Probleme de sinteză – geometrie

Clasa a VII-a

1. Se consideră pătratul ABCD şi punctul E pe latura AB. Diagonala AC taie segmentul DE în punctul P. Perpendiculara dusă din punctul P pe DE intersectează latura BC în punctul F. Demonstrați că EF=AE+FC.

(OJM 2008)

2. Punctul O este intersecția mediatoarelor laturilor triunghiului ABC. Fie D intersecția dreptei AO cu segmentul BC. Ştiind că $OD = BD = \frac{1}{3}BC$, să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

(OJM 2007)

3. Se consideră triunghiul ABC în care M este mijlocul segmentului AB iar D este piciorul bisectoarei din B. Să se arate că dacă $MD \perp BD$, atunci AB=3BC.

(OJM 2005)

4. În triunghiul ABC se duce bisectoarea CD unde $D \in AB$. Centrul cercului circumscris triunghiului ABC coincide cu centrul cercului înscris triunghiului BCD. Demonstrați că $AC^2 = AD \cdot AB$

(OJM 2005)

5. Fie ABC un triunghi şi D un punct pe latura BC. Bisectoarele unghiurilor $\angle ADB$ şi $\angle ADC$ intersectează AB şi AC în punctele M şi N, iar bisectoarele $\angle ABD$ şi $\angle ACD$ intersectează DM şi DN în punctele K şi L, respectiv. Arătați că AM=AN dacă şi numai dacă MN şi KL sunt paralele.

(OJM 2004)

6. Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel ABC (AB=AC) şi punctele M, $P \in [AB]$ astfel că AM=BP. Fie D mijlocul laturii BC iar R şi Q intersecțiile perpendicularei din A pe CM cu CM şi respectiv BC. Arătați că: a) $\angle AQC \equiv \angle PQB$ b) $m(\angle DRQ) = 45^0$

(OJM 2004)

Indicații / Soluții:

1. Construiți în prelungirea lui BC un segment (CQ)≡(AE) şi demonstrați că ΔDEF≡ΔDFQ
2. Se tratează problema pe două cazuri: Δ ascuțitunghic şi Δ obtuzunghic; a) ΔABC ascuțitunghic: se alege de exemplu E mijlocul (DC), ΔODE echilateral, ΔAOC este dr.isoscel...

$m(\angle ABC) = 45^0, m(\angle ACB) = 75^0, m(\angle BAC) = 60^0$

b) ΔABC obtuzunghic: $m(\angle ABC) = 45^0, m(\angle ACB) = 15^0, m(\angle BAC) = 120^0$

3. Construiți MN||BC, N$\in$BC, $MN \cap BD = \{P\}$. Triunghiul MBP este isoscel, MD$\perp$BP$\Rightarrow BD = DP$.

Triunghiurile NDP şi CDB (ULU) sunt congruente, deci ND=DC, ceea ce implică $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, deci AB=3BC

4. Se demonstrează că unghiurile triunghiului ABC sunt 36^0, 72^0, 72^0. Din asemănarea triunghiurilor CAD şi BCA se obține relația cerută.

5. Demonstrați că AK şi AL sunt bisectoare şi aplicați teorema bisectoarei în ΔAMD şi ΔAND şi reciproca teoremei lui Thales.

6. Fie ordonarea A-M-P-B şi se alege E astfel încât ABEC este pătrat cu centrul D şi $\{N\} = AQ \cap BE$ şi se demonstrează prin congruență de triunghiuri că $\angle PQB \equiv \angle NQB$ şi se obține cerința.

Din asemănarea triunghiurilor ADQ şi RQC $\Rightarrow \frac{DQ}{RQ} = \frac{AQ}{CQ}$. Din asemănarea triunghiurilor DRQ şi ACQ se obțin unghiuri congruente, de unde $m(\angle DRQ) = m(\angle ACQ) = 45^0$