OLIMPIADE LOCALE 2007 PARTEA I

ALBA

CLASA A V-A

1. Fie numerele: $A=\left[3\cdot 2^3+5^8\cdot 5^{18}:\left(5^4\right)^6+2004^0+\left(2^6-3^2\cdot 7\right)^{2004}\right]:3$ iar $B=\overline{ab}$ este soluția ecuației: $\left[\left(\overline{ab}+\overline{ba}\right):(a+b)\right]^2\cdot\overline{ab}=1331$.

a) Calculați A și B. **b)** Comparați numerele A și 31^B.

2. Determinați vârstele Alinei și ale mamei sale știind că în urmă cu doi ani vârsta mamei era de 4 ori mai mare decât vârsta fiicei, iar peste 4 ani vârsta Alinei va fi de 3 ori mai mică decât vârsta mamei.

3. Numerele *x, y, z* împărțite la 11 dau resturile 3, 2 respectiv 1. Aflați cel mai mic număr natural n pentru care $11\,|\,(2x+5y+nz)$.

4. Se consideră tabloul alăturat cu 2007 linii.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & & & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & & \\
 & & & & & \ldots & \ldots & \ldots & & & & & \\
1 & \ldots & & & & & 2007 & & & & & \ldots & 1
\end{array}
$$

a) De câte ori apare în acest tablou numărul 1001?

b) Calculați suma numerelor de pe coloana centrală.

c) Arătați că suma obținută la b) nu este pătrat perfect.

CLASA A VI-A

1. Se consideră șirul de numere: 12, 45, 78, 111,...

a) Scrieți al șaselea termen al șirului.

b) Scrieți al 2004-lea termen al șirului.

c) Demonstrați că orice termen al șirului este divizibil cu 3.

2. a) Arătați că pentru oricare $n\in\mathbb{N}$, fracția $\dfrac{5^{n+1}\cdot 2^n+1}{5^n\cdot 2^{n+1}+1}$ este reductibilă.

b) Numărul x reprezintă 25% din numărul y. Cât la sută reprezintă y din $4x+3y$?

3. Suma măsurilor complementelor a trei unghiuri este egală cu 120°. Aflați măsurile unghiurilor, știind că sunt direct proporționale cu numerele 5, 9 și 16.

4. Fie ΔABC cu $AB=AC$, M mijlocul lui AC, D un punct oarecare pe semidreapta $(BM$ (în ordinea $B-M-D$) astfel încât $AD=AC$. Dacă E este mijlocul lui $[AB]$ și F mijlocul lui $[AD]$, arătați că:

a) $\Delta AEC\equiv\Delta AMB$; **b)** $BD=CF+CE$.

CLASA a VII-a

1. a) Să se arate că pentru $m,n\in\mathbb{N}$, fracția $A=\dfrac{5^m\cdot 2^{m+1}+7}{5^{n+1}\cdot 2^{n+6}+4}$ este reductibilă.

b) Arătați că: $\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)\left(1-\frac{1}{c^2}\right)>\frac{1}{2}$, unde $a,b,c\in\mathbb{N}$ distincte și mai mari sau egale cu 2.

2. Fie numărul $A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{100^2}$. Demonstrați că $\frac{99}{202}<A<\frac{99}{100}$.

3. O secantă intersectează laturile unui unghi XOY de măsură $120°$ în A și B, iar bisectoarea lui în C. Prin C se duce paralela la AO care intersectează pe OY în D.

a) Stabiliți natura ΔOCD.

b) Să se demonstreze că $\frac{1}{OC}=\frac{1}{OB}+\frac{1}{OA}$.

4. Fie $[AD],[BE]$ și $[CF]$ înălțimile triunghiului ascuțitunghic ABC. Perpendicularele în B și C pe BC intersectează dreptele CF și BE în M, respectiv N. Arătați că $[DA$ este bisectoarea unghiului MDN.

CLASA A VIII-A

1. a) Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt{x^2+4x+13}+\sqrt{y^4-10y^2+74}=10$.

b) Calculați produsul: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{2007^2}\right)$.

2. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, verifică relația: $f(x)+3f(1-x)=-6x+5, x\in\mathbb{R}$.

a) Determinați $f(0)$ și $f(1)$. **b)** Reprezentați grafic funcția f.

c) Dacă $f(x)=3x-1$, calculați $f(4)+f\left(4^2\right)+...+f\left(4^{10}\right)$.

3. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$, $m(\sphericalangle A)=m(\sphericalangle D)=90°$, în care $[AC]\equiv[BC], AC=a\sqrt{2}$, iar distanța dintre mijloacele P și Q ale diagonalelor este $a/2$. Pe perpendiculara în A pe planul trapezului se ia punctul M astfel încât $AM=a\sqrt{2}$. Determinați:

a) $m(\sphericalangle((MBC);(ABC)))$; **b)** $d(B;(MAC))$; **c)** $d(MA;BD)$.

4. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB=15$ cm, $BC=10$ cm, $AA'=5\sqrt{3}$ cm, $M\in[CC']$ astfel încât $CM=5$ cm, iar $N\in[BB']$ astfel încât perimetrul ΔAMN să fie minim.

a) Calculați măsura unghiului format de BD' cu planul (ABB').

b) Calculați perimetrul ΔAMN.

c) Calculați distanța de la N la planul $(A'BC')$.

[Back]

ARAD

CLASA A V-A

1. Se aruncă de patru ori un zar şi se constată următoarele:

(i) În cele patru aruncări s-au obţinut numere diferite.

(ii) Numărul format din cifrele obţinute la prima şi la a doua aruncare este triplul numărului format din cifrele obţinute la a treia şi a patra aruncare, iar suma acestor numere este 48.

Ce numere nu s-au obţinut în cele patru aruncări?

2. Fie $a = 1+2+3+...+1990$ şi b cel mai mare număr natural care, împărţit la 1990, dă câtul egal cu restul. Arătaţi că $b = 2a - 1991$.

3. Determinaţi cifrele *a, b, c* din egalităţile: $2(a+b) = 3c$ şi $\overline{ab} = 3c$ şi apoi rezolvaţi ecuaţia: $a^1 + a^2 + a^3 + ... + a^{100} - 100x = b^2 + c^2$ înlocuind pe *a, b, c* cu cifrele determinate anterior.

4. Dacă elevii stau doi la o masă rămân 13 în picioare; dacă stau câte 4 la o masă rămân 3 mese libere, iar o masă este ocupată de elevi corespunzător numărului de locuri pentru care a fost confecţionată.

Câţi elevi sunt, câte mese şi câte locuri are o masă?

CLASA A VI-A

1. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ şi numărul $\overline{abc}$ ştiind că:

$$\overline{abc} + \frac{\overline{abc}}{2} + \frac{\overline{abc}}{2^2} + ... + \frac{\overline{abc}}{2^n} = 2\cdot\left(2^n - 1\right) + 1.$$

2. Fie $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD$ astfel că unghiurile cu o latură comună sunt adiacente, iar $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD) = 120°$.

Ştiind că $b \cdot m(\sphericalangle AOB) = a \cdot m(\sphericalangle BOC)$, $c \cdot m(\sphericalangle BOC) = b \cdot m(\sphericalangle COD)$, iar *a, b, c* sunt numere prime, astfel ca $3a + b + 6c = 51$, să se determine măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BOC$ şi $\sphericalangle COD$.

3. Se dă şirul $1, 2, 3, ..., 2003$. Luăm la întâmplare două numere din acest şir, iar în locul lor punem diferenţa lor (cel mare minus cel mic), şi continuăm procedura până în şir rămâne un singur număr. Arătaţi că ultimul număr rămas din acest şir este număr par.

4. Fie dreapta d şi $A \in d, C \in (AB)$, astfel ca $AC < CB$. Dacă $D \in d, E \in d$, astfel încât *A*, respectiv *B* să fie mijloacele segmentelor (*CD*) şi (*CE*), *M* mijlocul lui (*DE*), *N* mijlocul lui (*AB*), iar $MN = 5$ cm, calculaţi *CN*.

CLASA a VII-a

1. Fie $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{n(n+1)}, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $S_n < 2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se afle *n* din egalitatea: $S_n = \frac{4013}{2007}$.

2. În triunghiul dreptunghic *ABC*, $m(\sphericalangle A) = 90°$ şi $m(\sphericalangle C) = 30°$, se duce mediana *AM*, $M \in (BC)$. Ştiind că $BD \perp AM, D \in (AC), CE \perp AM, E \in (AM$, se cer:

a) Să se arate că $ME = \frac{1}{3} \cdot AE$ şi $4 \cdot ME = BC$.

b) Dacă $BD \cap AM = \{Q\}$, să se arate că $DQ = \dfrac{BD}{4}$.

3. În patrulaterul convex $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}, AO = OC, \sphericalangle BAO \equiv \sphericalangle DCO$.

a) Stabiliți natura patrulaterului *ABCD*.

b) Arătați că bisectoarele unghiurilor patrulaterului *ABCD* formează un dreptunghi ale cărui diagonale sunt paralele cu laturile patrulaterului *ABCD*.

4. Fie $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}$ fracții ireductibile cu $b, d > 0$. Dacă $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Z}$, atunci $b = d$.

CLASA A VIII-A

1. Calculați valoarea minimă a expresiei: $E(x) = 4x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 6x + 3,\ x \in \mathbb{R}$.

Pentru ce valoare reală a lui x se obține valoarea minimă?

2. a) Calculați $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-2003}$ dacă $x = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \left|1 - \sqrt{20}\right|$.

b) Arătați că $a = 48^n - 8^n - 6^n + 1$ de divide cu 35, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. Fie *A, B, C, D* patru puncte necoplanare, astfel încât $AD = AB + AC$. Fie E intersecția bisectoarei unghiului *BAC* cu *BC*, *F* intersecția bisectoarei unghiului *CAD* cu *CD* și punctele $M \in (AD), N \in (CD)$, astfel ca $AM = AB$ și $DN = CF$.

Arătați că $(AEF) \| (BMN)$.

4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub și $C'P \perp D'B,\ C'P \cap (AA'D) = \{E\}$.

Calculați aria secțiunii determinată în cub de planul (BEC').

CLASA A V-A-J

1. Un număr de trei cifre în baza 8 este egal cu răsturnatul său în baza 7. Aflați numărul în baza zece.

2. Determinați mulțimile *A* și *B*, știind că sunt îndeplinite condițiile:

a) $A \cup B \subset \{1,2,3,4\}$; **b)** $1 \in A \setminus B$; **c)** $A \cap B \neq \varnothing$;

d) $B \setminus A \not\subset \{2,4\}$; **e)** $A \setminus B \not\subset \{1,2\}$

3. Să se arate că fracția $\dfrac{a+1}{2a+1}$ este ireductibilă, unde a este număr natural.

4. Ordonați crescător numerele naturale *a, b, c, d, e, f* știind că:

$$a + 3 = b - 8 = c + 9 = d - 9 = e + 14 = f - 13.$$

CLASA A VI-A-J

1. Două pisici aleargă după trei șoareci, atunci care este probabilitatea ca după fiecare șoarece să fugă cel mult o pisică?

2. În ΔABC, $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$, iar $(AD$ este bisectoarea unghiului *A*. Fie *P*, un punct pe prelungirea lui $(AD$ astfel încât $DA = DP$ și $MN \perp AD$, $M \in (AB$, $N \in (AC, D \in (MN)$ iar $MN = NP$. Demonstrați că triunghiul *MNP* este echilateral.

3. În triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A)=50°$ şi $m(\sphericalangle C)=45°$. Se consideră punctul $D\in(AC)$ astfel ca $AB=BD$. Prin D se construieşte o paralelă la AB care intersectează pe BC în E.

a) Să se arate că $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle EDC$;

b) Să se determine măsura unghiului format de bisectoarea $\sphericalangle ABD$ cu dreapta DE.

4. Într-o clasă sunt x fete şi y băieţi, numerele x şi y fiind direct proporţionale cu 2 şi 3. În semestrul întâi al anului şcolar un elev sau o elevă este transferat(ă) într-o altă clasă şi astfel numărul fetelor a devenit 60% din cel al băieţilor. Să se afle numărul iniţial al elevilor din clasă.

[Back]

ARGEŞ

CLASA A V-A

1. Se consideră şirul de numere naturale: 2, 7, 12, 17, 22, ...

a) Aflaţi al 501-lea termen al şirului;

b) Stabiliţi dacă numărul 2007 este un termen al şirului;

c) Calculaţi suma primilor 100 de termeni ai şirului.

Gheorghe Molea

2. Calculaţi $y-x$ ştiind că x şi y verifică egalitatea: $5^{2y-1}+2006^{x-1}+a=2006$, unde $a=\left(1+3^2\right)\left[5^{90}:5^{87}+\left(3^3\right)^4:3^{3^2}\cdot 3-2\cdot 3^2\right]$.

Mariana Rădulescu

3. Determinaţi suma numerelor naturale cuprinse între 1504 şi 2007 care, împărţite la 28 dau restul 5 şi împărţite la 35 dau restul 12.

Gheorghe Molea

4. i) Într-o urnă sunt 10 bile negre, 9 bile albe şi 8 albastre. Extragem din urnă câte o bilă fără a ne uita la bila pe care o extragem. Precizaţi care este cel mai mic număr de bile care trebuie extras pentru a fi siguri că am scos:

a) cel puţin o bilă neagră; **b)** cel puţin o bilă de fiecare culoare;

c) cel puţin 4 bile de aceeaşi culoare.

ii) Precizaţi, de asemenea, cel mai mare număr de bile care trebuie extrase pentru a fi siguri că în urnă au rămas:

a) cel puţin 3 bile albastre; **b)** cel puţin câte o bilă de aceeaşi culoare;

c) cel puţin 3 bile de aceeaşi culoare.

Arthur Bălăucă

CLASA A VI-A

1. Vlad vrea să-şi cumpere un calculator şi a avut oferte de la trei magazine, care iniţial au avut acelaşi preţ. Primul a mărit preţul cu 10% şi apoi l-a micşorat cu acelaşi procent, al doilea a micşorat mai întâi preţul cu 10% şi apoi l-a mărit cu acelaşi procent, iar al treilea a lăsat preţul neschimbat. De la ce magazine îşi va cumpăra Vlad calculatorul? Justificaţi.

Mariana Rădulescu

2. Demonstraţi că dacă $17\,|\,a+b+c$ şi $17\,|\,5a+8b+3c$, unde $a,b,c\in\mathbb{N}$, atunci:

a) $17|2a+5b$ şi $17|3a+5c$; **b)** fracţia $\frac{21a+15b+25c}{19a+25b+15c}$ este reductibilă.

Gheorghe Molea

3. Se dă unghiul AOB şi $[OE$ semidreapta opusă lui $[OA$. În acelaşi semiplan cu semidreapta $[OB$, faţă de dreapta OA, se duce semidreapta $[OD$, perpendiculară pe OB. Ştiind că $m(\sphericalangle DOE) = \leq m(\sphericalangle AOB)/3$, să se calculeze $m(\sphericalangle DOE)$ şi $m(\sphericalangle DOF)$, unde $[OF$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOD$.

4. În ΔABC, se ştie că $[AB] \equiv [AC]$. Fie $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $[BM] \equiv [CN]$.

a) Să se demonstreze că $[AM] \equiv [AN]$.

b) Fie D mijlocul segmentului $[BC]$ şi $\{O\} = CM \cap BN$, atunci A, O, D sunt coliniare.

CLASA A VII-A

1. Fie $S_1 = 1+2+3+...+n$ şi $S_2 = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + ... + (n-1)\cdot n$, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Arătaţi că $\sqrt{\frac{1}{2S_1} + \frac{1}{3S_2}} < \frac{1}{n-1}$.

Ion Morteanu

2. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2007}-1\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2x}{2007}-1\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2007}-1\right) + ... + \frac{1}{2007}\left(\frac{2006x}{2007}-1\right) = x+1.$$

Ion Morteanu

3. Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$ şi $AC \cap BD = \{O\}$. Ducem prin O, $MN \parallel AD$, unde $M \in AB$; $N \in CD$ şi $PQ \parallel BC$, unde $P \in AB$; $Q \in CD$. Arătaţi că $EN \cdot BM = AP \cdot DQ$.

4. Fie ΔABC în care: M este mijlocul lui AB, $N \in (BC), P \in AC$ astfel încât $C \in (AP)$ şi $A_{[MBN]} = A_{[CNP]}$. În plus, punctele M, N, P sunt coliniare. Prin N se construieşte o paralelă la AB, care se intersectează cu BP în Q; $AQ \cap CM = \{E\}$ şi $AQ \cap MP = \{S\}$. Prin C se construieşte o paralelă la AQ care se intersectează cu BE în F.

a) Arătaţi că punctele Q, N, F sunt coliniare. **b)** Ştiind că $A_{[MBN]} = 1\ cm^2$, determinaţi $A_{[FBP]}$. **c)** Aflaţi valoarea raportului $\frac{SE}{SQ}$.

Cecilia Diaconescu

CLASA A VIII-A

1. Arătaţi că:

a) $x^2y + z \geq 2x\sqrt{yz},\ \forall x, y, z > 0$;

b) $\frac{x}{x^2y+z} + \frac{y}{y^2z+x} + \frac{z}{z^2x+y} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right),\ \forall x, y, z > 0$.

Când are loc egalitatea?

Gheorghe Molea

2. Fie $A=\sqrt{2^{4012}-2^{2007}+3+2+2^2+2^3+...+2^{n-1}}$. Aflați numerele $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ știind că A este număr natural.

Gheorghe Molea

3. Fie $A_1, A_2, ..., A_n \in C(O,1)$. Arătați că există o infinitate de puncte $M\in C(O,1)$ astfel încât $MA_1^2+MA_2^2+...+MA_n^2\geq 2n$.

Ion Pârșe

4. În centrul O al triunghiului echilateral ABC de latură a se ridică perpendiculara OD pe planul triunghiului. Punctele M și N sunt mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$. Știind că $m(\sphericalangle(NMD),(ABC))=30^\circ$, să se calculeze:

a) dist (O, AD); **b)** $\sin(\sphericalangle(BED),(CED))$, unde $\{E\}=MN\cap AO$.

Laura Molea, Gheorghe Molea

CLASA A V-A-J

1. Să se calculeze suma tuturor numerelor de forma $\overline{abba}$, știind că $\overline{ab}-\overline{ba}=3a+3b$.

2. a) Comparați numerele $2^{222}+3^{111}$ cu $2^{111}+3^{222}$.

b) Fie numerele naturale *a, b, c, x, y, z,* astfel încât: $2^a+2^b+2^c=3^x+3^y+3^z$. Aflați valoarea produsului *abcxyz*.

c) Dacă $2^a+2^b+2^c=3^x+3^y+3^z=13$, aflați numerele naturale *a, b, c, x, y, z*.

3. a) Aflați cifrele nenule *x, y* astfel încât $0,x(y)+0,y(x)$ să fie pătratul unui număr rațional.

b) Fără a efectua împărțirea aflați câte cifre are perioada și câte cifre are partea neperiodică pentru fracția $1/12$.

4. Numerele *x, y, z* împărțite la 11 dau resturile 3, 2, respectiv 1. Determinați cel mai mic număr natural *n* pentru care $11\,|\,(2\cdot x+5\cdot y+n\cdot z)$.

CLASA A VI-A-J

1. Fie șirul de numere naturale: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, ...

a) Aflați al 2007-lea termen al șirului.

b) Aflați suma primilor 2007 termeni ai șirului.

2. Știind că numerele $x+y,\ y+z,\ z+x$ sunt direct proporționale respectiv cu trei numere naturale consecutive nenule, demonstrați că: $2<\dfrac{xy}{y^2}+\dfrac{z}{x}\leq 16,(6)$.

3. Suma a două numere naturale nenule *a* și *b* este de *p* ori mai mare decât diferența lor, $p\in\mathbb{N}^*-\{1\}$. Știind că $\dfrac{a}{b}$ este număr natural, determinați numărul *p*.

4. Fie semidreptele $[OA$, $[OX$, $[OB$, $[OC$, $[OY$ și $[OD$ în această ordine, astfel încât: $m(\sphericalangle AOD)=8\cdot m(\sphericalangle BOC), m(\sphericalangle BOX)=9\cdot m(\sphericalangle AOX), m(\sphericalangle COY)=9\cdot m(\sphericalangle DOY)$.

Demonstrați că $\dfrac{m(\sphericalangle XOY)}{m(\sphericalangle BOC)}=7\dfrac{3}{10}$.

[Back]

BACĂU

CLASA A V-A

1. Pentru o seară festivă s-au cumpărat portocale şi mere, în total 244 bucăţi. După ce s-au aşezat pe mese 40 de mere şi 24 de portocale, au rămas de două ori mai multe mere decât portocale. Câte mere şi câte portocale s-au cumpărat?

Maria Zaharia

2. Într-o carieră de piatră sunt blocuri de piatră în greutate de 369kg, 371kg, 373kg, ..., 467kg din fiecare câte unul. Pot fi acestea transportate cu 7 camioane, într-un singur drum, ştiind că fiecare camion are capacitatea de 3000kg? Argumentaţi!

Cerbu Dănuţ

3. Scrieţi numărul 2007^{2007} ca o sumă de 5 pătrate perfecte.

Gîndu Gheorghe

4. Fie numărul natural A, din 2007 cifre, format prin alipirea numerelor 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ..., în această ordine. Numărul B are 2006 cifre şi suma acestora este 1. Aflaţi: **a)** ultimele 3 cifre ale numărului A; **b)** câtul şi restul împărţirii lui A la B.

Vieru Costică, Vieru Florentina

CLASA A VI-A

1. Câte numere naturale de 3 cifre au exact 6 divizori şi suma acestor divizori este egală cu 364?

Trofin Ovidiu

2. Aflaţi măsura unghiului format de acele unui ceasornic când acesta indică ora 2 şi 20 minute.

Gloambes Toma, Gloambes Lucian

3. Două echipe de muncitori pot efectua o lucrare în 12 zile. Dacă prima echipă lucrează singură 10 zile şi din a douăsprezecea zi lucrează ambele echipe, terminând lucrarea în 8 zile, să se afle în câte zile ar termina lucrarea fiecare echipă lucrând singură.

Păduraru Elena

4. Fie punctele coliniare A, B şi C. Punctele D şi E sunt exterioare dreptei AB astfel încât $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle CDE$ şi $[BE] \cap [CD] = \{M\}$, unde M este mijlocul segmentului $[CD]$. Dacă $AB = 3,(6)$ cm şi $BC = 11$ cm, calculaţi valoarea raportului $\dfrac{AC}{DE}$.

Gându Gheorghe

CLASA A VII-A

1. Aflaţi $a, b, c \in \mathbb{N}$ ştiind că $\dfrac{2a+5b}{19} = \dfrac{2a+c}{9} = \dfrac{5b+c}{20}$ şi $a \cdot b \cdot c = 3750$.

Răileanu Dorina

2. Pe o tablă de joc în formă de pătrat de dimensiuni $n \times n$ se aşează toate numerele naturale de la 1 la n^2.

a) Pentru $n = 3$ să se găsească o aşezare a celor 9 numere pe tablă astfel încât suma numerelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană să fie aceeaşi.

b) Pentru $n = y$ se consideră propoziţia (p): „Pe fiecare linie suma primelor 4 căsuţe este egală cu suma ultimelor 5 căsuţe”. Arătaţi că (p) este falsă.

3. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și D punctul de intersecție al bisectoarei interioare a unghiului CAB cu bisectoarea exterioară a unghiului ACB. Dacă $M \in (ID)$ astfel încât $m(\sphericalangle BAC) = 2 \cdot m(BCM)$, arătați că:

a) M este mijlocul segmentului (ID); **b)** ΔBMC este isoscel.

Maria și Ion Pascu

4. Fie pătratul $ABCD$, $M \in (BC)$ și $N \in (CD)$, astfel încât $(BM) \equiv (CN)$. Dacă $AB \cap DM = \{E\}$ și $AD \cap BN = \{F\}$ să se demonstreze că:

a) E, C și F sunt puncte coliniare; **b)** $AP \perp EF$, unde $DE \cap BF = \{P\}$.

Tarasa Eugen

CLASA A VIII-A

1. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, care verifică relația: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < 4$.

Demonstrați că $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \leq 8$.

Lucian Lazăr

2. Tom a primit o pușculiță în care sunt 5 lei, după care își propune să economisească săptămânal o sumă de bani astfel: în săptămânile fără soț 5 lei și în săptămânile cu soț 2 lei.

Se cere să se afle: **a)** ce sumă va avea după 7 săptămâni;

b) dacă va avea vreodată în pușculiță o sumă de bani un număr pătrat perfect.

Trofin Ovidiu

3. Paralelogramul $ABCD$ și pătratul $BDEF$ sunt situate în plane perpendiculare. Fie M și N proiecțiile ortogonale ale punctelor E, respectiv F pe AC. Dacă $AB = 8\,\text{cm}$, $AD = 5\,\text{cm}$, $m(\sphericalangle DAB) = 60^\circ$, aflați: **a)** lungimea proiecției ortogonale a diagonalei (AC) pe EF;

b) distanța dintre planele (EDM) și (FNB).

Vieru Costică, Vieru Florentina

4. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată.

Arătați că $2 \cdot AA' = \sqrt{3} \cdot AB \Leftrightarrow (A'BC) \perp (AB'C')$.

Tarasa Eugen

CLASA A V-A-J

1. Fie $A = \left(2008^{10} - 2008^9\right) \cdot \left(2008^{10} - 2008^9\right) \cdot \left(2008^{10} - 2008^9\right) \cdot \left(2008^{10} - 2008^9\right)$

și $B = \left[\left(2008^5\right)^6 \cdot 2007^3\right]$. Calculați $A : B$.

Gloambes Toma, Gloambes Lucian

2. Vârstele tatălui, fiului și a nepotului său în anul 2007 sunt exprimate prin numere prime, iar peste cinci ani vârstele lor vor fi exprimate prin numere naturale pătrate perfecte. Câți ani are fiecare?

Tarasa Eugen

3. Determinați mulțimile A și B care îndeplinesc simultan condițiile: $A \cap B = \left\{x \in \mathbb{N}^* \mid x \vdots 3 \text{ și } x < 10\right\}$; $A \cup B = \{1,3,5,6,9,10\}$; $A \subset \left\{x \in \mathbb{N}^* \mid x \vdots 3 \text{ sau } x : 3 \text{ dă restul } 2\right\}$.

Stoica Mihaela, Răileanu Dorina

4. Ştiind că împărţind numerele $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ şi $\overline{cab}$ la acelaşi număr natural nenul obţinem câturile a, b respectiv c şi resturile $b+c$, $c+a$, respectiv $a+b$, aflaţi împărţitorul.

Vieru Costică, Vieru Florentina

CLASA A VI-A-J

1. Marian a uitat codul la seif (codul este format din 3 cifre), dar şi-a amintit că prima cifră este cea mai mare cifră cu soţ, mai ştie că restul împărţirii primei cifre la a doua este 0 şi a treia cifră este cubul celei de-a doua. Câte combinaţii trebuie să facă pentru a putea deschide seiful?

Radu Ion

2. a) O cantitate de 13 kg de bomboane este împărţită la 3 copii, invers proporţional cu vârstele lor. Ştiind că, vârstele copiilor sunt de 2 ani, 3 ani şi respectiv 4 ani, ce cantitate va primi fiecare copil?

b) Suma a 4 numere este 488. Să se afle numerele dacă al II-lea este 260% din primul, al III-lea este 125% din diferenţa primelor două, iar al IV-lea este jumătatea primului.

Pascu Maria şi Ion

3. Să se afle măsurile unghiurilor AOB şi COD ştiind că latura $[OC$ este bisectoarea unghiului AOB şi formează cu latura OA un unghi de $25°30'$ iar semidreapta $[OD$ este opusă semidreptei OA.

Vieru Costică, Vieru Florentina

4. Fie dreapta d, punctele A, B, C şi D (în această ordine) astfel încât segmentele $[BC]\cap[AD]$ au acelaşi mijloc. De aceeaşi parte a dreptei d se iau punctele E şi F astfel $\Delta AEC \equiv \Delta BFD$. Ştiind că ΔAEC este isoscel şi $EC \cap BF = \{M\}$, arătaţi că ΔBMC este isoscel.

Vieru Costică, Radu Ion

[Back]

BIHOR

CLASA A V-A

1. Să se arate că numărul numerelor naturale care împărțite la 2006 dau un cât cel mult egal cu 6002, nu poate fi pătrat perfect.

Pleșa Romulus, Pleșa Viorica

2. Câte numere mai mari decât 500 și mai mici decât 9999 pot fi formate folosind cifrele 0, 1, 3, 5 și 7 cel mult o singură dată în fiecare număr?

Szatmari Dorina

3. Știind că $2006^n + n$ este divizibil cu 5 arătați că și $n+1$ este divizibil cu 5.

Gabor Mihai

4. În trei lăzi sunt 48 de mere. Mutăm din prima ladă în a doua atâtea mere câte erau în a doua și apoi, din a doua mutăm în a treia ladă atâtea mere câte erau în a treia. În sfârșit, din lada a treia mutăm în prima ladă atâtea mere câte au mai rămas în ea. Astfel, în cele trei lăzi sunt acum același număr de mere. Câte mere erau la început în fiecare ladă?

CLASA A VI-A

1. Să se determine divizorii naturali ai numărului:

$$a = 2007 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \ldots + \frac{1}{4024035}\right).$$

Pleșa Romulus, Pleșa Viorica

2. Se dau numerele: $a = 3n+2; b = 4n+3;\ c = 7n+5$ unde $n \in \mathbb{N}$. Să se afle $\left[[a,b],c\right]$ unde $[a,b]$ este cel mai mic multiplu comun al lui a și b.

Cuc Ioan

3. Fie unghiurile suplementare $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$, iar $[OD$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$, $[OE$ semidreapta opusă lui $[OD$ și F un punct din interiorul lui $\sphericalangle BOE$.

a) Dacă $m(\sphericalangle FOC) = 90°$ și $m(\sphericalangle EOC) = 24°25'$, calculați $m(\sphericalangle BOF)$.

b) Dacă $[OF$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOE$ și $[OG$ este semidreapta opusă lui $[OF$ arătați că $m(\sphericalangle EOG) - m(\sphericalangle AOG) = 2 \cdot m(\sphericalangle AOD)$.

Gabor Mihai

4. Se consideră unghiul nealungit xOy și punctele $A', B' \in [Ox, A, B \in [Oy$, astfel încât $[OA] \equiv [OA']$ și $[OB] \equiv [OB']$. Arătați că: **a)** $[AB'] \equiv [A'B]$; **b)** $\Delta AMB \equiv \Delta A'MB'$ unde $\{M\} = AB' \cap A'B$; **c)** $[OM$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle xOy$.

CLASA a VII-a

1. Să se determine numerele naturale *a, b, c* ştiind că sunt îndeplinite următoarele condiţii: 1) $a+b+c+ab+ac+bc+abc=1000$.

2) Numerele $a+1,\ b+1$ şi $c+1$ sunt direct proporţionale cu numerele 7, 11 respectiv 13.

Pleşa Romulus, Pleşa Viorica

2. Se dă triunghiul isoscel $ABC\left(AB\equiv AC\right)$. Se duc bisectoarele unghiurilor exterioare lui *B* şi *C*. Ducem perpendicularele din *A* pe cele două bisectoare exterioare pe care le taie în *M* şi *N*. Bisectoarea unghiului *B* taie *MN* în *P*. Să se demonstreze că $m\left(\sphericalangle APB\right)=90^\circ$. Unde se află *P* dacă triunghiul *ABC* este echilateral?

Cuc Ioan

3. Demonstraţi că numărul $27^n+6^n+3^n+2^n+2$ se divide la 3^n+1, unde $n\in\mathbb{N}$.

G.M. 7-8/2002

4. Fie *ABCD* un patrulater convex în care $AB\parallel CD$. Dacă A' şi B' sunt respectiv picioarele perpendicularelor din *A* şi *B* pe *DC*, *M* şi *N* respectiv mijloacele segmentelor $[AA']$ şi $[BB']$, iar $AC\cap BD=\{O\}$, demonstraţi că *ABCD* este paralelogram dacă şi numai dacă punctele *M*, *N* şi *O* sunt colinire.

R.M.T. 1/2000

CLASA A VIII-A

1. Se dau numerele: $A=\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\cdot\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\cdot\sqrt{12}}+...+\sqrt{31-2\cdot\sqrt{240}}$

$$B=\sqrt{1996\cdot1998\cdot2004\cdot2006+64}$$

$$C=\sqrt{(5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)+2008};\ n\in\mathbb{N}.$$

Să se arate că: **a)** *A* este un număr natural. **b)** $B+17$ este pătrat perfect. **c)** *C* este un număr iraţional, $(\forall)n\in\mathbb{N}$.

Pleşa Romulus, Pleşa Viorica

2. Se dau expresiile: $E(n)=n^2+n+1,\ F(n)=n^2-n+1,\ n\in\mathbb{N}$.

a) Să se demonstreze că: a₁) $F(n+1)=E(n)$; a₂) $E(n)\cdot E(n+1)=E\left((n+1)^2\right)$;

a₃) $F(n)\cdot F(n+1)=E\left(n^2\right)$;

b) Să se arate că $\dfrac{E(1)\cdot E(2)\cdot...\cdot E(2005)}{F(1)\cdot F(2)\cdot...\cdot F(2005)}=2006\cdot2005+1$.

Cuc Ioan

3. Fie triunghiul *ABC* cu unghiul $\sphericalangle C$ drept. Pe latura *AC* se ia un punct *D* astfel încât raportul dintre aria triunghiului ABD şi aria triunghiului DBC să fie $\frac{4}{5}$. Ştiind că $AB=30$ şi $BD=26$, să se afle: **a)** Lungimea segmentului BC.

b) Fie $M \notin (ABC), MA=MB=MC$ şi $ME \perp (ABC), E \in (ABC)$. Aflaţi lungimea segmentului ME dacă se cere ca lungimile laturilor triunghiului MAE să fie exprimate prin numere naturale.

Szatmari Dorina

4. Se consideră un cub $ABCDA_1B_1C_1D_1$ de latură a, având muchiile laterale AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Fie E mijlocul muchiei AD şi F mijlocul lui BB_1. Paralela dusă prin centrul O al feţei $(A_1B_1C_1D_1)$ la EF intersectează faţa (ADD_1A_1) în punctul G. Să se calculeze lungimile segmentelor EF şi OG.

Gabor Mihai

CLASA A V-A-J

1. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

p: „Numărul $A=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ nu este divizibil cu 37"

q: „Diferenţa dintre un număr natural de trei cifre scris în baza 10 şi răsturnatul său nu este pătrat perfect (răsturnatul lui $\overline{abc}$ este $\overline{cba}$, $a \neq c$)."

2. Se dau mulţimile *A, B, C, D* cu proprietatea că sunt disjuncte oricare două între ele, oricare trei între ele şi toate patru, astfel încât: $\text{Card}A=a^{5n+3}, \text{Card}B=a^{5n+2}, \text{Card}C=a^{5n+1}, \text{Card}D=a^{5n}, a,n \in \mathbb{N}^*$.

Să se demonstreze că $\text{Card}(A \cup B \cup C \cup D)+4$ este număr par.

Cuc Ioan

3. Tata, mama şi cei doi copii au împreună 94 de ani. Cel mai mic dintre copii este de 7 ori mai tânăr decât tata. Dacă la vârsta celui mai mare dintre copii înmulţită cu 3 se adună vârsta celui mai mic dintre copii, se obţine vârsta mamei. Vârsta celui mai mare dintre copii este cu doi ani mai mică decât dublul vârstei celui mai mic dintre copii.

Să se afle vârsta fiecăruia.

Pleşa Romulus, Pleşa Viorica

CLASA A VI-A-J

1. Numerele naturale *a, b, c* sunt direct proporţionale cu primele numere naturale prime.

a) Arătaţi că $bc-ab$ şi $bc+ac$ sunt pătrate perfecte.

b) Determinaţi numerele *a, b, c* ştiind că $a^3 \cdot b^2 \cdot c = 2340$.

2. Se dau numerele: $A=\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{2}{3^{100}}, B=100^{25}, C=1-\frac{1}{B}$.

Să se compare *A* şi *C*.

3. Fie M un punct pe latura (BC) a $\Delta ABC, ME \perp AB, MF \perp AC\left(E \in (AB), F \in (AC)\right)$. Pe dreptele ME, MF se consideră punctele P şi Q respectiv astfel încât E şi F să fie mijloacele segmentelor (PM) şi (MQ).

a) Arătaţi că $BP + CQ = BC$.

b) Să se determine $m(\sphericalangle BAC)$ astfel încât A, P, Q să fie coliniare.

Back

BISTRIŢA NĂSĂUD

CLASA A IV-A

1. a) Află ce număr trebuie adunat la 4326 pentru a obţine cel mai mare număr natural scris cu şase cifre. **b)** Află ce număr trebuie înmulţit cu 9 pentru a obţine 99.

c) Află ce număr trebuie împărţit la 4 pentru a obţine câtul 58 şi restul 3.

d) Calculaţi: $45:5\cdot 3\cdot 2:2$.

Florean Smaranda, Andron Elena

2. a) Aflaţi numărul x din egalitatea: $\left[(2x-100):3+100\right]:2=100$.

b) Compuneţi o problemă după exerciţiul dat la a).

Ani Ioan

3. Ilinca depune la o bancă suma de 1840 lei. După fiecare an suma creşte cu un sfert din suma existentă. Să se afle ce sumă va avea Ilinca după doi ani.

Sipetean Felicia

4. Un elev este de două ori mai vârstnic decât sora lui. Ea are de trei ori mai multe cireşe decât are el alune. Dacă înmulţim numărul care reprezintă vârsta elevului cu numărul cireşelor, obţinem 510. Ce vârstă are sora elevului? Câte alune are elevul?

Sipetean Felicia

CLASA A IV-A-J

1. Calculaţi valoarea expresiei $a+b-c$, ştiind că: $a = 8+8:8+8\cdot 1-8$; b = cel mai mare număr natural impar scris cu două cifre diferite; $c = \left[(30:5)\cdot 2-5\cdot 2\right]\cdot 5$.

Florean Smaranda, Andron Elena

2. a) Aflați numărul necunoscut „m” din egalitatea:

$$(6\cdot6+21:m)-2\cdot8:4+(20-5\cdot3)=2\cdot4\cdot5.$$

b) Rezolvați exercițiul și dați răspunsul în cifre romane dar și în cifre arabe: $LX\cdot II+CCXX\cdot III$.

Viorica Burduhos

3. Suma a două numere naturale este 55. Dacă împărțim această sumă la diferența numerelor, obținem câtul 6 și restul 1. Care sunt numerele?

Florean Smaranda, Andron Elena

4. O carte costă cu 14 lei mai mult decât un caiet. Prețul acestei cărți este cât prețul a 5 caiete și încă 2 lei. Aflați cât costă 3 cărți și patru caiete.

Cosic Dorel

CLASA A V-A

1. Să se determine ultimele patru cifre ale numărului $A=2^{2007}-2^{2001}-2^{2000}$.

Morariu Ioan

2. Să se afle numerele naturale x, y, z știind că: prin împărțirea lui x la $y+z$ se obține câtul 20 și restul 12; că cel mai mare divizor comun al numerelor y și z este 19 și că $x+y+z=2007$.

Cârcu Anca

3. Într-un hotel sunt camere cu 3 paturi și camere cu 4 paturi, în total 100 de paturi. Câte camere cu trei paturi și câte camere cu patru paturi pot fi în hotel, dacă din fiecare sunt cel puțin 10?

Cosic Dorel

4. Scrieți numerele de forma $\overline{abc}$ pentru care $a^2=b\cdot c$.

GM nr.12/2006, Pop Valer

CLASA A VI-A

1. Veverița Rița are trei pui: Rudolf, Rițu și Rica. Într-o zi Rița aduce acasă 65 de nuci pe care doar puii le consumă. Dacă Rudolf ar consuma de două ori mai multe nuci, Rițu ar consuma de trei ori mai multe nuci, iar Rica de patru ori mai multe nuci, atunci cei trei frați ar consuma un număr egal de nuci. Aflați câte nuci a consumat fiecare pui de veveriță.

Nechita Mihai

2. Suma dintre un număr și produsul cifrelor sale este 58. Aflați numărul.

GM nr.9/2006, Trif Vasile

3. Se dau două segmente congruente, $(AB)\equiv(DC)$, astfel încât: $AB\cap DC=\{O\}$; $3m(\sphericalangle AOC)=2m(\sphericalangle BOC)$; $2OB=3OA$ și $\frac{1}{2}OD=\frac{1}{3}OC$.

a) Demonstrați că triunghiurile AOC și DOB sunt congruente;

b) Calculați $m(\sphericalangle AOC)$ și $m(\sphericalangle COB)$.

Măluțan George

4. Se dau două unghiuri astfel încât $m(\sphericalangle AOB)=130^\circ$ și $m(\sphericalangle BOC)=160^\circ$ iar $[OM$ bisectoarea unghiului AOB și $[ON$ bisectoarea unghiului AOC. Să se afle:

a) $m(\sphericalangle MON)$ când unghiurile date sunt adiacente;

b) $m(\sphericalangle MON)$ când unghiurile date nu sunt adiacente.

Mureşan Liviu

CLASA A VII-A

1. Se consideră mulţimea: $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\left|\frac{2005x+2017}{401x+2}\in\mathbb{Z}\right.\right\}$. Să se determine elementele mulţimii A. Să se calculeze valoarea raportului $r(a)=\frac{2005a+2017}{401a+1}$, pentru $a\in A$.

Ioviţă Edith

2. a) Să se arate că orice număr natural pătrat perfect este de forma $4n$ sau $4m+1$; $n,m\in\mathbb{N}$.

b) Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}$, numărul $x=n(n+1)(n+2)(n+3)+2007$ nu este pătrat perfect.

Săplăcan Lia

3. În interiorul pătratului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABM şi CDN, $AB=a, BM\cap CN=\{K\}, AM\cap DN=\{L\}$. Arătaţi că patrulaterul $MKNL$ este romb.

Bindiu Viorel

4. Fie ABC un triunghi isoscel de bază (BC) şi $D\in(AC)$. Se construieşte (BE) astfel încât $B\in(AE)$ şi $(BE)\equiv(CD)$. Segmentele (ED) şi (BC) se intersectează în F. Să se arate că F este mijlocul segmentului (DE).

GM nr.8/2006, Tebieş Ioan

CLASA A VIII-A

1. Fie $m=\sqrt{8-2\sqrt{7}}-\sqrt{8+2\sqrt{7}}$.

a) Arătaţi că $m^2=4$. **b)** Calculaţi m;

c) Demonstraţi egalitatea: $\left(m\sqrt{5}\right)^{2006}=20^{1003}$;

d) Rezolvaţi ecuaţia: $\left(\sqrt{8-2\sqrt{7}}+\sqrt{8+2\sqrt{7}}\right)x=\sqrt{8-2\sqrt{7}}-\sqrt{8+2\sqrt{7}}$.

Pop Ioan

2. Să se determine numărul natural n pentru care valoarea numerică a expresiei $a(n)=n^4-16n^2+100$ este număr natural, prim.

Ani Ioan

3. Diferenţa dintre diagonala unui cub şi diagonala unei feţe a cubului este $\sqrt{17+4\sqrt{15}}-\sqrt{13+4\sqrt{10}}$. Să se afle aria secţiunii diagonale a cubului.

GM nr.4/2006, Daniel Stanciu, Elisabeta Stanciu

4. Pe planul pătratului $ABCD$, cu latura de măsură $2x$, se ridică perpendiculara care trece prin A. Pe această perpendiculară se ia punctul S astfel încât $AS = 2x$. Perpendicularele din A pe BS, CS, DS le intersectează pe acestea respectiv în punctele M, N, P. Fie O punctul de intersecție al diagonalelor pătratului și E mijlocul segmentului MP. Cerințe:

a) Triunghiurile MNP, AMP sunt isoscele;

b) Dreapta MP este paralelă cu planul $(ABCD)$;

c) Punctele S, E, O sunt colineare;

d) Dreapta SE nu este perpendiculară pe planul AMP;

e) Dreptele AE și BD sunt perpendiculare;

f) Calculați distanța OF de la punctul O la dreapta SC.

CLASA A V-A-J

1. Să se afle baza sistemului de numerație x știind că: $11011_x + 63_{x+6} = 78_{x+8}$.

Ștefan Iloaie

2. Un elev are de rezolvat cel mult 100 de probleme. Rezolvând câte x probleme pe zi, după 4 zile îi mai rămân de rezolvat 3 probleme; rezolvând câte y pe zi, după 5 zile îi mai rămân de rezolvat 3 probleme; rezolvând câte z pe zi, după 6 zile îi mai rămân de rezolvat tot 3 probleme. Câte probleme a avut de rezolvat și câte a rezolvat pe zi în fiecare din cele trei situații?

Sonea Ioan

3. Fie numărul $x = \overline{aab} + \overline{bba} + 37(a - 2b)$, unde $\overline{aab}$ și $\overline{bba}$ sunt numere de 3 cifre.

a) Să se arate că x se divide cu 37.

b) Să se determine a și b știind că x este pătrat perfect.

Lia Săplăcan

4. Se dau numerele naturale: $A = 3 \cdot 8^n + 5 \cdot \left(2^n\right)^3$, $n \in \mathbb{N}$; $B = 4 \cdot 3^{2p} + 5 \cdot 9^p$, $p \in \mathbb{N}$.

a) Aduceți A și B la o formă mai simplă. **b)** Aflați dacă există n și p astfel încât $A = B$.
c) Comparați A și B pentru $n = p = 1000$. **d)** Comparați A și B pentru $n = 152$, $p = 101$.

Sonea Ioan

CLASA A VI-A-J

1. Numerele x, y, z, t pozitive, sunt proporționale cu numerele $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 2$ și 1. Numerele x, a, b sunt invers proporționale cu numerele $2; 0,(3); 0,1(6)$. Să se determine numerele x, y, z, t, a, b știind că $x^2 = y^4 = z$.

George Măluțan

2. Aflați numărul $\overline{abc}$, dacă: $\dfrac{3}{a+b} = \dfrac{b+c}{a} = \dfrac{2a+b}{5}$.

Valer Pop, M. Nechita

3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $A = n(n+1)(n+2)(n+3)$ și $B = n(n+1)(n+2)(n+3) + 3^{899} + 9$. Arătați că $6 | B$.

Sorin Budișan

4. a) În ΔABC isoscel, $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ACB) = 80°$. Se consideră punctele $F \in [AB]$ și $E \in [AC]$ astfel încât $m(\sphericalangle ABE) = 30°$ și $m(\sphericalangle ACF) = 60°$. Determinați $m(\sphericalangle AEF)$.

b) Pe dreapta FE se ia punctul M așa ca E să fie mijlocul segmentului $[FM]$, iar pe dreapta CE se ia punctul N astfel ca E să fie mijlocul segmentului $[CN]$. Arătați că $[MN] \equiv [EF]$.

Tebies Ioan

Back

BRAȘOV

CLASA A V-A

1. Câte numere de forma $\overline{xy}$ verifică relația: $x + \overline{xy} = y + \overline{yx} + 50$?

G.M. 2/2006

2. Fie mulțimile:

$A = \{x \mid x = 2^n$ unde $n \in \mathbb{N}$ si $n \le 4\}$ și $B = \{z \mid \overline{yz}$ este divizibil cu $2\}$.

a) Calculați $A \cup B$; $A \cap B$ și $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

b) Notăm cu a suma elementelor mulțimii A și cu b suma elementelor mulțimii B. Comparați numerele 2^{a-1} și 3^b.

c) Notăm cu $card(A)$ numărul elementelor mulțimii A și cu $card(B)$ numărul elementelor mulțimii B. Determinați pătratele perfecte de forma $\overline{nm}$ astfel încât $n \cdot card(A) + m \cdot card(B)$ să fie număr divizibil cu 10.

Dorina Zaharia

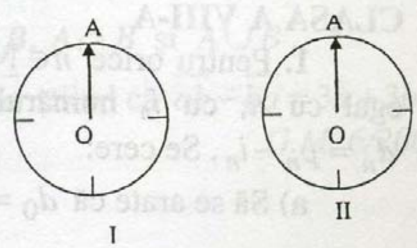
3. Fie $S = 5 + 25 + 225 + 2225 + ... + \underbrace{22...25}_{2007\, cifre}$.

i) Câte cifre are termenul din mijloc?
ii) Câte cifre de 2 sunt în sumă?
iii) Câte cifre de 5 sunt în sumă?
iv) Care este ultima cifră a lui S?
v) Care este penultima cifră a lui S?

Maria Dobra

CLASA A VI-A

1. Ceasurile din figură pornesc simultan. Primul ceas funcționează normal și semidreapta (OA parcurge, în 15 minute, un $\sphericalangle$ cu măsura de 90°. Al doilea ceas este defect și limba lui parcurge, în 4 minute, un $\sphericalangle$ cu măsura de 54° astfel încât unghiul parcurs în fiecare minut reprezintă jumătate din suma unghiurilor precedente. Aflați măsurile unghiurilor parcurse, în cazul fiecărui ceas, după două minute de la pornire.



Delia Minea

2. a) Să se determine numerele naturale a și b, știind că $a - b = 60$ și câtul împărțirii lui a la b este 5.

b) Dacă x şi y sunt numere naturale nenule care îndeplinesc condiţia $5x + 7y = 70$, arătaţi că $10 < x + y < 14$.

Aurel Aldea

3. Trei numere x, y, z sunt invers proporţionale cu numerele 2, 3 şi 5.

a) Arătaţi că $\dfrac{y^2 - z^2}{x^2}$ este pătratul unei fracţii; **b)** Calculaţi $\dfrac{x+y}{y+z}$;

c) Determinaţi x, y, z ştiind că suma lor este 3100.

CLASA A VII-A

1. a) Arătaţi că numărul diagonalelor unui poligon convex cu n laturi este $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

b) Determinaţi poligoanele convexe care au un număr prim de diagonale.

Aurel Bârsan

2. a) Arătaţi că dacă $0 < x < y$ cu $x, y \in \mathbb{Q}$ atunci $x < \dfrac{x+y}{2} < y$. Fie numerele $n_1 = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{5\cdot 6} + ... + \dfrac{1}{2003\cdot 2004}$, $n_2 = \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + \dfrac{1}{6\cdot 7} + ... + \dfrac{1}{2004\cdot 2005}$. **b)** Arătaţi că $n_2 < n_1$. **c)** Calculaţi media aritmetică a numerelor n_1 şi n_2. **d)** Arătaţi că $n_2 < \dfrac{1002}{2005} < n_1$.

G.M. 4/2006

3. Se dă triunghiul ΔABC în care BB' este bisectoarea unghiului ABC, cu $B' \in AC$. Fie $B'D \parallel AB$ şi $B'E \parallel BC$, cu $D \in BC$ şi $E \in AB$.

a) Arătaţi că $BDB'E$ este romb.

b) Să se demonstreze relaţia: $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{BC} = \dfrac{1}{B'D}$.

Dorina Mateiaş

4. Numerele x, y, z sunt direct proporţionale cu 2, 5 şi 10. **a)** Cât la sută din z reprezintă $x + y$? **b)** Calculaţi valoarea raportului $\dfrac{x^2 + 2y^2}{3z^2}$; **c)** Dacă $2x + 3y - z = 18$, determinaţi numerele x, y şi z.

CLASA A VIII-A

1. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ vom nota cu p_n numărul pătratelor perfecte pare mai mici sau egal cu n, cu i_n numărul pătratelor perfecte impare mai mici sau egale cu n şi cu $d_n = p_n - i_n$. Se cere:

a) Să se arate că $d_0 = 1$, $d_1 = d_2 = d_3 = 0$, $d_4 = 1$; **b)** Să se determine d_{k^2}, $k \in \mathbb{N}$;

c) Să se demonstreze că $d_n \in \{0,1\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

d) Să se calculeze $d_0 + d_1 + d_2 + ... + d_{2007}$.

Romeo Ilie

2. Fie $a = \sqrt{x + \sqrt{4x-4}}$ şi $b = \sqrt{x - \sqrt{4x-4}}$, $x \ge 1$.

a) Calculați $a\cdot b$; b) Arătați că: $x+\sqrt{4x-4}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{4x-4}+2\right)^2$ și că $x-\sqrt{4x-4}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{4x-4}-2\right)^2$, pentru orice $x\geq 1$. c) Calculați $a-b$.

Vasile Predan

3. Fie *A, B, C, D* patru puncte necoplanare, *M* mijlocul lui $[AB]$ și *N* mijlocul lui $[CD]$, iar *G* centrul de greutate al triunghiului *ABC*. Să se arate că:

a) punctele *D, M, G, N* sunt coplanare;

b) dreapta *GN* intersectează planul (ABD) într-un punct *P*;

c) *G* este centrul de greutate al triunghiului *PCD*;

d) dreapta *GD* trece prin mijlocul segmentului $[MN]$.

Anton Oancia

4. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie 4 cm. *M* mijlocul muchiei $[AB]$ și $\{N\}=(MC'D)\cap[BB']$.

a) Demonstrați că dreapta AB' este paralelă cu planul $(MC'D)$.

b) Justificați poziția punctului *N*.

c) Calculați aria patrulaterului $MNC'D$.

d) Arătați că dreptele DM, CB și $C'N$ sunt concurente.

* * *

CLASA A V-A-J

1. a) Arătați că $a=\frac{13^{2007}:13^{2006}}{2^{10}-2^9-2^8-...-1}=13$;

b) Arătați că $b=1+3+3^2+3^3+...+3^{2007}$ este un număr divizibil cu 4;

c) Aflați restul împărțirii lui *b* la *a*.

Dorina Zaharia

2. Considerăm mulțimile:

$A=\{a\in\mathbb{N}\mid$ există $b\in\mathbb{N}$ astfel încât $2\cdot a+3\cdot b=2007\}$ și

$B=\{b\in\mathbb{N}\mid$ există $a\in\mathbb{N}$ astfel încât $2\cdot a+3\cdot b=2007\}$. Se cere

a) Arătați că 2007 este un impar și divizibil cu 3;

b) Demonstrați că dacă un număr natural impar este divizibil cu 3, atunci restul împărțirii lui la 6 este egal cu 3;

c) Determinați numărul de elemente ale mulțimilor *A*, *B*, $A\cap B$ și $A\cup B$.

3. Să se calculeze suma tuturor numerelor de forma $\overline{abba}$ știind că $\overline{ab}-\overline{ba}=3a+3b$.

G.M. 6/2006

CLASA A VI-A-J

1. a) Determinați mulțimea $\{(-1)^n\cdot 1+(-1)^m\cdot 2\mid n,m\in\mathbb{N}\}$;

b) Dați exemple de numere $m,n,p,q\in\mathbb{N}$ astfel încât

$$(-1)^n\cdot 1+(-1)^m\cdot 2+(-1)^p\cdot 3+(-1)^q\cdot 4=0;$$

c) Dați exemple de numere $n_1, n_2, ..., n_7 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$(-1)^{n_1} \cdot 1 + (-1)^{n_2} \cdot 2 + ... + (-1)^{n_7} \cdot 7 = 0;$$

d) Arătați că $(-1)^{n_1} \cdot 1 + (-1)^{n_2} \cdot 2 + ... + (-1)^{n_6} \cdot 6 \neq 0$ pentru orice numere $n_1, n_2, ..., n_6 \in \mathbb{N}$.

e) Dați exemple de numere $n_1, n_2, ..., n_{2007} \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$(-1)^{n_1} \cdot 1 + (-1)^{n_2} \cdot 2 + ... + (-1)^{n_{2007}} \cdot 2007 = 0.$$

Cătălin Ciupală

2. Fie triunghiul *ABC*, cu $AB = 8$, $AC = 10$, $BC = 12$. Pe latura $[BC]$ se iau punctele *M* și *N* astfel încât $2BM = NC$ și $5BN = 4MC$.

a) Să se afle lungimile segmentelor $[BM], [MN], [NC]$. În continuare știm că $BM = 2, NC = 4$ și $MN = 6$.

b) Fie *E* și *F* mijloacele segmentelor $[AM]$, respectiv $[AN]$, să se arate că $\sphericalangle(ABF) \equiv \sphericalangle(CBF)$ și $\sphericalangle(ACE) \equiv \sphericalangle(BCE)$;

c) Perpendiculara în *N* pe *AN* intersectează dreapta *AB* în *P*. Să se arate că *B* este mijlocul segmentului $[AP]$.

Marinela Canu

3. a) Calculați produsul $p = \dfrac{(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)}{a \cdot b \cdot c}$ dacă $\dfrac{b+c-a}{a} = \dfrac{a+c-b}{b} = \dfrac{a+b-c}{c}$, unde $a, b, c \in \mathbb{Q}^*$.

b) Un număr natural împărțit la 9, dă restul 8, iar împărțit la 5 dă restul 1. Ce rest va da prin împărțire la 45?

G.M. 12/2006

Back

BRĂILA

CLASA A V-A

1. Arătați că numărul $M = 1 + 3 + 5 + ... + 2007$ este pătrat perfect.

2. Împărțind numărul natural *a* la numărul natural *b*, obținem câtul 7 și restul 23. Dacă $a - b \leq 190$ determinați ultima cifră a numărului $a^{2007} + b^{2007}$ în toate situațiile posibile.

Daniela Titircă

3. Se dau mulțimile $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \,\middle|\, 2^{38} < x \leq 3^{26} \right\}$ și $B = \left\{ y \in \mathbb{N} \,\middle|\, 3^{25} \leq y < 2^{42} \right\}$. Dacă *a* este numărul elementelor mulțimii *A* și *b* este numărul elementelor mulțimii *B*, comparați numerele naturale *a* și *b*.

N. Stănică

4. Arătați că nu există $x, y \in \mathbb{N}$ care să verifice egalitatea: $5x^2 + 3y^2 = 8^{2006}$.

Virgil Ion

CLASA A VI-A

1. Scrieți numărul 394 ca o sumă de patru termeni a, b, c, d știind că $\frac{a}{b}=\frac{0,625}{0,75}$, $\frac{d}{c}=\frac{1,(1)}{0,(6)}$, $\frac{a}{d}=\frac{7,5}{2}$.

Fănica Fătu

2. Să se determine numerele naturale prime a, b, c, știind că $a+b+c=2000$ și $b-c=44$.

Ioan Gurmăzescu

3. Aflați numerele $\overline{ab}$, cu $a\neq b$, astfel încât $\frac{\overline{ab}}{a-b}=\overline{ba}-3$.

N. Stănică

4. Se dau unghiurile adiacente AOB și BOC. Bisectoarea unghiului AOB formează cu semidreapta $(OC$ un unghi cu măsura de 75^0, iar bisectoarea unghiului BOC formează cu semidreapta $(OA$ un unghi drept. Aflați măsura unghiului AOC.

CLASA A VII-A

1. Media aritmetică a trei numere este $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$. Aflați cele trei numere știind că sunt direct proporționale cu $\frac{1}{0,3};\frac{1}{0,(3)};\frac{1}{0,0(3)}$.

2. Să se determine toate fracțiile de forma $\frac{a}{b}, a, b\in\mathbb{N}^*$, cu proprietatea că, adunând și la numărător și la numitor același număr rațional $x>0$, obținem o putere cu exponent natural al fracției date.

Marius Damian

3. Fiind date paralelogramul $ABCD, m(\sphericalangle BAD)<90°$ și punctele $M\in(CB$, $Q\in(CD$ astfel încât $\sphericalangle DAQ\equiv\sphericalangle DAC, \sphericalangle BAM\equiv\sphericalangle BAC$ și $AQ=AM$, să se demonstreze că $CQ=CM$.

N. Stănică

4. În patrulaterul convex $ABCD$, $[AE$ este bisectoarea unghiului BAD, $E\in(CD)$.

Dacă $AE\parallel BC$ și $BC=DE$, să se demonstreze că: $\frac{DC}{BC}-\frac{AB}{AD}=1$.

CLASA A VIII-A

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $(5-x)\left(2\sqrt{6}-5\right)=x^2\sqrt{x^2+25-10x}$.

Daniela Tilincă

2. a) Aflați valoarea maximă a expresiei: $E(x)=\frac{3x^2+12x+22}{x^2+4x+6}, x\in\mathbb{R}$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ecuația: $3x^2+12x+22=\left(x^2+4x+6\right)\left(25y^2-10y+6\right)$.

Valentin Florin Damian

3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu $AB=4$ și $BC'\cap CB'=\{O\}$.

a) Dacă $AO\cap C'D'=\{P\}$, aflați distanța de la punctul P la dreapta AC.

b) Dacă $M\in(BB')$, astfel încât $\sin(\sphericalangle BOM)=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ aflați lungimea segmentului $[BM]$.

N. Stănică

4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic. Notăm cu M, N, P centrele fețelor $ABCD$, $BCC'B'$, respectiv $ABB'A'$. De asemenea, notăm cu s aria triunghiului MNP și cu S aria totală a paralelipipedului $ABCDA'B'C'D'$. Dacă $\dfrac{S}{s}=16\sqrt{3}$, arătați că paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Marius Damian

CLASA A V-A-J

1. Determinați numerele naturale a și b știind că are loc relația:

$$(a+b)\cdot(2a+b)=35.$$

2. Aflați numărul natural $\overline{abc}$, scris în baza 10, știind că:

$$3+6+9+...+\overline{abc}=\overline{abc00}.$$

3. Fie $A=(n+1)^{2006}-n^{2006}$, n număr natural. Arătați că cel puțin unul dintre numerele $A^2+4\cdot A+2$ și $A^2+4\cdot A$ nu este pătrat perfect.

4. Se dă mulțimea $M=\{1;4;7;10;13;...;97;100\}$ și o submulțime S a lui M formată din 19 elemente. Să se arate că există în mulțimea S două elemente a căror sumă este egală cu 104.

CLASA A VI-A-J

1. Fie mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,|\,7<x\leq a,\text{ unde } a \text{ este număr natural}\right\}$ și $B=\{y\in\mathbb{N}\,|\,y$ este divizibil cu $5\}$. Determinați numerele naturale a știind că mulțimea $A\cap B$ are 20 de elemente.

2. Să se determine a și b, cifre în baza 10 știind că: $\overline{abb}^{\overline{ab}}=\overline{ab}^{20\cdot a+2\cdot b}$.

3. În triunghiul dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A)=90°, AB<AC$, fie $AD\perp BC, D\in(BC)$. Pe semidreapta $(AD$ alegem punctele P și Q astfel încât $DP=BD, DQ=CD, D\in(AP)$ și $P\in(DQ)$. Demonstrați că $CP\perp BQ$.

4. Fie punctul $B\in(AC)$ și D, E două puncte de o parte și de alta a dreptei AC, astfel încât triunghiurile ABD și BCE să fie echilaterale. Dacă perpendiculara din D pe AB intersectează EC în P, perpendiculara din E pe AB intersectează pe AD în F și punctele P, B, F sunt coliniare, atunci demonstrați că $AB=BC$.

[Back]

BUCUREŞTI

CLASA A V-A

1. Arătaţi că:

a) $1+3+5+...+29=15^2$; **b)** numărul 3^4+12^2 este pătrat perfect.

2. Casa lui Andrei se află lângă drumul care leagă două oraşe O_1 şi O_2. Dacă Andrei merge în oraşul O_1, el parcurge o distanţă de trei ori mai mare decât până în oraşul O_2. Dacă merge în oraşul O_2, el parcurge cu 12 km mai puţin decât până în oraşul O_1. Ce distanţă este între oraşele O_1 şi O_2?

3. Care este cel mai mare rest R, având cifre diferite două câte două, care se poate obţine prin împărţirea lui 2007 la un număr natural nenul? Pentru ce împărţitor se obţine acest rest R?

4. Doi elevi A şi B au inventat următorul joc: se scriu pe tablă toate numerele naturale de la 1 la 50 (o singură dată), apoi, începând cu A, ei şterg, pe rând, câte două numere şi scriu în locul lor suma acestora (o singură dată). Primul elev care nu poate scrie decât un număr impar pierde.

a) Arătaţi că jocul are întotdeauna un învingător.

b) Care elev câştigă, dacă ambii elevi joacă fără greşeală? Justificaţi răspunsul.

CLASA A VI-A

1. Cuiele cu ajutorul cărora se fixează potcoavele se numesc caiele. Pentru potcovirea cailor unei ferme se folosesc, la fiecare copită, acelaşi număr de p caiele, $2 \le p \le 6$. Se constată că, după ce au fost potcoviţi 25% din cai, au fost folosite 444 de caiele.

a) Determinaţi p. **b)** Aflaţi numărul cailor din fermă.

2. Unghiurile proprii $\sphericalangle AOD$ şi $\sphericalangle BOC$ sunt astfel încât interiorul unghiului $\sphericalangle BOC$ este inclus în interiorul unghiului $\sphericalangle AOD$, iar semidreptele $(OA$ şi $(OC$ sunt de o parte şi de alta a dreptei OB. Se ştie că bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle COD$ sunt perpendiculare. Arătaţi că unghiurile $\sphericalangle AOD$ şi $\sphericalangle BOC$ sunt suplementare.

3. a) Fiecare număr din mulţimea $\{1,2,3,...,4010\}$ se împarte cu rest la 2005. Calculaţi suma câturilor obţinute.

b) Luăm un număr natural nenul q şi împărţim cu rest fiecare număr din mulţimea $\{1,2,3,...,3q\}$ la q. Determinaţi q pentru care suma tuturor câturilor obţinute astfel este 2007.

4. Numerele naturale nenule a, x, y verifică relaţia $\dfrac{x}{a}=\dfrac{23a}{y}$.

a) Arătaţi că numărul xy nu poate fi pătrat perfect.

b) Aflaţi cea mai mică valoare posibilă a lui a atunci când este valabilă, în plus, relaţia $x^2=y^3$.

CLASA a VII-a

1. Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD, AB=BC, AD=AC, m(\sphericalangle ABC)=30°$. Arătaţi că:

a) înălţimea trapezului este jumătate din AB;

b) linia mijlocie a trapezului este mai mică decât AC.

2. Fie mulţimea $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$. Aflaţi toate perechile de mulţimi (E, F) astfel încât: E şi F au acelaşi număr de elemente; $E \cup F = A, \forall x \in A$, dacă $x \in E$, atunci $(x+2) \in F$.

3. Aflaţi toate numerele $\overline{abc}$, a, b, c nenule şi distincte, astfel încât $\overline{abc}$ este media aritmetică a numerelor $\overline{bca}$ şi $\overline{cab}$.

4. În ΔABC, I este centrul cercului circumscris. Mediatoarea lui $[BI]$ intersectează BC în E, mediatoarea lui $[CI]$ intersectează BC în F, iar cele două mediatoare se taie în P. Arătaţi că:

a) $\Delta IEF \sim \Delta ABC$; **b)** A, I, P sunt coliniare.

CLASA a VIII-a

1. a) Calculaţi $1,(3) \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) - 1,(3) \cdot \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \sqrt{2}\right)$.

b) Se ştie că exact unul dintre numerele reale x, y şi z este iraţional, iar numărul $N = xy + xz + yz$ este raţional. Demonstraţi că $N \le 0$.

2. Într-un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ se cunosc muchiile $AB = 2\sqrt{3}$ cm, $BC = 2\sqrt{6}$ cm şi $AA' = 3\sqrt{2}$ cm. Punctele M şi N sunt mijloacele muchiilor $[B'C']$, respectiv $[A'D']$.

a) Determinaţi măsura unghiului dintre planele (AMB) şi (CND).

b) Demonstraţi că planele $(AA'M)$ şi $(CC'N)$ sunt paralele.

c) Determinaţi măsura unghiului dintre dreptele AM şi CN.

3. Se consideră în spaţiu punctele A, B, C, D astfel încât $AB = BD = 2$ şi $AB = BC = CD = DA = \sqrt{2}$. Arătaţi că punctele sunt coplanare.

4. Numerele $a, b \in \mathbb{R}_+$, verifică relaţia $a + b + ab = 3$.

a) Verificaţi că, dacă $a = 2$, atunci $a + b > 2 > \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

b) Arătaţi că $a + b \ge \sqrt{a} + \sqrt{b}$, pentru orice a, b.

[Back]

BUZĂU

CLASA A V-A

1. La un concurs se dau 30 de probleme. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 5 puncte, iar pentru fiecare răspuns greşit se scad 3 puncte. Câte răspunsuri corecte a dat un elev care a obţinut 118 puncte?

2. Câte numere de 3 cifre există cu proprietatea că împărţite la un număr de 2 cifre dau restul 97?

3. Fie $A = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{999...99}_{2007 \text{ cifre}}$. Câte cifre de 1 are A?

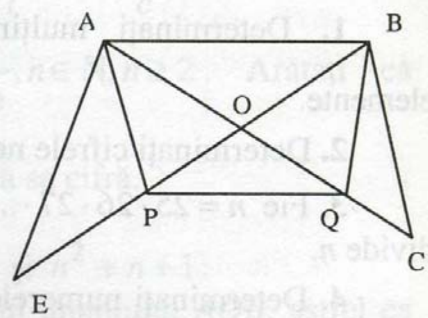
4. Să se completeze cu încă trei termeni următoarele şiruri:
a) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... **b)** 1, 3, 7, 15, …

CLASA A VI-A

1. Să se găsească numerele naturale p astfel încât numerele p; p^2+4; p^2+6 să fie simultan prime.

2. Să se determine numerele naturale a, b, c astfel încât $2^a + 2^b + 2^c = 2^{101}$.

3. În figura alăturată $\Delta APB \equiv \Delta BQA$ şi $[AC] \equiv [BE]$. Atunci:



a) $\Delta APE \equiv \Delta BQC$

b) $\Delta BAE \equiv \Delta ABC$

c) $\Delta APQ \equiv \Delta BQP$.

4. Fiind date 10 puncte distincte două câte două şi necoliniare trei câte trei, aflaţi numărul de drepte determinate de câte două dintre ele.

CLASA A VII-A

1. Dreptele d_1 şi d_2 sunt paralele. Punctele $A \in d_1, B \in d_2$ astfel încât $AB \perp d_1$ şi M situat între A şi B. Prin M ducem o dreaptă d_3 care taie dreapta d_1 în D şi d_2 în C. Dacă $m(\sphericalangle MCB) = \frac{1}{2} m(\sphericalangle ACM)$ demonstraţi că $MD = 2AC$.

2. Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AB > BC, M \in (BC, N \in (CB$ astfel încât $BM = CN = AB$ şi $\{E\} = AM \cap DC, \{F\} = DN \cap AB$. Demonstraţi că există un punct în planul paralelogramului, egal depărtat de mijloacele segmentelor $(AB), (AF), (FE), (DE)$.

3. Determinaţi cifrele nenule a şi b $(a \neq b)$ pentru care numărul $\frac{\overline{abba}}{\overline{ab}} + \frac{\overline{aabb}}{\overline{ab}}$ este natural.

4. Dacă $x, y \in \mathbb{N}^*$ şi $x - y = 4$, arătaţi că $\sqrt{xy} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

CLASA A VIII-A

1. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\sqrt{\frac{x(y+z)}{3}}+\sqrt{\frac{y(x+z)}{3}}+\sqrt{\frac{z(x+y)}{3}}\le\frac{5}{6}(x+y+z),\forall x,y,z\in\mathbb{R}_+.$$

2. a) Să se determine restul împărțirii lui $5^{2^{100}}$ prin 2^{102}.

b) Să se arate că $\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^{102}}<\frac{1}{4}$.

c) Determinați valoarea minimă a expresiei $E(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-4x+5}$.

3. Dacă un tetraedru are două perechi de muchii perpendiculare atunci şi muchiile ce compun a treia pereche sunt perpendiculare.

4. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ în care P este mijlocul segmentului $[CC']$. Determinați măsura unghiului dintre planele $(A'BD)$ şi (BDP).

CLASA A V-A-J

1. Determinați mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,2\cdot3^n\le x<3^{n+1},n\in\mathbb{N}\right\}$ ştiind că are trei elemente.

2. Determinați cifrele nenule *a, b, c* ştiind că $\overline{aa}\cdot\overline{bb}=\overline{bccb}$.

3. Fie $n=25\cdot26\cdot27\cdot...\cdot100$. Aflați cel mai mare număr natural *x* cu proprietatea 2^x divide *n*.

4. Determinați numerele de forma $\overline{abc}$ divizibile cu 5 care împărțite la 4, respectiv 7 dau restul 1.

CLASA A VI-A-J

1. Determinați cel mai mare şi cel mai mic număr $\overline{abc}$ cu cifre nenule distincte care se divide cu cifrele lui.

2. Determinați măsurile a patru unghiuri proprii formate în jurul punctului *O* dacă există perechi de unghiuri
- suplementare
- complementare
- congruente

3. Un unghi cu măsura de 5'5" se multiplică de *n* ori $(n\notin\mathbb{N})$ astfel încât se obține un unghi cu măsura de $m^\circ\left(m\in\mathbb{N}^*,\ m\le90^\circ\right)$. Aflați *m* şi *n*.

4. Diferența a 2 numere este 3. Aflați numerele ştiind că unul dintre ele este cu 11 mai mic decât triplul celuilalt.

Back

CARAŞ SEVERIN

CLASA A V-A

1. Aflaţi toate numerele naturale de trei cifre, $\overline{abc}$, care împărţite la 5 dau câtul $\overline{bc}$ şi restul a.

2. a) Să se determine numărul natural $\overline{ab}$ astfel încât: $\overline{1ab} = (a+b-1)^2$.

b) Să se calculeze: $\left(\overline{abcabc} + \overline{abc00}\right) : \left(3 \cdot \overline{abc}\right)$.

3. a) Să se determine restul împărţirii numărului:

$$A = 2 \cdot 5^{2n+1} \cdot 12^{n+1} + 2^{2n} \cdot 15^n \cdot 5^{n+1} - 10^{2n+1} \cdot 3^{n+2} \text{ la } 35.$$

b) Determinaţi numărul de zerouri cu care se termină numărul A.

c) Care este ultima cifră nenulă a lui A?

4. La o petrecere de Crăciun au fost 30 de copii, fete şi băieţi. Unul dintre băieţi a adus cadouri pentru 5 fete, alt băiat a adus pentru 6 fete, şi aşa mai departe, ultimul băiat a adus cadouri pentru toate fetele. Care este numărul de fete şi de băieţi?

CLASA A VI-A

1. Determinaţi toate perechile de numere naturale prime astfel ca împărţind unul din ele la celălalt să obţinem restul egal cu câtul.

2. Aflaţi numerele nenule a, b, c, d ştiind că $\frac{a}{8} = \frac{1}{b} = \frac{8}{d} = \frac{c}{27}$ şi $a = \frac{b}{c}$.

3. a) Fie $a = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}, b = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Arătaţi că $N = 27^{n+1} \cdot \left(\frac{a}{b} - b + \frac{5}{2}\right)^n$ este număr natural şi determinaţi ultima sa cifră.

b) Calculaţi suma numerelor pare cuprinse între $n^2 - n + 1$ şi $n^2 + n + 1$.

4. Fie unghiul AOB şi semidreptele $[OC$, $[OD$ în interiorul unghiului AOB, astfel ca $[OC$ să fie în interiorul unghiului AOD. Dacă $[OX$, $[OY$ sunt bisectoarele unghiurilor AOD şi BOC şi $m(\sphericalangle BOA) = 150°, m(\sphericalangle AOC) + m(\sphericalangle BOD) = 30°$, atunci:

a) Calculaţi măsura unghiului XOY.

b) Dacă $m(\sphericalangle AOC) = 20°$, iar $[OS$ este semidreapta opusă semidreptei $[OX$, determinaţi măsura unghiului SOD.

c) Dacă se ia semidreapta $[OR$ astfel ca unghiul BOR să fie unghi drept, calculaţi măsura unghiului DOR.

CLASA A VII-A

1. Calculaţi: **a)** $\frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{3 \cdot 12} + \ldots + \frac{1}{195 \cdot 588}$.

b) $\frac{1}{1+2326^{-1}}+\frac{1}{1+2325^{-1}}+...+\frac{1}{1+2^{-1}}+\frac{1}{1+1^{-1}}+1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2326}+\frac{1}{2327}$.

2. Fie numerele raționale nenule x, y, z care satisfac condițiile: $\frac{a-y}{x}=\frac{a-z}{y}=\frac{a-x}{z}$.

Ordonați crescător numerele x, y, z.

3. Fie triunghiul ABC și semidreptele $[AX$, $[AY$ în exteriorul triunghiului, astfel ca $m(\sphericalangle XAB)=m(\sphericalangle YAC)<90°$. Ducem $BB'\perp AX, B'\in[AX$ și $CC'\perp AY, C'\in AY$, iar M este mijlocul segmentului BC. Demonstrați că $MB'=MC'$.

4. Un trapez dreptunghic $ABCD$ are baza mică AD congruentă cu înălțimea, iar baza mare BC congruentă cu diagonala mică AC. Perpendiculara în A pe dreapta AB intersectează CD în E, iar EB intersectează diagonala AC și înălțimea AA' a trapezului în M respectiv N. Demonstrați că: **a)** $\Delta ANB\equiv\Delta AME$.

b) Perpendiculara din A pe dreapta EB și perpendiculara din E pe dreapta AC se intersectează într-un punct O situat pe baza mare.

CLASA A VIII-A

1. a) Să se arate că: $n+1\le\sqrt{n(n+3)}<n+2,\ n\in\mathbb{N}^*$.

b) Să se calculeze $S=\left[\sqrt{2\cdot 5}\right]+\left[\sqrt{3\cdot 6}\right]+\left[\sqrt{4\cdot 7}\right]+...+\left[\sqrt{100\cdot 103}\right]$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x.

2. Fie x, y, z trei numere naturale ce se pot scrie fiecare ca o sumă de două pătrate de numere întregi. Arătați că:

a) Produsul xy se poate scrie ca sumă de două pătrate de numere întregi.

b) Produsul xyz se poate scrie ca o sumă de două pătrate de numere întregi.

3. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare, M mijlocul lui (BC) iar $P\in(AM)$, $Q\in(DM), BQ\cap CD=\{R'\}, BP\cap AC=\{R\}, CP\cap AB=\{S\}, QC\cap BD=\{S'\}$.

Cercetați dacă SR și $S'R'$ sunt coplanare.

4. Fie $ABCD$ un romb de latură 10 cm și diagonala $BD=12$ cm. Pe latura AD se ia un punct M între A și D astfel ca $AM=2,5$ cm. În punctul M se duce $MN=9,6$ cm perpendiculară pe planul rombului. Se cere:

a) Distanța de la N la dreapta AB.

b) Unghiul plan corespunzător diedrului format de planul rombului cu planul determinat de punctele N, B, C.

c) Fiind dat un plan oarecare α, dacă notăm cu A', B', C', D' intersecția acestui plan cu perpendicularele în A, B, C, D pe planul rombului, să se demonstreze că $A'B'C'D'$ este paralelogram

CLASA A V-A-J

1. Aflați suma ultimelor 50 de cifre ale numărului:

$$N = 123 + 124 + ... + 321 + 123 \cdot 124 \cdot ... \cdot 321.$$

Delia Marinca

2. Arătați că dublul sumei numerelor naturale care împărțite la 2007 dau câtul și restul egale, se poate scrie ca produsul a trei numere naturale consecutive.

Saveta Coste

3. Ash își duce pokemonii într-o pădure pentru a le testa puterile. Primul a fost Pickachu care doboară 81 alune. Fiecare dintre următorii pokemoni doboară un număr egal cu triplul sau treimea numărului de alune doborât înaintea sa. Ultimul pokemon, Bulbazar doboară 3^{12} alune, iar învingător a ieșit Charizard cu 3^{21} alune doborâte.

Care este cel mai mic număr posibil de pokemoni ai lui Ash?

Cerasela Bociu

4. Se consideră mulțimea: $X = \left\{ x \in \mathbb{N} \,\middle|\, x = \overline{zzyyaaab}\text{, unde } z + y + 2a = b, a \vdots 3,\right.$ $\left. b > 6, z > y \text{ și oricare două dintre cifrele } a, b, z, y \text{ sunt diferite} \right\}$.

a) Determinați elementele mulțimii X.

b) Enumerați elementele mulțimii $Y = \left\{ y \in \mathbb{N} \,\middle|\, y = \overline{bayz}\text{, unde } x = \overline{zzyyaaab} \in X \right\}$.

c) Aflați elementele mulțimii $S = \left\{ s \in \mathbb{N} \,\middle|\, s = a + b + y + z\text{, unde } \overline{zzyyaaab} \in X \right\}$.

Petria – Elena Boldea

CLASA A VI-A-J

1. a) Arătați că $\overline{ab} + \overline{ba} = \overline{aa} + \overline{bb}$, unde a și b sunt cifre nenule.

b) Dacă $\overline{ab} + \overline{ba}$ este un număr natural pătrat perfect, arătați că $a + b = 11$.

c) Dacă $\dfrac{\overline{ab} + \overline{ba}}{\overline{aa}} \in \mathbb{N}$, arătați că fracția este reductibilă.

Cristina Jiroveanu, TMMATE – nr.4/2007

2. Numerele raționale pozitive a, b, c sunt direct proporționale respectiv cu numerele 3, 4, 12, iar numerele c, d, e sunt invers proporționale respectiv cu 3, 4, 12.

a) Aflați numerele a, b, c, d, e, știind că produsul lor este egal cu 50000.

b) Determinați numerele a, b, c, d, e, știind că produsul dintre suma primelor trei și suma ultimelor două este egal cu $\dfrac{76}{3}$.

Petria – Elena Boldea

3. În jurul unui punct se construiesc n unghiuri, ale căror măsuri, în grade sexagesimale, sunt exprimate prin numere întregi, astfel: al doilea unghi este dublul primului, al treilea este triplul primului și așa mai departe, astfel încât al n-lea este de n ori mai mare decât primul. Precizați câte astfel de unghiuri se pot construi și determinați măsura primului unghi.

4. a) In interiorul triunghiului ABC se consideră punctele distincte D şi E, astfel ca $DB = DC$ şi $EB = EC$. Să se arate că dacă A, D, E sunt coliniare, atunci triunghiul ABC este isoscel.

b) În triunghiul ABC, $[AB]$ este cea mai mare latură. Pe $[AB]$ se consideră punctele D şi E astfel încât $AD = AC$ şi $BE = BC$. Ştiind că $m(\sphericalangle ECD) = 20^0$, determinaţi $m(\sphericalangle ACB)$.

Olimpiadă Iugoslavia

Back

CĂLĂRAŞI

CLASA A V-A

1. Jocul numit „CIBOKU” este format din 9 piese în formă de pătrat, pe fiecare piesă sunt desenate 9 pătrăţele pe trei linii şi trei coloane. În cele 9 pătrăţele sunt scrise cifre de la 1 la 9 astfel:

piesa nr.1

1	2	3
4	5	6
7	8	9

piesa nr.2

2	3	4
5	6	7
8	9	1

şi aşa mai departe. Se cere:

a) Cum va arăta piesa nr.6?

b) Aşezaţi piesele astfel încât să formaţi un pătrat cu 9 linii şi 9 coloane şi pe fiecare linie şi fiecare coloană suma cifrelor să fie 45.

Constantin Berbecel

2. a) Scrieţi numărul 2007 ca sumă a două numere divizibile cu 9.

b) În anul 1999, mama avea de 4 ori vârsta fiicei, iar în 2007, când mama va avea vârsta pe care tatăl o avea în 2003, fiica va avea cu 4 ani mai puţin decât jumătate din vârsta mamei. Să se afle în ce an e născut fiecare.

Stelian Pană şi *Eugen Predoiu*

3. a) Să se determine deîmpărţitul a două numere naturale ştiind că diferenţa dintre deîmpărţit şi rest este 5.

b) Comparaţi numerele 5^{60} şi 3^{90}.

Lucian Ioniţă şi *Relu Ciupea*

4. a) Aflaţi ultimele două cifre ale numărului $N = 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + ... + 7^{2007}$.

b) Într-o urnă sunt bilete numerotate cu toate numerele naturale mai mici decât 2007. Se extrag întâi toate biletele pentru care numărul inscripţionat pe ele este divizibil cu doi, apoi toate biletele pentru care numărul inscripţionat pe ele este divizibil cu trei. Câte bilete mai rămân în urnă? Calculaţi apoi suma numerelor inscripţionate pe biletele rămase în urnă.

Gheorghe Fianu

CLASA A VI-A

1. Fie unghiul ascuţit AOB şi semidreptele $[OC$ şi $[OD$ astfel încât $m(\sphericalangle DOB) = 90°$ şi $m(\sphericalangle COA) = 90°$, iar interioarele unghiurilor AOC şi BOD sunt disjuncte.

a) Arătaţi că unghiurile AOB şi COD sunt suplementare.

b) Dacă $[OE$ este bisectoarea unghiului AOB, iar $[OF$ este bisectoarea unghiului COD, arătaţi că punctele E, O şi F sunt coliniare.

c) Dacă $[OM$ este bisectoarea unghiului BOC, să se arate că măsura unghiului FOM este constantă, indiferent de măsura unghiului AOB.

Adriana Constantin şi *Aurelia Caţaroş*

2. Numerele x şi y sunt direct proporţionale cu 2 şi 4, iar z este media aritmetică a numerelor x şi y.

a) Aflaţi valoarea raportului $\dfrac{2y+3z}{3x+2z}$.

b) Aflaţi numerele x, y şi z ştiind că suma lor este 36.

Adriana Olaru

3. a) Să se arate că media aritmetică a unor numere naturale consecutive este un număr natural dacă numărul numerelor naturale este impar.

b) Media aritmetică a unor numere consecutive este 4. Aflaţi numerele.

Sica şi *Sorin Furtună*

4. a) Se consideră numărul natural $x = 4^n$, unde $n \in \mathbb{N}$. Se ştie că x are 90 de cifre. Să se demonstreze că o cifră a lui x se repetă de cel puţin 10 ori.

b) Să se scrie numărul 100^{2008}, sub formă de sumă a patru cuburi perfecte de numere naturale.

Gheorghe Fianu şi *Relu Ciupea*

CLASA A VII-A

1. Se consideră numerele naturale nenule x, y şi z care verifică egalitatea:

$$\frac{x}{0,(3)} = \frac{y}{0,2} = \frac{z}{0,1(6)}.$$

a) Arătaţi că $x + 2z$ este divizibil cu 10.

b) Dacă în plus $2y + z$ şi x sunt prime între ele, determinaţi numerele x, y şi z.

Relu Ciupea

2. Se dă un triunghi ascuţitunghic isoscel ABC, $AB = AC$. Fie D mijlocul laturii BC, iar E şi F simetricele punctului D faţă de dreptele AB, respectiv AC.

a) Demonstraţi că patrulaterul $BCFE$ este trapez isoscel.

b) Demonstraţi că patrulaterul $AEDF$ este romb dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Adriana Olaru

3. Să se arate că dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ şi $\dfrac{abc}{a+b+c} = \dfrac{abd}{a+b+d} = \dfrac{bcd}{b+c+d} = \dfrac{acd}{a+c+d}$ atunci $a = b = c = d$.

Ecaterina Neagu

4. Fie triunghiul ABC ascuţitunghic şi punctele D, E, M, N astfel încât $M, E \in (AB)$; $D, N \in (AC)$; $BD \perp AC$; $DE \perp AB$; $CM \perp AB$; $MN \perp AC$; $MD = 2EN$. Demonstraţi că $BC = 4EN$.

Gheorghe Fianu

CLASA A VIII-A

1. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $y > 0$ şi $z > 0$. Demonstraţi că:

a) $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$.

b) $(x+1)(y+1)(z+1) \geq 8\sqrt{xyz}$. Pentru ce valori ale lui *x, y, z* are loc egalitatea?

c) $3xyz + xy + yz + zx \geq 2xyz\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}\right)$. Pentru ce valori ale lui *x, y, z* are loc egalitatea?

Adriana Olaru

2. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm și $AA' = 5$ cm. O furnică vrea să ajungă din A în C'. Aflați lungimea minimă a drumului în fiecare dintre cazurile:

a) furnica merge numai pe muchii;

b) furnica merge numai pe fețele paralelipipedului.

Adriana Constantin și *Aurelia Cațaroș*

3. În prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, $AB = BC = a, AA' = 2a$ și *M* este mijlocul muchiei CC'. Se cere:

a) distanța de la punctul A' la dreapta *BC*; **b)** arătați că $(A'B'M) \perp (MBD)$;

c) distanța de la punctul *M* la planul $(A'DB)$.

Constantin Berbecel

4. Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Arătați că dacă $|x-2| + |x+3| + |y+6| = 5$ atunci $y - x \in [-8; -3]$.

Gheorghe Fianu

CLASA A V-A-J

1. Se consideră numărul natural $n = 1234567891011121314...200520062007$.

a) Câte cifre are *n* ?

b) Să se determine restul împărțirii lui *n* la 8.

Relu Ciupea

2. Un elev cumpără pixuri, caiete și manuale în valoare de 144 lei. Fiecare pix costă 4 lei, fiecare caiet 6 lei și fiecare manual 8 lei. Se știe că:

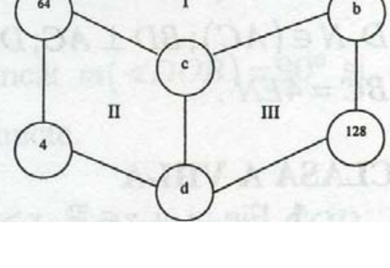
a) elevul a cumpărat cel puțin un pix;

b) numărul de caiete cumpărate este mai mare decât numărul de pixuri și mai mic decât numărul de manuale;

Câte pixuri, caiete și manuale poate cumpăra elevul cu suma avută?

Adriana Olaru

3. Inițial în cele 7 cerculețe din desenul de mai jos a fost scrisă cifra 1. Se numește „pas" înmulțirea cu 2 a celor patru numere aflate în vârfurile unuia din cele trei romburi, notate în desen cu I, II și III. După un număr de „pași" se ajunge la configurația prezentată în desenul alăturat.



a) Câți „pași" s-au făcut pentru a obține configurația din desen? (justificați răspunsul!)

b) Să se afle numerele care sunt în locul literelor *a, b, c* și *d*.

4. a) Aflați numerele naturale de forma $\overline{ab}$ știind că $\overline{ab}+\overline{ba}$ este pătrat perfect, ia $\overline{ab}-\overline{ba}$ este cub perfect.

b) Determinați numărul submulțimilor mulțimii $A=\{1,2,3,4,...,62,63\}$ care au sum elementelor egală cu 2007.

Adriana Constantin și *Aurelia Cațarc*

CLASA A VI-A-J

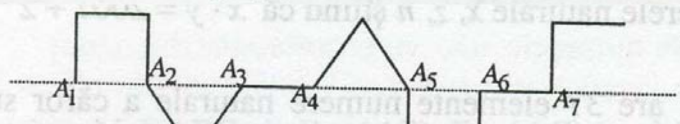
1. a) Arătați că $\overline{abc}\,\vdots\,7$ dacă și numai dacă $\left(\overline{bc}+2a\right)\vdots\,7$.

b) Fie numărul $A=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+...+\frac{1}{481\cdot 484}$. Determinați cea de-a 2007- zecimală a numărului $33A$.

c) Fie n un număr natural nenul. Arătați că numărul $N=\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{3}\cdot\frac{n+3}{5}\cdot...\cdot\frac{n+n}{2n-}$ este natural.

Eugenia Vlad și *Gheorghe Fiar*

2. a) Pe o dreaptă sunt 2007 puncte $A_1, A_2, A_3, ..., A_{2007}$ astfel încât distanța înt fiecare două puncte consecutive este de 1cm. Pe segmentul A_1A_2 (sus) se construiește u pătrat de latură 1. Pe A_2A_3 (jos) avem un triunghi echilateral apoi avem segmentul A_3A_4 pe A_4A_5 (sus) triunghi echilateral, A_5A_6 pătrat (jos) și A_6A_7 segment.



Aflați lungimea liniei frânte care începe în A_1 și se termină în A_{2007} .

b) În triunghiul ABC ascuțitunghic, se consideră $AD\perp BC, D\in(BC)$ și $[AD]\equiv[BC]$. Pe perpendiculara în B pe BC se consideră punctul E astfel încât $[EB]\equiv[BD]$, (punctul E se află în semiplanul determinat de dreapta DC și punctul A). Să se demonstreze că $[AB]\equiv[EC]$.

c) Fie unghiul ascuțit AOB și semidreptele $[OC$ și $[OD$ astfel încât $m(\sphericalangle DOB)=90°$ și $m(\sphericalangle COA)=90°$, interioarele unghiurilor AOC și BOD sunt disjuncte, $[OF$ este bisectoarea unghiului COD și $[OM$ este bisectoarea unghiului BOC. Să se determine măsura unghiului FOM.

Adriana Constantin și *Aurelia Cațaroș*

3. Fie triunghiul isoscel $ABC, ([AB] \equiv [AC]), AD \perp BC, D \in BC$ şi $M \in AD$. Dacă punctele E şi F sunt simetricele punctului M faţă de dreptele AB şi AC, arătaţi că:

a) $[BF] \equiv [CE]$;

b) Dacă $BF \cap CE = \{O\}$, atunci punctele A, O şi D sunt coliniare.

Eugen Predoiu

4. Fie mulţimea $M = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}\right\}$. Să se arate că orice submulţime a mulţimii M care are şase elemente conţine patru numere distincte cu proprietatea că suma a două dintre ele este egală cu suma celorlalte două.

Viorica Stoianovici

Back

CLUJ

CLASA A V-A

1. Doi fraţi şi tatăl lor au împreună 47 de ani. Vârsta tatălui este un număr format din două cifre, iar vârstele fiilor sunt prima, respectiv a doua cifră a vârstei tatălui.

a) Arătaţi că cei doi fii nu sunt gemeni.

b) Ce vârstă are tatăl şi ce vârstă are fiecare din fii săi?

GM nr.7/2006, prelucrare *Viorel Lupşor*

2. Se consideră numerele:

$$a = \left(2 \cdot 2^4 \cdot 2^{95} + 3^{2^2} - 2^{2100} : 4^{1000} + 19\right) \cdot \left(3^{99} + 2 \cdot 3^{99} + 2007^0\right) : \left(3^{100} + 1\right).$$

$$b = (2007 + 2 \cdot 2007 + 3 \cdot 2007 + ... + 2006 \cdot 2007) : 1003.$$

$$c = 4^n + 2^{2n+3} + 2^{2n+4}, n \in \mathbb{N}.$$

Arătaţi că numerele a, b, c sunt pătrate perfecte.

Groza Ioan

3. a) Aflaţi numerele naturale *x, z, n* ştiind că $x \cdot y = 2007 + 2^n$ şi $x - y = 3^5$.

Pop Ioan

b) O mulţime *A* are 37 elemente numere naturale a căror sumă este 702. Calculaţi produsul celor 37 elemente ale mulţimii *A*.

Vasile Şerdean

CLASA A VI-A

1. Două pătrate P_1 şi P_2 sunt formate din câte 15×15 pătrăţele colorate în diagonală începând cu pătrăţelul din colţul din stânga sus şi terminând cu cel din colţul din dreapta jos. Pentru colorarea pătratului P_1 se folosesc în ordine culorile c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, iar pentru colorarea pătratului P_2 se folosesc în ordine numai culorile c_1, c_2, c_3, c_4.

a) Ce culoare va avea pătrăţelul din colţul din dreapta jos al pătratului P_1?

b) Ce culoare va avea pătrăţelul din colţul din dreapta jos al pătratului P_2?

Pop Maria

2. Fie $x = \left(1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+2007}\right)^n \cdot \frac{2008^n}{2^n}, n \in \mathbb{N}$.

a) Arătaţi că $x \in \mathbb{N}$. **b)** Determinaţi $n \in \mathbb{N}$ ştiind că *x* are 15 divizori naturali.

Pop Ioan

3. Fie unghiurile adiacente *AOB* şi *BOC*. Bisectoarea $\sphericalangle AOB$ formează cu (*OC* un unghi congruent cu suplementul $\sphericalangle AOB$ iar bisectoarea $\sphericalangle BOC$ formează cu (*OA* un unghi congruent cu complementul $\sphericalangle BOC$. Determinaţi măsura $\sphericalangle AOC$.

Zăgrăian Alexandru

4. Pe o dreapta *d* se consideră punctele distincte *A, B, C, D* în această ordine. Fie *E* mijlocul lui (*AB*), *P* mijlocul lui (*BC*), *Q* mijlocul lui (*EP*). Dacă $AP = 60$ cm, lungimea lui (*EP*) este 75% din lungimea lui (*BD*), iar lungimile lui (*BP*) şi (*CD*) sunt direct proporţionale cu 3 şi 2, arătaţi că:

a) Punctele *Q* şi *B* coincid. **b)** $EB = 20$ cm. **c)** $AD = \frac{280}{3}$ cm.

Vasile Şerdean

CLASA A VII-A

1. Să se determine numărul $\overline{aabba}$, *a* şi *b* fiind cifre scrise în sistemul zecimal, dacă $\sqrt{\overline{aabba}} = \overline{aab} - b - a$.

Grigore Tarţa

2. Numerele naturale nenule se scriu, pe linii, într-un tablou triunghiular în felul următor:

1
2 3 4
5 6 7 8 9
....

Astfel 1 se găseşte pe prima linie a tabloului, 2, 3 şi 4 pe linia a doua, 5, 6, 7, 8 pe linia a treia şi aşa mai departe.

a) Aflaţi pe ce linie a tabloului se găseşte numărul 50.

b) Aflaţi pe ce linie a tabloului se găseşte numărul 2007 şi ce poziţie ocupă pe linia respectivă.

Viorel Lupşor

3. Se consideră triunghiul ABC şi $D \in (AB), E \in (AC)$ astfel încât $DB = \frac{5}{7} \cdot AB$. Fie $\{M\} = CD \cap BE$, astfel încât $DM = \frac{2}{9} \cdot DC$. Să se demonstreze că $DE \parallel BC$.

Vasile Şerdean, Simona Pop

4. Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD, AB = 2 \cdot DC$. Notăm mijloacele diagonalelor AC şi BD cu E respectiv F. Dacă $EM \parallel AD, M \in BD, FN \parallel BC, N \in AC$ şi P este mijlocul lui (AB) să se demonstreze că:

a) Punctele D, E, P sunt coliniare. **b)** $MN = \frac{AB}{8}$.

Zăgrăian Alexandru

CLASA A VIII-A

1. a) Arătaţi că:

$$(-a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 + (a+b-c)^2 = 3\left(a^2+b^2+c^2\right) - 2(ab+bc+ca)$$

b) Lungimile a, b, c ale laturilor triunghiului ABC verifică relaţia:

$$(-a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 + (a+b-c)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Determinaţi a, b, c ştiind că aria triunghiului ABC este egală cu $\frac{\sqrt{3}}{16}$.

GM nr.8/2006, prelucrare *Viorel Lupşor*

2. Determinaţi numerele raţionale a şi b pentru care are loc relaţia:

$$\frac{a}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} + \frac{b}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}} = 1$$

Galea Sorin

3. Un triunghi dreptunghic ABC are $m(\sphericalangle A) = 90°, AC = 12$ cm şi raza cercului circumscris triunghiului de 10cm. De aceeaşi parte a planului (ABC) se consideră punctele M şi P astfel încât $MA \perp (ABC), PB \perp (ABC), AM = 6$ cm, $PB = 2$ cm, să se calculeze:

a) aria patrulaterului $MABP$. **b)** distanţa de la A la planul (MCP).

Vasile Şerdean

4. Se consideră în spaţiu dreptele OX, OY, OZ perpendiculare două câte două şi punctele A şi B distincte şi care nu aparţin planelor determinate de aceste drepte. Distanţele de la A la planele $(XOY), (YOZ), (ZOX)$ sunt respectiv a, b, c iar distanţele de la B la aceste plane (în aceeaşi ordine) sunt respectiv b, c, a. Arătaţi că triunghiul OAB este isoscel.

Grigore Tarţa

CLASA A V-A-J

1. Numărul $\overline{abc}$, în baza 10, are toate cifrele distincte nenule şi este egal cu suma tuturor numerelor de câte două cifre distincte ce se pot forma cu cifrele a, b, c în baza 10.

a) Arătaţi că numărul $\overline{abc}$ este par.

b) Determinaţi toate numerele abc cu proprietatea din enunţ.

Viorel Lupşor

2. a) Diferenţa a două numere naturale este 22. Dacă împărţim numerele la 7 şi respectiv la 5 obţinem aceleaşi câturi şi aceleaşi resturi. Aflaţi numerele.

Lucia Iepure

b) Să se arate că mulţimile A şi B sunt disjuncte, unde $A=\left\{n^2+n+7 \middle| n\in\mathbb{N}\right\}$ şi $B=\left\{n^4+5 \middle| n\in\mathbb{N}\right\}$.

Cristian Pop

3. Să se arate că cel mai mic număr natural n pentru care $\dfrac{81^{2n+2}+3^{8n+7}-3^{8n+5}}{27^{685}-9^{1027}-3^{2053}}\in\mathbb{N}$ este pătrat perfect.

Vasile Şerdean

CLASA A VI-A-J

1. a) Într-un acvariu sunt peşti mici, mijlocii, mari şi un peşte uriaş. Fiecare peşte mijlociu înghite 5 peşti mici, fiecare peşte mare înghite 6 peşti mijlocii, iar peştele uriaş înghite 7 peşti mari. Câţi peşti a înghiţit în total peştele uriaş?

Viorel Lupşor

b) Să se afle valorile lui $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $\dfrac{6n-3}{5}$ şi $\dfrac{7n-1}{5}$ sunt simultan numere naturale.

Cristian Pop

2. a) Aflaţi $x, y\in\mathbb{Z}$, ştiind că $xy+5x-y=24$.

Emilia Copaciu şi *Sorin Galea*

Emilia Copaciu şi *Sorin Galea*

b) Să se arate că:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+...+\frac{1}{2006^2}\leq\frac{2005}{4012}.$$

Lucia Epure

3. Calculaţi măsurile a cinci unghiuri care au interioarele disjuncte şi sunt în jurul unui punct, ştiind că primele trei unghiuri au măsurile direct proporţionale cu numerele 5, 4, 2, iar ultimele trei unghiuri au măsurile invers proporţionale cu 6, 3, 4.

Vasile Şerdean

Back

CONSTANŢA

CLASA A V-A

1. a) Aflaţi numărul $x\in\mathbb{N}$ din egalitatea:

$$2^0+2^1+2^2\cdot\left\{3^2+4\cdot\left[5^3-6\cdot\left(2^8-2^7\right):x\right]\right\}=2007\cdot2008-2007^2$$

b) Se dă numărul: $A = \overline{2xy7} + 2 \cdot \overline{xy000} - 3 \cdot \overline{xy}$. Arătați că $A \vdots 2007$.

Mihai Pîrvu și *Stela Turcu*

2. În laboratorul de informatică sunt 7 monitoare și 4 imprimante care costă la un loc 1396 lei. Pentru completarea laboratorului mai sunt necesare 4 monitoare și 7 imprimante, care vor costa 1387 lei.

a) Cât costă împreună 11 monitoare și 11 imprimante? **b)** Cât costă un monitor? Cât costă o imprimantă? **c)** Cu 2655 lei se pot cumpăra 21 de monitoare și imprimante la un loc. Aflați numărul de obiecte de fiecare fel.

Adrian Osman

3. Aflați numărul natural *a*, știind că împărțind numărul 2111 la numărul $\left(a^2 + a\right)$ se obține câtul 15 și restul maxim.

Nicolae Jurubiță

4. Fie $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \ldots$, submulțimi ale mulțimii numerelor naturale astfel încât $A_1 = \{0,1,2\}$; $A_2 = \{3,4,5,6,7\}$; $A_3 = \{8,9,10,11,12,13,14\}$; $A_4 = \{15,16,17,18,19,20,21,22,23\}$;

a) Determinați cardinalul fiecăreia dintre mulțimile: A_1, A_2, A_3, A_4. **b)** Determinați A_5.

c) Calculați suma cardinalelor mulțimilor: $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{103}$.

d) Determinați primul element al mulțimii A_{44} și justificați dacă $2007 \in A_{44}$.

Marian Șișu

CLASA A VI-A

1. a) Dacă $a - b = 55$, atunci $B = 3^{4n+4} \cdot 125^n \cdot a - 81^n \cdot 5^{3n} \cdot b - \left(3^n \cdot 2\right)^4 \cdot 5^{3n+1} \cdot a$ se divide cu 11.

b) Aflați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, știind că împărțite la 7 dau câtul $\overline{bc}$ și restul *a*.

2. Se consideră mulțimile: $A = \{2 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}, n \le 1003\}$ și $B = \{2 \cdot n + 1 \mid n \in \mathbb{N}, n \le 1003\}$.

a) Calculați suma elementelor mulțimii *A* și suma elementelor mulțimii *B*.

b) Justificați că prin eliminarea unui singur element din mulțimea *A* sau din mulțimea *B*, suma elementelor rămase în mulțimea *A* nu este egală cu suma elementelor rămase în mulțimea *B*.

Ecaterina Frățilă

3. a) Fie punctele *A, B, C, D* coliniare, în această ordine, astfel încât: $AB + 2BC + 3CD = 2AD$. Arătați că $AB = CD$.

b) Se dau punctele $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{10}$, distincte două câte două. Determinați numărul minim și numărul maxim de drepte determinate de aceste puncte.

4. Unghiul *COD* este interior unghiului *AOB*. Știind că unghiurile *AOB* și *COD* sunt suplementare și $m(\sphericalangle AOB) = 2 \cdot m(\sphericalangle COD)$, calculați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor *AOC* și *BOD*.

CLASA A VII-A

1. Calculați:

a) $A=(2+4+6+...+84)\cdot\left(\frac{2}{7\cdot 9}+\frac{2}{9\cdot 11}+...+\frac{2}{19\cdot 21}\right)$;

b) $F=7\cdot\left(\frac{35}{36}\right)^n:\frac{5^n\cdot 7^{n+1}+25^n\cdot 7^{n+2}}{6^{2n}+7\cdot 180^n}, n\in\mathbb{N}^*$.

2. Fie $a,b,c\in\mathbb{Q}_+^*$.

a) Arătați că: $\frac{a+1}{b+c}<\frac{b+1}{a+c}<\frac{c+1}{b+a}\Leftrightarrow a<b<c$.

b) Dacă $\frac{a+1}{b+c}=\frac{b+1}{a+c}=\frac{c+1}{b+a}=2$, determinați numerele *a, b, c*.

Mihai Pîrvu

3. În paralelogramul *ABCD*, $m(\sphericalangle A)=150°, AB=10$ cm, $BC=24$ cm, *M* este mijlocul laturii [*CD*], $AM\cap BD=\{G\}$ și $AC\cap BD=\{O\}$. Calculați:

a) aria paralelogramului *ABCD*;

b) aria triunghiului *AOG*.

Geagatai Musa-Cerchez

4. Se dă triunghiul isoscel *ABC* de bază [*BC*], iar $2\cdot m(\sphericalangle A)=m(\sphericalangle B)$. Bisectoarea unghiului *B* intersectează paralela dusă prin *C* la *AB* în punctul *E*, iar $AE\cap BC=\{M\}$. Dacă $BE\cap AC=\{D\}$, iar punctul *N* este mijlocul laturii [*AB*], arătați că:

a) punctele *M, D, N* sunt coliniare; **b)** $AB+AC>AM$.

Nicolae Jurubiță

CLASA A VIII-A

1. a) Arătați că: $\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{8-2\sqrt{15}}=1-\sqrt{8+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}-2\sqrt{10}}$.

b) Aflați $a,b,c\in\mathbb{N}$, dacă $\left(a+b\sqrt{c}\right)^2=66+12\sqrt{30}$.

Alexandru Cârnaru

2. Fie numerele reale *a, b* cu $a<b$ și intervalul [*a, b*] cu următoarele proprietăți:

i) $[a,b]\cap\mathbb{Z}=\varnothing$; **ii)** $|b-a-1|=a^2+b^2+\frac{a}{2}-2b+\frac{21}{16}$

a) Arătați că există $n\in\mathbb{Z}$ astfel încât $[a,b]\subset[n,n+1]$.

b) Aflați intervalul de numere reale [*a, b*] cu proprietățile date.

Ecaterina Botan

3. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB=2a$ și *M* mijlocul muchiei $[CC']$.

a) Dacă $(AMD')\cap BC=\{N\}$, arătați că *N* este mijlocul muchiei [*BC*].

b) Calculați aria patrulaterului $AD'MN$. **c)** Calculați $\sin\left[\sphericalangle(DM;AN)\right]$.

d) Calculați $d(D';AN)$.

Adrian Osman, Stela Turcu

4. Fie *ABCD* un tetraedru cu *T* și *S* mijloacele muchiilor [*AC*], respectiv [*AD*].

a) Dacă $AC = AD$ și $BT = SB$, demonstrați că $AB \perp CD$.

b) Fie E și F centrele de greutate ale triunghiurilor BTS, respectiv BCD. Arătați că punctele A, E și F sunt necoliniare.

Alexandru Cârnaru

Back

DÂMBOVIȚA

CLASA A V-A

1. Scrieți în ordine crescătoare numerele: $x = 2^{1103} - 2^{1102} - 2^{1101}$, $y = 3^{663} - 2 \cdot 3^{662} - 2 \cdot 3^{661} - 3^{660}$, $z = 7^{442} + 9 \cdot 7^{440} - 8 \cdot 7^{441}$.

Elena Boghe

2. Se dau numerele: $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 22 \cdot 23$, $b = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 20 \cdot 21$.
Arătați că numerele a și b dau același rest la împărțirea cu 101.

Călin Burdușel

3. a) Aflați restul împărțirii numărului 6^{2007} la 5.

b) Scrieți numărul 6^{2007} ca suma a trei numere naturale consecutive pare.

c) Arătați că numărul 6^{2007} se scrie ca diferența a două pătrate perfecte.

Damian Marinescu

4. Demonstrați că numărul 7654 nu poate fi scris ca suma unor numere impare consecutive.

Elena Boghe

CLASA A VI-A

1. a) Calculați: $4^n \cdot 5^{2n+1} + 2^{2n} \cdot 25^{n+1} - 10^{2n+1} \cdot 3$, unde $n \in \mathbb{N}$.

b) Dacă numerele naturale n și $10n + 1$ sunt divizibile cu 3, arătați că numărul $\dfrac{17n-2}{3}$ este natural.

Elena Boghe

2. Determinați numărul $\overline{ab}$ știind că $\dfrac{\overline{7ab}+8}{\overline{ab7}-14} \in \mathbb{N}$.

Damian Marinescu

3. Să se afle cel mai mic pătrat perfect care poate fi scris ca suma a 2006 numere naturale consecutive.

Călin Burdușel

4. a) Dacă A, B, C, D sunt puncte coliniare, în această ordine, astfel încât $3 \cdot AB = 4 \cdot CD$ și $4 \cdot CD = 5 \cdot BD$, atunci $AD = 8 \cdot BC$.

b) Aflați măsurile unghiurilor AOB, BOC, COD, DOA, în jurul punctului O, astfel încât $3m(\sphericalangle AOB) = 4m(\sphericalangle COD)$, $4m(\sphericalangle AOC) = 5m(\sphericalangle BOD)$ și $m(\sphericalangle AOD) = 7m(\sphericalangle BOC)$.

Damian Marinescu

CLASA A VII-A

1. Comparați numerele: $a = \sqrt{\left(1 - 2\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{3} - 5\right)^2}$, $b = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + 2\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$.

Călin Burdușel

2. a) Demonstrați că oricare ar fi $k \in \{5,6,7,10,11,12,14\}$ și oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, numărul $n^2 - k$ nu este divizibil cu 17.

b) Arătați că, oricum am alege 11 numere naturale diferite, există cel puțin două dintre ele astfel încât diferența pătratelor lor să fie multiplu de 17.

Călin Burdușel

3. Fie triunghiul oarecare *ABC*. Pe laturile *AB* și *AC* ca ipotenuze construim în exterior triunghiurile dreptunghice isoscele *ADB*, respectiv *AEC*. Fie *M* mijlocul laturii *BC*. Demonstrați că ΔMDE este dreptunghic isoscel.

Călin Burdușel

4. În triunghiul *ABC*, *M* este mijlocul laturii *AB*, $M \in (CN)$, astfel încât $MN = \frac{1}{3}MC$. Dacă *E* este simetricul punctului *C* față de *B*, să se arate că punctele *A, N, E* sunt coliniare.

Damian Marinescu

CLASA A VIII-A

1. Fie numerele reale *x, y, z, a, b, c* astfel încât au loc simultan relațiile:

i) $x+y+z=a+b+c$; **ii)** $x+a=y+b=z+c$; **iii)** $x^2+a^2=y^2+b^2=z^2+c^2$.

Demonstrați că: **a)** $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2$; **b)** $x^3+y^3+z^3=a^3+b^3+c^3$.

Elena Boghe

2. Arătați că: $\frac{x^2}{x-1}+\frac{y^2}{y-1} \geq 8$, $(\forall) x, y \in (1,+\infty)$.

Damian Marinescu

3. Pe planul triunghiului *ABC* cu $AB=a$, $AC=a\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle A)=90°$ se ridică perpendiculara $CD=a\sqrt{3}$. Determinați:

a) Distanța de la punctul *A* la *BD*;

b) Tangenta unghiului dintre planele (*ABD*) și (*BCD*).

Damian Marinescu

4. Fie planul π și *M* un punct exterior planului. Două semidrepte, duse prin *M* și perpendiculare în *M*, intersectează planul π în *A* și *B*. Fie α și β măsurile unghiurilor formate de dreptele *MA* și *MB* cu planul π.

Demonstrați că $\pi \perp (MAB)$ dacă și numai dacă $\sin\alpha = \sin\beta$.

Călin Burdușel

CLASA A V-A-J

1. Fie $n \in \mathbb{N}$ și fracția $F=\frac{6\cdot 18^n+10\cdot 15^n+9\cdot 12^n+15\cdot 10^n}{12\cdot 18^n+20\cdot 15^n+15\cdot 12^n+25\cdot 10^n}$.

a) Simplificați *F*. **b)** Determinați $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $F=\frac{15}{28}$.

Călin Burdușel

2. a) Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuația $2xy+3x-y=9$.

b) Fie $a,b,c \in \mathbb{N}$. Dacă $2^{a-b}, 2^{b-c}, 2^{c-a}$ sunt numere naturale, demonstrați că $a=b=c$.

Călin Burdușel

3. Fie $a,b,c \in \mathbb{N}$ și numărul de trei cifre $x=\overline{2^a 3^b 4^c}$ (scris în baza 10).

a) Câte numere x există? **b)** Care sunt numerele x egale cu răsturnatele lor? (răsturnatul numărului $\overline{mnp}$ este numărul $\overline{pnm}$).

Călin Burdușel

4. a) Calculați produsul $P=\left(2^{2^2}+1\right)\left(2^{2^3}+1\right)\ldots\left(2^{2^n}+1\right), n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ (se poate utiliza egalitatea $(a-1)(a+1)=a^2-1$). **b)** Deduceți că $\left(2^{2^{n+1}}-1\right) \vdots 15, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Călin Burdușel

CLASA A VI-A-J

1. a) Determinați numerele $\overline{abcd}$ astfel încât $\overline{abcd}=(a+b+c+d)^4$.

b) Asupra prețului unui produs se fac reduceri succesive cu 10% din costul produsului la momentul respectiv. După câte reduceri, prețul produsului este 0,59049 din prețul său inițial?

2. a) Fie numerele întregi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ egale cu 1 sau cu -1 astfel încât $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}=0$. Demonstrați că n este divizibil cu 4.

b) Fie a, b numere naturale nenule astfel încât $(a-3)(b+5)=ab$. Determinați valoarea maximă a raportului $\frac{a}{b}$.

3. Fie triunghiul oarecare ABC, BD bisectoarea unghiului B, $(D \in (AC))$, iar E mijlocul laturii AB. Dacă $BD \perp ED$, demonstrați că:

a) $AC=4DC$ **b)** $AB=3BC$

4. Fie triunghiul isoscel ABC $(AB=AC)$ în care $m(\sphericalangle BAC)=20°$ și punctul $M \in (AB)$ astfel încât $AM=BC$. Calculați $m(\sphericalangle AMC)$.

Călin Burdușel

Back

DOLJ

CLASA A V-A

1. a) Ordonați crescător numerele: $8^{168}, 63^{84}, 126^{72}, 129^{72}$.

b) Comparați numerele x^{17} și 17^{x+2} unde x este a 6871-a cifră a numărului 12131415...20062007.

2. a) Arătați că $20 \mid 49^{2n} + 10 \cdot 49^{n} + 9$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. **b)** Dacă numerele $\overline{abc}$ și $\overline{bca}$ se divid cu 37, arătați că și numărul $\overline{cab}$ se divide cu 37.

3. Determinați numerele $\overline{abc}$ care verifică în același timp condițiile:

i) $\overline{abc}$ este divizibil cu 15; **ii)** $x = a \cdot 2^{6n+1} + b \cdot 2^{6n+2} + c \cdot 2^{6n+3}$ este cub perfect, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pentru fiecare număr găsit: precizați numărul al cărui cub este x.

Christina Dan

4. a) Demonstrați că oricum am alege 5 numere naturale, dacă le ridicăm la puterea a patra, printre numerele obținute găsim întotdeauna cel puțin două a căror diferență se divide cu 10;

b) Suma a 15 numere naturale nenule, distincte, este 159. Demonstrați că printre aceste numere se găsește cel puțin un pătrat perfect.

CLASA A VI-A

1. Doi elevi, lucrând separat, au rezolvat împreună 520 de probleme, deși își propuseseră să rezolve 425. Știind că primul a rezolvat cu 25% iar al doilea cu 20% mai mult decât și-au propus, aflați câte probleme a rezolvat fiecare.

2. Determinați cele mai mici numere naturale consecutive *a, b, c, d* $(0 < a < b < c < d)$, știind că sunt divizibile respectiv cu numerele 8, 7, 6, 5.

3. Determinați numerele naturale *a, b, c* știind că sunt direct proporționale respectiv cu numerele $2, a, b$ și $a + b + 4c = 1812$.

4. În triunghiul isoscel ABC se duc înălțimea AD și bisectoarea $AA'\left(D, A' \in BC\right)$. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC știind că $DB = DA'$.

CLASA A VII-A

1. Fie $a \in \mathbb{Q}$. Definim $[a]$ ca fiind cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu a.

i) Să se calculeze $[2,9] + [-2,1]$. **ii)** Să se demonstreze că $[a] = a$ dacă și numai dacă $a \in \mathbb{Z}$. **iii)** Arătați că $[a + x] = [a] + [x], \forall x \in \mathbb{Q}$, dacă $a \in \mathbb{Z}$.

2. Se consideră expresia $E(x, y) = \dfrac{x + y}{1 + \dfrac{xy}{2007^2}}$.

a) Să se demonstreze că dacă $0 \le x, y \le 2007$, atunci $0 \le E(x, y) \le 2007$;

b) Să se demonstreze că dacă $0 \le x, y, z < 2007, E(x, y) = E(x, z)$, atunci $y = z$.

c) Dacă $0 \le x, y, z, t \le 2007$ atunci:

$$0 \le \frac{x + y + z + t + \dfrac{1}{2007^2}\left(xyz + xyt + xzt + yzt\right)}{1 + \dfrac{1}{2007^2}\left(xy + xz + xt + yz + yt + zt\right) + \dfrac{1}{2007^4}xyzt} \le 2007.$$

3. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic. Pe laturile *AB, BC, CA* ale triunghiului se consideră punctele *M, N, P*, respectiv, astfel încât $AM = mAB, BN = nBC, CP = pCA$, unde numerele m, n, p verifică relațiile $m+n+p=\frac{3}{4}$ și $m^2+n^2+p^2=\frac{1}{2}$. Să se calculeze raportul dintre aria triunghiului MNP și aria triunghiului ABC.

4. Fie $ABCD$ un paralelogram și M un punct interior paralelogramului astfel încât $\text{Aria}(MAB)=\text{Aria}(MBC)$.

a) Să se arate că $\text{Aria}(MCD)=\text{Aria}(MAD)$.

b) Să se determine locul geometric al punctului M.

CLASA A VIII-A

1. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2+y^2+z^2 \le 2$. Arătați că $xy+yz+zx \in [-1,2]$.

V. Slesar

2. Se consideră dreptele d_1 și d_2 a căror intersecție este formată din punctul P și fie A un punct exterior planului determinat de cele două drepte. Fie $A_1 \in d_1$ și $A_2 \in d_2$ astfel încât $AA_1 \perp d_1$ și $AA_2 \perp d_2$. Dacă M este mijlocul segmentului A_1A_2 iar N este simetricul lui P față de M, demonstrați că dreptele AN și A_1A_2 sunt perpendiculare.

V. Slesar

3. Aflați cel mai mic număr real de forma:

$$\sqrt{x^2+y^2-6x+9}+\sqrt{x^2+y^2-12x-8y+52}\text{, unde } x, y \in \mathbb{R}.$$

Determinați perechile de numere reale (x, y) pentru care se obține acest minim.

M. Popescu

4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de latură 1 și fie M, N, E și F mijloacele laturilor AB, AD, $B'C'$ și $C'D'$, respectiv. Să se demonstreze că planele $(A'MN)$ și (CEF) sunt paralele și să se calculeze distanța de la punctul C la planul $(A'MN)$.

Back

GALAȚI

CLASA A V-A

1. a) Arătați că $a\cdot\overline{xy}+b\cdot\overline{yx}=\overline{ab}\cdot x+\overline{ba}\cdot y$, oricare ar fi cifrele nenule a, b, x, y ale bazei zece.

b) Folosind a) calculați:

$$(1\cdot23+32\cdot2):(12\cdot2+21\cdot3)+(3\cdot45+54\cdot4):(34\cdot4+43\cdot5)+$$
$$+(5\cdot67+76\cdot6):(56\cdot6+65\cdot7)+(7\cdot89+98\cdot8):(78\cdot8+87\cdot9)$$

c) Aflați cifrele nenule a, b, x, y ale bazei zece pentru care $a\cdot\overline{xy}+b\cdot\overline{yx}=1407$ știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

1) a, x, y (în această ordine) sunt cifre consecutive; **2)** cifra a este număr prim;
3) cifra x este cub perfect; **4)** cifra y este pătrat perfect.

Gheorghe Păduraru

2. Să se determine numerele naturale de forma $\overline{abc}$ astfel încât $\overline{abc0abc}+\overline{abc000}+\overline{abc0}$ să fie pătrat perfect.

Zenovia Ismailescu

3. Să se precizeze scrierea în baza 2 a numărului $\overline{abc}$ știind că:

a = ultima cifră a lui 2007^{N+2}, unde $N = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2007}$.

b = restul împărțirii lui $2006^{2007} + 2007^{2006}$ la 1003

c = cardinalul mulțimii $M = \left\{ x \in \mathbb{N} \middle| 2000 < 3^x < 2200 \right\}$.

Nicoleta Balaș

4. Se știe că o școală are exact 2007 elevi. Să se arate că cel puțin doi dintre elevii școlii, luați la întâmplare, au același număr de prieteni. (Se presupune că, dacă elevul *A* este prietenul elevului *B*, atunci și elevul *B* este prietenul elevului *A*. Un elev nu poate fi prietenul lui însuși).

Georgeta Balacea

CLASA A VI-A

1. Aflați numărul natural x din ecuația $x^a = 4096$, știind că:

$$a = \left[2006 - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + ... + \frac{1004}{1005} \right) \right] : \left(\frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + ... + \frac{1006}{1005} \right).$$

Nicoleta Balaș

2. Se consideră dreptele AB și CD care se intersectează în punctul O. Fie $[OE$, $[OF$, $[OP$ bisectoarele unghiurilor AOC, AOE și respectiv AOD. Știind că $m(\sphericalangle BOE) = 120°$, să se calculeze $m(\sphericalangle BOF)$.

Rodica și *Dumitru Bălan*

3. Să se găsească numerele naturale de forma $\overline{ab}$, scrise în baza zece, pentru care $\left(\overline{ab}, \overline{ba}\right) = a + b$. Notația (m,n) reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor naturale m și n.

Gheorghe Pădurariu

4. a) Dacă numărul natural nenul A este de forma $A = 2^k \cdot 3^p$, unde $k, p \in \mathbb{N}^*$, să se determine numărul de divizori naturali ai lui A.

b) Să se determine câte numere naturale nenule n, mai mici decât 100, există, pentru care n^2 să aibă de două ori mai mulți divizori naturali decât n.

Marian Drăgoi

CLASA A VII-A

1. Să se rezolve în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuația: $a^2 + b^2 + 7(b - a) = 54$.

Tatiana Saulea

2. Să se determine cifrele a și b (din baza 10) știind că numărul rațional $r = \overline{a,2(b)} + \overline{b,3(a)}$ se poate scrie sub formă de fracție zecimală finită.

Mariana Coadă

3. Fie ΔABC isoscel, cu $[AB] \equiv [AC]$ și $m(\sphericalangle BAC) = 20°$. Construim $M \in (AC)$ astfel încât $m(\sphericalangle ABM) = 20°$ și $MN \parallel BC, N \in (AB)$. Notăm $BM \cap CN = \{O\}$.

Fie $P \in (OM)$, $[OP] \equiv [PM]$, $R \in (NB)$, $[RN] \equiv [RB]$, $Q \in (OC)$, $[OQ] \equiv [QC]$.

Să se arate că ΔPQR este echilateral.

Iuliana Duma

4. În trapezul $ABCD$ oarecare, $AB||CD$, (AM bisectoarea $\sphericalangle CAB, M \in [BC]$ astfel încât $[BM] \equiv [MC]$ şi $DM \cap AB = \{E\}$.

a) Să se arate că $DBEC$ este paralelogram.

b) Dacă $AM \cap CE = \{N\}$ şi $BP \perp BC, P \in [CE]$, arătaţi că $MN = \frac{1}{2} BP$.

c) Arătaţi că $\frac{CE}{CN} = 2 + \frac{BE}{AC}$. **d)** Arătaţi că $\frac{EP}{CN} = \frac{DC}{AB}$.

e) Dacă $[CN] \equiv [NP] \equiv [PE]$ şi $AB || CD$, $ABCD$ rămâne trapez? (Justificare). Dacă nu, care este natura patrulaterului $ABCD$? (Justificare).

Maria Minea

CLASA A VIII-A

1. Să se determine numărul natural prim n, astfel încât numărul $n^4 - 5n^3 + 5n^2 + 4n + 10$ să fie număr natural prim.

Nicoleta Balaş

2. Se consideră $E(m,n) = \sqrt{7^n + 2 \cdot 49^m}$, unde $m, n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că $E(500;1001) \in \mathbb{Q}$. **b)** Să se arate că $E(2007;1000) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

c) Determinaţi o pereche $(m;n) \in \mathbb{N}$ cu $n \leq 100$ astfel încât $E(m;n) \in \mathbb{Q}$.

d) Arătaţi că există o infinitate de perechi $(m;n) \in \mathbb{N}$ astfel încât $E(m;n) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Romeo Zamfir

3. Să se rezolve ecuaţia $\left[\frac{1}{2\left(k - \sqrt{k^2 - 1}\right)}\right] = k - 1, k \in \mathbb{Z}^*$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

4. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = a, BC = b, AA' = c$ se consideră punctul $M \in (A'C)$ astfel încât $A'M = \frac{1}{2} \cdot MC$. Dacă $\min(a,b) \geq c$ şi $AM \perp A'C$ arătaţi că paralelipipedul este cub.

Petre Bătrâneţu

CLASA A V-A-J

1. Suma a 2007 numere naturale nenule este 2015027. Demonstraţi că există cel puţin două dintre aceste numere a căror diferenţă se divide cu orice număr natural nenul.

Ionel Patriche

2. Fiind dat următorul şir de numere naturale: 2, 8, 26, 80, 242,..., să se determine ultima cifră a celui de al 2007-lea număr din şir.

Rodica Bălan şi Dumitru Bălan

3. Un elev a scris următoarea egalitate şi nu a fost corectat de profesor, spre mirarea colegilor săi: $2007 = 1465$.

Acestora li s-a dat următoarea explicaţie: cele două numere sunt scrise în baze de numeraţie diferite. Numărul 2007 este scris într-o bază de numeraţie (b) egală cu ultima cifră a numărului *N*, unde $N = 1^{2007} + (1\cdot 2)^{2007} + (1\cdot 2\cdot 3)^{2007} + ... + (1\cdot 2\cdot 3\cdot ....\cdot 2007)^{2007}$, iar numărul 1465 este scris într-o bază de numeraţie (c): $\overline{2007}_{(b)} = \overline{1465}_{(c)}$.

a) Determinaţi baza de numeraţie *b*.

b) Determinaţi baza de numeraţie *c* în care este adevărată egalitatea: $\overline{2007}_{(b)} = \overline{1465}_{(c)}$.

Nicoleta Balaş

4. Să se afle cifrele *a* şi *b* ştiind că:

$$(a+b)^2 + (b-a+7)^2 = \overline{ab7},\ b > a.$$

Tatiana Saulea

CLASA A VI-A-J

1. Se consideră numărul $\overline{abcd}$, scris în baza 10, cu cifre diferite, nenule, pentru care $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}, c + d = 4$ şi $\overline{ab} + a + b + \overline{ba} = 96$.

a) Arătaţi că $\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{\overline{ba}}{\overline{dc}}$.

b) Câte numere $\overline{abcd}$ de acest fel există?

Constanţa Gusta

2. Spunem că un număr natural *x* „îşi atinge scopul" dacă şi numai dacă este un număr de cel puţin două cifre şi se poate scrie ca suma unor numere naturale consecutive, cel mai mic dintre aceste numere naturale consecutive fiind egal cu suma cifrelor numărului *x*. Aflaţi numerele naturale care „îşi ating scopul" şi care au suma cifrelor egală cu 1.

Gheorghe Pădurariu

3. Se consideră semidreptele [*OX*, [*OY*, [*OZ* cu proprietatea că unghiurile $\sphericalangle XOY$, $\sphericalangle YOZ$, $\sphericalangle XOZ$ sunt unghiuri proprii, adiacente două câte două. Notăm $a = m(\sphericalangle XOY)$, $b = m(\sphericalangle YOZ)$, $c = m(\sphericalangle XOZ)$. Se ştie că numerele 2*a*, 3*b*, 6*c* sunt direct proporţionale cu numerele 3, 4, şi respectiv 7.

a) Determinaţi *a, b, c*;

b) Arătaţi că *b* este media aritmetică între *a* şi *c*;

c) Se construieşte semidreapta [*OT* în semiplanul determinat de dreapta *OX* care conţine semidreapta [*OZ*, astfel încât $OT \perp OX$. Demonstraţi că semidreapta opusă semidreptei [*OY* este bisectoarea unghiului *XOT*.

Zenovia Ismailescu

4. Se consideră un poligon cu cinci laturi. Se ştie că lungimile laturilor sale sunt numere naturale diferite iar perimetrul său este un număr natural, mai mic decât 100, multiplu al tuturor celor cinci lungimi de laturi. Să se determine lungimile laturilor acestui poligon.

Dan Ismailescu

Back

GIURGIU

CLASA A V-A

1. Scrieți într-o formă mai simplă și ordonați crescător numerele:

$a = 3^{333} - 2 \cdot 3^{332} - 2 \cdot 3^{331} - 3^{330}$; $b = 2^{553} - 2^{552} - 2^{551}$; $c = 5^{222} + 7 \cdot 5^{220} - 6 \cdot 5^{221}$.

Verona Marin

2. Fie $a \in \mathbb{N}$ și $b \in \mathbb{N}^*$. Câtul împărțirii lui a la b este 4 iar restul este 2006. Știind că $3a - 2b < 26098$, aflați numerele a și b.

Rodica Mărăcineanu

3. Fie numerele $A = 2^2 \cdot 2^{2^2} \cdot 2^{2^3} \cdot \ldots \cdot 2^{2^n}$ și $B = 2^{2^{n+2}} : 2^{2^{n+1}} : 2^{2^n}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Comparați numerele A și B. **b)** Aflați n pentru care $A - B = 16128$.

Ionel Tudor

CLASA A VI-A

1. Să se determine numerele x, y, z știind că $x + y$, $x + z$ și $y + z$ sunt direct proporționale cu numerele 11, 14 și 15 iar $\dfrac{2xy - xz}{x + 3y - z} = \dfrac{15}{7}$.

Radu Stănică

2. a) Arătați că numărul $a = 2007^{2007}$ nu este pătrat perfect dar este cub perfect.

b) Aflați cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n \cdot a$ să fie și pătrat perfect și cub perfect.

Ionel Tudor

3. Raportul măsurilor unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$, neadiacente este $\dfrac{2}{5}$.

a) Aflați $m(\sphericalangle AOB)$ și $m(\sphericalangle AOC)$ știind că măsura unghiului format de bisectoarele lor este de $30°$.

b) Dacă $[OD \perp [OB$, D și A fiind în semiplane diferite față de OB, calculați $m(\sphericalangle AOD)$.

Gabriela Dincă, Viorel Dincă

4. Fie unghiurile neadiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ iar $[OM$ și $[ON$ bisectoarele lor. Știind că $m(\sphericalangle AOC) = 60°$ și $\sphericalangle MON \equiv \sphericalangle AOB$, calculați $m(\sphericalangle BOC)$.

Cornel Marinescu

CLASA A VII-A

1. Arătați că numărul $a = \sqrt{7 + 7^2 + 7^3 + \ldots + 7^{49}}$ este un număr irațional.

Carmen Banu

2. Să se compare numerele $A = n^n$ și $B = n^4 - 3n^3 + 3n^2$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Viorica Dogaru

3. Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$ și $AB = 2CD$. Fie M mijlocul laturii $[AB]$ iar $\{E\} = AC \cap DM$. Știind că $A_{CME} = 4\ \text{cm}^2$, calculați aria triunghiului ABP, unde $\{P\} = AD \cap BC$.

Rodica Mărăcineanu

4. Într-un triunghi ABC, laturile au lungimile $AB = 10$ cm, $AC = 20$ cm şi $BC = 15$ cm. Se consideră $[BD$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC, D \in (AC)$ şi se duc $DE \parallel BC, E \in (AB)$ şi $EF \parallel AC, F \in (BC)$.

Să se determine:

a) perimetrul trapezului $AEFC$; **b)** raportul $\frac{OD}{OB}$, unde $\{O\} = BD \cap EF$.

Radu Stănică

CLASA A VIII-A

1. a) Determinaţi valoarea maximă a expresiei $E(x) = 2003 + 4x - x^2$, unde $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia: $\sqrt{x^2 - 4x + y^2 + 6y + 17} + \sqrt{z^2 - 2z + 2} = 3$.

Radu Stănică

2. Pentru $x \in \mathbb{R}$, să se ordoneze crescător numerele: $A = x^2 + 3, B = x^3 - 3x^2 + 3$ şi $C = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x + 7$.

Ionel Tudor

3. Se consideră prisma triunghiulară dreaptă $ABCEFG$ cu $AE = 12$ cm. Ştiind că planele (ABC) şi (EBC) formează un unghi diedru de $60°$, să se calculeze:

a) perimetrul triunghiului ABC; **b)** distanţa de la punctul A la planul (EBC); **c)** sinusul unghiului format de dreapta EM cu planul (ACE), unde M este mijlocul lui (BC).

Rodica Mărăcineanu

4. Dreptele a şi b concurente în punctul O situat în afara unui plan α, formează cu planul α unghiuri de $30°$, respectiv $45°$, iar planul (a,b) formează cu planul α un unghi de $60°$. Aflaţi unghiul format de dreptele a şi b.

Gazeta Matematică nr.3/2006

CLASA A V-A-J

1. Se dă mulţimea $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 13 | x \text{ şi } x < 500\}$.

a) Aflaţi cardinalul mulţimii A.

b) Arătaţi că suma elementelor pare ale mulţimii A este număr divizibil cu 38.

Gabriela Dincă, Viorel Dincă

2. a) Aflaţi numerele naturale x şi y care verifică $10x + 7y = 300$.

b) Pentru mulţimile

$$A = \{30, 73, 116, 159, 202, 2007\}, \quad B = \{x + 5y | 10x + 7y = 300; x, y \in \mathbb{N}\}$$

Să se arate că $A \setminus (A \setminus B) = B \setminus (A \setminus B)$.

Verona Marin, Ionel Tudor

3. a) Scrieţi un pătrat perfect cuprins între numerele 3^{2n+3} şi $13 \cdot 3^{2n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. **b)** Să se determine restul împărţirii numărului 2007^{2007} la 5.

Radu Stănică

CLASA A VI-A-J

1. Se dau numerele raţionale pozitive x, y, z care verifică condiţiile:

a) $\{x, y\}$ direct proporţională cu $\{8, 7\}$. **b)** $\{y, z\}$ invers proporţională cu $\{3, 4\}$.

c) z este cu 65 mai mare ca 25% din x. Aflaţi numerele x, y, z.

Daniela Boanţă

2. Fie un număr prim p şi numerele de forma:

$$a_n = p + n + 2n + 3n + \ldots + (p-1)n \text{, pentru } n \in \mathbb{N}.$$

a) Pentru $p = 2$ calculaţi a_{2007}.

b) Pentru numărul prim p fixat se consideră mulţimea $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Găsiţi cel mai mic element $a_n \in A$ care este pătrat perfect şi cel mai mic element $a_n \in A$ care este cub perfect.

c) Arătaţi că dacă $m + n \geq k$ atunci $a_m + a_n - a_k \in A$.

Ionel Tudor

3. Fie segmentul $[AB]$, de lungime l şi punctele $C \in (AB), D \in (CB)$ şi $P \in (CD)$ astfel încât $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{4}{5}, \dfrac{CD}{DB} = \dfrac{2}{3}$ şi $\dfrac{CP}{PD} = \dfrac{1}{3}$.

a) Comparaţi segmentele $[AP]$ şi $[BP]$. **b)** Aflaţi l dacă $BD - DP = 6$ cm.

Radu Stănică

4. Fie triunghiul ABC cu AB mai mic decât AC şi punctele $M \in AB$ astfel încât $B \in (AM), E \in (BC)$ şi $N \in (AC)$ astfel încât $\sphericalangle NEC \equiv \sphericalangle ABC$ şi $[BM] \equiv [NE]$. Dacă $BC \cap MN = \{P\}$ arătaţi că:

a) $[MP] \equiv [PN]$. **b)** Dacă $AP \perp BC$ stabiliţi natura triunghiului ABE.

Rodica Mărăcineanu

Back

GORJ

CLASA A V-A

1. Să se calculeze: **a)** $100 - 10 \cdot [100 - 10 \cdot (10 - 10 : 10)]$;

b) $(3^0 \cdot 3^1 \cdot 3^{13} : 3^5 + 1) : \left[(3^2)^3 \cdot 27 + 3^0\right]$; **c)** $2^{11} \cdot 3^9 + 3^9 \cdot 2^{10} - 6^{10}$.

2. Fie numerele $a, b, c \in \mathbb{N}$ şi mulţimile $A = \{3, 2a+2, 2c+4\}$ şi $B = \{2, 2a+3, 2b+1\}$.

a) Să se determine câte mulţimi A au suma elementelor egală cu 13.

b) Ştiind că $A \cup B$ are cinci elemente să se determine numărul b.

Mircea Constantinescu

3. Se consideră mulţimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 99\}$. Să se arate că:

a) oricum se aleg 51 de numere din mulţimea A, produsul lor este număr par.

b) oricum se aleg 67 de numere din mulţimea A, printre acestea există trei numere consecutive.

4. a) De-a lungul unui gard sunt 12 meri. Numerele merelor din oricare doi meri vecini diferă cu 1. Se poate ca în toți cei 12 meri să fie 2007 mere?

b) Se pot împărți numerele naturale de la 1 la 1001 în câteva grupe astfel încât în fiecare grupă cel mai mare număr din acea grupă să fie egal cu suma celorlalte din acea grupă?

CLASA A VI-A

1. Să se calculeze: **a)** $(-1)^0+(-1)^{2007}\cdot(-2)+(-1)^{2006}\cdot(-2)^2\cdot(-3)$.

b) $1-2+3-4+5-6+...+2005-2006+2007$

c) $\left[(-1)^n\cdot(-2^2)^n-4^n\right]:(-4)^n$, unde $n\in\mathbb{N}$.

2. Fie A mulțimea tuturor numerelor de zece cifre, fiecare număr având șase cifre de 1 și patru cifre de 0.

a) Câte numere din mulțimea A sunt divizibile cu 16? Justificare.

b) Există în mulțimea A pătrate perfecte? Justificare.

Mircea Constantinescu

3. În exteriorul triunghiului ABC se consideră triunghiurile AMB și ANC astfel încât $AM = AN$, $BM = CN$, iar segmentul (MN) să intersecteze segmentele (AB) și (AC). Să se arate:

a) dacă $AB = AC$ atunci $BN = CM$. **b)** dacă $BN = CM$ atunci $AB = AC$.

4. a) Să se determine măsurile în grade a patru unghiuri în jurul unui punct dacă acestea sunt exprimate prin numere impare consecutive.

b) Se consideră n unghiuri ($n\geq 4$) în jurul unui punct cu proprietatea că prin oricare trei dintre acestea există două unghiuri suplementare. Să se determine măsurile lor știind că două dintre acestea au măsurile de 30° și 60°.

Mircea Constantinescu

CLASA A VII-A

1. a) Să se simplifice fracția: $\dfrac{4+8+12+...+400}{3+6+9+...+300}$.

b) Dacă $m,n,p\in\mathbb{N}$ și $(-1)^m\cdot\dfrac{1}{2}+(-1)^n\cdot\dfrac{1}{3}+(-1)^p\cdot\dfrac{1}{6}\in\mathbb{Z}$, atunci $n+p$ este număr par.

2. Pe o insulă trăiesc 12 cameleoni. La un moment dat trei au culoarea roșie, patru au culoarea galbenă iar ceilalți cinci au culoarea verde. Se știe că dacă se întâlnesc doi cameleoni cu două culori diferite atunci ambii își schimbă culoarea în cea de-a treia culoare. În rest ei nu-și schimbă culoarea. Să se arate că:

a) este posibil ca la un moment dat nici un cameleon să nu aibă culoarea verde;

b) nu este posibil ca la un moment dat toți cameleonii să aibă culoarea verde.

3. Fie triunghiul ABC și M mijlocul lui [BC], N mijlocul lui [AB] și P mijlocul lui [AC]. Se mai consideră $E\in(AN)$, $F\in(AP)$ astfel încât $EF\parallel BC$. Să se arate că dacă $\sphericalangle MEB\equiv\sphericalangle MFC$ atunci:

a) $\Delta MEN \sim \Delta MFP$. **b)** $AB = AC$.

4. Se consideră patrulaterul ABCD. Să se arate că:

a) Dacă $ABCD$ este paralelogram atunci pentru orice punct M din interiorul său are loc relația $S_{MAB} + S_{MCD} = S_{MBC} + S_{MDA}$.

b) Dacă pentru orice punct M din interiorul patrulaterului $ABCD$ are loc relația $S_{MAB} + S_{MCD} = S_{MBC} + S_{MDA}$ atunci $ABCD$ este paralelogram. (prin S_{XYZ} înțelegem aria triunghiului XYZ).

Mircea Constantinescu

CLASA A VIII-A

1. a) Să se arate că dacă $x > 0$ atunci $x + \frac{4}{x} \geq 4$. Când are loc egalitatea?

b) Să se determine $a, b, c > 0$ astfel încât $\begin{cases} a+b+c=6 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3}{2} \end{cases}$.

2. Se consideră o mulțime infinită A de numere reale cu proprietatea că suma oricăror 2007 numere distincte din A este număr rațional. Să se arate că:

a) dacă $a, b \in A$ atunci $a - b \in \mathbb{Q}$; **b)** $A \subset \mathbb{Q}$

Mircea Constantinescu

3. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Să se arate că:

a) dacă triunghiul $A'BC'$ este echilateral atunci $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

b) dacă $\sphericalangle AA'B \equiv \sphericalangle CBC' \equiv \sphericalangle D'C'A'$ atunci $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Mircea Constantinescu

4. Se consideră tetraedrul $VABC$ cu baza triunghiul echilateral ABC de latură a și fețele laterale triunghiuri ascuțitunghice.

a) Dacă tetraedrul $VABC$ este regulat să se determine lungimea drumului minim de la A la C care taie muchia $[VB]$ parcurs pe suprafața laterală a tetraedrului.

b) Considerăm drumurile minime de la A la C care taie muchia [VB], de la A la B care taie muchia [VC] și de la B la C care taie muchia [VA] parcurse pe suprafața laterală a tetraedrului. Să se arate că dacă lungimile acestor drumuri sunt egale atunci $VA = VB = VC$.

Mircea Constantinescu

Back