OLIMPIADE LOCALE 2007

#

HARGHITA

CLASA A V-A

1. Calculaţi: **a)** $\left[\left(54:3^2-2^2\right)\cdot 26-5^2\right]:3^2$; **b)** $3a+8b+5c$, dacă $a+b=71$ şi $b+c=92$; **c)** $x+1$, dacă $x=1+2^2+...+2^{2006}$.

2. a) Câte numere de trei cifre sunt, în care nu apar cifrele 2 şi 9?

b) Câte cifre de 9 apar în numărul $10^{2007}-1$?

Nagy Jenö

3. Determinaţi mulţimile A, B şi C nevide, distincte două câte două, dacă îndeplinesc simultan condiţiile:

a) $A \cup B \cup C = \{1,2,3\}$; **b)** $A \cap B \cap C = \varnothing$;

c) $A \setminus C = \{1\}$; **d)** $C \setminus A = \{3\}$.

Precizaţi toate cazurile posibile.

Csatlos Blaga Maria

4. Se consideră numerele:

$a = 8^{222} - 3 \cdot 4^{332} - 2^{663}$ şi $b = 3^{500} - 2 \cdot 3^{449} - 2 \cdot 3^{448} - ... - 2 \cdot 3^{443} - 2 \cdot 3^{442}$.

Se cere:

a) Să se compare cele două numere;

b) Să se determine cel mai mic număr prim p de două cifre, astfel încât $a + b + p$ să se dividă cu 10.

c) Să se arate că numărul $a + b + n^2$ nu se divide cu 5, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Csatlos Blaga Maria

5. Ionel şi tatăl său au împreună 33 ani. Peste 15 ani vârsta lui Ionel va fi jumătate din vârsta mamei, iar peste 18 ani vârsta lui Ionel va fi jumătate din vârsta tatălui. Câţi ani are acum Ionel?

Nagy Jenö

CLASA A VI-A

1. Calculaţi: **a)** x, dacă $\dfrac{2^{80} + 2^{80}}{2^{79} + 2^{79}} = \dfrac{x}{6 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}$;

b) $2 \cdot A \cdot B$, dacă $A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{1}{10}\right)$ şi $B = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot ... \cdot \left(1 + \frac{1}{9}\right)$.

c) $\left(1\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right)^2 \cdot (0,5)^2$.

2. a) Numărătorul unei fracţii este un număr prim, iar numitorul este mai mare cu 3 decât numărătorul. Determinaţi fracţiile care îndeplinesc condiţiile de mai sus, ştiind că sunt mai mari decât $\frac{3}{5}$ şi mai mici decât $\frac{4}{5}$.

Nagy Jenö

3. Să se rezolve ecuaţia: $0,(1x) + 0,(2x) + 0,(3x) + ... + 0,(9x) = x$.

4. Lungimea segmentului $[AB]$ este $2a$ cm, M este un punct interior al segmentului $[AB]$, P şi Q sunt mijloacele segmentelor $[AM]$ respectiv $[BM]$. Calculaţi lungimea segmentului $[PQ]$.

Nagy Jenö

5. Diferenţa măsurilor a două unghiuri este 54°, iar raportul lor este 5:2. Determinaţi măsurile unghiurilor.

Nagy Jenö

CLASA A VII-A

1. Calculați: **a)** $(-2)^0+(-2)^{40}\cdot(-2)^{20}:64^{10}$; **b)** $\left(2^{51}+\left|2^{51}-3^{34}\right|\right):3^{33}$;

c) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{2^{n+1}}\right]\cdot\left(-2^n\right)$, unde $n\in\mathbb{N}$.

2. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația: $5^x+5^y=15650,\ x<y$.

3. a) Fie x și y numere reale pozitive. Să se arate că: $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\geq x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$.

b) Arătați că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, are loc egalitatea:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{4}+3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

4. Fie $ABCD$ un dreptunghi, iar P și Q mijloacele laturilor AB respectiv AD. Fie $\{M\}=DP\cap CQ$. Determinați valoarea rapoartelor $\frac{MQ}{MC}$ și $\frac{MD}{MP}$.

5. Fie ABC un triunghi echilateral, iar M mijlocul laturii AC. Paralela prin C la AB intersectează în P perpendiculara dusă din M pe BC, respectiv în Q perpendiculara ridicată în M pe AC. **a)** Demonstrați că triunghiul MPQ este isoscel.

b) Dacă $AB=2a$ cm, $MP=b$ cm, calculați perimetrul patrulaterului $ABPQ$.

CLASA A VIII-A

1. Calculați: **a)** $\frac{1}{5}\sqrt{75}-\frac{1}{3}\sqrt{27}+\frac{1}{4}\sqrt{48}-\frac{1}{6}\sqrt{108}$;

b) $\left[\left(\sqrt{7}\right)^{-3}\right]^4:\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^3\right]^4$; **c)** $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{7}}-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

2. Dacă $a,b\in(0;1]$ și $n>0$, demonstrați că $\frac{a+n}{b}+\frac{b+n}{a}\geq n\cdot(a+b)+2$.

3. Să se arate că:

$\sqrt{18+3x-x^2}+\sqrt{9-x^2}+\sqrt{9-6x+x^2}+\sqrt{9x-3x^2}\leq 12$ oricare ar fi $x\in[0;3]$.

4. Arătați că dacă într-un paralelipiped dreptunghic jumătate din aria totală este egală cu pătratul diagonalei, atunci paralelipipedul este cub.

5. Într-un tatraedru $ABCD$ avem $AB=BC=AC=4\sqrt{3},\ DC\perp AB$ și $DC=4\sqrt{2}$. Dacă M este mijlocul segmentului AB și $DM=2\sqrt{5}$, calculați:

a) $d(D,(ABC))$; **b)** $\sin\left(\sphericalangle((ABD),(ABC))\right)$; **c)** $m\left(\sphericalangle(CD,(ABC))\right)$.

Back

HUNEDOARA

CLASA A V-A

1. a) Aflați numărul: $333:3^2+33^2:\left(33-3^3+3^2-3^1-3^0\right)^2$.

b) Scrieți numărul 102 ca sumă de cel puțin două numere naturale formate fiecare numai din cifre egale cu 3. Câte soluții are problema?

2. Doi bicicliști au de parcurs o distanță de 100 km fiecare. Primul parcurge câte 20 km în reprize de 40 de minute separate de pauze de câte 10 minute. Al doilea biciclist parcurge câte 25 km în reprize de 45 de minute separate de pauze de câte 15 minute. Care biciclist parcurge traseul mai repede? Justificați răspunsul dat.

3. a) Calculați în două moduri: $987 \cdot (654 + 3)$.

b) Un elev, la înmulțirea a două numere naturale de câte trei cifre fiecare, a scris din greșeală cifra unităților unui factor cu 3 mai mare, obținând ca rezultat 56457 în loc de 56088. Ce numere trebuia să scrie elevul? Reconstituiți fiecare înmulțire.

4. Aflați câte numere naturale îndeplinesc simultan condițiile:

a) Sunt formate din cifre impare distincte;

b) Sunt divizibile cu 5;

c) Au suma pătratelor cifrelor un număr natural par;

d) Au suma cifrelor un număr natural pătrat perfect.

CLASA A VI-A

1. Completați căsuțele libere știind că fiecare număr, exceptând primul și ultimul, este media aritmetică a vecinilor săi.

6			72		

2. Punctele A, B, C, D, E sunt coliniare și B este mijlocul segmentului (AC), C este mijlocul segmentului (AD) iar D este mijlocul segmentului (AE).

a) Arătați că: $AB + 2 \cdot BC + 3 \cdot CD + 4 \cdot DE = 3 \cdot AC + 2 \cdot BD + CE + BE$.

b) Dacă $CE - BD = 24$ cm, calculați lungimile segmentelor (AB), (CD) și (AE).

3. Se consideră proporția: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

a) Arătați că numărul $a \cdot b \cdot c \cdot d$ este pătratul unui număr rațional.

b) Dacă $a < b < c < d$ și $7 \cdot ad - 6 \cdot bc + 5 \cdot abcd = 186$, aflați $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

4. În jurul punctului A se consideră unghiurile $\sphericalangle BAC, \sphericalangle CAD, \sphericalangle DAE, \sphericalangle EAB$ astfel încât $m(\sphericalangle BAC) = 60°$, $4 \cdot m(\sphericalangle CAD) = m(\sphericalangle BAD)$ iar $m(\sphericalangle DAE)$ este cu $10°$ mai mare decât suplementul unghiului $\sphericalangle BAC$. **a)** Calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle CAD, \sphericalangle DAE, \sphericalangle BAE$. **b)** Aflați măsura unghiului format de bisectoarea $(AM$ a unghiului $\sphericalangle BAC$ cu semidreapta $(AD$. **c)** Arătați că punctele M, A, E sunt coliniare.

CLASA A VII-A

1. Cifrele a, b, c ale numărului $\overline{abc}$ sunt direct proporționale cu cifrele x, y, z ale numărului $\overline{xyz}$. Se știe că $\overline{xyz} \,\vdots\, 3$.

a) Arătați că dacă $a \,\vdots\, x$, atunci $\overline{abc} \,\vdots\, 3$.

b) Rămâne valabilă afirmația $\overline{abc} \,\vdots\, 3$ dacă a nu este divizibil cu x?

2. În triunghiul oarecare ΔABC, $(BN$ și $(CP$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle ABC$, respectiv $\sphericalangle ACB$, iar (AM) este mediană, $N \in AC, P \in AB, M \in BC$.

Dacă $BN \cap AM = \{E\}, CP \cap AM = \{F\}$, arătați că $\frac{AE}{EM} + \frac{AF}{FM} > 2$.

3. Fie $a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$. Arătați că $\frac{\sqrt{a}}{b+c} = \frac{\sqrt{b}}{a+c} = \frac{\sqrt{c}}{a+b}$ dacă și numai dacă $a = b = c$.

4. În trapezul $ABCD$, (AB) este baza mare și $BD > AC$. **a)** Dacă M este mijlocul diagonalei (AC), arătați că $DM < \frac{AC}{2}$. **b)** Demonstrați că $BD - AC = AB - CD$.

CLASA A VIII-A

1. $ABCD$ este un pătrat și de aceeași parte a acestuia se consideră perpendicularele AA', BB', CC', DD' pe planul pătratului. Știm că $AB = a$, $AA' = 2a$, $BB' = a$, $DD' = \frac{3a}{2}$.

a) Determinați lungimea segmentului (CC') astfel încât punctele A', B', C', D' să fie coplanare. **b)** În condițiile punctului a), calculați distanța de la centrul pătratului $ABCD$ la dreapta $B'D'$ și distanța de la punctul A la planul $(A'B'C')$. **c)** Dacă $A'B'$ și $A'D'$ intersectează planul (ABC) în punctele P și Q, stabiliți dacă punctele P, Q, C sunt coliniare.

2. Se consideră mulțimea $M = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \sqrt{\overline{ab1} - \overline{1ab}} \right\}$.

a) Aflați numărul elementelor mulțimii $M \cap \mathbb{Q}$.

b) Determinați numărul $\overline{ab}$ știind că $x \in \left(2\sqrt{5}, 12\right]$.

3. Fie A, B, C, D puncte necoplanare și $(BM$, $(CN$, $(DP$ bisectoarele unghiurilor triunghiului $\Delta BCD, M \in CD, N \in BD, P \in BC$. Dacă $(AM$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle CAD$ și $(AN$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAD$ demonstrați că $(AP$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$.

4. Numerele x, y, z sunt reale, pozitive și distincte.

a) Să se arate că se pot alege $a, b \in \{x, y, z\}$, a, b distincte, astfel încât $ab + 1 \geq a + b$.

b) Să se demonstreze că: $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz + 1 \geq 2xy + 2yz + 2zx$.

Back

IALOMIȚA

CLASA A V-A

1. a) Arătați că pătratul numărului $A = 2003^{2006} + 2004^{2006} + 2005^{2006}$ este divizibil cu 100.

b) Precizați dacă $A + 2007^{2007}$ este pătratul unui număr natural.

2. Să se determine bazele de numerație x, y, z pentru care are loc egalitatea:

$$\overline{21}_x + \overline{13}_y + \overline{51}_z = \overline{xy}.$$

3. a) Calculați suma: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2006\cdot 2007}$.

b) Determinați cea mai mică valoare a lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care numărul $a = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2006\cdot 2007} + \frac{n}{2007}$ este pătrat perfect.

4. Pentru paginarea unei cărţi s-au folosit 420 cifre. Câte pagini are cartea?

CLASA A VI-A

1. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\frac{1+2+3+...+2006}{2006-2005+2004-2003+...+4-3+2-1}=\frac{3x-1}{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{2006\cdot 2007}};\ x\in\mathbb{N}.$$

2. a) Aflaţi x din $\frac{a}{x}=\frac{27^{669}}{9}$ ştiind că $a=3^{2007}-3^{2006}-3^{2005}$.

b) Aflaţi numerele naturale a, b, c ştiind că a este număr natural prim şi $\frac{a}{b}=\frac{c}{7{,}5}$.

3. În triunghiul ABC, isoscel $(AB\equiv AC)BB'$ este bisectoarea unghiului ABC. Aflaţi unghiurile triunghiului ABC dacă triunghiul $BB'C$ este isoscel.

4. Fie M, N, P mijloacele laturilor $(AB),(BC)$ respectiv (AC) ale triunghiului ABC. Luăm punctele D şi E astfel încât M este mijlocul segmentului (CD), iar P este mijlocul segmentului (NE). Arătaţi că:

a) $AE\equiv NC$; **b)** $AD=2AE$.

CLASA A VII-A

1. a) Aflaţi numerele $\overline{ab}$ cu proprietatea că numărul $\sqrt{\overline{ab}+\overline{ba}}$ este natural nenul.

b) Arătaţi că dacă $a^{2007}=b-c,\ b^{2007}=c-a,\ c^{2007}=a-b,\ a,b,c\in\mathbb{R}$ atunci $a=b=c$.

2. a) Aflaţi $x\in\mathbb{Z}$, astfel încât $\sqrt{\frac{3x+17}{2x+3}}\in\mathbb{Z}$.

b) Aflaţi media geometrică a numerelor reale y şi z, unde

$$y=\left(\frac{7}{3-\sqrt{2}}+\frac{14}{4+\sqrt{2}}\right)^{-2}\cdot\frac{7^2}{2-\sqrt{3}},$$

$$z=\sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})-\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{3})-\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}}.$$

3. Fie $ABCD$ patrulater convex şi E, F mijloacele laturilor (AD) şi (BC). Să se arate că $AB\parallel CD$ dacă şi numai dacă $2\cdot EF=AB+CD$.

4. Bisectoarea unghiului B al triunghiului dreptunghic $ABC, m(\hat{A})=90°$, intersectează latura AC în punctul E. Paralela prin E la AB intersectează latura BC în D, iar paralela prin E la BC intersectează latura AB în H. Arătaţi că:

a) $BDEH$ este romb;

b) dacă intersecţia lui DH cu AC este punctul F, atunci FB şi BC sunt perpendiculare.

CLASA A VIII-A

1. a) Să se demonstreze egalitatea: $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}},\ \forall k>0$.

b) Să se rezolve ecuația: $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\frac{2006}{2007}$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale nenule ecuația: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, știind că $x \le y \le z$.

3. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de lungime a se consideră $M \in (AA')$ astfel încât $\frac{A'M}{AA'}=\frac{1}{3}$ și N mijlocul muchiei $(A'D')$. Aflați:

a) distanța de la punctul B la planul $(B'AD)$;

b) cosinusul unghiului format de MB cu ND.

4. Pe planul dreptunghiului $ABCD$ cu dimensiunile $AB = a\sqrt{3}$ și $BC = a$ se ridică perpendiculara $AM = a,\ a > 0$.

a) Calculați distanța de punctul M la dreapta BD.

b) Dacă E și F sunt proiecțiile lui A pe dreptele MB respectiv MD, arătați că patrulaterul $BDEF$ este inscriptibil.

c) Dacă P este mijlocul lui (MC), arătați că planele (ABC) și (PBD) sunt perpendiculare.

CLASA A V-A-J

1. Demonstrați că: $\frac{1}{11}+\frac{11}{112}+\frac{111}{113}+\frac{1111}{1114}+\frac{11111}{11115}<\frac{1}{2}$.

2. a) Determinați numerele naturale a, b știind că $21a = 5b$ și $[a,b]=1260$.

b) Câte numere de forma $\overline{prrps}$ sunt divizibile cu 440 ?

3. Aflați x din egalitatea: $1008 + 1009 + \ldots + 2007 = 67x^2$.

CLASA A VI-A-J

1. Fie: $a=\frac{1,(1)}{1}+\frac{2,(2)}{2}+...+\frac{8,(8)}{8}$;

$b=\frac{1}{1,(1)}+\frac{2}{2,(2)}+...+\frac{8}{8,(8)}$;

$c=\frac{1,(1)}{1,(1)\cdot 2,(2)}+\frac{1,(1)}{2,(2)\cdot 3,(3)}+...+\frac{1,(1)}{7,(7)\cdot 8,(8)}$.

Arătați că:

a) $ab \in \mathbb{N}$ și ab are 7 divizori; **b)** $ac \in \mathbb{N}$ și este număr prim; **c)** $b : c \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$.

2. Fie $A=\{2,5\}$ și $B=\{3,7\}$.

a) Determinați $C=\left\{\frac{a}{b} \mid a \in A, b \in B\right\} \cup \left\{\frac{b}{a} \mid a \in A, b \in B\right\}$;

b) Aflați probabilitatea ca extrăgând un element al mulțimii C acesta să fie mai mare decât 1.

c) Calculați suma primelor 2007 zecimale ale numărului $\frac{5}{7}$.

3. Fie ABC un triunghi echilateral cu $AB = a$. Pe dreapta AC se ia punctul D astfel încât $CD = b$ și $C \in (AD)$. Pe dreapta AB se ia punctul E astfel încât $BE = a + b$ și $B \in (AE)$. Să se arate că triunghiul ECD este isoscel.

Back

IAȘI

CLASA A V-A

1. Fie $A = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + ... + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n, n \in \mathbb{N}, n \geq 5$.

a) Aflați ultima cifră a numărului A. **b)** Arătați că $2007(A - 4)$ nu este pătrat perfect.

2. Fie $n \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul 3^n se termină cu cifra 7.

a) Aflați restul împărțirii lui n la 4. **b)** Aflați ultima cifră a lui 7^n.

c) Aflați penultima cifră a lui 7^n.

3. O carte are 186 de pagini. Un copil citește în prima zi un număr de pagini, iar în fiecare dintre zilele următoare un număr dublu de pagini față de ziua precedentă. În câte zile a terminat copilul de citit cartea? (Analizați toate situațiile posibile!).

Letiția Minculescu

CLASA A VI-A

1. Se dau numerele naturale a, b, c astfel încât $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{3c + 7}{2c + 1}$.

a) Arătați că $a \vdots 3$ și $b \vdots 5$; **b)** Determinați numerele naturale a, b, c.

2. Fie $S = \frac{1}{39} + \frac{1}{40} + \frac{1}{41} + \frac{1}{42} + ... + \frac{1}{50}$. **a)** Demonstrați că $\frac{6}{25} < S < \frac{1}{3}$;

b) Dacă $S = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}, (p, q) = 1$, demonstrați că $p \vdots 89$ și $q \vdots 2$.

3. Pe laturile unghiului propriu $\sphericalangle xOy$ se consideră punctele $A, B \in (Ox$ și $C, D \in (Oy$ astfel încât $[OA] \equiv [OC]$ și $[OB] \equiv [OD]$ iar $OA < OB$. Demonstrați că:

a) $\Delta OBC \equiv \Delta ODA$; **b)** Dacă $BC \cap AD = \{S\}$, atunci $\Delta ASB \equiv \Delta CSD$;

c) $(OS$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle xOy$.

Alice Anita

CLASA A VII-A

1. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Dacă $\frac{a\sqrt{2} + b}{b\sqrt{2} + c}$ este număr rațional, arătați că $a \cdot c$ este pătrat perfect.

2. Să se arate că pentru $a, b, c > 0$ are loc inegalitatea $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{abc}}$.

3. Fie M și N mijloacele laturilor $[CD]$ și $[BC]$ ale patrulaterului convex $ABCD$. Dacă punctul O de intersecție al diagonalelor patrulaterului este centrul de greutate al triunghiului AMN, arătați că $ABCD$ este paralelogram.

4. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu unghiurile $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle D$ drepte și cu unghiul $\sphericalangle B$ ascuțit. Notăm cu M punctul de intersecție al dreptei AD cu mediatoarea segmentului $[BC]$. Arătați că $m(\sphericalangle ABC) = 45°$ dacă și numai dacă $[MD] \equiv [AB]$.

Sergiu Prisăcariu

CLASA A VIII-A

1. a) Dacă a și b sunt numere reale astfel încât $a^2 + b^2 - 2\sqrt{2}a - 2\sqrt{3}b = -5$, arătați că $\left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right)(b-a) = 1$.

b) Rezolvați ecuația $\frac{x^{2007}+1}{2} + \frac{2x^{2007}+1}{3} + \frac{3x^{2007}+1}{4} + \ldots + \frac{nx^{2007}+1}{n+1} = n, n \in \mathbb{N}^*$.

2. a) Fie a, b, c raționale strict pozitive cu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Arătați că $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \in \mathbb{Q}$.

b) Demonstrați că pentru orice numere raționale strict pozitive x, y, z, diferite două câte două, numărul $A = \sqrt{\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}}$ este rațional.

3. Pe muchiile $[AB], [BC], [CD], [DA]$ ale tetraedrului regulat $ABCD$ se iau punctele M, N, P și respectiv Q, astfel încât $AM = BN = CP = DQ \neq \frac{1}{2}AB$. Notăm cu O mijlocul segmentului $[MP]$. Să se arate că dreapta MP este perpendiculară pe planul (NOQ).

4. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ se notează cu O centrul feței $BCC'B'$ și cu O' centrul feței $ABCD$. Se știe că aria triunghiului DOB este $\sqrt{3}$ cm.

a) Să se afle latura cubului; **b)** Arătați că planul (ACB') este paralel cu planul $(A'C'D)$; **c)** Arătați că $AC' \perp A'O'$; **d)** Calculați cosinusul unghiului dintre dreptele DO și $A'B$.

Valentina Blendea

CLASA A V-A-J

1. Numerele naturale nenule x și y verifică relația $7 \cdot x + 5 \cdot y = 385$. Aflați:

a) cea mai mică valoare a lui y; **b)** cea mai mare valoare a sumei $x + y$;

c) restul împărțirii prin 39 a numărului $85 \cdot x + 44 \cdot y$.

2. Fie $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2007\}$.

a) Aflați câți multipli de 3 conține mulțimea A.

b) Fie B mulțimea elementelor din A care sunt multipli de 3 sau multipli de 5. Câte elemente conține mulțimea B?

c) Aflați suma elementelor mulțimii B.

3. Se consideră șirul de fracții $\frac{9}{14}, \frac{10}{21}, \frac{11}{28}, \frac{12}{35}, \ldots$.

a) Ordonați crescător primele trei fracții.

b) Notăm cu x_1 prima fracție, cu x_2 cea de-a doua fracție, cu x_3 pe a treia, etc. Găsiți x_{2007} (a 2007-a fracție din şir).

c) Arătați că $x_n > \frac{1}{7}$, pentru orice n număr natural nenul.

CLASA A VI-A-J

1. Se consideră unghiurile $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD$, adiacente două câte două şi care au suma măsurilor egală cu $120°$. Ştiind că măsurile unghiurilor sunt direct proporționale cu $a, b, c \in \mathbb{N}$ şi a, b, c sunt numere prime cu proprietatea că $3a+b+6c=51$, să se determine măsura unghiului $\sphericalangle MON$, unde $[OM$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$, iar $[ON$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle COD$.

2. Fie $m, n \in \mathbb{N}$ şi $a = \frac{3m-2}{4m-3} + \frac{2n-1}{3n-2}$.

a) Arătați că fracțiile $\frac{3m-2}{4m-3}$ şi $\frac{2n-1}{3n-2}$ sunt ireductibile pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$.

b) Dacă $a \in \mathbb{N}$, arătați că $4m-3$ divide $3n-2$ şi $3n-2$ divide $4m-3$.

c) Determinați numerele naturale m şi n pentru care a este număr natural.

3. Fie numerele întregi $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2007}$ care verifică relația:

$$a_1 \cdot a_2^2 \cdot a_3^3 \cdot ... \cdot a_{2007}^{2007} + 1 = 0$$

a) Arătați că $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2007} \neq 0$.

b) Determinați numerele $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2007}$ dacă, în plus, este verificată relația:

$$|a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2007}| = 2007.$$

Back

MARAMUREŞ

CLASA A IV-A

1. a) Să se determine $E = a + 2b + 3c + 4d$ ştiind că $a+b+c+d=36$, $b+c+d=20$, $c+d=15$, $d = a:2+b:5$.

b) $E = \overline{aa}:a + \overline{bbb}:b - 5\cdot c$ şi $c = 34 - [2+2\cdot(2+2\cdot 9:6)]$; a şi b sunt cifre diferite de 0.

Ana Sfara, Lucreția Timocea

2. Determinați numerele naturale x şi y din egalitatea:

$$5\cdot[(x\cdot y+264):(4+4\cdot 5)]-16=44.$$

Lucreția Timocea, Ana Sfara

3. Într-o clasă din şcoala ta sunt 23 de elevi. Câți băieți şi câte fete sunt în această clasă ştiind că dacă ar fi cu 3 băieți mai puțin, atunci jumătate din numărul lor ar reprezenta de 3 ori mai mult decât un sfert din numărul fetelor?

Lucreția Timocea, Ana Sfara

4. Suma a două numere naturale este 130. Dacă se împarte fiecare număr la 26 se obține restul zero. Care sunt numerele?

Ana Sfara, Lucreția Timocea

CLASA A V-A

1. a) Comparați numerele: $A = 5 \cdot 5^2 \cdot 5^3 \cdot \ldots \cdot 5^{2007}$ și $B = \left(5^{1004}\right)^{2007}$.

b) Aflați numărul natural n care verifică egalitatea:

$$2^{6n+10} + 4^{3n+5} + 8^{2n+3} = 5 \cdot 2^{3(n+3)+15}$$

2. Fie numerele naturale de trei cifre $\overline{abc}$ scrise în baza 10, cu proprietatea că: $\overline{abc} = a + 10 \cdot b + 100 \cdot c$.

a) Arătați că: $a = c$. **b)** Câte dintre numerele de mai sus sunt divizibile cu 5? Scrieți-le!

3. Numărul natural n dă rest 3 la împărțirea prin 5 și restul 4 la împărțirea prin 7. Ce rest dă n la împărțirea prin 35?

4. Determinați a și b dacă $\overline{ab} + a + b = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

G.M. nr.5/2005, E:12926

CLASA A VI-A

1. a) Determinați $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $(a,b) = 15$ și $2a + 5b = 330$.

b) Aflați numerele naturale mai mici decât 1000 care împărțite pe rând la 10; 9; 8 dau resturile 7; 4; 1.

Dumitru Rotaru

2. Determinați $n \in \mathbb{N}$ astfel încât: $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \frac{1}{n(n+3)} = \frac{2004}{6015}$.

3. Fie punctele *C, D, E* în interiorul lui $[AB]$ astfel ca $AC = \frac{AB}{2}; AD = \frac{AB}{3}; AE = \frac{AC}{2}$ și $DE = 4$ cm.

a) Determinați ordinea punctelor pe dreaptă. **b)** Calculați lungimea segmentului AB.

4. Se dau unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ adiacente, astfel încât $m(\sphericalangle AOB) < 90°$, $m(\sphericalangle BOC) = 90°$, $[OA$ și $[OD$ semidrepte opuse și $[Ox$ respectiv $[Oy$ bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ respectiv $\sphericalangle DOC$.

a) Dacă $m(\sphericalangle AOB) = 30°$, să se calculeze măsura unghiului format de semidreapta $[Ox$ și $[Oy$;

b) Să se calculeze $m(\sphericalangle xOy)$ în cazul în care $m(\sphericalangle AOB)$ este arbitrară.

CLASA A VII-A

1. Să se arate că numărul $a = \underbrace{11\ldots1}_{2007}\underbrace{22\ldots2}_{2007}$ poate fi scris ca un produs de două numere consecutive (numărul este scris în baza 10).

Ioan Vlad

2. a) Aflați elementele mulțimii $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{3x^2 - x - 3}{x - 2} \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) Fie numerele întregi a, b şi c cu proprietatea $3a+7b+27c=0$. Arătaţi că 21 divide pe $b(a+9c)$.

Valeriu Romul Pop

3. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu unghiurile A şi D drepte şi cu unghiul B ascuţit. Notăm cu M intersecţia dreptei AD cu mediatoarea segmentului (BC).

Demonstraţi echivalenţa $[CD]\equiv[AM] \Leftrightarrow m(\sphericalangle ABC)=45°$.

G.M. nr.10/2006

4. Fie $ABCD$ un pătrat. Dacă M, N şi O sunt mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$ şi respectiv $[DM]$ iar $\{P\}=CM\cap DN$, atunci $OP=\frac{1}{2}\cdot MC$.

CLASA A VIII-A

1. Se dau numerele: $a=\sqrt{10-\sqrt{3}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$ şi $b=\sqrt{6-\sqrt{5}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}}$.

Să se afle media aritmetică, media geometrică şi media armonică a numerelor a şi b.

2. Să se arate că dacă $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{5}=1$ şi $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{5}{c}=0$ atunci $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{9}+\frac{c^2}{25}=1$.

Viorel Alb

3. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ în care P este mijlocul lui $[CC']$. Determinaţi:

a) distanţa de la A la planul $(A'BD)$;

b) măsura unghiului dintre planele $(A'BD)$ şi (BDP).

4. Pe planul patrulaterului convex $ABCD$ se duce perpendiculara $SD=30$ cm. Ştiind că triunghiul ACD este echilateral cu latura de 12 cm, $AB=BC$ şi $BD=10\sqrt{3}$ cm, aflaţi:

a) distanţa dintre dreptele AC şi SB;

b) măsura unghiului dintre planele (SBC) şi (SAB).

CLASA A V-A-J

1. a) Să se demonstreze că numărul $N=2^{2007}-4^{1003}$ este pătrat perfect.

b) Să se arate că există patru numere naturale A, B, C, D astfel încât $A^2+B^2=2^{2007}$ şi $C^2-D^2=2^{2007}$.

c) Să se determine numerele naturale a, b, c, unde $a<b<c$, astfel încât $\overline{aaa}+\overline{bbb}+\overline{ccc}+a+b=2007$.

2. Să se determine mulţimile A şi B pentru care sunt îndeplinite simultan condiţiile:

a) au fiecare cel puţin două elemente, iar în A sunt cu trei elemente mai mult decât în B;

b) mulţimea A este formată numai din numere impare consecutive, iar mulţimea B este formată numai din numere pare consecutive;

c) suma elementelor mulţimii A este 80, iar suma elementelor mulţimii $A\cup B$ este 160.

3. Alina, Maria şi Nora doresc să cumpere fiecare o carte, dar constată că le lipsesc 5lei, 10lei, respectiv 15lei. Dacă ar pune toţi banii împreună, ar putea cumpăra exact două astfel de cărţi.

a) Care este preţul cărţii? **b)** Ce sumă de bani are fiecare?

CLASA A VI-A-J

1. Fie $E(n)=(-1)^{n+1}\cdot 2n+(-1)^n, n\in\mathbb{N}$.

a) Să se calculeze $E(5)+E(6)$. **b)** Să se calculeze $E(1)+E(2)+...+E(2007)$.

2. Se consideră numerele naturale a, b, c, d astfel încât $b=2a, 3b=2c, 4c=3d$. Care din următoarele afirmații nu are loc:

a) $b^2=ad$; **b)** $a+d=b+c$; **c)** $d=4a$; **d)** $c-b=d-a$.

3. Triunghiurile ABC și MNP au același perimetru și laturile direct proporționale cu numerele 0,5; 1,(3); 1,1, respectiv cu numerele 1,875; 5; 4,125.

Să se arate că triunghiurile ABC și MNP sunt congruente.

4. Un cub cu toate fețele vopsite în albastru este împărțit în 1000 de cuburi egale. Toate cuburile astfel obținute s-au introdus într-o urnă. Să se determine probabilitatea de a extrage din urnă un cub care să nu aibă nici o față vopsită.

Back

MEHEDINȚI

CLASA A V-A

1. a) Calculați: $\left[\left(2^2\right)^3\right]^5 : 2^{5^2}\cdot\left(5^2-5^0\right)\cdot\left[2^2\cdot 6^2-(2\cdot 5)^2-2^3\cdot 5\right]\cdot 1^{2007}$.

b) Calculați: $1+2+3+...+60$.

c) Să se scrie 2007 ca o sumă de n numere naturale, diferite, astfel încât n să fie cât mai mare posibil.

2. Determinați elementele mulțimilor A și B astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile:

a) $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$; **b)** $A\cap B=\{3,4\}$;

c) $A\cap\{5,6,7\}=\varnothing$; **d)** $\{1,2\}\cap B\neq\varnothing$.

3. Într-un depozit se află o anumită cantitate de fructe ce se poate încărca în lăzi de 15 kg și de 40 kg. Dacă se încarcă în lăzi numai de 15 kg, rămân în depozit 10740 kg de fructe.

Dacă se încarcă numai în cele de 40 kg, rămân în depozit 9880 kg de fructe.

Încărcând și lăzile de 15 kg și 40 kg rămân în depozit 5620 kg fructe.

Aflați cantitatea de fructe și numărul lăzilor de 15 kg și de 40 kg.

4. Fie mulțimea $A=\left\{2^n\cdot 5^{n-1}+7 \mid n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

a) Să se arate că $2007\in A$;

b) Să se arate că mulțimea A nu conține nici un pătrat perfect dacă $n\geq 2$.

CLASA A VI-A

1. Aflați numerele $x, y, z\in\mathbb{N}^*$ știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) x, y, z sunt direct proporționale cu numerele 2, 4 și 6;

b) $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}>\frac{5}{12}$.

2. Fie $S_n = 1+2+3+...+n$; $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $\frac{1}{S_{2007}} = 2\left(\frac{1}{2007} - \frac{1}{2008}\right)$.

b) Calculați media aritmetică a numerelor $\frac{1}{S_1}; \frac{1}{S_2}; ...; \frac{1}{S_{2007}}$.

3. Fie segmentul $[AB]$ cu lungimea de 1024 cm și M_1 mijlocul lui $[AB]$, M_2 mijlocul lui $[AM_1]$, M_3 mijlocul lui $[AM_2]$ și așa mai departe M_{10} mijlocul segmentului $[AM_9]$.

a) Arătați că $AB = 8AM_3$; **b)** Calculați lungimea segmentului $[AM_{10}]$.

4. Unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ au semidreapta $[OC$ situată în interiorul unghiului $\sphericalangle AOB$, iar $[OM$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$ și $[ON$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$.

a) Dacă $m(\sphericalangle COM) = 2m(\sphericalangle NOC)$ și unghiul $\sphericalangle COM$ este congruent cu suplementul unghiului $\sphericalangle AOB$, determinați $m(\sphericalangle AOB)$ și $m(\sphericalangle BOC)$.

b) În ipoteza de la a) fie $D \in (OC$, $E \in (OM$, $F \in (OA$ și $G \in (BO$ cu O între B și G astfel încât $[OD] \equiv [OE] \equiv [OF] \equiv [OG]$, să se demonstreze $[FD] \equiv [EG]$.

CLASA A VII-A

1. Să se determine numărul natural nenul n din egalitatea:

$$\frac{2}{1\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5} + ... + \frac{2}{n(n+2)} = \frac{2008}{2009}.$$

2. Se dau mulțimile: $A = \{5a-1 | a \in \mathbb{Z}\}$ și $B = \{4b+2 | b \in \mathbb{Z}\}$.

a) Să se arate că $A \cap B = \{20k+14 | k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Să se determine câte numere întregi din mulțimea $A \cap B$ satisfac relația: $|3x-42| \leq 1200$.

3. Fie dreptunghiul $ABCD$ cu $AB > BC$, $AC \cap BD = \{O\}$. Perpendiculara ridicată pe diagonala BD în O intersectează pe AB și AD în punctele M, respectiv N. Să se demonstreze că:

a) $AB = AM + MD$; **b)** $AD + AN = NB$; **c)** $\frac{AN}{AD} \cdot \frac{OM}{MN} = \frac{1}{2}$;

d) $DM \perp BN$.

4. Se consideră triunghiul ABC, $m(\sphericalangle A) > 90°$, în care mediana AM este perpendiculară pe latura $[AB]$, $M \in [BC]$. Dacă se construiește $MO \perp AC$, $O \in [AC]$ și $AC = 8MO$, să se calculeze măsura unghiului $\sphericalangle BAC$.

CLASA A VIII-A

1. Determinați $x \in \mathbb{N}$ din ecuația:

$$\sqrt{\left(\frac{2006}{2007}\right)^2+2\cdot x\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{2006\cdot 2007}\right)+x^2}=\frac{4013}{2007}.$$

2. a) Arătați că pentru orice numere naturale x și n are loc egalitatea:

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+x}{x\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)+1}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

b) Determinați $n\in\mathbb{N}$ astfel încât:

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+1}+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}+2}{2\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)+1}+\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2}+3}{3(\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2})+1}+...+\frac{\sqrt{2}-1+n}{n\left(\sqrt{2}+1\right)+1}=99.$$

3. Se consideră paralelogramele $A_1B_1C_1D_1$ și $A_2B_2C_2D_2$ situate în plane diferite astfel încât $A_1\neq A_2$, $B_1\neq B_2$, $C_1\neq C_2$, $D_1\neq D_2$. Dacă mijloacele segmentelor $[A_1A_2]$, $[B_1B_2]$, $[C_1C_2]$ și $[D_1D_2]$ sunt patru puncte distincte, atunci ele sunt vârfurile unui paralelogram.

4. Pe planul dreptunghiului $ABCD$ în punctul A se ridică AM perpendiculară pe plan. Fie P și Q proiecțiile punctului A pe MB și MD.

a) Să se demonstreze că $MC\perp PQ$;

b) $AB=x, BC=y, AM=z$, $MC=\sqrt{61}$ și $6x+8y+12z=122$, să se determine x, y, z

CLASA A V-A-J

1. Determinați numerele naturale $\overline{abc}$ divizibile cu 6 care au cifra zecilor egală cu triplul cifrei unităților.

2. Se consideră numărul: $a=1+2+2^2+....+2^{2006}+2^{2007}$.

a) Să se determine numărul natural x astfel încât $a+1=4^x$.

b) Să se determine restul împărțirii numărului a la 4.

3. a) Să se determine câte numere de forma $\overline{abba}$ există.

b) Să se rezolve ecuația $\overline{abba}=\left(\overline{aa}\right)^b$.

4. a) Să se arate că n^4 sau n^4-1 este multiplu de 5 pentru orice număr natural n.

b) Să se determine $\left\{a^4+b^4\,|a,b\in\mathbb{N}\right\}\cap\left\{5k+3|\,k\in\mathbb{N}\right\}$.

CLASA A VI-A-J

1. Se consideră unghiurile în jurul unui punct AOB, BOC și COA. Să se determine măsurile lor știind că primele două sunt direct proporționale cu numerele 2, respectiv 3, iar ultimele două sunt invers proporționale cu numerele 8, respectiv 6.

2. Se consideră ΔABC oarecare cu $AB<AC$ și punctele B' și C' astfel încât $B'\in\left(AC\right)$, $C'\in(AB$, $[AB']\equiv[AB]$ și $[AC']\equiv[AC]$.

Dacă M și N sunt mijloacele segmentelor $[BC]$, respectiv $[B'C']$, arătați că:

a) $[BC]\equiv[B'C']$; **b)** triunghiul AMN este isoscel.

3. Se consideră mulțimea $A=\left\{z \mid z=x^2+y^2, x,y\in \mathbb{N}^*\right\}$.

a) Să se verifice că numerele 169 și 170 sunt elemente din A.

b) Să se arate că 53^{2007} este element al mulțimii A.

c) Să se arate că există o infinitate de elemente z din mulțimea A astfel încât și $z+1$ să fie element al mulțimii A.

4. Fie $a,b\in \mathbb{Z}$ astfel încât mulțimile $\{a+b, a+2b, ..., a+2007b\}$ și $\{1,2,...,2007\}$ să fie egale. Să se determine $a,b\in \mathbb{Z}$ și $k\in \mathbb{N}^*$ pentru care $a+kb=k$.

Back

MUREȘ

CLASA A V-A

1. Aflați câtul împărțirii numărului x la 5, unde $x=2^{n+1}\cdot 3^n+2^n\cdot 3^{n+1}+19$.

Fleancu Mariana

2. Se consideră numerele:

$A=5^{2005}-\left(4\cdot 5^{2003}+4\cdot 5^{2002}+4\cdot 5^{2001}+...+4\cdot 5^2+4\cdot 5+5\right)$ și

$B=2^{4676}+2^{4675}+...+2^3+2^2+2$.

a) Demonstrați că numărul A este pătrat perfect.

b) Comparați numerele A și $2B$.

Molea F.Gheorghe

3. Determinați $x,y,z,t\in \mathbb{N}$ știind că $3^{3x}+3^{2y}+3^{2z+1}+3^t=840$.

4. Aflați ultima cifră a numărului: $a=1+2^1+2^2+2^3+...+2^{2006}$.

CLASA A VI-A

1. Aflați $x\in \mathbb{N}$, astfel încât $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{1\cdot 8}+\dfrac{1}{8\cdot 15}+\dfrac{1}{15\cdot 22}+...+\dfrac{1}{97\cdot 104}<\dfrac{1}{x+1}$.

Crișan Vlad

2. a) Determinați $n\in \mathbb{N}$ astfel încât $\left(3^n+4^n\right)$ este divizibil cu 5.

Ion Pîrșe

b) Demonstrați că $\overline{ab}$ și $\overline{cd}$ sunt direct proporționale cu $\overline{ba}$ și $\overline{dc}$ dacă și numai dacă a și b sunt direct proporționale cu c și d.

Marius Antonescu

3. În jurul punctului O sunt situate unghiurile AOB, BOC, COD, DOA astfel încât $5\cdot m(\sphericalangle AOB)$ este dublul măsurii suplementului complementului său, $\sphericalangle BOC$ este obtuz, $\sphericalangle COD$ este complementul suplementului $\sphericalangle BOC$, iar $2\,m(\sphericalangle AOD)=m(\sphericalangle BOC)$.

a) Calculați măsurile unghiurilor din jurul punctului O.

b) În cazul în care $[OE$ este bisectoarea $\sphericalangle COD$, punctele B, O, E sunt coliniare?

4. Demonstrați că numărul $A=2^{2n}\cdot 19^n+24\cdot 101^m$, este divizibil cu 25, pentru orice $m,n\in \mathbb{N}$.

CLASA A VII-A

1. Să se calculeze suma: $\frac{3}{2}+\frac{13}{6}+\frac{37}{12}+\frac{81}{20}+...+\frac{980100}{9900}$.

Ion Radu

2. Fie ΔABC în care $[AO]$ este mediană, G este centru de greutate, iar $GD \parallel AB$ şi $GE \parallel AC$, unde D şi E sunt pe latura BC.

a) Dacă H este simetricul lui G faţă de O, arătaţi că $GDHE$ este paralelogram.

b) Dacă $\{M\} = DC \cap AE$ şi $\{N\} = DG \cap BH$ arătaţi că $MN = 2 \cdot DG$.

c) Arătaţi că $BC = 6 \cdot OD$.

Georgeta Pânzaru

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia: $(x-1)(y+1)+x-y=0$.

4. Aflaţi numărul $\overline{abc} \in \mathbb{N}$, ştiind că numărul $\overline{485abc}$ este pătrat perfect.

Florica şi Vasile Ginta

CLASA A VIII-A

1. Fie triunghiul ABC cu $AC = 15$ cm, $AB = 6$ cm. Pe latura $[AC]$ se ia punctul D astfel încât $AD = BD = 5$ cm, iar pe perpendiculara în D pe planul triunghiului se ia punctul P astfel încât $PD = 3$ cm. Bisectoarea unghiului BDC intersectează BC în punctul E. Să se calculeze distanţele PE şi BC.

2. Demonstraţi că: $\frac{1}{3}+\frac{2}{21}+\frac{3}{91}+\frac{4}{273}+...+\frac{n}{n^4+n^2+1}<\frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

3. Fie $n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că numărul $a = 3n^4 + 6n^3 + 3n^2 + 2$ se poate scrie ca suma pătratelor a trei numere întregi consecutive.

4. Fie mulţimile: $A = \{3x+1 | x \in \mathbb{R}, |2x-1| \le 3\}$ şi $B = \{1-2x | x \in \mathbb{R}, |x+2| \le 1\}$. Arătaţi că suma elementelor numere întregi ale mulţimilor A şi B este un număr prim.

Florica şi Vasile Ginta

Back

NEAMŢ

CLASA A V-A

1. Un elev urcă treptele unui turn după regula: urcă trei, coboară două, urcă cinci, coboară una, apoi continuă la fel.

a) Câte trepte a urcat după 296 paşi? **b)** După câţi paşi ajunge pe treapta 296?

Eugenia Ravaru

2. Să se calculeze $S = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{999........9}_{2007 \text{ cifre}}$.

Să se afle de câte ori apare cifra 1 în numărul S.

Mihai Albert

3. a) Calculaţi ultima cifră a numărului $a = 4^{n(n+1)}, n \in \mathbb{N}$.

b) Dacă $S = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + ... + 4^{89}$ atunci $S \vdots 25$.

Ion Diaconu

4. Să se arate că există cel puțin 16 numere naturale cuprinse între 39 și 101 care împărțite la 4 să dea același rest.

Georgeta Pintilie

CLASA A VI-A

1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că nu există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât să avem:

$$m^2 - 2 = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^n$$

Costică Grigoriu

2. Prin împărțirea unui număr natural $\overline{abc}$, scris în baza zece, la două numere naturale consecutive obținem același rest *r*. Arătați că *c* și *r* au aceeași paritate și dați un astfel de exemplu.

Otilia Meicu

3. Semidreptele $[OA, [OB, [OC, [OD$ și $[OE$ îndeplinesc simultan condițiile: $m(\sphericalangle AOE) = 3 \cdot m(\sphericalangle AOB)$; unghiurile $\sphericalangle EOD$ și $\sphericalangle DOC$ sunt suplementare, iar $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle DOC$ complementare și $[OC$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOD$. Se cer:

a) Dacă $\sphericalangle EOD$ și $\sphericalangle DOC$ sunt adiacente atunci determinați măsura lui $\sphericalangle AOB$.

b) Dacă $[OE$ este în interiorul unghiului $\sphericalangle AOC$ atunci arătați că $[OE$ este bisectoarea lui $\sphericalangle BOC$.

Ion Diaconu

4. În triunghiul *ABC*, *AB* = 6 cm, *BC* = 4 cm și $m(\sphericalangle ABC) = 60°$. Arătați că $[AM] \equiv [AC]$ dacă $[AM]$ este mediana triunghiului *ABC*.

Mihai Albert

CLASA A VII-A

1. Fie $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ astfel încât:

(1) $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n = 2k + 1$

(2) $a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + ... + 2^n a_n = 2t + 1$ unde $k, t \in \mathbb{Z}$.

Să se arate că $a_0 + la_1 + l^1 a_2 + ... + l^n a_n \neq 0$ pentru orice $l \in \mathbb{Z}$.

Costică Grigoriu

2. Să se arate că numărul $2^{2^{2007}} + 1$ nu poate fi scris ca suma a două numere prime.

Otilia Meicu

3. Fie ΔABC dreptunghic în *A* și $AD \perp BC$. Prin punctul $M \in (AD)$ se duce paralela la *AB* care intersectează *BC* în *N* și paralela prin *M* la *AN* intersectează pe *AC* în *Q* și *AB* în *P*.

a) Să se demonstreze că triunghiurile *AQP* și *MQC* sunt asemenea.

b) Calculați unghiurile triunghiului *ABC*, dacă $m(\sphericalangle MPC) = 20°$.

Ion Diaconu

4. Fie *ABC* un triunghi ascuțitunghic cu $AD = BC$ unde $AD \perp BC, D \in BC$. Considerăm punctul *E* de aceeași parte a dreptei *BC* ca și punctul *A* astfel încât $AC = CE$ și $AC \perp CE$. Să se arate că $\dfrac{FD}{AD} \leq \dfrac{1}{8}$ unde $\{F\} = AD \cap BE$. Când avem egalitate?

Costică Grigoriu

CLASA A VIII-A

1. Fie expresia $E(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2$. Se cere:

a) Să se arate că $E(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $E(a)$ să fie pătrat perfect.

2. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$x(2006 - x) + y(2007 - y) + z(2008 - z) = \frac{3 \cdot 2007^2 + 2}{4}.$$

Adrian Sandovici

3. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ notăm cu M, N şi P proiecţiile punctelor A, C şi respectiv B' pe diagonala $[BD']$. Să se arate că $\frac{D'M}{BM} + \frac{D'N}{BN} + \frac{D'P}{BP} \geq 6$.

4. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ în care notăm cu Q centrul feţei $BCC'B'$. Notăm cu P mijlocul lui (AB) şi cu M piciorul perpendicularei din D pe CP. Să se arate că $QM \perp PC$.

Back

OLT

CLASA A IV-A

1. a) Aflaţi numărul necunoscut: $\{2998 - [(351 + 235 - y) \cdot 5 + 38]\} + 625 : 25 = 670$.

b) Suma a trei numere este 225. Dacă din primul scădem 47, din al doilea 39 şi din al treilea 58, se obţine de fiecare dată acelaşi rezultat. Aflaţi cele trei numere.

Emilia Diaconescu

2. Mergând spre cabană, un turist îl întreabă pe pădurarul care-i iese în cale câţi kilometri mai are de parcurs până la cabană. Pădurarul îi răspunde: „Dacă erai cu 1 kilometru mai în urmă, te aflai la jumătatea drumului. Dacă ai mai fi mers 1 kilometru, ai mai fi avut de parcurs un sfert din lungimea drumului." Aflaţi:

a) lungimea drumului parcurs;

b) câţi kilometri a parcurs turistul până la întâlnirea cu pădurarul.

Valerica Mioara Iancu

3. Îndoitul unui număr a fost mărit cu 3, iar rezultatul a fost mărit de 4 ori. Produsul obţinut, micşorat cu 5, a fost micşorat de 9 ori, obţinându-se 15. Care a fost numărul iniţial?

Maria Georgescu

4. Reconstituţi adunarea:

$$\mathrm{UNA} + \mathrm{UNA} = \mathrm{DOUA}.$$

Gazeta Matematică (2006)

CLASA A IV-A-J

1. Folosind de şapte ori cifra 7, o parte din semnele celor patru operaţii +, –, x, : eventual şi paranteze rotunde, compuneţi şapte exerciţii, astfel încât unul să aibă rezultatul 1, altul să aibă rezultatul 2, altul să aibă rezultatul 3 şi aşa mai departe, până la rezultatul 7.

2. Alina poate mânca singură un tort într-o oră, Valentin într-o jumătate de oră, iar Andreea în 20 minute. În cât timp pot mânca împreună cei 3 copii trei torturi?

3. Anca a comandat de ziua ei de 5 ori mai multe savarine decât negrese. După ce s-au consumat 18 savarine şi s-au mai adus 6 negrese, s-a constatat că numărul savarinelor este de 2 ori mai mare decât al negreselor. Câte savarine şi câte negrese s-au comandat la început?

4. Într-o urnă sunt bile galbene şi bile albastre. O bilă galbenă cântăreşte 17 grame, iar una albastră cântăreşte 18 grame. Dacă ar fi cu 5 bile galbene mai mult, bilele ar cântări la un loc 402 grame.

a) Care este numărul minim de bile ce trebuie scoase pentru a avea 4 bile de aceeaşi culoare?

b) Care este numărul minim de bile ce trebuie scoase pentru a avea cel puţin 2 bile de culori diferite?

5. Marţienii sunt roşii, verzi sau albaştri, au de la două la cinci mâini şi de la 3 la 20 de antene.

a) Câţi marţieni trebuie să punem la un loc pentru a fi siguri că printre ei există cel puţin doi identici?

b) Câţi marţieni trebuie să punem la un loc pentru a fi siguri că printre ei există cel puţin 11 identici?

CLASA A V-A

1. Comparaţi numerele $3 \cdot 2^{6022}$ şi $2 \cdot 3^{4015}$.

Gheorghe Ştefana

2. Fie $A = \{1, 2, 3, ..., 2006\}$. Să se arate că nu există două submulţimi B şi C ale lui A astfel încât $B \cap C = \varnothing, B \cup C = A$ şi suma elementelor din B să fie egală cu suma elementelor din C.

Dorina Rădulescu

3. Numerele $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ verifică relaţia: $2^{a+b} + 2^{b+c} + 2^{c+d} + 2^{d+a} = 25$. Calculaţi $a+b+c+d$.

Gazeta Matematică (2006)

4. Să se calculeze suma tuturor numerelor de forma $\overline{abba}$ ştiind că $\overline{ab} - \overline{ba} = 3a + 3b$.

Gazeta Matematică (2006)

CLASA A VI-A

1. Aflaţi numerele $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ ştiind că $a+1$, $b+2$, $c+3$ şi 5 sunt direct proporţionale cu 4, 6, 8 şi $d+9$.

Dorin Popa

2. Măsurile a trei unghiuri $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC$ şi $\sphericalangle COD$ formate în acelaşi semiplan determinat de dreapta AD sunt direct proporţionale cu numerele 7, 9 şi 20.

a) Aflaţi măsurile unghiurilor de mai sus.

b) Dacă $[OE$ este semidreapta opusă semidreptei $[OC$, iar semidreptele $[OX$ şi $[OY$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOE$, respectiv $\sphericalangle DOE$, determinaţi $m(\sphericalangle XOY)$.

Ioana Niţu

3. Ştiind că a, b, c, $\dfrac{a+b}{b+c}$, $\dfrac{b+c}{c+a}$ şi $\dfrac{c+a}{a+b}$ sunt numere naturale nenule, să se determine $x \in \mathbb{Q}$ din proporţia: $\dfrac{4ab+3bc}{5bc+2ca} \cdot \dfrac{x}{2x+1} = \dfrac{7}{15}$.

Ion Neaţă

4. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, demonstrați că fracția $\dfrac{2n+1}{n^2+n}$ este ireductibilă.

Gazeta Matematică (2006)

CLASA A VII-A

1. Să se arate că un patrulater convex este paralelogram dacă și numai dacă lungimile perpendicularelor duse din vârfuri opuse pe diagonale sunt congruente două câte două.

Eduard Buzdugan

2. Fie $ABCD$ un paralelogram și punctele E, F și G respectiv, intersecțiile perpendicularei din B pe AC cu dreptele AC, DC, AD. Să se arate că $BE^2 = EF \cdot EG$.

Eduard Buzdugan

3. Calculați $x+y+z$ dacă $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{y}{y+2} = \dfrac{z}{z+3}$ și $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z} = 54$.

Gazeta Matematică (2006)

4. Fie a, b cifre, $a \neq b$. Considerăm numerele: $x = \overline{aba} + \overline{ab} + \overline{a0}$ și $y = \overline{bab} + \overline{ba} + \overline{b0}$. Determinați x și y știind că y divide pe x.

Gazeta Matematică (2006)

CLASA A VIII-A

1. Cel mai mare divizor comun al numerelor $\overline{5ab}$, $\overline{1bc}$ și $\overline{2ca}$ este 3. Să se arate că numărul $\sqrt{a^3+b^2+c}$ este irațional.

Ion Neață

2. Demonstrați că: $\sqrt{x^2+y^2-4x-2y+5} + \sqrt{x^2+y^2-12x-2y+37} + \sqrt{x^2+y^2-12x-10y+61} + \sqrt{x^2+y^2-4x-10y+29} \geq 8\sqrt{2}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Dorin Popa

3. Fie $x, y \in \mathbb{R}^*$ și $a = x - \dfrac{1}{y}$, $b = y - \dfrac{1}{x}$. Dacă $ab \in [-4, 0]$ să se determine $|xy|$

Mircea Fianu

4. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ notăm cu M, N și P proiecțiile punctelor A, C respectiv B' pe diagonala $[BD']$. Să se arate că:

a) $BM + BN + BP = BD'$; **b)** $BA + BB' + BC < 2BD'$; **c)** $D'A + D'B' + D'C < \dfrac{5}{2}BD'$.

Gazeta Matematică (2006)

CLASA A V-A-J

1. a) Determinați numerele naturale x și y dacă $x < y$ și $2^x + 2^y = 257$.

b) Comparați numerele $a = 2^{60}$ și $b = 3^{40}$.

c) Comparați numerele $x = 5\left(2^{60} - 2^{59} - 2^{58}\right)$ și $y = 3^{44} - 3^{43} - 3^{42}$.

Marius Giurgiu

2. Fie $A = 4 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$ şi $B = 4 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{2005}$.

a) Arătaţi că A este cub perfect. **b)** Demonstraţi că B este pătrat perfect.

c) Demonstraţi că dacă un număr natural cu cel puţin 300 de cifre, scris în baza zece, are 300 de cifre de 1, iar celelalte cifre sunt zero, atunci numărul nu poate fi pătrat perfect.

Florin Smeureanu

3. Fie M mulţimea ale cărei elemente sunt numerele naturale mai mici decât 10^4, care prin împărţire la 2007 dau restul mai mic decât 48.

a) Câte elemente are mulţimea M?

b) Daţi exemplu de cinci elemente din mulţimea M astfel încât prin împărţirea sumei lor la 2007 să obţineţi restul 1.

c) Aflaţi restul împărţirii sumei tuturor elementelor mulţimii M la 2007.

Gheorghe Radu

4. Se consideră o tablă pătrată $n \times n$ pe care sunt scrise în cele n^2 pătrăţele ale sale numerele de la 1 la n^2. Considerăm *operaţie de ordin p* colorarea pătrăţelelor în care sunt scrise numerele de forma kp cu $2 \leq p \leq n^2 - 1$ şi $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătaţi că există o operaţie după care suma numerelor înscrise în pătrăţelele necolorate este pătrat perfect.

b) Considerând $n = 16$, efectuîm două operaţii astfel încât în urma acestora să fie colorate cât mai multe numere. Este suma numerelor rămase necolorate un număr care să se împartă la 12?

Mariana Saraolu, Constantin Saraolu

CLASA A VI-A-J

1. Se consideră numărul natural n a cărui descompunere în factori primi este $p^a \cdot q^b$, unde $a, b, p, q \in \mathbb{N}^*$, p şi q sunt numere prime, iar $a \leq b$.

a) Dacă b, p, q sunt numere naturale consecutive, în această ordine, aflaţi numărul divizorilor şi suma divizorilor lui n.

b) Dacă numărul divizorilor lui n este de forma $6k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, demonstraţi că nu există k natural pentru care n să fie pătrat perfect sau cub perfect.

c) Dacă numărul divizorilor lui n este 14, iar suma divizorilor săi este 1016, aflaţi numărul n.

Constantin Popescu

2. În interiorul unghiului $\sphericalangle AOB$ cu măsura de $147°$ se ia punctul M astfel încât măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOM$ şi $\sphericalangle BOM$ să fie direct proporţionale cu numerele 2,(3) şi 1,1(6).

a) Determinaţi măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOM$ şi $\sphericalangle BOM$.

b) Ştiind că $ON \perp OB$, iar N şi B sunt de o parte şi de alta a dreptei OA, calculaţi măsura unghiului format de bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOM$ cu semidreapta $[ON$.

c) Să se determine cel mai mare număr natural n ştiind că semidreptele $(OA_1, (OA_2, ..., (OA_n$ sunt în interiorul unghiului $\sphericalangle AON$ şi $m(\sphericalangle AOA_1) = 1°, m(\sphericalangle A_1OA_2) = 2°, m(\sphericalangle A_2OA_3) = 3°, ..., m(\sphericalangle A_{n-1}OA_n) = n°$.

Cătălin Badea

3. Fie $a,b,c,x\in\mathbb{N}$ astfel încât $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ şi $\frac{b}{3x}=\frac{c}{8}$, unde x este un număr prim.

a) Să se determine valoarea lui x ştiind că $a<x$.

b) Pentru $x=2$ şi $\frac{abc}{ab+bc+ca}=\frac{12}{13}$, determinaţi numerele *a*, *b*, *c*.

c) Aflaţi numerele $\overline{xyz}$, ştiind că numerele $\overline{xyz}$, $\overline{yzx}$, respectiv $\overline{zxy}$ sunt direct proporţionale cu 38, 47 şi respectiv 26.

Florin Smeureanu

4. Fie $x=123456789101112.....2006$. **a)** Stabiliţi câte cifre are numărul x şi verificaţi dacă x e pătrat perfect. **b)** Fie $A=\{6,21,36,51,...,1986\}$ şi B o submulţime a mulţimii A formată din 68 de elemente. Arătaţi că în B există cu siguranţă două elemente distincte a căror sumă e egală cu 2007.

Ştefan Smărăndoiu

Back

SATU MARE

CLASA A V-A

1. a) Scrieţi toate numerele de forma $\overline{aaabbaaa}$, care au suma cifrelor egală cu 18.

Camelia Culic

b) Fiind date numerele $a=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2006+2007$; $b=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2006-2007$, să se determine restul împărţirii fiecărui număr la 125.

Florin Dale

2. Într-o carte, ultima pagină numerotată are numărul 588. Determinaţi:
a) Câte cifre s-au folosit pentru numerotarea tuturor paginilor cărţii.
b) De câte ori a fost folosită cifra 9 în numerotarea paginilor.

Nicolae Baciu

3. a) Scrieţi numărul 2008 ca o sumă de 4 numere naturale consecutive şi impare.

Nicolae Baciu

b) Aflaţi suma tuturor numerelor naturale de forma $\overline{abc}$, care împărţite la un număr de o cifră dau restul egal cu 8.

4. Fie numărul $d=2^{2007}+2^{2006}-2^{2005}+2^{2004}$.

a) Arătaţi că $11|d$. **b)** Determinaţi ultima cifră a numărului *d*.

Mihai Boar

CLASA A VI-A

1. a) Arătaţi că printre 1100 de numere naturale diferite, există întotdeauna 2 a căror diferenţă se divide cu 1000.

Nicolae Baciu

b) i) Aflaţi toate numerele naturale de forma $a=2^x\cdot 3^y$ care au un număr de 16 divizori. **ii)** Precizaţi care este cel mai mic şi cel mai mare dintre aceştia.

Vasile Chiorean

2. Fie $n\in\mathbb{N}, n\geq 3$ şi numerele $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}$; $b=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{n-1}{n}$.

a) Arătați că $a+b$ este număr natural nenul.

b) Determinați numărul divizorilor proprii ai numărului $a+b$, pentru $n=2004$.

Camelia Culic

3. Se consideră unghiurile adiacente $\sphericalangle AOB$; $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COD$ cu proprietatea: $m(\sphericalangle AOB)+m(\sphericalangle BOC)+m(\sphericalangle COD)=100^\circ$. Știind că numerele *a, b* și *c* sunt numere prime astfel încât $a+3b+6c=39$ și $b\cdot m(\sphericalangle AOB)=a\cdot m(\sphericalangle BOC)$; $c\cdot m(\sphericalangle BOC)=b\cdot m(\sphericalangle COD)$, să se calculeze măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COD$.

Andrei Varga

4. a) Pe o dreaptă *d* se consideră punctele *A, B, C* (în această ordine) astfel încât $AB\neq BC$. Dacă *M, N, P* sunt respectiv mijloacele segmentelor [*AB*],[*BC*] și [*AC*], să se arate că: $2\cdot(MN+PN)=AB+AC$.

Nicolae Baciu

b) Fie $M_0, M_1, ..., M_n$, puncte coliniare (în această ordine), astfel încât: $M_0M_1=x+1$; $M_1M_2=x+2$; ...; $M_{n-1}M_n=x+n$, unde *x* verifică relația $3^{x+1}-3^x=2$.

Determinați: **i)** Lungimea segmentului $[M_{23}M_{69}]$. **ii)** Numărul natural *n* dacă lungimea lui $[M_0M_n]$ este egală cu 3240.

Camelia Culic

CLASA A VII-A

1. Fie $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{a^4}{b^2\cdot c^2}$; $\frac{b^4}{a^2\cdot c^2}$; $\frac{c^4}{a^2\cdot b^2}$ să fie numere naturale, arătați că: **a)** $a^6+b^6+c^6=3\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2$. **b)** $a^{300}+b^{300}+c^{300}=3\cdot(a\cdot b\cdot c)^{100}$.

Vasile Chiorean

2. a) Fie numărul rațional $a=\left(10-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(10-\frac{2}{2}\right)\cdot...\cdot\left(10-\frac{2007}{2}\right)$. Să se determine numărul real *m* pentru care are loc egalitatea: $|m-6|=a$.

Elena Olariu

b) Fie numerele reale: $x=\sqrt{\overline{a,bc(a)}+\overline{b,ca(b)}+\overline{c,ab(c)}}$;

$y=\sqrt{\overline{a,b(ca)}+\overline{b,c(ab)}+\overline{c,a(bc)}}$; $z=\sqrt{\overline{a,(bca)}+\overline{b,(cab)}+\overline{c,(abc)}}$.

Determinați numărul *n* pentru care are loc relația: $x^n+y^n=n\cdot z^n$.

Adrian Bud

3. a) Se consideră trapezul *ABCD*, $AB\parallel CD$ și $AD=AB+CD$. Să se demonstreze că dacă *E* este mijlocul lui [*BC*], atunci triunghiul *EAD* este dreptunghic.

* * *

b) Fie triunghiul dreptunghic *ABC*, $(m(\sphericalangle A)=90^\circ)$ și *E* un punct pe înălțimea [*AD*] a triunghiului $(D\in[BC])$. Perpendiculara în *E* pe *CE* intersectează pe *AB* în *F*. Paralela prin *E* la *AB* intersectează *BC* în *G*. Să se demonstreze că *AGEF* este paralelogram.

Florentina Sita

4. În triunghiul oarecare ABC se consideră punctul M, mijlocul lui $[BC]$. Pe semidreapta $(AM$ se ia un punct N astfel încât $AM = k \cdot MN$, $k \in \mathbb{N}^*$. Paralela prin N la BC intersectează pe AB în D. Notăm cu $\{P\} = DM \cap AC$. Să se arate că $NP \parallel AB$ dacă şi numai dacă $k = 2$.

Adrian Bud

CLASA A VIII-A

1. a) i) Fie $A = \sqrt{36 - x^2}$, $x \in \mathbb{Z}; |x| \leq 6$. Să se determine valorile lui x astfel încât A să fie număr natural.

ii) Dacă $x, y \in \mathbb{Q}^*$ şi $\left(x + \sqrt{5}\right)^2 = \left(y - \sqrt{5}\right)^2$, atunci $x + y = 0$.

b) Dacă $a^2 + b^2 - 2a\sqrt{3} - 2b\sqrt{2} + 5 = 0$, să se arate că: $\left(\frac{3}{a} - \frac{2}{b}\right) \cdot (a + b) = 1$.

Nicolae Baciu

2. a) i) Fie $b \in \mathbb{R}_+^*$. Arătaţi că dacă $a \in [0; b)$ atunci $\frac{a + b\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \in (a; b)$.

ii) Fie $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $9a + 10b = 450$, atunci $a + b \in (45; 50)$.

Nicolae Baciu

b) Să se determine valorile lui $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încât să fie adevărată egalitatea:

$$\left| a\left(\sqrt{2} - 2\right) + b + \left|3\sqrt{2} - 5\right| \right| = 2006 .$$

Eva Varga

3. Fie $ABCD$ un pătrat cu latura de lungime a. De aceeaşi parte a planului pătratului se ridică perpendiculare în A şi D pe planul pătratului, pe care se consideră punctele M şi N astfel încât $AM = 2a$ şi $DN = a$. Arătaţi că:

a) Arătaţi că $\sin 30° \leq \sin(\sphericalangle(MCN); (ABC)) \leq \sin 60°$. **b)** Calculaţi $d(B; (ACN))$.

Bud Adrian

4. În trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$). $AD = DC = CB = 6$ cm şi $AB = 12$ cm. Din $AC \cap BD = \{O\}$ şi $MO \perp (ABC)$ şi $MO = 6$ cm. Să se calculeze:

a) Raportul ariilor triunghiurilor DOC şi AOB.
b) Distanţa de la punctul M la dreptele AB şi AD.
c) Distanţa de la punctul A la planul (MDB).

Andrei Varga

CLASA A V-A-J

1. Se dă şirul: $a_1 = 3; a_2 = a_1 + 2 \cdot 3;\ a_3 = a_2 + 2 \cdot 3^2; ...; a_{100} = a_{99} + 2 \cdot 3^{99}$.

a) Arătaţi că $a_{100} = 3^{100}$. **b)** Comparaţi a_{100} cu 2^{150}.

c) Arătaţi că $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_{100} = 243^{1010}$.

Nicolae Baciu

2. Se dau numerele: $a=\left(3^{2^{3^{0}}}+2^{3^{1^{0}}}+2^{3}\cdot 5^{3}:10^{2}\right):3^{3}$;

$b=\left[3^{121}\cdot\left(3^{2}\right)^{60}+\left(5^{3}\right)^{2}:5^{2^{2}}\right]:2^{2}$; $c=10^{3}:\left\{23+34:\left[\left(2\cdot 3^{2}\right)^{2}:18-17^{0}\cdot 1^{2007}\right]\right\}$.

Determinați valoarea numărului $a+b-c$.

Ecaterina Hager

3. a) Calculați: $7^{3}-7^{2}+7-1$.

b) Determinați ultimele trei cifre ale numărului: $7^{2005}-7^{2004}+7^{2003}-7^{2002}$.

Camelia Culic

4. a) Determinați numerele naturale de forma $\overline{2xxy}$ divizibile cu 2, știind că suma cifrelor acestor numere este egală cu 20.

Ana Hotca

b) Să se determine toate numerele naturale care împărțite la 8 dau câtul c și restul r, iar împărțite la 15 dau câtul r și restul c.

Florin Dale

CLASA A VI-A-J

1. a) Fiind date numerele: $a_1=\frac{1}{2}a_2;\ a_2=\frac{2}{3}a_3;\ a_3=\frac{3}{4}a_4;\dots;\ a_{2006}=\frac{2006}{2007}a_{2007}$, arătați că $a_{2007}=2007\cdot a_1$.

Nicolae Baciu

b) Aflați numerele *x*, *y*, *z* dacă numerele $\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9}$ sunt invers proporționale cu $x+y$, $y+z$, $z+x$ și $(x+y)(y+z)(z+x)=6$.

Ana Gal

2. a) Arătați că $\frac{1}{41}=\frac{271}{11111}$. **b)** Aflați un multiplu al numărului 41 care să aibă toate cifrele egale cu 7. **c)** Să se arate că orice număr n natural nenul care este prim cu 10 are un multiplu cu toate cifrele egale.

Aurelia Grad, Maria Tincu

3. Fie semidreptele $[OA$, $[OB$, $[OC$, $[OD$ în această ordine, formate în jurul unui punct. Aflați măsurile celor patru unghiuri adiacente care s-au format, știind că: $[OA$ și $[OC$ sunt semidrepte opuse, măsura unghiului BOC este de două ori mai mare decât măsura unghiului AOB și măsura unghiului AOD este cu 30° mai mare decât măsura unghiului DOC.

Mihai Boar

4. Fie ΔABC ascuțitunghic și $(AD$ bisectoarea unghiului $BAC, D\in(BC)$. Determinați poziția punctelor E și F astfel încât AB să fie mediatoarea segmentului $[DE]$ și AC să fie mediatoarea segmentului $[DF]$ și apoi arătați că:

a) ΔDEF și ΔAEF sunt isoscele; **b)** $m(\sphericalangle BAC)=2\cdot m(\sphericalangle DEF)$.

Camelia Culic

[Back](#)

SĂLAJ

CLASA A V-A

1. Să se calculeze: **a)** $\left(63^5-3^{10}\right)^{10}:\left(7^{35}:7^{30}-1^{2007}\right)^{10}:9^{50}$.

b) $\left(3^{2007}-3\right)\left(3^{2006}-3^2\right)\left(3^{2005}-3^3\right)...\left(3^2-3^{2006}\right)\left(3-3^{2007}\right)$.

2. Se consideră patru cutii cu fructe. Numărul fructelor din fiecare cutie diferă cu 1 față de numărul fructelor din cutia alăturată. Să se arate că în cele 4 cutii nu putem avea 125 fructe.

3. a) Să se arate că numărul $N=2008+2(1+2+3+...+2007)$ este pătrat perfect.

b) care este cel mai mic număr natural a pentru care numărul $A=a+2a+3a+...+15a$ este cub perfect.

4. Spunem că un pătrat este *magic* dacă suma numerelor înscrise în căsuțe este aceeași pe fiecare linie, pe fiecare coloană și pe fiecare diagonală. Completați următorul pătrat magic incomplet.

26		52
	28	2

CLASA A VI-A

1. Media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2006}$, 2006 și 2008 este 2007.

Calculați media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2006}$.

2. Arătați că diferența dintre un număr natural de 3 cifre diferite și răsturnatul său, nu poate fi pătrat perfect.

Mircea Lascu

3. Se consideră numerele: $a=2^{n+12}:\left(2^3\right)^4+3^{2n}:9^n$; $n\in\mathbb{N}^*$,

$b=\dfrac{49\cdot14^n+22^n\cdot11}{11^{n+1}+7^{n+2}}$; $n\in\mathbb{N}^*$; $c=2^{n+3}-2^{n+2}-2^{n+1}-2^n-2^0$; $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Calculați numerele *a, b* și *c*. **b)** Ce fel de fracție zecimală este numărul $\dfrac{1}{a\cdot b}+\dfrac{2}{b\cdot c}-\dfrac{3}{a\cdot c}$: finită, periodică simplă sau periodică mixtă?

4. Pe dreapta d se consideră punctele *A, B, C* în această ordine cu $BC>AB$. Fie M mijlocul segmentului $[AB]$, N mijlocul segmentului $[BC]$ și P mijlocul segmentului $[AC]$.

Să se arate că $2(MN+PN)=AB+AC$.

CLASA A VII-A

1. Să se determine numerele *a, b* și *c* știind că $\dfrac{3}{a+b}=\dfrac{5}{a+c}=\dfrac{4}{b+c}$ și $3a+5b+4c=69$.

2. a) Se consideră numerele $A=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{2006\cdot 2007}$ şi $B=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{2007^2}$. Arătaţi că $B-A<1$.

Valeriu Gornoavă

b) Demonstraţi că $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$ şi determinaţi toate numerele prime care sunt mai mici cu o unitate decât un cub perfect.

Mircea Lascu

3. a) Arătaţi că $\sqrt{3n+2}$ nu este număr raţional, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

b) Dacă $a=2006\cdot 2007$ arătaţi că $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}<2007$.

4. Fie *ABCD* un patrulater convex, astfel încât bisectoarea unghiului *A* este paralelă cu *BC*. Bisectoarea unghiului *A* se intersectează cu *BD* în *E* şi cu *DC* în *F*. Să se arate că:

a) $\frac{AD}{AB}=\frac{DF}{FC}$; **b)** $\frac{CD}{DF}-\frac{AB}{AD}=1$.

CLASA A VIII-A

1. Dacă $a-\frac{1}{a}=2$, unde $a\neq 0$, determinaţi valoarea expresiei:

$$E=a+a^2+a^3+a^4-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}.$$

2. Fie $a,b,c>0$. Să se demonstreze că:

a) $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}>\frac{a}{a+b}$; **b)** $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}>1$.

3. a) Descompuneţi în factori expresia x^4+4y^4;

b) Să se arate că numărul $3^{24}+100\cdot 5^{34}$ este compus.

Szilárd László

4. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie *a* se notează cu *M, N* mijloacele muchiilor *AD* respectiv *AB*, iar *E, F* mijloacele muchiilor $B'C'$ respectiv $C'D'$.

a) Să se demonstreze că $(A'MN)\parallel(CEF)$.

b) Să se calculeze distanţa dintre planele $(A'MN)$ şi (CEF).

Back

SIBIU

CLASA A V-A

1. a) Aflaţi numărul natural care se împarte exact la 2007 şi care, prin împărţirea la 2006 dă restul 2005 şi câtul egal cu cel de la împărţirea la 2007.

b) Determinaţi cifra *x* din egalitatea: $18\cdot\left(\overline{xx}:3-14:3\right)=180$.

Liviu Ardelean

2. a) Calculați: $71_{(9)}-61_{(8)}+51_{(7)}-41_{(6)}+31_{(5)}-21_{(4)}$.

b) Aflați x și y astfel încât $51_{(x)}+71_{(y)}=10^2$, unde x și y reprezintă baze de numerație.

Monica Guita

3. a) Andreea citește în prima zi 10 pagini dintr-o carte, în a doua zi de două ori mai multe, în a treia zi de trei ori mai multe decât în prima zi și tot așa. În câte zile termină de citit cartea, dacă aceasta are 360 de pagini?

b) Andrei are mai multe cutii de carton. În prima cutie așază 2 bile, în a doua cutie de două ori mai multe, în a treia cutie de două ori mai multe decât în a doua și așa mai departe. Aflați de câte cutii are nevoie Andrei, dacă are la dispoziție 510 bile.

Cristian Săuchea

4. Fie mulțimile: $A=\left\{1^{1210};2^{1210};3^{1210};...;1210^{1210}\right\}$; $B=\left\{3^1;3^2;3^3;.....;3^{1210}\right\}$;

$C=\left\{3^{1\cdot2\cdot3};3^{2\cdot3\cdot4};3^{3\cdot4\cdot5};...;3^{1210\cdot1211\cdot1212}\right\}$;

$D=\left\{d \mid d\in\mathbb{N} \text{ și } d=a+b+c, \text{ unde } a\in A, b\in B, c\in C\right\}$.

a) $3^{1211}\in D$? Justificați răspunsul!

b) Aflați $\text{card}(A\cup B)$ și $\text{card}(B\cap C)$.

Nicoleta Handrea

CLASA A VI-A

1. a) Aflați numărul minim de biscuiți dintr-o cutie, știind că dacă din cutie luăm:

i) câte 3 biscuiți ne mai rămân 2 biscuiți în cutie;

ii) câte 4 biscuiți ne mai rămân 3 biscuiți în cutie;

iii) câte 5 biscuiți ne mai rămân 4 biscuiți în cutie.

b) Determinați cel mai mic și cel mai mare număr de forma $\overline{xyzxyz}$, cu cel mai mic număr de divizori.

Liviu Ardelean

2. Fie unghiurile adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ și $[OD\subset \text{Int}(\sphericalangle AOB)$, astfel încât $m(\sphericalangle COD)=90°$. Măsura suplementului $\sphericalangle AOC$ este egală cu măsura complementului $\sphericalangle BOC$.

a) Arătați că $\sphericalangle BOC\equiv\sphericalangle AOD$.

b) Dacă $m(\sphericalangle AOC)=4\cdot m(\sphericalangle BOD)$, aflați $m(\sphericalangle AOD)$.

Monica Guita

3. Se dă mulțimea $A=\{2,3,6,7,10,11,...,198,199,202,203\}$.

a) Aflați card$A$.

b) Scrieți mulțimea A prin proprietăți caracteristice.

c) Care este probabilitatea extragerii unui element al mulțimii A, care să fie multiplu de 3?

d) Demonstrați că, orice submulțime a mulțimii A cu 52 elemente conține cel puțin două elemente a căror sumă este 205.

Pavel Toader

4. a) Punctele *A, B, C, D* sunt situate pe o dreapta (*d*) în ordinea dată.

Arătați că: $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

b) Aflați $x \in \mathbb{N}$ pentru care $\frac{3^{x+1}}{3} + \frac{3^{2x+2}}{3^{x+1}} + \frac{3^{3x+3}}{3^{2x+1}} = 39$.

CLASA A VII-A

1. Fie $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \middle| 2^{2006} < x < 2^{2008} - 2^{2006} \right\}$, $B = \left\{ y \in \mathbb{N} \middle| 2^{2008} - 2^{2007} < y < 2^{2008} \right\}$.

a) Scrieți două elemente din A și două elemente din B.

b) Determinați cardinalul mulțimii $A \cap B$.

2. a) Fie $S = \frac{1}{2007^2 + 1} + \frac{1}{2007^2 + 2} + ... + \frac{1}{2007^2 + 2007}$.

Arătați că $2007 < \frac{1}{S} < 2008$.

b) Se dau numerele pozitive x_1, x_2, x_3 astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 = 7$. Notăm cu $S = \frac{x_1}{21 - x_1} + \frac{x_2}{21 - x_2} + \frac{x_3}{21 - x_3}$. Arătați că $2 < S < 3$.

Vasile Berghea

3. Fie ΔABC oarecare în care $MN \parallel BC$, $M \in [AB]$, $N \in [AC]$, $MN \neq \frac{BC}{2}$ și $R \in [MN]$. Construim $PR \parallel AB$ și $RQ \parallel AC$, unde $P \in [BC]$, $Q \in [BC]$.

a) Arătați că, dreptele MP, AR și NQ sunt concurente într-un punct O.

b) Stabiliți poziția lui O în funcție de cazurile: $BC > 2 \cdot MN$ și $BC < 2 \cdot MN$.

c) Analizați problema în cazul $MN = \frac{BC}{2}$. Cum sunt dreptele MP, AR și NQ în această situație?

Teodor Mărcuț

4. Se dă trapezul $ABCD$ în care $AB \parallel CD$, $AD = CD = BC$, $m(\sphericalangle A) = 60°$, M este mijlocul lui $[AB]$ și $AC \cap BD = \{O\}$. **a)** Arătați că $BMDC$ este romb.

b) Aflați raportul dintre ariile patrulaterelor $BMOC$ și $ABCD$.

Simona Dumitrescu

CLASA A VIII-A

1. a) Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuația: $\frac{1}{x + 2006} + \frac{2007}{y + 2007} = 1$.

b) Determinați elementele mulțimii: $A = \left\{ \overline{abc} \middle| \overline{20ab} - c^3 = 2006 \right\}$.

2. a) Arătați că: $a^2 + a + 1 + \frac{1}{a^2 + a + 1} \geq 2$.

b) Dacă $x, y, z \geq 0$ și $x + y + z = 1$, arătați că $\frac{1}{x + y} + \frac{1}{y + z} + \frac{1}{x + z} \geq 4$.

Petru Vlad

3. Pe planul ΔABC se ridică perpendicularele BB' şi CC'. Ştiind că $AB = a$, $BC = 2a, AC = BB' = a\sqrt{3}, CC' = a\sqrt{6}$, calculaţi:

a) distanţa de la C' la dreapta AB;

b) distanţa de la B' la planul (ACC');

c) sinusul unghiului dintre CC' şi planul (ABC').

Gheorghe Floarea

4. Punctele distincte *A, B, C, D* se află pe cercul de centru *O* şi rază *r*, $r = 6$ cm, *A* şi *B* diametral opuse, $(CD) \cap (AB) = \{M\}$ şi $3AM = BM$.

Dacă $MN \perp (C(O,r))$ şi $MN^2 = CM \cdot MD$:

a) calculaţi distanţa de la punctul *A* la dreapta *NB*;

b) determinaţi măsura unghiului dreptei *BN* cu planul cercului;

c) aflaţi distanţa de la punctul *B* la planul (*CND*) pentru $AP \perp CD$ şi $AP = 2$ cm.

Gheorghe Floarea

CLASA A V-A-J

1. a) Fie numărul $N = 2 \cdot \left(10^{2007} - 1\right)$.

i) Aflaţi prima şi ultima cifră a numărului *N*.

ii) Arătaţi că numărul *N* nu este pătrat perfect.

b) Fie 2008 numere naturale nenule şi disticte, având suma 4034070. Arătaţi că printre ele există cel puţin două numere impare.

Liviu Ardelean

2. a) Determinaţi cifrele *a, b, c*, ştiind că: $\overline{5abc} = 2 \cdot \overline{abc5} + 1190$.

b) Comparaţi numerele: $a = 3^{2005}$ şi $b = 2^{1203} \cdot 5^{802}$.

3. a) Fie mulţimile $A = \{3,4,5,6\}$ şi $B = \{1,2,3\}$. Aflaţi elementele mulţimii $C = \left\{x \middle| x = a - b, a \in A, b \in B\right\}$.

b) Cu mulţimile *A* şi *B* de la punctul a), aflaţi mulţimea $D = \left\{x \middle| x = a^b \text{ sau } x = b^{a-3}, a \in A, b \in B\right\}$.

c) Fie mulţimea $X = \{2,3,5,7\}$.

Aflaţi elementele mulţimii $Y = \left\{y \left\{ y = a + b \text{ şi } y = a \cdot b \text{ şi } y = a^{b-2}, a, b \in X\right.\right\}$.

Cristian Săuchea

4. a) Arătaţi că: $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{1 \cdot 3}$ şi $\frac{1}{1176} - \frac{1}{1225} = \frac{49}{1176 \cdot 1225}$.

b) Calculaţi suma: $S = \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{3 \cdot 6} + \frac{4}{6 \cdot 10} + ... + \frac{49}{1176 \cdot 1225}$.

c) Arătaţi că: $\frac{1223}{1225} < S < 1$.

Monica Guita

CLASA A VI-A-J

1. a) Aflaţi $y \in \mathbb{N}$ şi $x \in \mathbb{Q}$, ştiind că $y = \frac{1}{4} + \frac{1}{x}$ şi $x > \frac{1}{2}$.

b) Fie mulţimea $A = \left\{ x \in \mathbb{N}^* \middle| x < 10 \right\}$.

i) Aflaţi cardinalul mulţimii $B = \left\{ \frac{a}{b} \middle| \frac{a}{b} \text{ subunitară, } a \in A, b \in A \right\}$.

ii) Reprezentaţi mulţimea: $C = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \middle| \frac{1}{4} < \frac{m}{n} < \frac{5}{9}, m \in A, n \in A \right\}$ prin enumerare.

iii) Transformaţi raportul $\frac{\text{card} A}{\text{card} B}$ în raport procentual.

Pavel Toader

2. Se dau numerele *a, b, c, d, e* direct proporţionale cu 2, 6, 12, 20, 30 şi $5a + 7b + 4c - 3d + 2e = 300$.

a) Aflaţi numerele *a, b, c, d, e.*

b) Ştiind că numerele *a, b, c, d, e* sunt scrise pe 5 cartonaşe şi introduse într-o urnă, aflaţi probabilitatea ca, extrăgând la întâmplare un cartonaş, acesta să aibă un număr cu exact 12 divizori.

c) Aflaţi cât la sută din numărul cel mai mare reprezintă numărul care este pătrat perfect.

Monica Guita

3. a) Aflaţi măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri adiacente, ştiind că raportul dintre suplementul sumei lor şi suma suplementelor lor este $\frac{1}{4}$.

b) Lungimile laturilor unui triunghi verifică relaţiile: $\frac{3a+2c}{5} = \frac{4b+2c}{6} = \frac{4b+3a}{7}$. Stabiliţi natura triunghiului.

4. Fie triunghiul oarecare *ABC*, cu $AB < AC$. Se prelungeşte $[CA]$ dincolo de *A* cu $[AD] \equiv [AB], A \in (DC)$, apoi se prelungeşte $[BA]$ dincolo de *A* cu $[AE] \equiv [AC], A \in (BE)$. Dacă $\{P\} = BC \cap DE$, demonstraţi că:

a) $\Delta ABC \equiv \Delta ADE$; **b)** $[PC] \equiv [PE]$; **c)** $[AP$ este bisectoarea unghiului *BAD*.

Liviu Ardelean

Back

SUCEAVA

CLASA A V-A

1. Aflaţi numerele naturale *a, b, c* ştiind că *a* împărţit la *b* dă câtul 4 şi restul 3, *b* împărţit la *c* dă câtul 3 şi restul 2, iar $a + b - 2c = 78$.

* * *

2. Fie numerele $a = 39 + 40 + 41 + ... + 62$ şi $b = 3^0 + 3^1 + ... + 3^{92}$. Aflaţi restul împărţirii lui $a + b$ la 12.

Tamara Brutaru

3. Fie numerele $a=4^n\cdot3^{n+7}\cdot5^n-20^{n+1}\cdot3^{n+2}$, $b=2^{2n}\cdot3^{n+5}\cdot5^n+4^{n+1}\cdot3^{n+2}\cdot5^n\cdot7^2$, $c=2^{2n}\cdot3^n\cdot5^n\cdot42^2+4^{n+1}\cdot3^4\cdot15^n-4^n\cdot3^{n+4}\cdot5^n$; unde n este un număr natural nenul. Arătați că numărul $(a-b)(b-c)(c-a)$ este divizibil cu 2007.

Stela Boghian

CLASA A VI-A

1. Determinați numerele naturale *a, b, c, d* știind că îndeplinesc simultan condițiile:
a) b reprezintă 75% din a; **b)** b și c sunt direct proporționale cu 3 și 2;
c) c și d sunt invers proporționale cu 5 și 2; **d)** $a^2+2b-4c^2+d=22$.

* * *

2. Fie numerele naturale nenule *a, b, c* astfel încât $4a+2b-5c=0$. Să se arate că $(a+3b)(c+2)\vdots10$.

Gabriela Bedrulea

3. Fie *A, B, C, D* patru puncte coliniare, în această ordine, astfel încât $[AB]\equiv[CD]$ și punctul M mijlocul segmentului $[BC]$. **a)** Arătați că M este mijlocul segmentului $[AD]$.

b) Fie punctul $P\notin AD$, $[PA]\equiv[PD]$ și punctele $E\in(PA)$, $F\in(PD)$ astfel încât $\sphericalangle EMA\equiv\sphericalangle FMD$. Arătați că $\Delta EMP\equiv\Delta FMP$.

Stela Boghian

CLASA A VII-A

1. a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $3^{33}\cdot x-\left|2^{51}-3^{34}\right|=8^{17}$.

b) Calculați $\sqrt{(1-x)^2}+|5x-4|-6\sqrt{x^2}$, pentru $x<0$.

* * *

2. Fie numerele $x,y,z\in\mathbb{Z}_+^*$, astfel încât $\dfrac{x\sqrt2+y}{y\sqrt2+z}\in\mathbb{Z}$. Să se găsească cea mai mică valoare a raportului $\dfrac{x+z}{y}$.

* * *

3. Prin punctul O de intersecție al diagonalelor trapezului $ABCD$ se duce paralela PQ la bazele AB și CD, $P\in(AD)$, $Q\in(BC)$. Demonstrați că:

a) $[OP]\equiv[OQ]$; **b)** $\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{CD}=\dfrac{2}{PQ}$.

* * *

4. Fie triunghiul ABC cu $AB<AC$ și $D\in(AB)$, $E\in(AC)$, astfel încât $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{2}{3}$. Fie F și G proiecțiile punctelor P, D, respectiv E pe bisectoarea unghiului BAC și M, N mijloacele segmentelor AD, respectiv AE. Dacă $MF\cap NG=\{P\}$, arătați că:

a) triunghiul PFG este isoscel; **b)** $AC=AB+3PG$.

* * *

CLASA A VIII-A

1. a) Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x = 3y - 1$, arătaţi că $x \in [-1;2]$ dacă şi numai dacă $y \in [0;1]$.

b) Dacă $x + 1 = 3y$ şi $x \in [-1;2]$, atunci

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5} = \sqrt{10}.$$

*****

2. Găsiţi $n \in \mathbb{Z}$, ştiind că $a = \sqrt{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}} + \sqrt{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}}$ are partea întreagă 3.

Ecaterina Huluţă

3. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile *a, b, c* şi lungimea diagonalei sale este *d*. Dacă $\frac{1}{2}A_t \geq d^2$ (unde A_t este aria totală a paralelipipedului) determinaţi distanţa dintre planele $(A'BD)$ şi $(B'D'C)$.

Ecaterina Huluţă

4. În dreptunghiul *ABCD*, $AB = 2a$, există un punct $M \in (AB)$ astfel încât $CN \perp DM$, $N \in (DM)$, $BN \perp CM$ şi $2BN = CM$.

a) Demonstraţi că $m(\sphericalangle MCB) = 15°$.

b) Dacă, în plus, $DP \perp (ABC)$ şi $DP = \frac{a(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2}$, calculaţi distanţa de la punctul D la planul (PMC).

Ecaterina Huluţă

CLASA A V-A-J

1. Comparaţi:

a) $2006^{2007} - 2006^{2006}$ cu $2007^{2007} - 2007^{20006}$;

b) $2006^{2007} + 2007^{2006}$ cu $2006^{2006} + 2007^{2007}$.

Tamara Brutaru

2. În copacul fermecat sunt 2006 mere de aur. Prâslea are voie să culeagă de fiecare dată 21, 32 sau 43 de mere. În fiecare caz cresc la loc 11, 7 respectiv 23 de mere. Este posibil ca Prâslea să culeagă toate merele?

Claudia Marchitan

3. Găsiţi cel mai mic număr natural care începe cu cifra 9 şi care prin trecerea primei cifre pe ultimul loc se micşorează de 4 ori.

Ecaterina Huluţă

CLASA A VI-A-J

1. Determinaţi numerele naturale nenule *a, b, c* ştiind că sunt direct proporţionale cu numerele 2, *a*, *b* şi $a + 2b + c = 96$.

Constantin Sîrghi

2. Arătaţi că dacă $23 \mid 3a + 13b + 8c$ şi $23 \mid a + b + c$, unde *a, b, c* sunt numere naturale, atunci $23 \mid 4a + 18b + 11c$.

*****

3. Fie ΔABC cu $AB < AC$, $[AD$ bisectoarea $\sphericalangle BAC$, $D \in (BC)$. Punctul E aparține semidreptei opuse semidreptei $[AC$, $[AM$ bisectoarea $\sphericalangle EAB$, $M \in BC$ și punctul N pe semidreapta opusă semidrepte $[AM$, astfel încât $(AM) \equiv (AN)$. Arătați că:

a) $(DM) \equiv (DN)$;

b) $\Delta AMB \equiv \Delta ANP$, unde $ND \cap AC = \{P\}$;

c) $AD \perp BP$.

Back

TELEORMAN

CLASA A IV-A

1. Calculați: $10 - 10 : \{1 + 3 \cdot [(57 - 60 : 4 \cdot 2) : 3 + 21 : 10]\}$.

2. Determinați numărul a: $5 \cdot [326 - a \cdot (54 : 9)] + 845 = 1995$.

3. Câtul a două numere este 6, iar restul este 21. Știind că suma dintre deîmpărțit și împărțitor, cât și rest este 328, să se afle cele două numere.

4. Într-o ladă era o cantitate de mere de 7 ori mai mare decât în altă ladă. Se transferă 210 kg de mere din prima ladă în a doua și atunci în cele două lăzi rămân cantități egale de mere. Câte kilograme de mere erau la început în fiecare ladă?

CLASA A V-A

1. Să se determine numărul natural a astfel încât reuniunea mulțimilor: $\{7, a+5\}$ și $\{1, 2a+1\}$ să fie formată din trei elemente.

2. Fie $A = \overline{xyz} + \overline{yzx} + \overline{zxy}$ și $B = \overline{xy} + \overline{yz} + \overline{zx}$.

a) Știind că $A = 400 + B$, să se determine produsul numerelor x, y, z.

b) Să se determine numărul B știind că rstul împărțirii lui A la B este pătrat perfect.

3. Să se demonstreze că numărul: $A = 2007^{2008} + 2008^{2007}$ nu este pătrat perfect.

4. a) Dacă $a = 3^n - 1$, $b = 3^n$, $c = 3^n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, să se calculeze $a + b + c$.

b) Să se scrie numărul 5^{2007} ca sumă a cinci numere naturale consecutive.

CLASA A VI-A

1. Numerele $\overline{abcd}$, $\overline{acd}$ și $\overline{ab} + \overline{ba}$ sunt divizibile cu 7. Să se determine a și b.

2. Fie: $A = \{\overline{abc} \mid (a-b)(b-c)(c-a) = 128\}$.

a) Să se determine elementele lui A.

b) Să se determine cel mai mare divizor comun al elementelor lui A.

c) Să se determine probabilitatea ca, alegând un element din A, acesta să fie număr par.

3. Fie $\sphericalangle MON$ un unghi ascuțit, unghiul $\sphericalangle NOP$, complementul său, iar unghiul $\sphericalangle NOQ$ suplementul său. Dacă $[OS$ este semidreapta opusă lui $[ON$, $[OA$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle NOP$, $[OB$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle MOS$, să se calculeze măsura unghiului $\sphericalangle AOB$.

4. În triunghiul ABC, $AC = a, BC = 2a$. Fie punctele D şi E astfel încât $C \in (BD), C \in (AE), BD = \frac{3}{2}BC$ şi $CE = 2AC$.

a) Să se arate că $[AB] \equiv [DE]$; **b)** Dacă $AB \cap ED = \{F\}$, să se arate că $[FB] \equiv [FE]$.

CLASA A VII-A

1. Să se determine numerele raţionale a şi b pentru care are loc egalitatea:

$$\sqrt{2(a+1)^2} - 2\sqrt{2} = |b+2|\sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

2. a) Să se demonstreze că dacă suma a două numere raţionale pozitive reprezentate prin fracţii ordinare ireductibile este număr natural, atunci fracţiile au acelaşi numitor.

b) Fie $x, y \in \mathbb{N}$ şi $n = \frac{12x+19}{5x+8} + \frac{38y+61}{5y+8}$. Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci $n = 10$.

3. Fie ABC un triunghi, M mijlocul lui $[BC]$ şi $D \in (BC), D \neq M$. Prin D se duce o paralelă la mediana AM care intersectează AB şi AC în E, respectiv F. Să se arate că:

a) $AE \cdot AC = AB \cdot AF$;

b) $DE + DF = 2AM$.

4. În triunghiul dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle BAC) = 90°, m(\sphericalangle ACB) = 30°$, iar M este mijlocul lui $[BC]$. Perpendiculara din B pe AM intersectează AC în P.

Să se arate că $BP = 2MP$.

CLASA A VIII-A

1. Să se demonstreze că pentru orice numere raţionale nenule a, b, c astfel încât $a+b+c=0$, numărul $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$ este raţional.

2. a) Să se arate că: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2, (\forall)\, x, y > 0$.

b) Să se determine $a, b, c > 0$ astfel încât: $a+b+c+ab+bc+ca = 6\sqrt{abc}$.

3. Pe planul pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara CM, iar $[CM] \equiv [AB]$. Să se determine măsura unghiului format de dreptele AC şi BM.

4. Fie $ABCD$ un dreptunghi $AB = 3\,\text{cm}$, $BC = 4\,\text{cm}$ şi $AM \perp (ABC)$, unde $AM = \frac{12\sqrt{3}}{5}$ cm. Să se calculeze: **a)** Distanţa de la punctul A la planul (BDM); **b)** Distanţa de la punctul C la planul (BDM).

Back

TIMIŞ

CLASA A V-A

1. a) Să se afle ultima cifră a numărului $S = x^2 + 3x + 1$, $x \in \mathbb{N}$.

b) Să se arate că numărul $A = (10n+1) : 7$ nu poate fi pătrat perfect, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ pentru care $A \in \mathbb{N}$.

Adriana Negoescu

2. a) Suma a 63 de numere naturale nenule este 2007. Să se arate că cel puțin două sunt egale.

b) Determinați cifrele *a, b, c* din egalitățile: $2(a+b) = 3c$ și $\overline{ab} = 3c$ și apoi rezolvați ecuația: $a^1 + a^2 + a^3 + ... + a^{100} - 100x = b^2 + c^2$, înlocuind pe *a, b, c* cu cifrele determinate anterior.

3. M-am gândit la un număr, am scăzut 2007, apoi am împărțit la $4^2 \cdot 5^4$. De la rezultat am șters ultimele două cifre, iar prima cifră am dublat-o. Am obținut un număr format din două cifre, pe care l-am transformat într-un număr de patru cifre introducând două zerouri la mijloc.

Determinați numărul de patru cifre obținut în final, dacă numărul la care m-am gândit inițial reprezintă data actualei olimpiade de matematică din care am eliminat cele două puncte! (data olimpiadei 17.02.2007)

Petria – Elena Boldea

4. Într-un tabel sunt scrise în ordine crescătoare primele n numere naturale nenule, fiecare rând al tabelului conținând același număr de elemente.

Determinați n, știind că 149 se află pe rândul din mijloc, iar pe aceeași coloană cu 149, pe ultimul rând, se află 290.

1	2	3	....	k
k+1	....	....		$2k$
.....				
				n

CLASA A VI-A

1. Să se determine cifra x astfel încât numerele $\overline{2x7}$ și $\overline{7x2}$ să nu fie prime între ele.

2. Determinați cea mai mare valoare pe care o poate lua $\frac{a}{b}$, știind că a și b sunt numere naturale, iar $\frac{a}{b+15} = \frac{a-18}{b}$.

3. Fie unghiurile *AOB, BOC, COD, DOE* și *EOA* în jurul punctului *O* astfel încât bisectoarele unghiurilor *AOB* și *BOC* formează un unghi cu măsura de 70°, semidreptele [*OC* și [*OD* sunt perpendiculare, iar măsura unghiului *AOE* reprezintă 25% din măsura suplementului complementului său.

a) Să se afle măsura unghiului *DOE*;

b) Dacă măsurile unghiurilor *AOB* și *BOC* sunt direct proporționale respectiv cu 5 și 9, arătați că punctele *D, O* și *B* sunt coliniare.

Carmen Cîmpianu

4. Triunghiurile *ABC* și *A'B'C'* au perimetrele egale. Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$ și $[AB] \equiv [A'B']$, demonstrați că $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

CLASA A VII-A

1. a) Să se arate că numărul: $A=3^{15}+3^{12}-3^{8}+3^{7}-3^{5}-1$ este neprim.

b) Să se calculeze suma: $S=\left[1+\sqrt{2}\right]+\left[\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right]+\left[\frac{3+\sqrt{4}}{3}\right]+...+\left[\frac{n+\sqrt{n+1}}{n}\right]$, unde $n\in\mathbb{N}^*$, iar $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

2. a) Să se afle numărul natural n, pentru care este adevărată egalitatea:

$$\frac{\left\{\left[36+(-3)^2+\left|-3^2\right|\right]:(-3)^3\right\}^n}{1+2^0+2^1+...+2^{2n-1}}=-\frac{1}{128}.$$

Doina Enache

b) Notând $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n=n!$, demonstrați că $\sqrt{(2n+1)!}>2^n\cdot n!$

Delia Marinca

3. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $[AB]\equiv[AC]$ și $m(\sphericalangle BAC)<90°$. Perpendicularele în A pe laturile AB și AC întâlnesc înălțimile din B și C în punctele B' și respectiv, C'. Punctul de intersecție al celor două înălțimi fiind notat cu H, să se demonstreze că: a) patrulaterul $AB'HC'$ este romb; b) $B'C'\parallel BC$.

4. Se dă paralelogramul $ABCD$ și $E\in(AD)$, $F\in(AC)$, $T\in(BC)$, astfel încât $\frac{AE}{AD}=\frac{1}{n}$, $\frac{AF}{AC}=\frac{1}{n-1}$, $\frac{BT}{BC}=\frac{1}{n-2}$, $n>3$. Arătați că E, F și T sunt coliniare dacă și numai dacă $n=4$.

CLASA A VIII-A

1. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$.

a) Dacă $x+y=\frac{z}{c}$, $y+z=\frac{x}{a}$ și $z+x=\frac{y}{b}$, $x,y,z\in\mathbb{R}^*$ să se arate că: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\in\mathbb{N}$.

b) Dacă $abc=1$ și $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=\frac{3}{2}$ atunci cel puțin unul din numerele a, b, c este egal cu 1.

2. Se consideră mulțimea $A=\left\{x_k\,\middle|\,x_k=\frac{2007+k}{2007-k};\ k\in\{0,1,2,...,2006\}\right\}$.

a) Calculați cardinalul mulțimii $B=\left\{x_k\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}\,\middle|\,x_k\in A\right\}$.

b) Determinați $p\in\mathbb{N}$ pentru care $[x_0]+[x_1]+...+[x_p]<2007$; (s-a notat cu $[x]$ - partea întreagă a numărului real x).

Petru Simonescu

3. Pe trei muchii concurente ale unui cub se iau respectiv punctele M, N, P diferite de vârfuri.

a) Să se arate că triunghiul MNP nu poate fi dreptunghic.

b) În ce caz triunghiul este echilateral? Justificați.

4. Triunghiul echilateral ABC și trapezul dreptunghic $ABMN$ $\left(m(\sphericalangle NAB)=m(\sphericalangle ABM)=90^\circ\right)$ sunt situate în plane perpendiculare cu $AB=8$ cm, $AN=12$ cm și $BM=6$ cm. Calculați:

a) $d\left(C,MN\right)$; **b)** $tg\left(\sphericalangle(ABC),(CMN)\right)$.

CLASA A V-A-J

1. Arătați că numărul $A=\left(2006^{2007}+2007^{2006}\right)(10+11+12+....+2006)$ se divide cu 90.

TMMATE, nr.4/2007

2. Împărțind un număr natural nenul D la 10 se obține un cât C și un rest R. Împărțind C la 9 se obține un cât B și un rest r. Împărțind B la 8 se obține un rest egal cu $R-r$ și un cât egal cu r. Știind că toate resturile sunt nenule, $R:r=4$ și $D+r=2010$, aflați numărul D.

Petria – Elena Boldea

3. Se consideră mulțimile:

$A=\left\{c\in\mathbb{N}\,\middle|\,c=2^{\overline{ab}}\text{, unde } a+b=4\right\}$, $B=\left\{y\in\mathbb{N}\,\middle|\,y=2^n\text{, unde } 20<n<33\right\}$.

a) Determinați elementele mulțimilor *A, B* și efectuați $A\cap B$.

b) Aflați cuburile perfecte din mulțimea *B*.

c) Dacă $p<q<r<u$ sunt cuburile perfecte din mulțimea *B* și $x=u-r-q+p$, scrieți numărul *x* sub forma $2^k\cdot k^2$ și arătați că $x\,\vdots\,7$.

Petria – Elena Boldea

4. Completați careul magic numai cu cifre nenule, respectând regulile următoare. Scrieți în fiecare celulă liberă o cifră nenulă, astfel încât fiecare coloană să conțină toate cifrele de la unu la nouă, fiecare linie să conțină toate cifrele de la unu la nouă și fiecare bloc 3×3 să conțină toate cifrele de la unu la nouă.

		3		9		1		
	5		3			7		
1		2			5		6	4
	1			2		9		
2			6		3			1
		7		8			3	
7	6		9			8		5
		8			7		9	
		4		6		2		

CLASA A VI-A-J

1. Să se afle toate perechile de numere naturale (x,y), $x>y$, pentru care suma dintre produsul și diferența lor este de 2008.

Gabriel Ciora

2. a) Determinați numerele raționale pozitive *a, b, c*, care îndeplinesc simultan condițiile:

- a și b sunt invers proporționale cu 0,(3) și 0,25;
- b și c sunt direct proporționale cu 2 și a;
- $abc - c^2 = 576$.

b) Cât la sută din a este raportul numerelor c și b?

Gabriel Ciora

3. În triunghiul ABC, $(AD$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC, D \in (BC)$, iar punctele M și N se aleg pe laturile (AB), respectiv (AC) astfel încât $MN \perp AD$.

a) Arătați că triunghiul DMN este isoscel;

b) Dacă I este punctul de intersecție a bisectoarelor triunghiului ABC și $IP \perp DM$, $IQ \perp DN$, unde $P \in DM$ și $Q \in DN$, demonstrați că $IP = IQ$.

Gabriel Ciora

4. a) Fie dat un segment $[AB]$. Construiți numai cu rigla negradată și compasul, perpendiculara dusă în punctul A pe segmentul $[AB]$. Explicați cum ați procedat.

G.M. nr.11/2006

b) Considerăm M un punct pe mediatoarea segmentului $[B'B]$ astfel încât $m(\sphericalangle B'BM) = 55°55'$ și A – intersecția mediatoarei cu BB'. Dacă D este piciorul perpendicularei din A pe BM, iar C este piciorul unei oblice din D pe AB astfel încât $m(\sphericalangle DCB') = 111°11'$, aflați $m(\sphericalangle B'MA)$ și $m(\sphericalangle ADC)$.

Petria – Elena Boldea

Back

TULCEA

CLASA A V-A

1. Fie numerele:

$$a = 2^{100} + \left(2^{50}\right)^2 + \left(2^{25}\right)^4 + \left(2^5\right)^{20} \text{ și } b = 2^{99} + \left(2^{33}\right)^3 + \left(2^{11}\right)^9 + \left(2^3\right)^{33} + 2^{99} \cdot x$$

Determinați x astfel încât $a = b$.

2. Să se afle toate numerele naturale de 4 cifre care împărțite la 2007 dau câtul de 5 ori mai mic decât restul.

3. Mama și fiica au împreună 40 ani. Mama este de 3 ori mai în vârstă decât fiica.

a) Ce vârstă are fiica?

b) Peste câți ani vârsta mamei va fi de două ori mai mare decât a fiicei?

CLASA A VI-A

1. Calculați: $(2+4+6+...+84) \cdot \left(\dfrac{2}{7 \cdot 9} + \dfrac{2}{9 \cdot 11} + \dfrac{2}{11 \cdot 13} + ... + \dfrac{2}{19 \cdot 21}\right)$.

2. Fie numerele naturale *a, b, c*. Ştiind că: $\frac{a}{4}=\frac{b}{6}=\frac{c}{8}$ arătaţi că $a+c=2b$, apoi, dacă: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{13}{144}$ determinaţi numerele *a, b* şi *c*.

3. Pe o dreaptă se consideră punctele *A* şi *B*, iar de o parte şi de alta a dreptei *AB* se consideră punctele *M* şi *N* astfel încât $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle ABN$ şi $[AM]\equiv[BN]$. Dacă *O* este mijlocul lui $[AB]$ demonstraţi că:

a) $[OM]\equiv[ON]$. **b)** Punctele *M, O* şi *N* sunt coliniare.

CLASA A VII-A

1. Arătaţi că: $\sqrt{1+3+5+...+2007}$ este număr natural.

2. Determinaţi numerele întregi *x* şi *y* astfel încât: $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}=1$.

3. Fie *ABCD* un paralelogram. Bisectoarea unghiului *A* intersectează diagonala *BD* în *M*, iar bisectoarea unghiului *D* intersectează diagonala *AC* în *N*. Demonstraţi că *MN* este paralelă cu *AD*.

4. Arătaţi că mulţimea: $\left\{\frac{105}{2},\frac{106}{3},\frac{107}{4},...,\frac{n+104}{n+1},...\right\}$, are un singur element număr natural, (*n* este număr natural nenul).

CLASA A VIII-A

1. Aflaţi valoarea minimă a expresiei $E(x)=(x-1)(x+2)\left(x^2+x+2\right)+10$, unde *x* este număr real. Pentru ce valori ale lui *x* expresia ia valoarea minimă?

2. Dacă $a,b\in\mathbb{R}^*$ diferite şi $a^2+b^2=10ab$, calculaţi: $\frac{a+b}{a-b}$, iar pentru: $a>b>0$ calculaţi $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

3. Să se reprezinte în plan punctele $P(x,y)$, *x* şi *y* numere reale pozitive, ştiind că: $2+\sqrt{x+2}=\sqrt{x+4\sqrt{y}+6}$.

4. Pe planul pătratului *ABCD* se ridică, de aceeaşi parte, perpendicularele *AM* şi *CN*. Se dau: $AB=\sqrt{3}, AM=\frac{5\sqrt{2}}{2}, CN=\sqrt{2}$. **a)** Să se arate că $MN\perp BD$. **b)** Să se calculeze distanţele de la *M* la *BN* respectiv la planul (*BCN*).

Back

VASLUI

CLASA A V-A

1. a) Arătaţi că numărul $A=1+2^1+2^2+2^3+...+2^{2007}$ este divizibil cu 15.

b) La un concurs de matematică au participat elevi din clasele a V-a A, a V-a B şi a V-a C. 27 de elevi nu sunt din clasa a V-a C, iar 39 de elevi nu sunt din clasa a V-a A.

Numărul elevilor din clasa a V-a A este de două ori mai mic decât numărul elevilor din clasa a V-a C. Câţi elevi au participat din fiecare clasă?

2. Se consideră şirul de numere naturale: 1, 3, 7, 15, 31, 63, ...

a) Observând o regulă de formare a termenilor acestui şir, aflaţi următorii termeni ai şirului;

b) Dacă p este termenul de pe locul 2008, demonstraţi că $p+1$ este pătrat perfect, iar $p-2^{2007}$ nu este pătrat perfect.

3. Să se determine numerele de forma $\overline{abc}$, ştiind că: $\overline{abc}+11(a+b+c)=\overline{cba}$.

G.M. 10/2006

CLASA A VI-A

1. Determinaţi numărul $\overline{xy}$ ştiind că are loc egalitatea: $\overline{xy0}+\overline{xy2}+\overline{xy4}=\overline{xy}+2007$.

G.M. 10/2006, enunţ modificat

2. a) Demonstraţi că: $\dfrac{2}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}, n\in\mathbb{N}^*$.

b) Demonstraţi inegalitatea: $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+...+\dfrac{1}{21\cdot22\cdot23}<\dfrac{1}{4}$.

c) Dacă $a_1,a_2,...,a_n$ sunt direct proporţionale cu $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3},\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4},...,\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ şi $a_{n-1}\cdot a_n=(n-1)(n+2)$, atunci $a_4^2+a_5^2=a_6^2$ şi $a_6^2+a_{13}^2=a_{14}^2$.

3. Unghiurile în jurul unui punct O, AOB, BOC, COA, au respectiv bisectoarele $[OX, [OY, [OZ$ iar $m(\sphericalangle XOY), m(\sphericalangle YOZ), m(\sphericalangle XOZ)$ sunt direct proporţionale cu 5, 6 şi 7.

a) aflaţi măsurile unghiurilor AOB, BOC, COA;

b) aflaţi măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor BOX şi COZ.

CLASA A VII-A

1. Să se calculeze:

a) $S=2+\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{4}+...+\dfrac{1000}{999}-\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{999}\right)$.

b) $\left[1,(1)\cdot\left(\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+....+\dfrac{1}{9\cdot10}\right)-1\right]^{2007}$.

c) Aflaţi x, y şi z ştiind că $\dfrac{5}{x+y}=\dfrac{10}{x+z}=\dfrac{15}{y+z}$ şi $(x+y)(x+z)(y+z)=6$.

2. Să se determine $n\in\mathbb{Z}$ astfel încât numărul $\dfrac{2n^2+13n+26}{n+3}$ să fie întreg.

3. Determinaţi un punct M pe segmentul (AB) cu măsura de 9 cm, astfel încât aria pătratului de latura AM să fie de 4 ori mai mare decât aria pătratului de latura MB.

GM 10/2006

4. În acelaşi semiplan determinat de dreapta AB se consideră punctele M şi N astfel încât $AM \perp AB, BN \perp AB (AM \neq BN)$. Punctul P este simetricul punctului M față de punctul A, iar O punctul de intersecție al dreptelor PN şi AB. Dacă paralela prin O la BN intersectează pe AN în K, să se demonstreze: **a)** $OK = \frac{AP \cdot BN}{AP + BN}$; **b)** $[OK$ este bisectoarea unghiului MON; **c)** punctele M, K, B sunt coliniare.

CLASA A VIII-A

1. a) Un întreg pozitiv n este cu 1 mai mare decât un pătrat perfect. Dovediți că $2n$ este suma a două pătrate perfecte.

b) Să se calculeze $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{\sqrt{11}+\sqrt{2\sqrt{15}+3}}\cdot\sqrt{\sqrt{11}-\sqrt{2\sqrt{15}+3}}$.

2. a) rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația: $x^2+xy-2y^2-x+y=6$.

b) Determinați numerele naturale $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{4n^2-12n+20} \in \mathbb{N}$.

3. Pe planul trapezului dreptunghic $ABCD$ cu bazele $AB = 2$ dm, $CD = 6$ dm şi înălțimea $AD = 4\sqrt{3}$ dm se ridică perpendiculara DE, $DE = 8$ dm. Fie $M \in (BC)$ astfel încât $BM = 2$ dm.

a) aflați lungimea segmentelor AE şi ME. **b)** arătați că $AM \perp (DEM)$.

4. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$, M simetricul punctului A față de punctul B, N piciorul perpendicularei dusă din C pe $[BD']$ şi P centrul pătratului $ADA'D'$. Arătați că punctele M, N, P sunt coliniare.

GM 10/2006

Back

VRANCEA

CLASA A V-A

1. i) Să se afle numerele $\overline{abc}$, astfel ca $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=777$.

ii) Ştiind că $5^x \cdot 3^y = \overline{xyz}$, determinați x, y, z.

2. Fie $a = 27^4 \cdot 3^{10} : 9^{11} + 25^4 \cdot 125^3 : 5^{16}$ şi $b = 6^{21} : \left(2^{20} \cdot 3^{20}\right) + 10^{50} : \left(2^{50} \cdot 5^{49}\right)$.

Să se arate că:

i) $b = a + 5$

ii) oricare ar fi n, număr natural nenul, $a^n + b^n$ nu este pătrat perfect.

3. Să se determine numerele $\overline{abc}$ ştiind că împărțite la 7 dau câtul $\overline{bc}$ şi restul a.

4. i) Să se arate că $2+2^2+2^3+2^4=2^5-2$.

ii) Să se determine x număr natural, dacă: $2^{x+1}+2^{x+2}+...+2^{x+2006}=2^{x+2007}-8$.

iii) Arătaţi că numărul $10^{k+2}\cdot 3^{k+2}-10^{k}\cdot 3^{k+2}+10^{k}\cdot 3^{k}:2007, k\in\mathbb{N}, k\geq 2$.

CLASA A VI-A

1. a) Aflaţi cel mai mic număr natural n pentru care $\dfrac{8^{2n+3}-4^{3n+2}-2^{6n+6}}{2^{2009}-2^{2008}-2^{2007}}\in\mathbb{N}$.

b) i) Calculaţi $\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{11}$; **ii)** Calculaţi suma $S=\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+...+\dfrac{1}{2005\cdot 2007}$;

iii) Demonstraţi că $\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+...+\dfrac{1}{2007^2}<0,5$.

2. a) Demonstraţi că fracţia $\dfrac{4n+9}{7n+16}$ este ireductibilă pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

b) Se consideră proporţia $\dfrac{a}{13}=\dfrac{b}{23}, a,b\in\mathbb{N}^*$. Aflaţi a şi b ştiind că $a+b\leq 72$.

3. Se consideră unghiul alungit AOB şi unghiul drept BOD. Fie semidreapta $[OE$ astfel încât $[OE\subset Int(\sphericalangle AOD), 2\cdot m(\sphericalangle EOB)=5\cdot m(\sphericalangle DOE)$ şi semidreapta $[OC$ bisectoarea unghiului AOE.

a) Aflaţi măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$.

b) Dacă punctul M nu este situat în acelaşi semiplan cu D faţă de dreapta AB, astfel încât $m(\sphericalangle AOM)=150°$, demonstraţi că punctele M, O şi E sunt coliniare.

4. Fie punctele A, B, C, D coliniare (în această ordine) şi M, N, P, Q mijloacele segmentelor $[AB],[CD],[AC]$ şi, respectiv $[BD]$. Demonstraţi că:

a) $[MP]\equiv[NQ]$; **b)** $[PN]\equiv[MQ]$.

CLASA A VII-A

1. Un produs se scumpeşte cu 15%, după care se ieftineşte cu 20%.

a) Dacă preţul final este de 110,4 lei aflaţi preţul iniţial.

b) Cât la sută din preţul iniţial reprezintă preţul final?

2. Numerele naturale a, b, c sunt direct proporţionale cu 3 numere naturale consecutive.

a) Să se afle a, b, c ştiind că $b-a=7$ şi $b+c=49$.

b) Să se afle a, b, c ştiind că $a+b+c=303$.

3. Fie pătratul $ABCD$. Pe diagonala (AC) se iau punctele E şi F astfel încât $AE=CF=AB$.

a) Arătaţi că patrulaterul $BEDF$ este romb.

b) Aflaţi măsurile unghiurilor rombului $BEDF$.

4. Pe latura (AB) a ΔABC se consideră M astfel încât $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{2}{7}$. Se duc $MN\parallel BC$, $NP\parallel AB, PQ\parallel AC, QR\parallel BC, RS\parallel AB$, unde $N,R\in(AC), P,S\in(BC)$ şi $Q\in(AB)$.

a) Să se calculeze $\frac{AN}{NC}, \frac{CP}{PB}, \frac{BQ}{AQ}$. **b)** Să se arate că $AM = BQ$.

c) Să se arate că $SM \parallel AC$.

CLASA A VIII-A

1. a) Să se calculeze $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-2\right)} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+2} + \frac{2}{\sqrt{3}+1}}$.

b) Să se arate că $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$ oricare ar fi *a, b, c, d* reale și pozitive.

2. Fie *a, b, c* lungimile laturilor unui triunghi. Să se arate că:

a) dacă $\sqrt{2(a+b)} = \sqrt{a+c} + \sqrt{a-c}$ atunci triunghiul este dreptunghic.

b) dacă $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$ atunci triunghiul este echilateral.

c) $2\left(a^3 + b^3 + c^3\right) < \left(a^2 + b^2 + c^2\right)(a+b+c)$.

3. Fie *A, B, C, O* puncte în spațiu astfel încât $OA \perp OB \perp OC \perp OA$.

a) Arătați că *H* este ortocentrul ΔABC dacă și numai dacă $OH \perp (ABC)$.

b) Arătați că $A_{ABC}^2 = A_{AOB}^2 + A_{BOC}^2 + A_{AOC}^2$.

4. Pe planul triunghiului echilateral *ABC* de latură de lungime *a* se ridică de aceeași parte perpendicularele *AA'* și $BB' = a$ și $AA' = \frac{3a}{2}$. Fie $\{P\} = (A'B'C) \cap AB$.

a) Să se calculeze *CP*.

b) Să se determine valoarea unei funcții trigonometrice a unghiului dintre planele $(A'B'C)$ și (ABC).

c) Aflați distanța de la punctul *B* la planul $(A'B'C)$.

CLASA A V-A-J

1. a) Dacă $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{2n+3}{3n+2} \text{ este fracție reductibilă} \right\}$, să se scrie trei elemente din mulțimea *A*.

b) Să se determine mulțimea $B = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{6}{n} \in \mathbb{N} \text{ sau } \frac{10}{n+1} \in \mathbb{N} \right\}$

2. Să se afle suma numerelor naturale cuprinse între 380 și 602, știind că împărțite la 4 dau restul 1, iar împărțite la 5 dau restul 1

3. a) Să se arate că numărul $\overline{a1a2a6}$ se divide cu 7, oricare ar fi cifra nenulă *a*.

b) Să se determine primele patru cifre și ultimele patru cifre ale numărului $5^{2007} \cdot 4^{1001} + 2007$

c) Să se afle *b* număr natural și cifra *y* astfel încât $(b+3) \cdot \overline{200y} = 2007 \cdot b$.

4. Fie mulțimea $A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ se divide cu 2, } x \text{ nu se divide cu 6 și } x < 2007 \}$.

a) Să se scrie opt elemente din mulţimea A. **b)** Câte elemente are mulţimea A?

c) Dacă elementele mulţimii A le scriem în ordine descrescătoare, ce număr se află pe poziţia 321?

CLASA A VI-A-J

1. Fie a, b, c, d numere naturale nenule astfel încât a, b, c sunt direct proporţionale cu 3, 4 şi respectiv 11, iar d este mai mare decât b cu 25%.

a) Arătaţi că b şi d sunt invers proporţionale cu 5 şi 4;

b) Aflaţi numerele ştiind că $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 89$;

c) Găsiţi cele mai mici numere a, b, c, d cu proprietatea că suma lor are exact trei divizori naturali.

2. a) Aflaţi numerele naturale x, y, z ştiind că $5x^2 + 7y^2 = x \cdot y \cdot z$, iar x şi y sunt prime între ele.

b) Dovediţi că numărul $A = a^{2006} - a^{2005} + a^{2004} - a^{2003} + ... + a^2 - a + 2007$ este număr întreg nenul, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$.

3. Se dau triunghiurile echilaterale ABC şi CDE astfel încât $m(\sphericalangle BCD) = 180°$ şi punctele A, C, E sunt necoliniare. Fie P mijlocul segmentului $[BE]$ şi Q mijlocul segmentului $[AD]$. Să se arate că:

a) $[BE] \equiv [AD]$; **b)** ΔCPQ este echilateral.

4. Fie triunghiul isoscel ABC cu $[AB] \equiv [AC]$. Pe laturile congruente se construiesc în exterior triunghiurile dreptunghice MAB şi NAC cu ipotenuzele $[AM]$, respectiv $[AN]$ şi $m(\sphericalangle BMA) = m(\sphericalangle CNA) = \frac{m(\sphericalangle BAC)}{2}$.

a) Demonstraţi că punctele M, A şi N sunt coliniare.

b) Demonstraţi că $[BN] \equiv [CM]$.

c) Arătaţi că bisectoarea $(AD$ a unghiului BAC, $(D \in [BC])$, dreptele BN şi CM sunt concurente.

Back