurilor devine practic nulă. Itemul cu răspuns construit scurt (deschis) lasă elevului posibilitatea de a arăta ceea ce a învăţat sau ce ştie; câmpul cognitiv nu se modiﬁcă, pentru că întrebarea este atât de exactă încât nu conţine nicio posibilitate de răspuns ambiguu.

Avantaje si dezavantaje ale itemului cu răspuns construit scurt

Avantaje

• Favorizează apelul la cunoştinţe, contrar itemului cu răspunsuri la alegere, care presupune identiﬁcarea cunoştintelor solicitate printre mai multe răspunsuri sugerate.

• Este mai uşor de redactat decât majoritatea itemilor cu corectare obiectivă sau subiectivă.

• Prin folosirea acestui tip de item, se pot formula mai multe întrebări într-un timp limitat. Acest tip de evaluare este eﬁcace şi are şanse să asigure reprezentativitate.

• Este mai ﬁdel decât itemul cu răspuns construit elaborat.

• Facilitează pregătirea unei corectări obiective. Corectarea este uşoară şi eﬁcace, poate ﬁ realizată inclusiv de personal de birou.

• Nu lasă elevului posibilitatea de a ghici răspunsul şi de a-şi ascunde ignoranţa în spatele cuvintelor. Efectul întâmplării este minimizat.

Dezavantaje ale itemului cu răspuns construit scurt

• Este inadecvat pentru unele discipline de studiu, mai ales atunci când elevii sunt mai avansaţi.

• Solicită o redactare atentă, dacă se doreşte ca răspunsurile să devină unice.

• Corectarea sa este diﬁcil de informatizat, în cazul evaluării unui număr mare de subiecţi.

Acest tip de item se limitează la primele niveluri taxonomice, la procesele mentale simple.

Avantaje şi dezavantaje ale itemului de completare

Avantaje

• Are aceleaşi avantaje ca şi itemul cu răspuns construit scurt.

• În plus, este mai potrivit când se veriﬁcă înţelegerea textului, precizia vocabularului etc.

Dezavantaje

Faţă de dezavantajele itemului cu răspuns scurt, mai prezintă, în plus, următoarele dezavantaje:

• Permite îndeosebi veriﬁcarea aptitudinilor lingvistice, mai puţin stăpânirea cunoştintelor din diverse discipline.

• Este mai avantajos uneori să înlocuim itemul tip completare de frază printr-un item cu răspuns la alegere, mai ales dacă se urmăreşte informatizarea corectării.

• Cere multă atenţie din partea cadrului didactic în redactare pentru a evita ambiguităţile sau multiplicarea răspunsurilor posibile (ex. în cazul sinonimelor).

• Pe planul redactării, este mai puţin sugestiv decât itemul cu răspuns scurt cu o întrebare directă.

Exemplu de item cu răspuns scurt:

Două drepte de ecuații ax + by + c = 0 și dx + ey + f = 0 sunt paralele (dar nu coincid) dacă.................

Exemplu de item cu întebări structurate:

Fie punctele A(1, 2), B(2, 1) și M(0, -3).

1. Să se scrie ecuația dreptei MB;
2. Să se determine ordonata punctului C ce are abscisa 3 și este coliniar cu punctele A și B.

1. *Tehnica testării cu ajutorul itemilor subiectivi*

Acești itemi, numiți itemi cu răspuns deschis, reprezintă forma tradițională de evaluare.

Avantaje şi dezavantaje

Avantaje

• Avantajul major al acestui tip de item constă în aceea că acordă elevului libertatea de expresie. Elevul trebuie nu numai să stăpânească conţinutul din care este evaluat/ veriﬁcat, dar el trebuie să prezinte acest conţinut conformându-se unor reguli şi să ţină cont de criteriile de evaluare care i-au fost prezentate. Deci el trebuie să dovedească două tipuri de abilităţi:

1. aceea de a stăpâni conţinutul;

2. aceea de a redacta răspunsul potrivit criteriilor de evaluare ale

produsului.

• Acest tip de item obligă elevul să studieze totul, marile idei, punctele importante ale programei. Întrebările ﬁind puţine în acest tip de evaluări, ele trebuie să acopere temele globale.

• El permite veriﬁcarea nu numai a rezultatului rezolvării unei probleme, dar în egală măsură procesul care a condus la acel rezultat.

• Acest tip de item este mai potrivit pentru elevi mai mari, mai avansaţi în studiu, când noţiunile generale sunt mai numeroase şi când structurarea gândirii critice este mai importantă.

Dezavantaje

• Ca regulă generală, ﬁdelitatea itemului cu răspuns construit elaborat

este fragilă din două puncte de vedere:

* corectarea: rezultatele variază nu numai de la un corector la altul, dar chiar şi la acelaşi corector pe acelaşi răspuns, de la un moment la altul. Oboseala este unul din motivele care diminuează capacitatea de discriminare a corectorului.
* itemul însuşi: aceleaşi întrebări puse în circumstanţe echivalente aprioric produc rezultate diferite.

• Validitatea acestui item este scăzută din cauza erorilor în alegerea sarcinilor cerute elevilor. Chestionarul care conţine acest tip de itemi prezintă sarcini care nu corespund decât în parte abilităţii care se vrea a ﬁ măsurată. Asemenea erori sunt cu atât mai frecvente cu cât complexitatea acestor abilităţi şi sarcini face mai diﬁcilă legătura dintre schimbarea internă (competenţa) şi manifestările sale (sarcina de îndeplinit - performanţa).

• În timpul corectării, cadrul didactic nu poate evita inﬂuenţa informaţiilor pe care le are despre elev sau despre rezultatele anterioare: efectul halo. Inconştient, corectorul favorizează elevul despre care ştie că este studios sau nu. De multe ori se produce însă reversul (efectul Pygmalion).

• Rezultatele nu permit decât în mică măsură un tratament statistic. Rar se discută şi se stabilesc matematic validitatea, ﬁdelitatea, indicii de diﬁcultate în discriminarea acestora. Acest inconvenient se diminuează din ce în ce mai mult odată cu introducerea informaticii.

• Fidelitatea în apreciere este scăzută.

Exemplu

Fie punctele A(1, 2), B(2, 1) și M(0, -3).

1. Să se scrie ecuația dreptei AB;
2. Sa se calculeze aria triunghiului ABM;
3. Dați exemplu de o dreaptă care este concurentă cu dreptele AM și AB în același timp.

**Test nr. 1**

Clasa a VI – a

Obiective operaționale: Aplicarea noţiunilor învăţate în rezolvarea problemelor de coliniaritate (proprietăţile triunghiului isoscel; proprietăţile punctelor de pe mediatoarea unui segment, suma măsurilor unghiurilor unui triunghi)

Timp de lucru: 45 minute

Subiecte:

1. Fie punctele A, B, C astfel încât AB=4,5cm, BC= 10cm și AC=5,5cm. Demonstraţi că punctele A, B, C sunt coliniare.
2. Fie segmentul [AB] și punctele C, D, E distincte, ce nu aparţin dreptei AB. Ştiind că [CA] ≡ [CB],  și E aparţine mediatoarei segmentului AB, să se demonstreze coliniaritatea punctelor C, D și E.
3. Pe laturile consecutive AB și BC ale pătratului ABCD, se construiesc triunghiurile echilaterale AEB și BFC, primul interior și al doilea exterior pătratului. Să se demonstreze că punctele D, E, F sunt coliniare.

Barem de corectare:

1. 2 p
2. 3 p
3. 4 p

1 p din oficiu

**Test nr. 2**

Clasa a VII – a

Obiective operaționale:

1. Aplicarea noţiunilor învăţate în rezolvarea problemelor de coliniaritate și concurență
2. Deducerea unor rezultate și verificarea acestora utilizând noțiunile învățate.

Timp de lucru: 45 minute

Subiecte:

Bifați cu x în căsuța corespunzătoare răspunsului pe care îl considerați corect.:

1. Oricare 3 puncte din plan sunt coliniare.
2. Fie ∆ ABC, dreptele AD, BE, CF sunt concurente, unde D(BC), E(AC), F(AB) și AB = BC = 20, AF = FB, CD = 12, CE = 10, atunci AC = 50.
3. Înălțimile unui triunghi sunt concurente.
4. Fie trapezul ABCD cu bazele AB și CD, construim în exterior triunghiurile echilaterale ABM și CDN. Atunci dreptele AC, BD, MN sunt concurente.
5. Într-un triunghi ortocentrul, centrul de greutate și centrul cercului înscris sunt coliniare.
6. Teorema lui Ceva este utilizată în demonstrarea concurenței unor drepte în triunghi.
7. Într-un patrulater insciptibil ABCD cu BC = AB + CD, bisectoarele unghiurilor A și D și cu BC sunt concurente.
8. Mediatoarele unui triunghi nu sunt concurente.
9. Dacă AB = 10, AC = 4 și BC = 6, atunci punctele A, B, C nu sunt coliniare.
10. Într-un triunnghi dreptele determinate de vârfurile triunghiului şi punctele de contact ale cercului înscris cu laturile opuse sunt concurente.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| DA |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| NU |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Barem de corectare; 1; 9 – 0,5p

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 – 1p; 1p din oficiu

**Test nr. 3**

Clasa a IX – a (M2)

Obiective operaționale:

1. Să demonstreze coliniaritatea a trei puncte date utilizând condiția de coliniaritate a trei puncte și condiția de coliniaritate a doi vectori .
2. Să determine condiții necesare și suficiente pentru coliniaritatea a trei puncte date utilizând operații cu vectori și proprietăți ale acestora.

Timp de lucru: 50 minute

Subiecte:

1. Într-un trapez mijloacele bazelor, punctul de intersecție a diagonalelor și punctul de intersecție a laturilor neparalele sunt patru puncte coliniare.
2. Fie ABC un triunghi în care notăm cu D simetricul centrului de greutate față de mijlocul lui (AB) și cu E simetricul lui C față de B. Arătați că punctele A, D, E sunt coliniare.
3. În ∆ABC fie D, E mijloacele laturilor (AB), (AC). Considerăm punctele C`AB, B`AC astfel încât (B, A ; C’) = (A, C ; B’) . Arătați că punctele D, E și I mijlocul lui (B`C`) sunt coliniare.

Barem de corectare:

1. 2,5 p
2. 3 p
3. 3,5p

1 p din oficiu

**Test nr. 4**

Clasa a X – a (M2)

Obiective operaționale:

1. Să verifice concurența a două sau mai multe drepte.
2. Să determine coordonatele punctelor de intersecție a liniilor importante în triunghi.

Timp de lucru: 50 minute

Subiecte:

În sistemul de coordonate careziene xOy se consideră următoarele enunțuri și cerințe; alegeți varianta corectă de răspuns.

1. Se consideră dreptele de ecuație : a: 2x + 3y = 0

b: x – y +1 = 0

c: 3x + y – 2 = 0, atunci dreptele a, b, c:

1. sunt paralele
2. sunt concurente
3. determină un triunghi
4. a este paralelă cu b și c este secantă.
5. Se consideră ∆ ABC, A(2, 4), B(1, 6) C(-3, -4). Coordonatele centrului de greutate al triunghiului sunt:
6. G(0, 2)
7. G(2, 1)
8. G(-1, -2)
9. Punctele A, B, C sunt coliniare.
10. Într-un triunghi ABC se dau ecuațiile laturilor AB: 5x – 3y + 2 = 0 și ale înălțimilor AH: 4x – 3y + 1 = 0 și BH: 7x + 2y – 22 = 0. Atunci:
11. BC: 3x + 4y – 22 = 0, AC: 2x – 7y – 5 = 0, HC: 3x + 5y – 23 = 0
12. BC: 4x + 3y – 22 = 0, AC: x – 7y – 5 = 0, HC: 3x + 5y – 23 = 0
13. BC: 3x + 4y – 22 = 0, AC: 2x – 7y – 5 = 0, HC: x + 2y – 23 = 0
14. BC: 3x + 4y – 10 = 0, AC: 2x – 7y + 5 = 0, HC: 3x + 5y – 23 = 0

Barem de corectare:

1. 3 p
2. 3 p
3. 3 p

1 p din oficiu

**Test nr. 5**

Clasa a XI – a

Obiective operaționale:

1. Să demonstreze coliniaritatea a 3 puncte de coordonate date din plan cu ajutorul determinanților.
2. Să scrie ecuația dreptei determinate de două puncte cu ajutorul determinanților.
3. Să determine aria unui triunghi cu ajutorul determinanților.

Timp de lucru: 50 minute

Subiecte:

1. În sistemul de coordonate careziene xOy se consideră punctele A(2, 1), B( 3, 2), C(a, a+2), unde a este un număr real.
2. Determinați a astfel încât punctele date să fie coliniare.
3. Scrieți ecuația dreptei AB.
4. Verificați dacă punctele A, B și O sunt coliniare, în caz negativ calculați aria ∆ABC.
5. În sistemul de coordonate careziene xOy se consideră punctele A(6, 0), B(0, 4), C(1, 5). Arătați că picioarele perpendicularelor din O pe dreptele AB, BC și CA sunt coliniare.
6. În sistemul de coordonate careziene xOy se consideră punctele A(-1, 0), B(3, 2), C(-2, 1), D(2, 1) și dreapta d: x – y +1 = 0. Determinați coordonatele lui M știind că ∆MAB și ∆MCD au arii egale.

Barem de corectare:

1. 3 p
2. 3 p
3. 3 p

1 p din oficiu

**Bibliografie**

1. **I. D. Albu**, “*Geometrie. Concepte şi metode de studiu. Partea I: Construcția axiomatică a geometriei euclidiene*”, Editura Mitron, Timișoara 1998
2. **I. D. Albu**, **I. D. Bîrchi**, ”*Geometrie vectorială în liceu*”, Editura Bîrchi, Timișoara 2004
3. **C. Chirilă şi alții**, ”*Formarea continuă a profesorilor de matematică în societatea cunoașterii*”, Editorul materialului ISJ Iași, Iași 2012
4. **D. Brânzei, R. Brânzei**, ”*Metodica predării matematicii*”, Editura Paralela 45, Pitești 2010
5. **D. Brânzei şi alţii**, ”*Bazele raționamentului geometric*”, Editura Academiei, București, 1983
6. **C. Cucoş**, ”*Teoria și metodologia evaluării*”, Editura Polirom, Iași, 2008
7. **S. Vladimirescu**, ”*Probleme de coliniaritate și concurență în plan*”, Editura Sitech, Craiova, 2002
8. **L. Nicolescu, V. Boskoff**, ”*Probleme practice de geometrie*”, Editura Tehnică, București, 1990
9. **T. Lalescu**, ”*Geometria triunghiului*”, Editura Apolo, Craiova, 1993
10. *Manuale alternative de Matematică pentru clasele* a VI – a, a VII – a, a IX – a, a X – a, a XI – a, Editurile Didactică și Pedagogică, Teora, All, Petrion, Mathpress, 1995 – 2012
11. **Ghe. Ţiţeica**, ”*Probleme de geometrie*”, Editura Tehnică, 1965
12. **A. Stoica şi alţii**, ”*Ghid practic de elaborare a itemilor pentru examene*”, I. S. E. , Bucureşti, 1996
13. **J. Hadamard**, ”*Lecţii de geometrie elementară*”, Editura Tehnică, Bucureşti, 1960
14. **Internet :** [www.Wikipedia](http://www.Wikipedia) ; [www.MathWorld](http://www.MathWorld) .

**DECLARAŢIE DE AUTENTICITATE A**

**LUCRĂRII METODICO - ŞTIINŢIFICE PENTRU**

**ACORDAREA GRADULUI DIDACTIC I**

TITLUL LUCRĂRII

**METODICA REZOLVĂRII PROBLEMELOR DE COLINIARITATE ŞI CONCURENŢĂ**

Autorul lucrării: Bordînc Daniela Rodica

Lucrarea este elaborată în vederea obținerii gradului didactic I organizat de către D. P. P. D. din cadrul Universității de Vest Timișoara, sesiunea August 2014 .

Prin prezenta, subsemnata Bordînc Daniela Rodica declar pe propria răspundere că această lucrare a fost elaborată de către mine și îmi aparține în întregime.

Nu au fost folosite alte surse decât cele menționate în bibliografie.

Nu au fost preluate texte sau alte elemente de grafică din alte lucrări sau alte surse fără a fi citate şi fără a fi precizată sursa preluării inclusiv în cazul în care sursa o reprezintă alte lucrări ale mele.

Lucrarea nu a mai fost folosită în alte contexte de examen sau concurs.

Data: 16 august 2013

Semnătura: