Drumuri minime

Dinulică Augustin

Clasa a XI-a,

Liceul Pedagogic ,,C D Loga" Caransebeș

Temă pentru clasele a VII-a și a VIII-a.

Fiind date două puncte A și B,vom numi drum de la A la B orice linie (segment,linie frântă sau curbă) care începe din A și se termină în B.Deși nu este o definiție riguros elaborată, descrierea elimină posibilitatea unor interpretări diferite.Intuitiv abordând faptele,vom înțelege bine ce vrea să fie lungimea acestui drum.

În baza relațiilor existente între elementele unui triunghi,avem următoarele rezultate:

(1)Drumul cel mai scurt dintre două puncte A și B este segmentul [AB].

(2)Drumul cel mai scurt de la un punct O,exterior dreptei d,până la dreapta d este perpendiculara [OP],cu P pe dreapta d.

Aceste rezultate sunt frecvent folosite în rezolvarea unor probleme de extrem geometric.

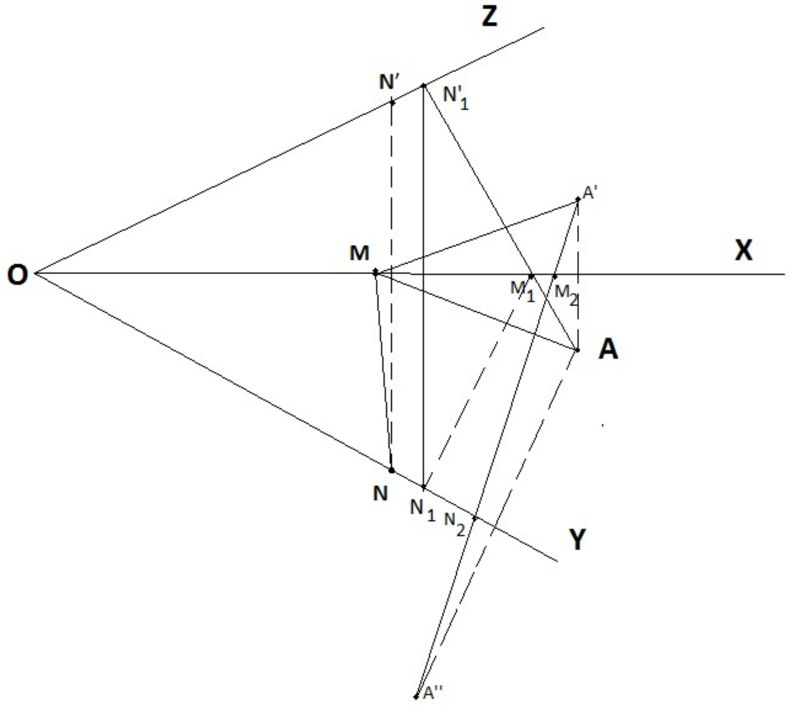
Exemplul 1: Fie un unghi $\angle XOY$ cu m($\angle XOY$)≤45°,

$A \in Int(\angle XOY), M \in (OX$ și $N \in (OY$.

Să se afle lungimea minimă a următoarelor drumuri:

a)*AMN=AM+MN* și

b)*AMNA=AM+MN+NA*.



*Soluție:*a)OX fiind axă de simetrie,fie (OZ simetrica lui (OY și N' simetricul lui N.Drumul AMN este de aceeași lungime ca și drumul AMN'.Perpendiculara AN'_1 pe OZ realizează drumul AMN' minim. Intersecția lui AN'_1 cu OX fiind M_1 și simetricul lui N'_1 față de OX fiind N_1 ,drumul minim este AM_1N_1.

b)Fie A' și A'' simetricele lui A față de OX și

OY.Drumul AMNA are aceeași lungime ca și $A'MNA''$,care are valoare minimă dacă A', M, N și A'' sunt coliniare.Dacă $A'A''$ intersectează (OX și (OY în M_2 și N_2,drumul minim AMNA este AM_2N_2A.

*Exemplul 2:*Este vorba de Punctul lui Torricelli. Matematicianul francez Pierre de Fermat(1601-1665) este cel care a formulat problema determinării punctului aflat la distanta minimă de vârfurile unui triunghi,într-o scrisoare adresată confratelui său italian Evanghelista Torricelli. Din corespondența celor doi au rămas posternității următoarele teoreme:

Teorema 1:(Torricelli)

Se consideră triunghiul ABC cu toate unghiurile sale strict mai mici decât 120□ și pe laturile triunghiului se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABC_1,ACB_1 și BCA_1. Cercurile circumscrise acestor triunghiuri au un punct comun.

Demonstrație:Fie T punctul de intersecție al cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC_1 și ACB_1. Atunci patrulaterele $ATBC_1$ și $ATCB_1$ sunt inscriptibile, deci

$m(\angle ATB) = 180° - m(\angle AC_1B) = 180° - 60° = 120°$ și

$m(\angle ATC) = 180° - m(\angle AB_1C) = 180° - 60° = 120°$, de unde

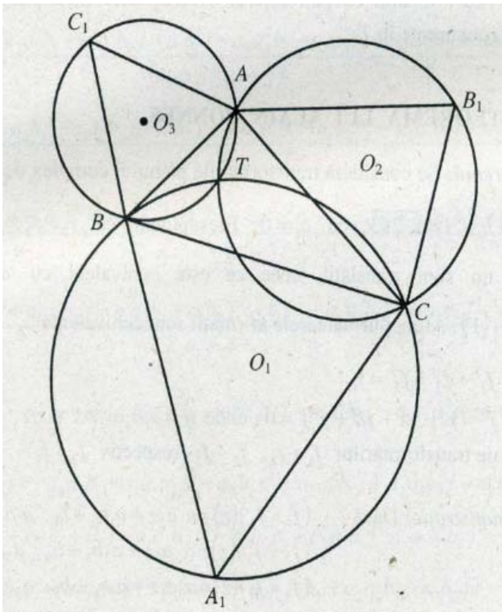
$m(\angle BTC) = 360° - m(\angle ATB) - m(\angle ATC) = 120°$, deci

$m(\angle BTC) + m(\angle BA_1C) = 120° + 60° = 180°$,i.e patrulaterul BTCA este inscriptibil,punctul T aflându-se pe cercul circumscris triunghiului BCA_1.

Astfel,s-a demonstrat că există un punct unic din plan cu proprietatea că

$m(\angle ATB) = M(\angle ATC) = M(\angle BTC) = 120°$.

Punctul T se numește Punctul lui Torricelli pentru triunghiul ABC.El coincide după cum se va demonstra ,cu punctul lui Fermat,care realizează minimul sumei distantelor la vârful unui triunghi.



Teorema 2:

Se consideră triunghiul ABC cu toate unghiurile sale strict mai mici decât 120□ și triunghiurile echilaterale ABC_1,ACB_1 și BCA_1 construite în exterior.Fie T punctul definit mai sus.Atunci:

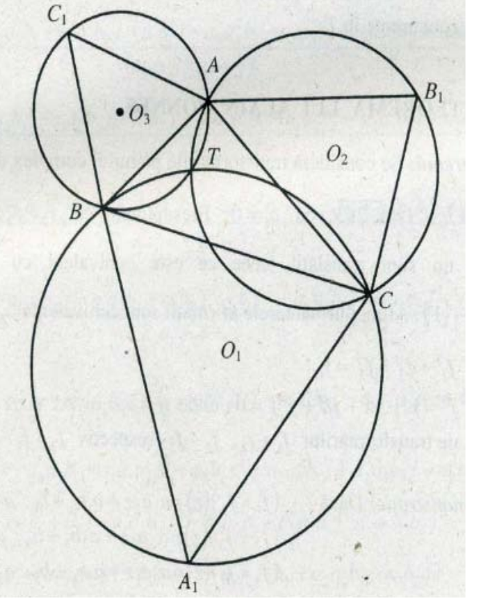
a)AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

b)$AT + BT + CT = AA_1 = BB_1 = CC_1$.

Demonstrație:

a)T fiind punctul de concurență al cercurilor din teorema precedentă,în patrulaterul inscriptibil $BTCA_1$ avem

$$m(\angle A_1TC) = m(\angle A_1BC) = 60° \Rightarrow m(\angle A_1TA) = m(\angle A_1TC) + m(\angle CTA) = 60° + 120° = 180° \Rightarrow T \in AA_1$$



Analog rezultă

$$T \in BB_1, T \in CC_1 \Rightarrow AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = \{T\}.$$

b)Aplicând prima teoremă a lui Ptolemeu pentru patrulaterul inscriptibil $BTCA_1$ și ținând cont că triunghiul BCA_1 este echilateral

$$\Rightarrow BC \cdot TA_1 = BT \cdot A_1C + A_1B \cdot CT \Rightarrow TA_1 = BT + CT \Rightarrow AT + BT + CT = AA_1 = BB_1 = CC_1$$

,procedând analog în patrulaterele inscriptibile $ATBC_1$ și $ATCB_1$.

<u>Teorema 3</u>:(Fermat)

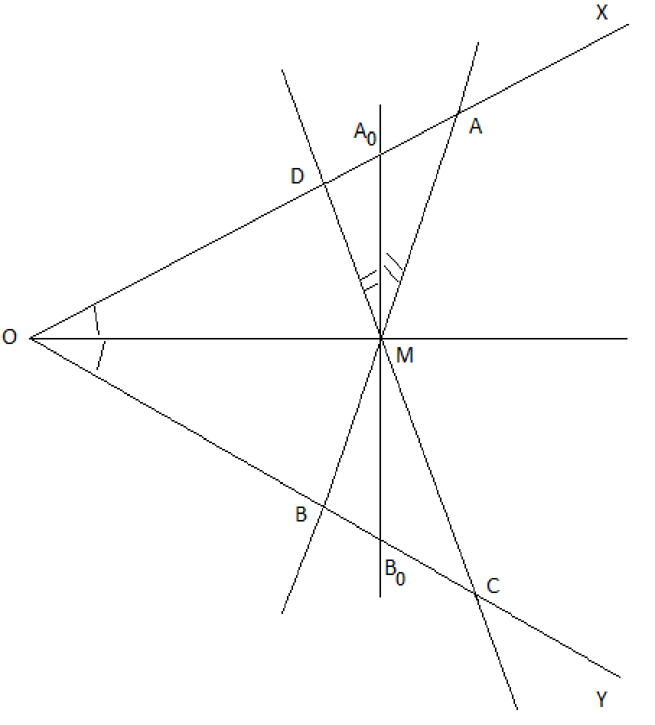
Punctul T considerat anterior are proprietatea că realizează minimul sumei MA+MB+MC ,cu M punct din planul triunghiului ABC.

Demonstrație:

Fie M un punct oarecare din planul ABC.Aplicând inegalitatea lui Ptolemeu în patrulaterul MBA_1C obținem:$MA_1 \cdot BC \leq MB \cdot A_1C + MC \cdot A_1B$ și ținând cont că triunghiul BCA_1 este echilateral, simplificăm și obținem $MA_1 \leq MB + MC$, adică $AA_1 \leq AM + MA_1 \leq MA + MB + MC$,pentru orice M din planul triunghiului ABC.Folosind teorema 2,rezultă că:$TA + TB + TC = AA_1 \leq MA + MB + MC$ cu egalitate,dacă și numai dacă M=T.

Astfel,s-a demonstrat că T(Punctul lui Torricelli) realizează minimul sumei distanțelor de la un punct din plan la vârfurile triunghiului.

<u>*Exemplul 3*</u>*:*Prin punctul M situat pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle XOY$ se duce o dreaptă variabilă d , care taie (OX în A și (OY în B.Să se determine A și B astfel încât :



a)lungimea AB să fie minimă.

b)OA+OB să fie minimă.

c)perimetrul lui AOB să fie minim.

*Soluție:*a)Văzând dreapta d rotindu-se în jurul punctului M ,putem aprecia că situațiile de minim și de maxim de la a) și b) s-ar realiza când $d = A_0B_0 \perp OM$. Acest fapt trebuie demonstrat.Fie AB o poziție oarecare diferită de A_0B_0 și CD simetrica lui AB față de OM,care va fi și simetrica lui AB față de A_0B_0 .

Avem următoarele congruențe:$(MA_0) \equiv (MB_0), (MD) \equiv (MB), (OD) \equiv (OB)$ și $\measuredangle A_0MD \equiv \measuredangle A_0MA$.

Putem presupune OB<OA ,fără a restrânge generalitatea.Folosind teorema bisectoarei,din OB<OA obținem MD=MB<MA , apoi $A_0D < A_0A$. Pe de altă parte , $(MA_0$ fiind bisectoare în triunghiul MAD ,$MA_0 < (MA + MD)/2$.

Pentru a):$A_0B_0 = 2MA_0 < MA + MD = MA + MB = AB$; pentru b):
$OA_0 + OB_0 = OA_0 + OA_0 = OA + OD - (AA_0 - A_0D) < OA + OD = OA + OB$;
pentru c):$A_0B_0 < AB$ și $OA_0 + OB_0 < OA + OB \Rightarrow P_{A_0OB_0} < P_{AOB}$.

Bibliografie:

1)Corneliu Savu ,Dan Popoiu-“Matematică-Complemente de geometrie plană”, Editura Corint,2001.

2)Camelia Oprea-“Punctul lui Torricelli”-Articol RMT nr. 3/2012.

3)Colecția Gazeta Matematică.