GEOMETRIE, CLS. VII-A, P1

DANA RADU si EUGEN RADU

#

I RECAPITULARE ȘI COMPLETĂRI

GEOMETRIE

1. Elemente de logică

A. Implicație. Ipoteză. Concluzie

Rezolvarea unei probleme de matematică presupune o înlănțuire de afirmații (propoziții sau fraze) care ne permit să tragem anumite concluzii.

În matematică avem nevoie de raționamente clare și logice, de exprimări precise și riguroase. Pentru aceasta apelăm la *logică* – știința care studiază propozițiile, modul de formare a unor propoziții (compuse) pornind de la alte propoziții (simple), judecățile și tipurile de raționamente.

În geometrie sau în algebră întâlnim frecvent următorul gen de propoziții:

„Dacă două unghiuri sunt opuse la vârf, atunci ele sunt congruente."

„Dacă $x = 2$, atunci $4x - 3 = 5$."

Deși cele două propoziții diferă prin conținutul lor, observăm că ele sunt construite în același mod: „Unghiurile *h, k* opuse la vârf $\Rightarrow \sphericalangle h \equiv \sphericalangle k$." respectiv „$x = 2 \Rightarrow 4x - 3 = 5$." Plecând de la două propoziții *p* și *q*, adevărate sau false, obținem o altă propoziție formulată schematic „dacă *p*, atunci *q*" și notată „$p \Rightarrow q$". (Citim *p* implică *q*.)

- Propoziția *p*, enunțată după cuvântul „dacă" și înainte de cuvântul „atunci" se numește *ipoteză*.

- Propoziția *q* care urmează după cuvântul „atunci" se numește *concluzie*.

Valoarea de adevăr a propoziției „$p \Rightarrow q$" depinde de valorile de adevăr ale propozițiilor *p* și *q*.

Propoziția „$p \Rightarrow q$" este adevărată dacă
- *p* și *q* sunt adevărate sau
- *p* este falsă și *q* are orice valoare de adevăr.

Propoziția „$p \Rightarrow q$" este falsă dacă *p* este adevărată și *q* este falsă.

Exemple

1. *p*: Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180°.
   q: Două unghiuri drepte sunt congruente.

Propozițiile *p* și *q* sunt adevărate, deci „$p \Rightarrow q$" este adevărată.

2. *s*: $1 = 2$ și *r*: $7 + 4 = 10$. Propozițiile *s* și *r* sunt false, deci propoziția $s \Rightarrow r$ este adevărată.

- Adevărul propoziției *implicație* stă la baza celui mai simplu tip de raționament.

Schematic, el se prezintă astfel:

$$\begin{array}{ll} p & \text{(propoziție adevărată)} \\ p \Rightarrow q & \text{(propoziție adevărată)} \\ \hline q & \text{(deducem că propoziția } q \text{ este adevărată)} \end{array}$$

Back

B. Condiție necesară. Condiție suficientă. Propoziții echivalente

Să considerăm propoziția adevărată $p \Rightarrow q$.
Ipoteza p se numește *condiție suficientă* pentru concluzia q.
Concluzia q se numește *condiție necesară* pentru ipoteza p.

Exemple

1. În triunghiul ABC, $[AB] \equiv [AC] \Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{C}$.
Propoziția $[AB] \equiv [AC]$ este o condiție suficientă pentru propoziția $\hat{B} \equiv \hat{C}$, iar $\hat{B} \equiv \hat{C}$ este o condiție necesară pentru propoziția $[AB] \equiv [AC]$.
2. Dacă două unghiuri sunt drepte (au măsura de 90°), atunci cele două unghiuri sunt congruente. În această propoziție condiția ca două unghiuri să fie drepte este suficientă ca unghiurile să fie congruente, dar nu este și condiție necesară.

Este posibil ca o propoziție p să fie concomitent condiție suficientă și necesară pentru propoziția q. (Vezi exemplul **1.**)
În loc de $p \Rightarrow q$ și $q \Rightarrow p$ vom scrie în acest caz $p \Leftrightarrow q$. Citim: „p este echivalentă cu q" sau „p dacă și numai dacă q".

Back

C. Teoremă. Teoremă reciprocă

- O propoziție adevărată de forma $p \Rightarrow q$ se numește *teoremă*.
- Propoziția obținută din teorema dată luând concluzia teoremei drept ipoteză și ipoteza teoremei drept concluzie se numește *reciprocă* a teoremei date.
- Dacă propoziția reciprocă a unei teoreme este adevărată, atunci ea se numește *teoremă reciprocă* a teoremei date (teorema dată se numește, în această situație, *teoremă directă*).

Exemple

1. Teorema (directă): Dacă patrulaterul $ABCD$ este paralelogram, atunci $[AB] \equiv [CD]$.
Propoziția reciprocă: Într-un patrulater $ABCD$, dacă $[AB] \equiv [CD]$, atunci patrulaterul $ABCD$ este paralelogram. Reciproca este falsă. (Justificați.)
2. Teorema (directă): Într-un triunghi ABC, dacă $[AB] \equiv [AC]$, atunci $\hat{B} \equiv \hat{C}$.
Propoziția reciprocă: Într-un triunghi ABC, dacă $\hat{B} \equiv \hat{C}$, atunci $[AB] \equiv [AC]$.
Propoziția reciprocă este în acest caz adevărată și este *teoremă reciprocă*.

În cele două exemple anterioare de teoreme ipoteza constă dintr-o singură propoziție.
În cazul când ipoteza constă din mai multe propoziții legate între ele prin conjuncția „și“, putem construi mai multe propoziții reciproce.
Le obținem schimbând între ele una dintre propozițiile din ipoteză cu concluzia teoremei.

Ipoteza: $\underbrace{p_1 \text{ și } p_2 \text{ și } p_3 \dots \text{ și } p_k}$
$\Downarrow$
Concluzia: $\boldsymbol{q}$

Reciproce (exemple):

Ipoteza: $\underbrace{\boldsymbol{q} \text{ și } p_2 \text{ și } p_3 \dots \text{ și } p_k}$
$\Downarrow$
Concluzia: $\boldsymbol{p_1}$

Ipoteza: $\underbrace{p_1 \text{ și } \boldsymbol{q} \text{ și } p_3 \dots \text{ și } p_k}$
$\Downarrow$
Concluzia: $\boldsymbol{p_2}$

Exemplu

Dacă într-un patrulater convex $ABCD$, $[AD] \equiv [BC]$ și $[AB] \equiv [CD]$ atunci $AB \parallel CD$.

Ipoteza: p_1: $[AD] \equiv [BC]$ și p_2: $[AB] \equiv [CD]$.
Concluzia: q: $AB \parallel CD$.

Reciproca 1
Ipoteza: q: $AB \parallel CD$ și p_2: $[AB] \equiv [CD]$.
Concluzia: p_1: $[AD] \equiv [BC]$.

Reciproca 2
Ipoteza: p_1: $[AD] \equiv [BC]$ și q: $AB \parallel CD$.
Concluzia: p_2: $[AB] \equiv [CD]$.

Propoziția reciprocă 1 este adevărată, iar propoziția reciprocă 2 este falsă. (Justificați.)

Back

D. Alte tipuri de raționament

Raționament prin contrapoziție

Negația unei propoziții, p se notează $\overline{p}$

În logică propoziția „$p \Rightarrow q$“ este echivalentă cu „$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$“.

Exemplu

Propoziția: „Dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $[AB] \equiv [CD]$“ este echivalentă cu propoziția : „Dacă într-un patrulater $ABCD$, $[AB] \not\equiv [CD]$ atunci $ABCD$ nu este paralelogram.“

Echivalența propozițiilor $p \Rightarrow q$ și $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ stă la baza unui raționament, numit raționament prin contrapoziție, care afirmă că dacă propozițiile $p \Rightarrow q$ și $\overline{q}$ sunt adevărate, atunci este adevărată și propoziția $\overline{p}$.

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \overline{q} \\ \hline \overline{p} \end{array}$$

Exemplu

Dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $[AB] \equiv [CD]$.	$p \Rightarrow q$
În patrulaterul $ABCD$, $[AB] \not\equiv [CD]$.	$\overline{q}$
Patrulaterul $ABCD$ nu este paralelogram.	$\overline{p}$

Raționament prin reducere la absurd

Să considerăm că avem de demonstrat propoziția $p \Rightarrow q$. Presupunem că negația ($\overline{q}$) a concluziei este adevărată. Luând ca ipoteză propozițiile p și $\overline{q}$ demonstrăm că este adevărată propoziția $\overline{r}$, care este negația unei propoziții despre care știm că este adevărată.

Spunem că am obținut o contradicție. Prin urmare, propoziția $p \Rightarrow q$ este adevărată.

Un astfel de raționament se numește raționament prin reducere la absurd.

Exemplu

Să considerăm dreptele a, b, c. Dacă $a \parallel c$ și $b \parallel c$, atunci $a \parallel b$.

Ipoteza: $a \parallel c$ și $b \parallel c$. *Concluzia*: $a \parallel b$.

Presupunem concluzia falsă. Atunci $a \nparallel b$ este o propoziție adevărată.

Dacă $a \nparallel b$, atunci dreptele a și b sunt concurente. Fie A punctul lor de intersecție. Prin punctul A trec așadar două drepte paralele cu dreapta c, ceea ce contrazice axioma paralelelor.

Back

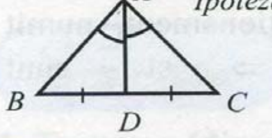
Exerciții

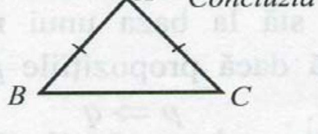
1 Stabiliți ipoteza și concluzia propozițiilor următoare:

a: Dacă două drepte sunt paralele, atunci două dintre unghiurile alterne interne determinate cu o secantă comună sunt congruente.

b: Dacă M este egal depărtat de punctele A și B, atunci M aparține mediatoarei segmentului $[AB]$.

2 În desenele de mai jos sunt indicate ipoteza și concluzia unei propoziții. Formulați această propoziție.





3 1) Scrieți fiecare dintre enunțurile de mai jos utilizând „dacă …, atunci …“. Stabiliți ipoteza și concluzia.

a) Într-un triunghi isoscel, înălțimile corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente.

b) Mediana și înălțimea duse din vârful opus bazei unui triunghi isoscel coincid.

2) Scrieți propozițiile reciproce pentru fiecare dintre propozițiile a) și b).

4 Considerăm unghiul xOy, $A \in \mathrm{Int}(\sphericalangle xOy)$ și propozițiile:

p: A aparține bisectoarei unghiului xOy;

q: A este egal depărtat de laturile unghiului. Care dintre propozițiile de mai jos sunt adevărate ?

a) $p \Rightarrow q$; b) $q \Rightarrow p$; c) p este o condiție necesară pentru q; d) q este condiție suficientă pentru q; e) p este condiție necesară și suficientă pentru q.

5 Fie D un punct pe latura (BC) a triunghiului ABC. Demonstrați că:

a) Dacă $AD \perp BC$ și $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAD}$, atunci $[AB] \equiv [AC]$.

b) Formulați reciprocele propoziției a) și determinați valorile lor de adevăr.

[Back]

2. Exerciții și probleme recapitulative din materia clasei a VI-a

Linii importante în triunghi

1 Construiți un triunghi cu lungimile laturilor de 5 cm, 6 cm, respectiv 7 cm. Construiți medianele triunghiului.

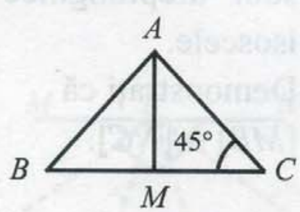
2 Într-un triunghi ABC, $[AM]$ este mediană. Construiți triunghiul ABC dacă: $AB = 4$ cm; $AM = 5$ cm; $BC=12$ cm.

3 În triunghiul ABC, $BC = 7$ cm, $m(\widehat{ABC}) = 45°$ și $m(\widehat{ACB}) = 30°$.
a) Construiți triunghiul ABC.
b) Construiți înălțimile triunghiului.
c) Dacă H este ortocentrul triunghiului, determinați măsurile unghiurilor triunghiului HBC.

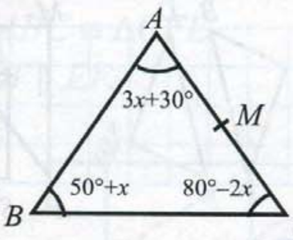
4 În triunghiul ABC, $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm și $m(\widehat{ABC}) = 150°$.
a) Construiți triunghiul ABC.
b) Determinați ortocentrul triunghiului ABC.
c) Calculați lungimile înălțimilor din A și C.

5 Într-un triunghi ABC, $[AD]$ este înălțime și $[AE]$ este mediană. Construiți triunghiul ABC dacă $AD = 5$ cm, $AE = 6$ cm, și $BC = 10$ cm.

6 În ΔABC, mediana $[AM]$ este congruentă cu $[BM]$ și $[CM]$. Dacă $m(\hat{C}) = 45°$, arătați că ΔABC este isoscel.



7 Folosind notațiile din figura alăturată și faptul că M este mijlocul laturii $[AC]$, arătați că $[BM]$ este înălțime.



8 a) Construiți bisectoarele unghiurilor unui triunghi dreptunghic ABC.
b) Dacă $m(\hat{A}) = 90°$ și I este punctul de intersecție a bisectoarelor, calculați $m(\widehat{BIC})$.

9 În triunghiul ABC, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Dacă pe semidreapta $(AD$ există un punct egal depărtat de AB și AC, atunci triunghiul ABC este isoscel.

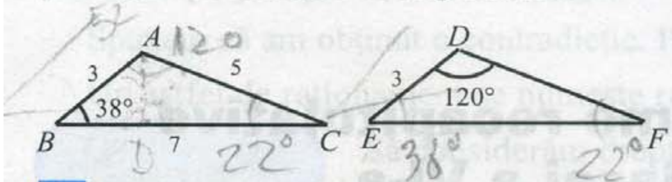
10 Se dă triunghiul ABC $(AB < AC)$. Mediatoarea laturii $[BC]$ intersectează dreptele AC și AB în punctele E, respectiv F.
a) Dacă $m(\widehat{BAC}) = 66°$ și $m(\widehat{BCA}) = 50°$, calculați măsurile unghiurilor triunghiurilor EBC, FBC, ABE, ACF.
b) Arătați că oricare ar fi măsurile unghiurilor triunghiului ABC, $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{ACF})$.

11 Fie M mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ABC și punctul P, $P \in (AM)$ astfel încât $\sphericalangle APB \equiv \sphericalangle APC$. Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

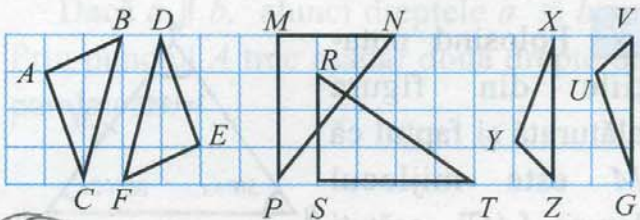
Back

Congruența triunghiurilor

12 Triunghiurile de mai jos sunt congruente. Determinați măsurile unghiurilor și lungimile laturilor triunghiurilor.



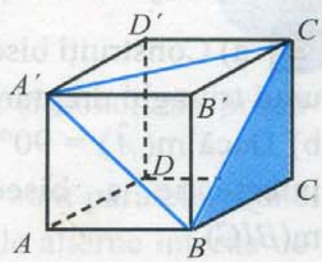
13 Demonstrați că următoarele perechi de triunghiuri sunt congruente.



14 În figura alăturată este desenat un cub.

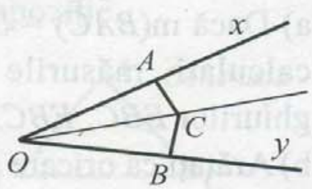
a) Determinați, pe fețele cubului, triunghiuri congruente cu triunghiul CBC'.

b) Demonstrați că triunghiul $BA'C'$ este echilateral.



15 Pe latura $[BC]$ a triunghiului isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) se iau punctele M și N, astfel încât $[BM] \equiv [NC]$. Demonstrați că $\Delta ABM \equiv \Delta ACN$.

16 În desenul alăturat $[OA] \equiv [OB]$ și $(OC$ este bisectoarea unghiului xOy. Demonstrați că $\Delta AOC \equiv \Delta BOC$.



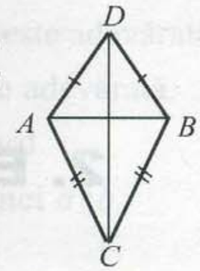
17 În patrulaterul convex $ABCD$, diagonala $[BD]$ este bisectoarea unghiurilor B și D. Demonstrați că $\Delta ABD \equiv \Delta CBD$.

18 $[AD]$ este mediană în triunghiul ABC, iar $M, N \in AD$ ($D \in (MN)$), astfel încât $\widehat{MBD} \equiv \widehat{NCD}$. Demonstrați că $\Delta MBD \equiv \Delta NCD$.

19 În desenul alăturat, triunghiurile ABD și ACB sunt isoscele.

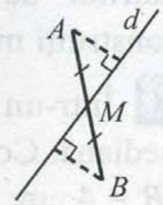
a) Arătați că $\Delta ADC \equiv \Delta BDC$.

b) Demonstrați că $DC \perp AB$.



20 În patrulaterul convex $ABCD$, $[AC] \equiv [BD]$ și $[AB] \equiv [DC]$. Demonstrați că $\Delta ABC \equiv \Delta DCB$.

21 În figura alăturată, M este mijlocul segmentului $[AB]$. Demonstrați că punctele A și B sunt egal depărtate de dreapta d.



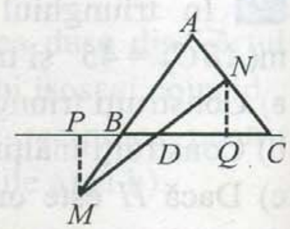
22 În figura alăturată, triunghiul ABC este isoscel, $[BM] \equiv [CN]$, $MP \perp BC$, $NQ \perp BC$.

Demonstrați că:

a) $\Delta BMP \equiv \Delta CQN$;

b) $\Delta DPM \equiv \Delta DQN$;

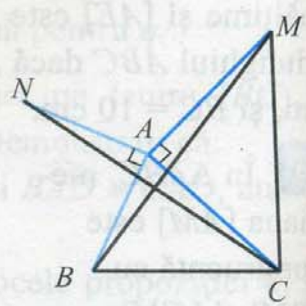
c) D este mijlocul segmentului $[MN]$.



23 Punctele A, B, C, D sunt coliniare (în această ordine), $[AB] \equiv [CD]$, M este mijlocul segmentului $[BC]$. Fie N un punct aparținând perpendicularei în M pe dreapta AD. Demonstrați că $\sphericalangle ANB \equiv \sphericalangle CND$.

24 În figura alăturată, triunghiurile MAC și NAB sunt dreptunghice isoscele.

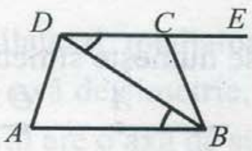
Demonstrați că $[MB] \equiv [NC]$.



Back

Paralelism și perpendicularitate

25 În desenul alăturat, $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$. Demonstrați că:



a) $\sphericalangle ECB \equiv \sphericalangle CBA$;

b) $m(\widehat{CDA}) + m(\widehat{DAB}) = 180°$.

26 O dreaptă paralelă cu latura $[BC]$ a triunghiului ABC intersectează laturile $[AB]$ și $[AC]$ în M, respectiv N. Știind că $m(\widehat{AMN}) = 30°$ și $m(\widehat{ANM}) = 70°$, calculați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

27 În triunghiul ABC paralela prin A la bisectoarea unghiului ABC intersectează latura $[BC]$ în punctul M. Știind că $m(\widehat{AMC}) = 40°$ și $m(\widehat{ACB}) = 80°$, arătați că triunghiul ABC este isoscel.

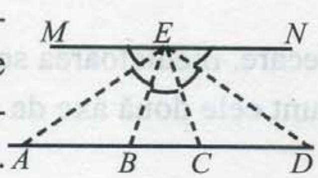
28 Paralela dusă prin vârful C al triunghiului ABC la bisectoarea $[AA'$ intersectează dreapta AB în D. Demonstrați că ΔADC este isoscel.

29 Segmentele $[AB]$ și $[CD]$ au același mijloc M, $C \notin AB$. Demonstrați că $BC \parallel AD$ și $AC \parallel BD$.

30 Două dintre cele opt unghiuri determinate de o secantă cu două drepte paralele sunt complementare. Determinați măsurile celor opt unghiuri.

31 Două drepte paralele sunt tăiate de o secantă astfel încât suma măsurilor oricăror două dintre cele opt unghiuri formate este aceeași. Determinați măsurile unghiurilor.

32 În figura alăturată, $MN \parallel AD$ și cele cinci unghiuri marcate sunt congruente.

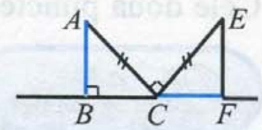


Demonstrați că $[AB] \equiv [BE] \equiv [CE] \equiv [CD]$.

33 a) Dreptele a și b sunt perpendiculare pe dreapta c. Demonstrați că $a \parallel b$.

b) Prin vârful A al triunghiului ABC ($AB = AC$) construim o dreaptă EF ($A \in (EF)$) astfel încât $\sphericalangle EAB \equiv \sphericalangle CAF$. Demonstrați că $EF \parallel BC$.

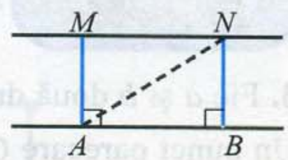
34 În figura alăturată $AB \perp BC$, $AC \perp CE$. $[AB] \equiv [CF]$, $[AC] \equiv [CE]$.



a) Demonstrați că $\Delta ABC \equiv \Delta CFE$.

b) Demonstrați că $AB \parallel EF$.

35 În desenul alăturat, punctele M și N sunt egal depărtate de dreapta AB.



a) Demonstrați că $\Delta MAN \equiv \Delta BNA$.

b) Demonstrați că $MN \parallel AB$.

36 În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $[BM] \equiv [CN]$. Demonstrați că $MN \parallel BC$.

37 Dreptele a și b au următoarea proprietate: orice dreaptă din plan care intersectează dreapta a intersectează și dreapta b. Demonstrați că $a \parallel b$.

38 Fie I punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor triunghiului ABC. Prin I se duce $MN \parallel BC$ ($M \in (AB)$, $N \in AC$)). Dacă $BC = 12$ cm și perimetrul triunghiului ABC este de 30 cm, calculați perimetrul triunghiului AMN.

Back

3. Simetria față de un punct și față de o dreaptă

Fiind date punctele distincte A și O, punctul B se numește simetricul lui A față de O dacă

- $O \in AB$ și
- $[OA] \equiv [OB]$.

Fig. 1

Simetricul punctului O față de punctul O este punctul O.

Observăm că simetricul punctului B față de O este punctul A.

Cele două puncte A și B le numim *simetrice* (față de O).

Definiție Fiind dată o mulțime $\mathcal{M}$ de puncte (figură geometrică), punctul O se numește centru de simetrie al mulțimii $\mathcal{M}$ (al figurii) dacă simetricul oricărui punct al mulțimii, față de O, este un punct al mulțimii.

Exemple

1. Centrul de simetrie al unui segment este mijlocul său.
2. Pentru o dreaptă, orice punct al său este centru de simetrie.
3. Fie a și b două drepte paralele și $\mathcal{M} = a \cup b$.

Un punct oarecare O, egal depărtat de dreptele a și b, este centru de simetrie pentru $\mathcal{M}$ (vezi figura 2).

Într-adevăr: demonstrăm că simetricul oricărui punct P, al dreptei a, față de O este un punct al dreptei b. Dacă $OA \perp d$, $OB \perp b$, $A \in a$, $B \in b$ și $PO \cap b = \{Q\}$, atunci $\Delta OAP \equiv \Delta OBQ$ (cazul C.U.).

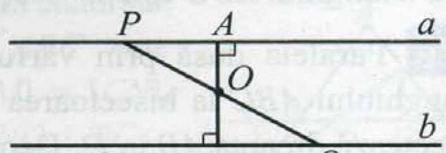


Fig. 2

Din congruența triunghiurilor, rezultă $[OP] \equiv [OQ]$; deci Q este simetricul punctului P față de O c.c.t.d.

Fiind date punctul A și dreapta d, $A \notin d$, punctul B se numește simetricul lui A față de dreapta d dacă d este mediatoarea segmentului $[AB]$ (vezi figura 3).

Simetricul unui punct C al dreptei d față de dreaptă este C.

Observăm că simetricul punctului B față de dreapta d este A.

Cele două puncte A și B le numim *simetrice* (față de dreapta d).

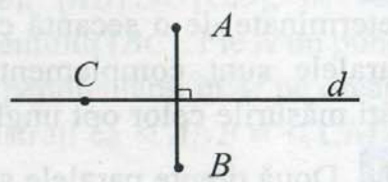


Fig. 3

Definiție Fiind dată o mulțime de puncte $\mathcal{M}$ (figură geometrică) dreapta d se numește axă de simetrie a mulțimii (figurii) dacă simetricul oricărui punct al mulțimii (figurii), față de dreapta d, este un punct al mulțimii (figurii).

Exemple

1. Pentru un segment oarecare, mediatoarea segmentului și dreapta suport a segmentului sunt cele două axe de simetrie ale segmentului.

Back

2. Pentru un unghi, dreapta suport a bisectoarei unghiului este unica axă de simetrie. (Justificați.)

3. Pentru un triunghi echilateral, mediatoarele laturilor sunt axe de simetrie.

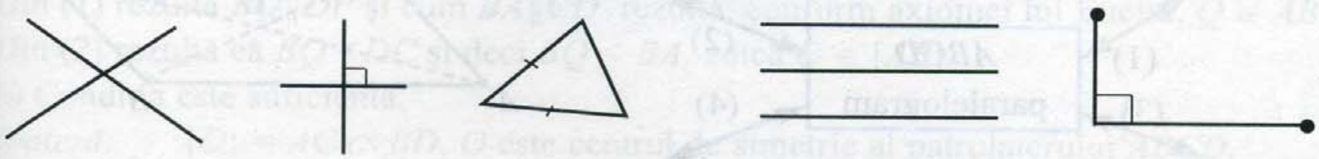
4. Dacă un triunghi are o axă de simetrie, atunci triunghiul este isoscel.

Într-adevăr: dacă triunghiul are o axă de simetrie, atunci această axă trece în mod necesar printr-unul dintre vârfuri, iar celelalte două vârfuri sunt simetrice.

Dacă A este vârful prin care trece axa de simetrie atunci $[AB] \equiv [AC]$.

Exerciții

1 Care dintre mulțimile de puncte (figurile) de mai jos prezintă axe sau centre de simetrie? Precizați numărul lor.



a) b) c) d) e)

2 Dați exemple de mulțimi de puncte cu două axe de simetrie.

3 Într-un sistem dat de axe ortogonale xOy construiți: simetricul P', al punctului $P(1,\ 3)$, față de Ox; simetricul punctului P' față de Oy (notat Q); simetricul R al punctului P față de O. Calculați coordonatele punctelor construite. Ce constatați în legătură cu punctele Q și R?

4 În triunghiul ABC fie M simetricul lui B față de mijlocul laturii $[AC]$ și N simetricul lui C față de mijlocul laturii $[AB]$. Arătați că M, A, N sunt coliniare.

Back

4. Paralelogramul

Definiție Patrulaterul cu laturile opuse paralele se numește **paralelogram**.

Din definiție rezultă că paralelogramul este un patrulater convex.

În practică:

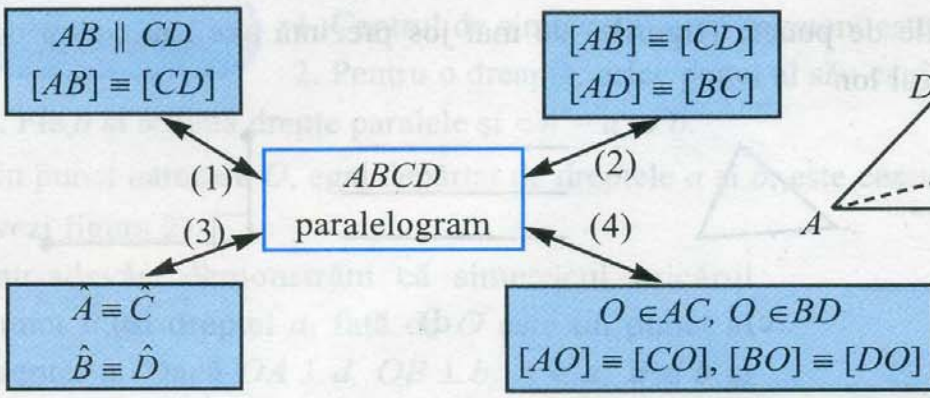
- dacă știm că un patrulater este paralelogram, deducem câteva proprietăți, în special de congruență, ale unghiurilor sau ale laturilor sale.

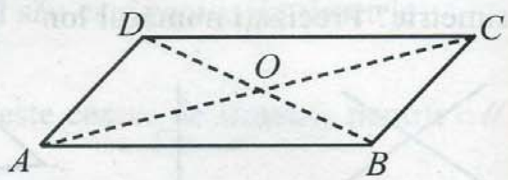
Aceste proprietăți sunt *condiții necesare* ca un patrulater să fie paralelogram.

- cunoscând anumite proprietăți ale unui patrulater, deducem că el este paralelogram.

Aceste proprietăți sunt *condiții suficiente* ca patrulaterul să fie paralelogram.

Rezumăm mai jos câteva condiții necesare și suficiente ca un patrulater $ABCD$ să fie paralelogram.

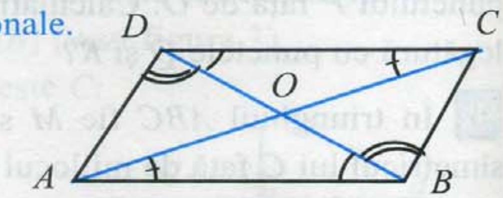




Remarcăm că pentru a defini sau caracteriza paralelogramul, avem nevoie de două condiții.

Demonstrăm în continuare echivalența (4); celelalte se pot demonstra asemănător.

Pentru ca un patrulater să fie paralelogram, este necesar și suficient ca punctul de intersecție a diagonalelor să fie mijlocul fiecărei diagonale.



Demonstrație

a) Condiția este necesară

Ipoteză: $ABCD$ paralelogram, $AC \cap BD = \{O\}$.

Concluzie: $[AO] \equiv [CO]$ și $[BO] \equiv [DO]$.

Din $AB \parallel CD$, deducem că $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CDB$ (alterne interne). Din $AD \parallel BC$ deducem că $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle DBC$ (alterne interne). Rezultă că $\Delta ADB \equiv \Delta CBD$ (cazul U.L.U.) și de aici: $[AB] \equiv [CD]$. Din $AB \parallel CD$ mai deducem că $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle ACD$ (alterne interne). Prin urmare: $\Delta AOB \equiv \Delta COD$, de unde rezultă $[AO] \equiv [CO]$ și $[BO] \equiv [DO]$.

b) Condiția este suficientă

Ipoteză: $ABCD$ patrulater, $AC \cap BD = \{O\}$.
$[AO] \equiv [CO]$ și $[BO] \equiv [DO]$.

Concluzie: $ABCD$ este paralelogram ($AB \parallel CD$ și $AD \parallel BC$).

Observăm că: $\Delta AOB \equiv \Delta COD$ (cazul L.U.L), de unde rezultă $\sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle ODC$ și deci $AB \parallel CD$.

Analog din $\Delta ADO \equiv \Delta CBO$ (cazul L.U.L.) rezultă $AD \| BC$

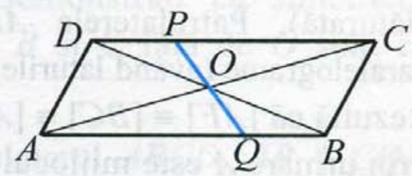
Temă: Justificați celelalte trei echivalențe.

Următoarele probleme rezolvate sunt alte caracterizări ale paralogramului pe care le puteți aplica în rezolvarea altor probleme propuse.

1 O condiție necesară și suficientă ca un patrulater să fie paralelogram este ca punctul de intersecție a diagonalelor să fie centru de simetrie al patrulaterului.

Rezolvare

a) Condiția este necesară



Ipoteză: $ABCD$ paralelogram, $AB \cap AC = \{O\}$.

Concluzie: O este centru de simetrie (simetricul oricărui punct al paralelogramului față de punctul O este un punct al paralelogramului).

Într-adevăr: simetricul unui vârf este tot un vârf (O fiind mijlocul fiecărei diagonale). Fie $P \in (DC)$ și Q simetricul său față de O. Rezultă că $\Delta DPO \equiv \Delta BQO$ (cazul L.U.L.) și de aici $\sphericalangle PDO \equiv \sphericalangle OBQ$ (1) și $[DP] \equiv [PQ]$ (2).

Din (1) rezultă $BQ \| DP$ și cum $BA \| CD$ rezultă, conform axiomei lui Euclid, $Q \in AB$.

Din (2) rezultă că $BQ < DC$ și deci $BQ < BA$, adică $Q \in [AB]$.

b) Condiția este suficientă.

Ipoteză: $\{O\} = AC \cap BD$, O este centrul de simetrie al patrulaterului $ABCD$.

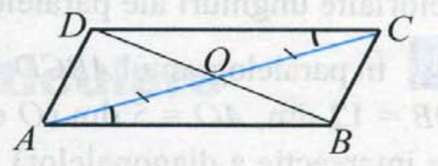
Concluzie: $ABCD$ este paralelogram.

Simetricul vârfului A față de O este un punct al patrulaterului, coliniar cu A și O. Rezultă că simetricul punctului A este punctul C, deci O este mijlocul diagonalei $[AC]$.

Analog justificăm că O este mijlocul diagonalei $[BD]$. Atunci, conform teoremei de caracterizare (4), $ABCD$ este paralelogram.

2 O condiție necesară și suficientă ca patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram este ca punctul O de intersecție a diagonalelor să fie mijlocul unei diagonale și două laturi opuse să fie paralele.

Rezolvare



a) Condiția este necesară

Ipoteză: $ABCD$ este paralelogram.

Concluzie: O este mijlocul unei diagonale și două laturi opuse sunt paralele.

Concluzia rezultă din proprietățile paralelogramului.

b) Condiția este suficientă

Ipoteză : $[AO] \equiv [CO]$ și $DC \| AB$.

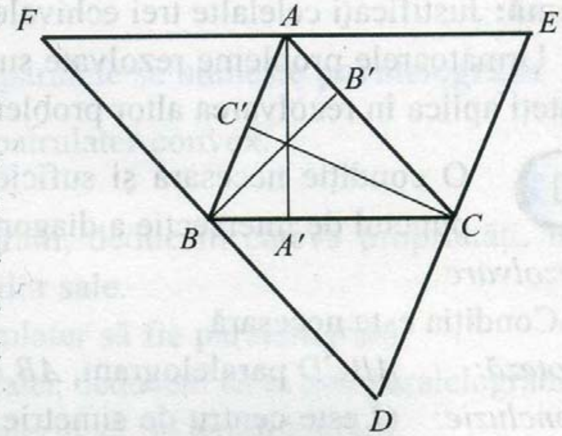
Concluzie: $ABCD$ paralelogram.

Din $\Delta AOB \equiv \Delta COD$ (cazul U.L.U.) rezultă $[DO] \equiv [BO]$ și întrucât $[AO] \equiv [CO]$ rezultă $ABCD$ paralelogram.

Aplicație Înălțimile unui triunghi sunt concurente.

Demonstrație

Ne reamintim din clasa a VI-a că mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente.



Fie triunghiul ABC și $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ înălțimile sale. Pentru a demonstra afirmația, construim un alt triunghi în care AA', BB' și CC' sunt mediatoarele laturilor. Paralelele prin vârfurile triunghiului la laturile opuse se intersectează în D, E, F (vezi figura alăturată). Patrulaterele $AFBC$ și $ABCE$ sunt paralelograme (având laturile opuse paralele).

Rezultă că $[AF] \equiv [BC] \equiv [AE]$.

Prin urmare A este mijlocul laturii $[FE]$ și deci AA' este mediatoarea laturii $[FE]$.

Analog se demonstrează că BB' și CC' sunt mediatoarele laturilor $[FD]$ respectiv $[DE]$, c.c.t.d.

Back

Exerciții

1 Într-un paralelogram $ABCD$ $AB = 10$ cm, $AD = 6$ cm. Determinați lungimile laturilor $[BC]$ și $[CD]$.

2 Perimetrul unui paralelogram este de 30 m. Una dintre laturi are lungimea de 6 m. Determinați lungimile celorlalte laturi.

3 Un unghi al unui paralelogram are măsura de 50°. Determinați măsurile celorlalte unghiuri ale paralelogramului.

4 În paralelogramul $ABCD$, $AB = 7$ dm, $DB = 12$ dm, $AO = 5$ dm (O este punctul de intersecție a diagonalelor).
Calculați perimetrul triunghiului DOC.

5 În paralelogramul $ABCD$ $m(\widehat{CDB}) = 50°$, $m(\widehat{DCB}) = 70°$. Calculați măsurile unghiurilor paralelogramului.

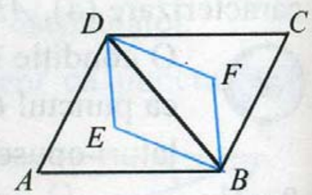
6 Fie $ABCD$ un paralelogram. Dacă distanța de la A la BD este egală cu 4 cm, calculați distanța de la C la BD.

7 a) Construiți două paralelograme $ABCD$ și $AECF$.

b) Demonstrați că dreptele EF și BD coincid sau dreptele AC, BD și EF sunt concurente într-un punct.

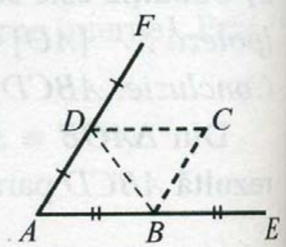
8 În patrulaterul $ABCD$, $AB \parallel CD$ și $\hat{A} \equiv \hat{C}$. Demonstrați că $ABCD$ este paralelogram.

9 $ABCD$ este paralelogram, iar $(BE$, $(BF$, $(DE$ și $(DF$ sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{ABD}$, $\widehat{DBC}$, $\widehat{ADB}$, respectiv $\widehat{BDC}$. Demonstrați că $DEBF$ este paralelogram.



10 Patrulaterele $ABCD$ și $ABEF$ sunt paralelograme. Demonstrați că $EFDC$ este paralelogram.

11 În desenul alăturat $[AB] \equiv [BE]$, $[AD] \equiv [DF]$ și $ABCD$ este paralelogram.



a) Demonstrați că $BDFC$ și $BECD$ sunt paralelograme.

b) Demonstrați că punctele F, C și E sunt coliniare.

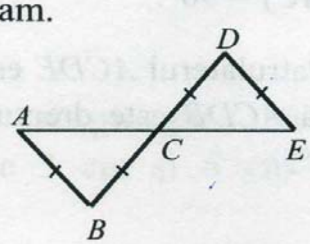
12 Dreptele AB și CD sunt paralele și $[AB] \equiv [CD]$. Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$ și N mijlocul segmentului $[CD]$, demonstrați că A, M, N, C sunt vârfurile unui paralelogram.

13 În patrulaterul $ABCD$, unghiul A este suplementul unghiurilor B și D. Demonstrați că $ABCD$ este paralelogram.

14 Fie M este mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ABC, $E \in AM$, $M \in (AE)$ și $[AM] \equiv [ME]$. Demonstrați că $ABEC$ este paralelogram.

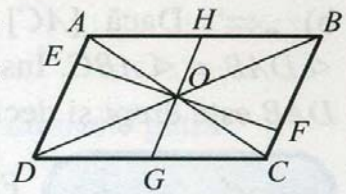
15 În paralelogramul $ABCD$ $DE \perp AB$, $BF \perp CD$, $BH \perp AD$ și $DG \perp BC$ ($E \in AB$, $F \in CD$, $H \in AD$, $G \in BC$). Arătați că $EGFH$ este paralelogram.

16 În figura alăturată $[AB] \equiv [BC] \equiv [CD] \equiv [DE]$. Arătați că $ABED$ este paralelogram.



17 În paralelogramul $ABCD$ fie $(AE$ bisectoarea unghiului $\widehat{BAD}$, $E \in DC$, iar $(CF$ bisectoarea unghiului $\widehat{BCE}$, $F \in AB$. Știind că $m(\widehat{BAE}) = 40°$, calculați măsurile unghiurilor patrulaterului $AECF$.

18 În figura alăturată $ABCD$ este paralelogram. Demonstrați că:
a) $[OE] \equiv [OF]$;
b) $EGFH$ este paralelogram.



19 Punctele A, B, C sunt coliniare, iar $O \notin AB$. Demonstrați că simetricele punctelor A, B și C față de O sunt coliniare.

20 În patrulaterul $ABCD$, $AB \parallel CD$ și $[AD] \equiv [BC]$. Este patrulaterul $ABCD$ paralelogram? Justificați.

21 Triunghiul ABC este dreptunghic în A și $M \in (BC)$. Perpendiculara în M pe BC intersectează AB și AC în N respectiv în P. Demonstrați că $CN \perp PB$.

22 Se dă paralelogramul $ABCD$ în care $[AD] \equiv [DB]$ și M este mijlocul laturii $[DC]$. Perpendiculara din C pe dreapta BD intersectează pe BM în P. Demonstrați că $AD \perp DP$.

Back

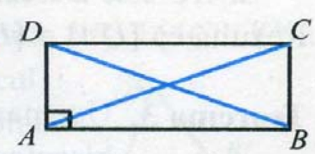
5. Paralelograme particulare

A. Dreptunghiul

Definiție Paralelogramul care are un unghi drept se numește **dreptunghi**.

- Dreptunghiul are toate proprietățile paralelogramului.
- Într-un dreptunghi toate unghiurile sunt drepte.

Teorema 1. Un paralelogram este dreptunghi dacă și numai dacă diagonalele sale sunt congruente.



Demonstrație

Fie $ABCD$ un paralelogram.

Trebuie să demonstrăm echivalența: $ABCD$ dreptunghi $\Leftrightarrow [AC] \equiv [BD]$.

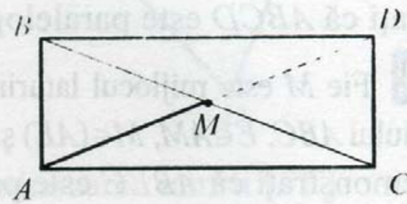
a) „$\Rightarrow$" Dacă $ABCD$ este dreptunghi, atunci $\Delta ADB \equiv \Delta BCA$ (cazul C.C.). Rezultă că $[DB] \equiv [CA]$.

b) „$\Leftarrow$“ Dacă $[AC] \equiv [BD]$, atunci $\Delta ADB \equiv \Delta BCA$ (cazul L.L.L.). Rezultă că $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle ABC$. Însă unghiurile DAB și ABC sunt suplementare. Prin urmare unghiul DAB este drept și deci paralelogramul $ABCD$ este dreptunghi.

Aplicație Fie ABC un triunghi și M mijlocul laturii $[BC]$. Triunghiul ABC este dreptunghic în A dacă și numai dacă $AM = \frac{1}{2} BC$.

Demonstrație

a) Dacă $m(\hat{A}) = 90°$, să demonstrăm că $AM = \frac{1}{2} BC$.



Fie D simetricul punctului A față de M. Atunci patrulaterul $ACDB$ este paralelogram. Deoarece paralelogramul $ACDB$ are unghiul drept $\widehat{BAC}$ rezultă că este dreptunghi și atunci $[BC] \equiv [AD]$. Deci $AM = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} BC$.

b) Dacă $AM = \frac{1}{2} BC$, să demonstrăm că $m(\widehat{BAC}) = 90°$.

Fie D simetricul punctului A față de M. Patrulaterul $ACDE$ este un paralelogram în care diagonalele sunt congruente. Rezultă că $ACDB$ este dreptunghi și deci are toate unghiurile drepte. În particular, $m(\widehat{BAC}) = 90°$.

Back

B. Rombul

Definiție Paralelogramul care are două laturi alăturate congruente se numește **romb.**

- Rombul are toate proprietățile paralelogramului.
- Într-un romb toate laturile sunt congruente.

Teorema 2. Un paralelogram este romb dacă și numai dacă diagonalele sunt perpendiculare.

Demonstrație

Fie $ABCD$ un paralelogram și $AC \cap BD = \{O\}$.

a) Dacă $ABCD$ este romb demonstrăm că $AC \perp BD$.

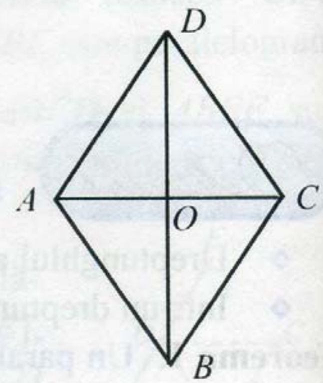
În triunghiul isoscel DAC ($[DA] \equiv [DC]$), $[DO]$ este mediană.

Rezultă că $[DO]$ este înălțime, deci $DO \perp AC$.

b) Dacă $DB \perp AC$, demonstrăm că $ABCD$ este romb.

ΔDAC este isoscel deoarece $[DO]$ este mediană și înălțime.

Rezultă că $[DA] \equiv [DC]$, deci paralelogramul $ABCD$ este romb.



Teorema 3. Un paralelogram este romb dacă și numai dacă diagonalele sunt bisectoarele unghiurilor.

Temă: Demonstrați teorema 3.

Back

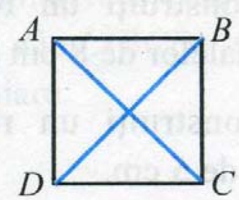
C. Pătratul

Definiție Patrulaterul care este dreptunghi și romb se numește pătrat.

- Într-un pătrat toate unghiurile sunt drepte și toate laturile sunt congruente.
- Într-un pătrat diagonalele se taie în părți congruente, sunt congruente, sunt perpendiculare, și de asemenea sunt bisectoarele unghiurilor pătratului.

Teorema 4. Un paralelogram este pătrat dacă și numai dacă are diagonalele congruente și perpendiculare.

Demonstrația se bazează pe teoremele 1 și 2.



Temă: Demonstrați teorema 4.

Back

Exerciții

Dreptunghiul

1 Construiți un dreptunghi cu lungimile laturilor de 3 cm și 6 cm. Aflați-i perimetrul.

2 Construiți un dreptunghi cu lungimea diagonalei de 8 cm și măsura unghiului format de diagonale de 40°.

3 În dreptunghiul $ABCD$, $m(\widehat{ADB}) = 35°30'$. Determinați măsura unghiului format de diagonalele sale.

4 Fie $ABCD$ un dreptunghi în care $BD = 12$ cm și $m(\sphericalangle DOC) = 120°$ $(O \in AC \cap BD)$, calculați lungimea laturii $[BC]$.

5 Arătați că un patrulater este dreptunghi dacă și numai dacă are trei unghiuri drepte.

6 a) Determinați un punct egal depărtat de vârfurile unui dreptunghi.

b) Demonstrați că dacă există un punct egal depărtat de vârfurile unui paralelogram, atunci el este dreptunghi.

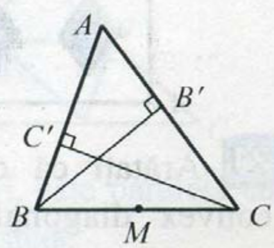
7 Arătați că dacă mediatoarea unei laturi a unui paralelogram este axă de simetrie a paralelogramului, atunci acesta este dreptunghi.

8 Arătați că, dacă într-un patrulater convex măsurile unghiurilor sunt mai mici sau egale cu 90°, atunci patrulaterul este dreptunghi.

9 Pe laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ ale dreptunghiului $ABCD$, se consideră punctele E, F, G respectiv H. Arătați că $EFGH$ este dreptunghi dacă și numai dacă $\sphericalangle AEH \equiv \sphericalangle BFE \equiv \sphericalangle CGF \equiv \sphericalangle DHG$.

10 Fie $[AD]$ înălțime în triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$. Arătați că dacă $[AD] \equiv [DC]$ atunci ΔABC este dreptunghic.

11 În figura alăturată, $BB' \perp AC$, $CC' \perp AB$ și M este mijlocul laturii $[BC]$. Demonstrați că M este egal depărtat de vârfurile patrulaterului $BCB'C'$.



Back

12 Fie A, D două puncte fixe într-un plan, iar B, C, E, F puncte variabile astfel încât $AB \perp BD$, $AC \perp CD$, $AF \perp FD$ și $AE \perp ED$. Arătați că B, C, E, F sunt egal depărtate de un punct fix.

Rombul

13 Construiți un romb cu lungimile diagonalelor de 8 cm și 6 cm.

14 Construiți un romb cu lungimea laturii de 5 cm.

15 Perimetrul unui romb este de 16 cm, iar lungimea diagonalei mici este de 4 cm. Determinați măsurile unghiurilor rombului.

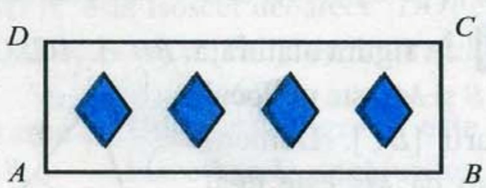
16 Dacă ABC și BCD sunt două triunghiuri echilaterale, atunci $ABDC$ este romb.

17 În paralelogramul $ABCD$ cu $AB = 10$ cm, $BC = 5$ cm, M și N sunt mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[CD]$. Arătați că $AN \perp DM$.

18 În paralelogramul $ABCD$ cu $BD = DC = 3$ cm, M este mijlocul laturii $[BC]$, iar $E \in DM \cap BC$. Aflați perimetrul patrulaterului $DBCE$.

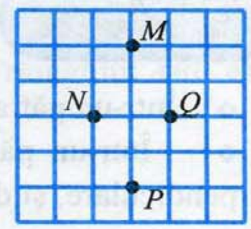
19 Arătați că mijloacele laturilor unui dreptunghi sunt vârfurile unui romb.

20 Romburile din desenul de mai jos sunt „găuri" în fâșia de hârtie $ABCD$. Ele au fost obținute prin împăturirea fâșiei și decuparea din marginea hârtiei împăturite a unui triunghi isoscel. Realizați practic acest lucru.

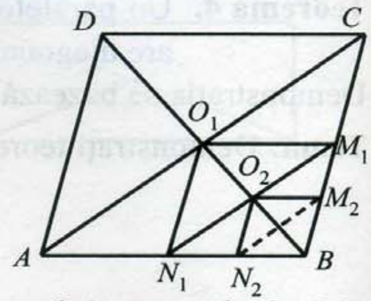


21 Arătați că dacă într-un patrulater convex diagonalele sunt bisectoarele unghiurilor patrulaterului, atunci acesta este romb.

22 Demonstrați că punctele M, N, P și Q din rețeaua alăturată sunt vârfurile unui romb.



23 În figura alăturată $ABCD$ este un romb, $\{O_1\} = AC \cap BD$, $O_1M \parallel AB$, $O_1N_1 \parallel BC$.



a) Descrieți cum se obțin punctele O_2, M_2, N_2, O_3, M_3, N_3, ..., O_n, M_n, N_n.

b) Dacă $BD = 64$ cm, determinați n maxim astfel încât lungimea segmentului $[O_nB]$ să fie un număr natural.

Pătratul

24 Construiți un pătrat cu lungimea laturii de 3 cm.

25 Construiți un pătrat cu lungimea diagonalei de 4 cm.

26 Într-un sistem ortogonal de axe se dau punctele: $A(1,1)$; $B(-1, 1)$; $C(-1, -1)$; $D(1, -1)$. Arătați că $ABCD$ este pătrat.

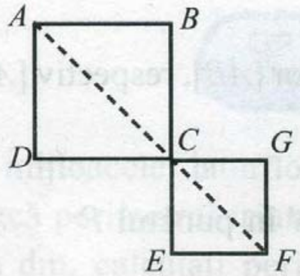
27 Demonstrați că mijloacele laturilor unui pătrat sunt vârfurile unui alt pătrat.

28 Triunghiurile dreptunghice isoscele ADB și ACB au ipotenuza $[AB]$ comună. Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ este pătrat.

29 Fie $ABCD$ un dreptunghi și $M \in DB$, M diferit de mijlocul lui $[BD]$ astfel încât $[MA] \equiv [MC]$. Demonstrați că $ABCD$ este pătrat.

Back

30 În figura alăturată, punctele D, C, G sunt coliniare iar $ABCD$ și $CEFG$ sunt pătrate. Demonstrați că:



a) Punctele A, C, F sunt coliniare.

b) $BD \parallel GE$.

31 În triunghiul ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) construim $(AD$, bisectoarea unghiului A $(D \in BC)$, $DM \parallel AC$ și $DN \perp AC$ ($M \in AB$, $N \in AC$). Demonstrați că patrulaterul $AMDN$ este pătrat.

32 Fie $ABCD$ un pătrat, iar DEC și FCB două triunghiuri echilaterale astfel încât $F \in \text{Int}(ABCD)$ și $E \notin \text{Int}(ABCD)$. Arătați că E, F, A sunt coliniare.

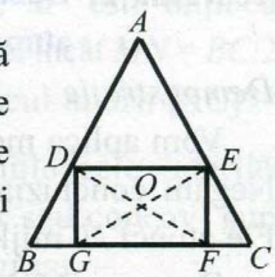
Probleme suplimentare

33 În paralelogramul $ABCD$, E și F sunt simetricele punctelor D, respectiv B față de dreapta AC. Demonstrați că patrulaterul $DEBF$ este dreptunghi.

34 Pe laturile dreptunghiului $ABCD$ se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABM și AND. Demonstrați că triunghiul MNC este echilateral.

35 Prin vârfurile A și B ale paralelogramului $ABCD$ se duc paralele la BD, respectiv AC care se intersectează în E. Dacă O este centrul paralelogramului, demonstrați că $ABCD$ este dreptunghi dacă și numai dacă $OAEB$ este romb.

36 În figura alăturată triunghiul ABC este isoscel, iar $DEFG$ este dreptunghi. Demonstrați că $AO \perp BC$.



37 Fie P mijlocul laturii $[AB]$ a dreptunghiului $ABCD$. Pe latura $[DC]$ se consideră punctele M și N astfel încât $[DM] \equiv [MN] \equiv [NC]$. Demonstrați că $\sphericalangle AMP \equiv \sphericalangle PNB$.

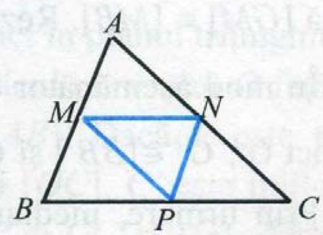
38 Măsura unghiului A al triunghiului isoscel ABC este de 120°. Fie $BD \perp AC$, $D \in AC$ și M mijlocul laturii $[AB]$. Demonstrați că: a) $DC = 3\,DM$; b) $DM \perp BC$.

Back

6. Linia mijlocie în triunghi

Definiție Segmentul determinat de mijloacele a două laturi ale unui triunghi se numește **linie mijlocie.**

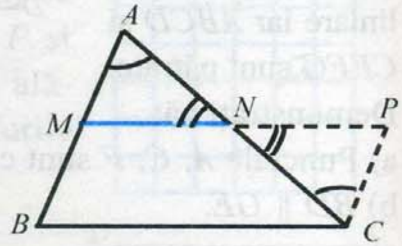
În figura alăturată, M , N, P sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[AC]$, respectiv $[AC]$. Atunci: $[MN]$, $[NP]$ și $[MP]$ sunt cele trei linii mijlocii ale triunghiului. Linia mijlocie în triunghi are proprietăți utile în rezolvarea problemelor de geometrie.



Teorema 1. Linia mijlocie a unui triunghi, determinată de două laturi, este paralelă cu latura a treia și are ca lungime jumătate din lungimea acesteia.

Demonstrație

Fie triunghiul ABC și M, N mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$. Trebuie să demonstrăm că $MN \parallel BC$ și $MN = \frac{1}{2}BC$.



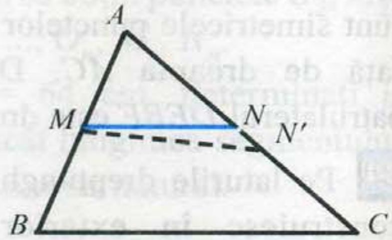
Paralela prin C la AB intersectează pe MN în punctul P (vezi figura alăturată).

Triunghiurile AMN și CPN sunt congruente (cazul U.L.U.) (1). Din congruența triunghiurilor, deducem că $[AM] \equiv [CP]$, dar $[AM] \equiv [BM]$ și deci $[CP] \equiv [MB]$. Rezultă că $MBCP$ este paralelogram (două laturi opuse sunt paralele și congruente).

Prin urmare celelalte laturi opuse sunt congruente și paralele: $MP \parallel BC$, $[MP] \equiv [BC]$. Din (1) rezultă: $[MN] \equiv [NP]$ și deci $MN = \frac{1}{2}MP = \frac{1}{2}BC$ c.c.t.d.

Teorema 2. Dacă M este mijlocul laturii $[AB]$ a triunghiului ABC și $MN \parallel BC$ ($N \in BC$) atunci N este mijlocul laturii $[AC]$.

Demonstrație



Vom aplica metoda reducerii la absurd.

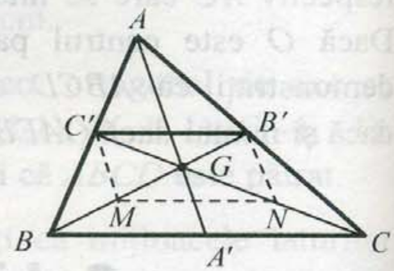
Negăm concluzia: N nu este mijlocul segmentului $[AC]$.

Fie atunci N' mijlocul segmentului $[AC]$.

Deoarece M și N' sunt mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$, rezultă conform teoremei 1 că $MN' \parallel BC$.

Am obținut că prin punctul M, exterior dreptei BC, putem duce două drepte paralele cu BC. Contradicție cu axioma paralelelor.

Aplicație Medianele unui triunghi sunt concurente.



Demonstrație. Admitem că $[BB']$ și $[CC']$ se intersectează într-un punct, notat G (vezi figura).

Fie M și N mijloacele segmentelor $[BG]$ respectiv $[CG]$.

$[C'B']$ este linie mijlocie în triunghiul ABC. Deci:

$C'B' \parallel BC$ și $C'B' = \frac{1}{2}BC$. (1)

$[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul GBC. Deci: $MN \parallel BC$ și $MN = \frac{1}{2}BC$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că $C'MNB'$ este paralelogram, prin urmare $[GB'] \equiv [GM]$.

Însă $[GM] \equiv [MB]$. Rezultă că $GB' = \frac{1}{3}BB'$ (3).

În mod asemănător demonstrăm că medianele $[AA']$ și $[BB']$ se intersectează într-un punct G', $G' \in [BB']$ și $G'B' = \frac{1}{3}BB'$ (4). Din (3) și (4) deducem că $G = G'$.

Prin urmare, medianele triunghiului au un punct comun. Punctul de concurență a medianelor se numește *centru de greutate al triunghiului*. El se situează pe fiecare mediană la o treime din lungimea medianei față de latura corespunzătoare.

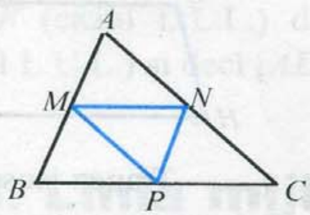
Back

Exerciții

1 M, N, P sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC. Dacă perimetrul triunghiului ABC este 20 dm, calculați perimetrul triunghiului MNP.

2 În triunghiul ABC, $[BD]$ și $[CE]$ sunt mediane și $DE = 3$ cm. Calculați BC.

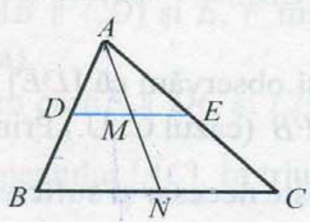
3 În figura alăturată M, N, P sunt mijloacele laturilor. Demonstrați că $\Delta AMN \equiv \Delta MBP \equiv \equiv \Delta NPC \equiv \Delta PNM$.



4 În triunghiul ABC, D și E sunt mijloacele segmentelor $[AB]$, respectiv $[AC]$, iar G și H sunt mijloacele laturilor $[AD]$ respectiv $[AE]$.
a) Demonstrați că $GH \parallel BC$ și $GH = \frac{1}{4}BC$.
b) Dacă $BC = 4$ cm, calculați GH.

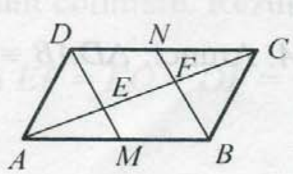
5 În triunghiul ABC, D și E sunt mijloacele segmentelor $[AB]$, respectiv $[AC]$, iar M și N sunt mijloacele segmentelor $[DE]$, respectiv $[BC]$. Demonstrați că punctele A, M, N sunt coliniare.

6 În figura alăturată $[DE]$ este linie mijlocie, $N \in (BC)$, $AN \cap DE = \{M\}$. Demonstrați că $[AM] \equiv [MN]$.



7 Fie D, E și F mijloacele laturilor $[AB]$, $[AC]$, respectiv $[BC]$ ale ΔABC, iar $AF \cap DE = \{O\}$. Demonstrați că $[DO] \equiv [OE]$.

8 În desenul alăturat, $ABCD$ este paralelogram, M și N sunt mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[DC]$. Demonstrați că:
a) patrulaterul $MBND$ este paralelogram;
b) $[AE] \equiv [EF] \equiv [FC]$.

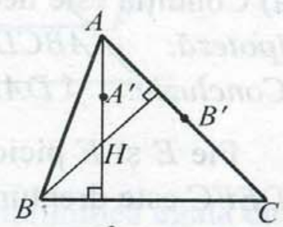


9 În triunghiul ABC, $E \in (AB)$ și $F \in (AC)$ astfel încât $EF \parallel BC$ și $EF = \frac{1}{2}BC$.
a) Demonstrați că dacă D este mijlocul laturii $[BC]$, atunci $BDFE$ este paralelogram.
b) Demonstrați că E este mijlocul laturii $[AB]$.

10 În triunghiul ABC, M este mijlocul laturii $[AB]$ și $N \in AC$ astfel încât $MN = BC/2$. Rezultă că N este mijlocul laturii $[AC]$?

11 Demonstrați că mijloacele laturilor unui patrulater (convex sau concav) sunt vârfurile unui paralelogram.

12 În figura alăturată, H este ortocentrul triunghiului ABC, A' este mijlocul lui (AH) și B' mijlocul segmentului (AC). Demonstrați că $A'B' \perp AB$.



13 Fie O un punct în planul triunghiului ABC. Notăm cu M și N simetricele punctului O față de mijloacele laturilor $[AC]$, respectiv $[BC]$. Demonstrați că patrulaterul $ABNM$ este paralelogram.

14 Medianele $[CE]$ și $[BD]$ ale triunghiului ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) se intersectează în F. Dacă $BC = 15$ cm, calculați AF.

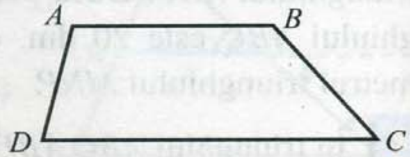
15 Fie O un punct în planul triunghiului ABC și M simetricul punctului O față de mijlocul laturii $[AB]$. Dacă P este mijlocul segmentului $[OC]$, C' este mijlocul laturii $[AB]$ și $MP \cap CC' = \{G\}$, demonstrați că G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Back

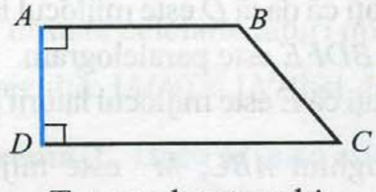
7. Trapezul

Definiție Patrulaterul care are două laturi paralele și celelalte neparalele se numește **trapez**.

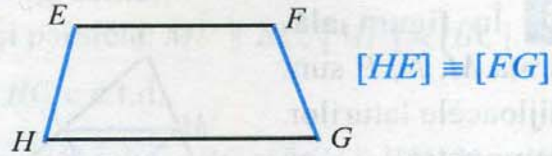
În figura alăturată, $ABCD$ este trapez. Laturile paralele $[AD]$ și $[BC]$ se numesc *bazele* trapezului.



- Dacă una dintre laturile neparalele este perpendiculară pe baze, trapezul se numește *trapez dreptunghic*.
- Dacă laturile neparalele ale unui trapez sunt congruente, trapezul se numește *trapez isoscel*.



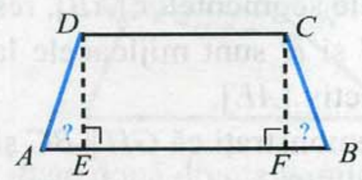
Trapez dreptunghic



Trapez isoscel

Teoremele următoare sunt condiții necesare și suficiente ca un trapez să fie isoscel.

Teorema 1. Pentru ca un trapez să fie isoscel este necesar și suficient ca unghiurile alăturate unei baze să fie congruente.



Demonstrație

a) Condiția este necesară

Ipoteză: $ABCD$ este trapez isoscel ($[AD] \equiv [BC]$).

Concluzie: $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$.

Fie E și F picioarele perpendicularelor duse din D, respectiv C pe AB. Patrulaterul $DEFC$ este dreptunghi ($DC \parallel EF$, $DE \parallel CF$, $m(\widehat{DEF}) = 90°$). Rezultă că $[DE] \equiv [CF]$. $\Delta DEA \equiv \Delta CFB$ (cazul I. C.). Prin urmare $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle CBF$ c.c.t.d.

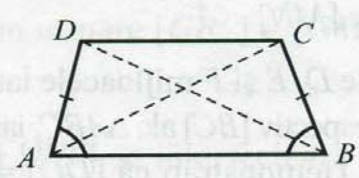
b) Condiția este suficientă

Ipoteză: $ABCD$ este trapez și $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$.

Concluzie: $[AD] \equiv [BC]$.

Ca și la punctul a), construim punctele E și F și observăm că $[DE] \equiv [CF]$ (din faptul că $DEFC$ este dreptunghi). Rezultă că $\Delta DEA \equiv \Delta CFB$ (cazul C. U.) Prin urmare $[AD] \equiv [BC]$.

Teorema 2. Pentru ca un trapez să fie isoscel este necesar și suficient ca diagonalele sale să fie congruente.



Demonstrație

Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$.

a) Condiția este necesară.

Ipoteză: $ABCD$ este trapez isoscel.

Concluzie: $[AC] \equiv [BD]$.

Din teorema 1, rezultă că $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$. Atunci: $\Delta DAB \equiv \Delta CBA$ (cazul L.U.L.). Prin urmare $[DB] \equiv [AC]$.

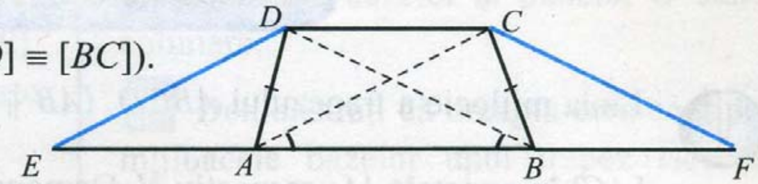
b) Condiția este suficientă

Ipoteză: $[AC] \equiv [DB]$.

Concluzia: $ABCD$ trapez isoscel ($[AD] \equiv [BC]$).

Construim: $DE \parallel AC, E \in AB$.

$CF \parallel DB, F \in AB$.



Observăm că:

Patrulaterul $AEDC$ este paralelogram (laturile $[AC]$ și $[DE]$ sunt paralele și congruente). Deducem: $[DC] \equiv [AE]$ (1). Patrulaterul $DBFC$ este paralelogram ($[DB]$ și $[CF]$ fiind paralele și congruente). Prin urmare $[BF] \equiv [DC]$ (2).

Din (1) și (2) rezultă că $[EB] \equiv [AF]$.

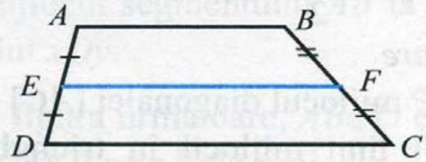
Din: $\Delta DEB \equiv \Delta CAF$ (cazul L.L.L.) deducem că $\sphericalangle DBE \equiv \sphericalangle CAF$. Prin urmare $\Delta DBA \equiv \Delta CAB$ (cazul L.U.L.) și deci $[AD] \equiv [CB]$.

[Back]

8. Linia mijlocie în trapez

Definiție Segmentul care unește mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez se numește **linie mijlocie a trapezului.**

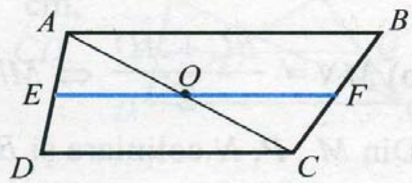
În figura alăturată, $[EF]$ este linia mijlocie a trapezului $ABCD$.



Teorema următoare precizează două proprietăți importante ale liniei mijlocii în trapez.

Teorema 3. Linia mijlocie a trapezului este paralelă cu bazele și are lungimea egală cu semisuma lungimilor bazelor.

Demonstrație



Fie trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$) și E, F mijloacele laturilor neparalele (vezi figura).

Trebuie să demonstrăm că $EF \parallel DC$ și $EF = \dfrac{AB + CD}{2}$.

Fie O mijlocul segmentului $[AC]$. În triunghiul ACD, $[EO]$ este linie mijlocie. Deducem: $EO \parallel DC$ și $EO = \dfrac{DC}{2}$ (1).

În triunghiul CAB, $[OF]$ este linie mijlocie. Deducem: $OF \parallel AB$ și $OF = \dfrac{AB}{2}$ (2).

Însă $AB \parallel CD$, deci $OF \parallel DC$. Din $EO \parallel DC$, $OF \parallel DC$ și axioma paralelelor, deducem că punctele E, O și F sunt coliniare. Rezultă că $EF \parallel DC$.

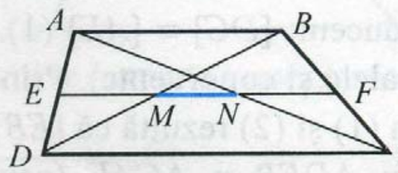
Din (1) și (2) rezultă că $EF = EO + OF = \dfrac{DC}{2} + \dfrac{AB}{2} = \dfrac{DC + AB}{2}$.

Back

Probleme rezolvate

1 Linia mijlocie a trapezului $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ intersectează diagonalele $[BD]$ și $[AC]$ în punctele M, respectiv N. Demonstrați că $MN = \dfrac{|CD - AB|}{2}$.

Rezolvare



Fie E și F mijloacele laturilor neparalele.

În triunghiul ADC, $[EN]$ este linie mijlocie.

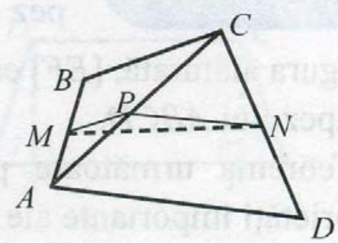
Rezultă că $EN = \dfrac{DC}{2}$.

În triunghiul ADB, $[EM]$ este linie mijlocie. Deci

$EM = \dfrac{AB}{2}$. Atunci: $MN = EN - EM = \left|\dfrac{DC}{2} - \dfrac{AB}{2}\right| = \dfrac{|DC - AB|}{2}$.

2 În patrulaterul convex $ABCD$, M și N sunt mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[CD]$. Să se arate că:

a) $MN \leqslant \dfrac{BC + AD}{2}$; b) $MN = \dfrac{BC + AD}{2} \Leftrightarrow BC \parallel AD$.



Rezolvare

a) Fie P mijlocul diagonalei $[AC]$ (vezi figura). Fie $[MN]$ și $[PN]$ linii mijlocii în triunghiurile ABC, respectiv CAD. Rezultă că $MP = \dfrac{BC}{2}$ și $PN = \dfrac{AD}{2}$.

Atunci: $MN \leqslant MP + PN = \dfrac{BC}{2} + \dfrac{AD}{2} = \dfrac{BC + AD}{2}$.

b) $MN = \dfrac{BC + AD}{2} \Leftrightarrow MN = MP + PN \Leftrightarrow M, P, N$ sunt coliniare.

Din M, P, N coliniare și $BC \parallel MP$ și $AD \parallel MP$, rezultă că $BC \parallel AD$.

Dacă $BC \parallel AD$, atunci linia mijlocie $[MN]$ a trapezului $ABCD$ conține punctul P, deci M, N, P sunt coliniare.

Back

Exerciții

1 Construiți trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$ în fiecare dintre situațiile de mai jos. Precizați natura trapezului.

a) $AB = 4$ cm; $DC = 6$ cm; $AD = 3$ cm; $m(\widehat{ADC}) = 60°$.

b) $AB = 4$ cm; $DC = 6$ cm; $AD = 2$ cm; $m(\widehat{ADC}) = 60°$.

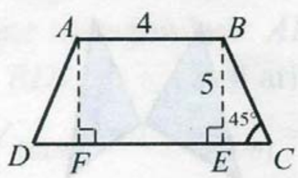
c) $AB = 3$ cm; $DC = 6$ cm; $AD = 3$ cm; $m(\widehat{BCD}) = 45°$.

d) AB=2 cm; BC=7 cm; DC=8 cm; AD=5 cm.

2 Pe laturile triunghiului isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) se consideră punctele D și E astfel încât $[DB] \equiv [EC]$, $D \in [AB]$, $E \in [AC]$. Demonstrați că $DECB$ este trapez isoscel.

3 În triunghiul MNP ($m(\hat{N}) = 90°$), A și B sunt mijloacele laturilor $[MN]$, respectiv $[MP]$. Precizați natura patrulaterului $ABPN$.

4 În figura alăturată, $ABCD$ este trapez isoscel, $AF \perp DC$ și $BE \perp DC$.



Calculați:

a) măsurile unghiurilor trapezului;

b) lungimile segmentelor EC, DF și DC.

5 În trapezul dreptunghic $ABCD$, $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = 90°$, BC=4 cm, AB=5 cm, $m(CDA)$= 30°. Calculați CD.

6 $ABCD$ este trapez isoscel ($AB \parallel DC$), $M \in [AB]$, $N \in [CD]$ astfel ca $MN \parallel AD$. Demonstrați că patrulaterele $ADNM$ și $MNCB$ sunt trapeze isoscele.

7 Fie O intersecția diagonalelor trapezului $ABCD$ ($AB \parallel DC$). Dacă $[OD] \equiv [OC]$ demonstrați că:

a) ΔAOB este isoscel;

b) trapezul $ABCD$ este isoscel;

c) mijloacele bazelor și punctul O sunt coliniare.

8 Demonstrați că dreapta care conține mijloacele bazelor unui trapez isoscel este perpendiculară pe baze și este axă de simetrie a trapezului.

9 Bazele unui trapez au lungimile de 4 cm și 6 cm. Determinați lungimea liniei mijlocii și lungimile celor trei segmente determinate de diagonale pe linia mijlocie.

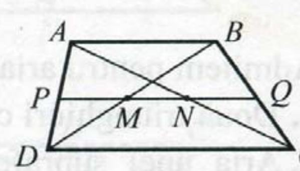
10 Punctele A și B sunt situate în interiorul unghiului xOy. Dacă distanțele de la A și B la Ox sunt de 3 cm, respectiv 4 cm, iar distanțele de la A și B la Oy sunt de 4 cm, respectiv 5 cm, calculați suma distanțelor de la mijlocul segmentului AB la laturile unghiului xOy.

11 În figura următoare, $ABCD$ este trapez, iar $[PQ]$ este linie mijlocie.

a) Dacă $AB + CD = 10$ cm, calculați PQ.

b) Dacă $DC - AB = 2$ cm, calculați MN.

c) Dacă $PQ = 5$ cm și $MN = 1{,}5$ cm, calculați AB și CD.



[Back]

Probleme suplimentare

12 Este posibil ca punctul de intersecție a diagonalelor unui trapez să fie mijlocul uneia dintre diagonale?

13 Să se arate că mijloacele laturilor unui triunghi și piciorul uneia dintre înălțimi sunt vârfurile unui trapez.

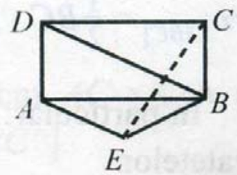
14 În trapezul $ABCD$, $AB \parallel DC$, $AD = DC = BC = \frac{1}{2}AB$. Fie O mijlocul bazei $[AB]$.

a) Demonstrați că $ADCO$ este romb.

b) Calculați măsurile unghiurilor trapezului.

15 În patrulaterul $ABCD$, $AB \parallel CD$. Arătați că dacă în acest patrulater trei laturi sunt congruente și două unghiuri alăturate sunt congruente, atunci el este trapez isoscel sau pătrat.

16 În figura alăturată $ABCD$ este dreptunghi, $DBEA$ este trapez isoscel ($AE \parallel DB$). Demonstrați că $AE \perp EC$.



9. Arii

Noțiunea de arie a unei suprafețe am întâlnit-o în clasele anterioare, când au fost prezentate formule pentru calculul ariei triunghiului, dreptunghiului, pătratului etc. Revenim asupra acestei noțiuni cu câteva completări.

Dacă $A_1A_2 \dots A_n$ este un poligon convex, atunci mulțimea punctelor poligonului reunită cu interiorul poligonului se numește suprafață poligonală convexă (vezi figura 1).

Reunind un număr finit de suprafețe poligonale convexe, cu interioarele disjuncte, poate fi obținută o suprafață poligonală (vezi figurile 2, 3 și 4).

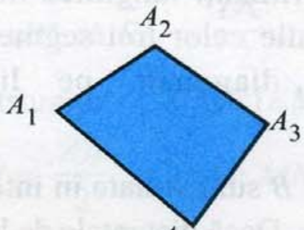


Figura 1

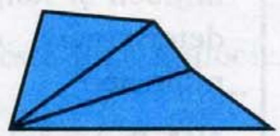


Figura 2

Figura 3

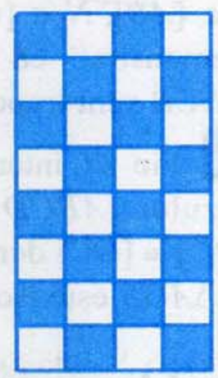
Figura 4

Orice suprafață poligonală poate fi descompusă într-un număr de suprafețe triunghiulare (vezi figurile 2 și 4). Deci pentru calculul ariilor suprafețelor poligonale este esențial să cunoaștem modul de calcul al ariilor suprafețelor triunghiulare.

Pentru calculul ariilor suprafețelor poligonale este necesară, de asemenea, o unitate de măsură. Alegem ca unitate de măsură aria unui pătrat cu lungimea laturii egală cu 1 (cm, mm, m etc.).

Exemple

- Pătratul cu latura 1 (cm) are aria 1 (cm^2).
- În rețeaua de pătrate alăturată fiecare pătrat are aria 1 (lungimea laturii fiecărui pătrat fiind 1).



Admitem pentru aria suprafețelor următoarele proprietăți:

1. Două triunghiuri congruente au ariile suprafețelor egale.

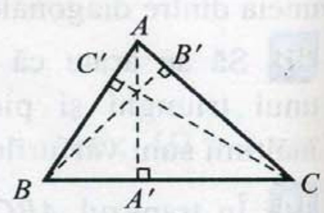
2. Aria unei suprafețe poligonale este suma ariilor suprafețelor poligonale convexe, cu interioare disjuncte, în care se descompune.

Pentru o exprimare mai simplă, convenim ca, în loc de aria suprafeței poligonale, să spunem aria poligonului (aria triunghiului, aria dreptunghiului etc.).

Notăm aria poligonului $A_1A_2 \dots A_n$ cu $\mathcal{A}_{[A_1A_2 \dots A_n]}$.

Aria triunghiului

Reamintim:



$$\mathcal{A}_{[ABC]} = \frac{1}{2}BC \cdot AA' = \frac{1}{2}AC \cdot BB' = \frac{1}{2}AB \cdot CC'.$$

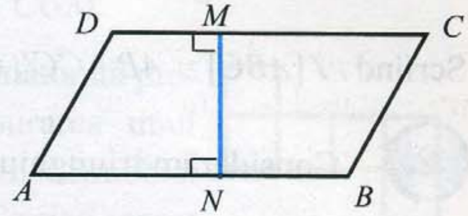
În particular: aria triunghiului dreptunghic este egală cu $\frac{1}{2}$ din produsul lungimilor catetelor.

Back

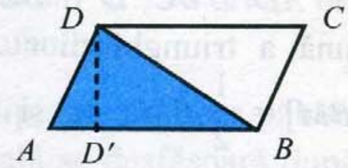
Aria paralelogramului

Considerăm paralelogramul $ABCD$ și punctul $M \in DC$.

Fie N piciorul perpendicularei din M pe AB. Deoarece dreptele AB și CD sunt paralele, lungimea segmentului $[MN]$ este constantă (nu depinde de poziția punctului M pe DC). Segmentul $[MN]$ se numește *înălțimea* paralelogramului dusă din punctul M pe latura $[AB]$.



În figura alăturată, $[DD']$ este înălțimea din punctul D pe latura $[AB]$ (corespunzătoare laturii $[AB]$). Prin diagonala $[BD]$ descompunem suprafața paralelogramului în două suprafețe triunghiulare: ADB și BDC.



Triunghiurile ADB și BDC au aceeași arie, fiind congruente. Rezultă că:

$$\mathcal{A}_{[ABCD]} = \mathcal{A}_{[ADB]} + \mathcal{A}_{[BDC]} = 2\,\mathcal{A}_{[ADB]} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot DD' = AB \cdot DD'.$$

Deducem că:

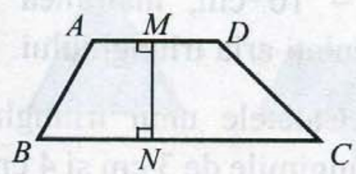
Aria unui paralelogram este egală cu produsul dintre lungimea unei laturi și lungimea înălțimii corespunzătoare.

În particular:

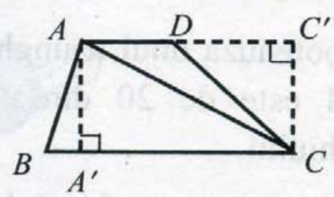
- Aria unui dreptunghi este egală cu produsul lungimilor a două laturi alăturate.
- Aria unui pătrat este egală cu puterea a doua a lungimii laturii sale.

Aria trapezului

Considerăm trapezul $ABCD$ ($AD \parallel BC$) și punctul $M \in AD$. Fie N piciorul perpendicularei din M pe dreapta BC. Segmentul $[MN]$ se numește *înălțimea* dusă din punctul M pe baza $[BC]$.



Decompunem suprafața trapezului în două suprafețe triunghiulare: ABC și ADC. Dacă $[AA']$ și $[CC']$ sunt înălțimi ale trapezului atunci: $\mathcal{A}[ABCD] = \mathcal{A}[ABC] + \mathcal{A}[ADC] = \frac{1}{2} BC \cdot AA' + \frac{1}{2} AD \cdot CC' = \frac{1}{2}(BC + AD) AA'$.



Dacă notăm cu b și B lungimile bazelor trapezului și cu h lungimea înălțimii trapezului, obținem formula:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}(B + b) \cdot h.$$

Back

Probleme rezolvate

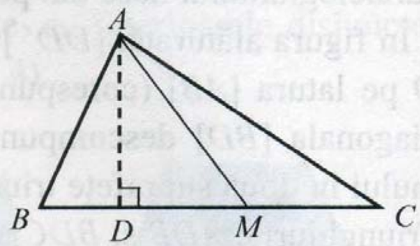
1 În triunghiul ABC, $[BB']$ și $[CC']$ sunt înălțimi. Dacă $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm și $BB' = 3$ cm, calculați aria triunghiului și lungimea înălțimii $[CC']$.

R: $\mathcal{A}[ABC] = \dfrac{1}{2} AC \cdot BB' = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12 \text{ cm}^2$.

Scriind $\mathcal{A}[ABC] = AB \cdot CC'$, rezultă că $AB \cdot CC' = 12$, de unde $CC' = 6$ cm.

2 Considerăm triunghiul ABC și $M \in (BC)$. Demonstrați că $\dfrac{\mathcal{A}_{[ABM]}}{\mathcal{A}_{[ACM]}} = \dfrac{BM}{CM}$.

R: Fie $AD \perp BC$, $D \in BC$. Atunci $[AD]$ este înălțime comună a triunghiurilor ABM și ACM. Rezultă că $\mathcal{A}[ABM] = \dfrac{1}{2} BM \cdot AD$ și $\mathcal{A}[ACM] = \dfrac{1}{2} CM \cdot AD$.



Prin urmare: $\dfrac{\mathcal{A}_{[ABM]}}{\mathcal{A}_{[ACM]}} = \dfrac{BM \cdot AD}{2} \cdot \dfrac{2}{MC \cdot AD} = \dfrac{BM}{CM}$.

În particular: dacă M este mijlocul laturii $[BC]$, rezultă că $\dfrac{BM}{MC} = 1$, deci $\mathcal{A}[ABM] = \mathcal{A}[ACM]$.

Back

Exerciții

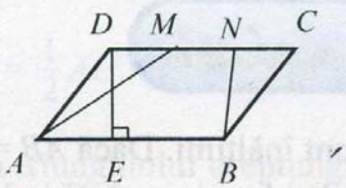
1 În triunghiul ABC, $AB = 10$ cm, $BC = 16$ cm, înălțimea $AD = 8$ cm. Calculați aria triunghiului.

2 Catetele unui triunghi dreptunghic au lungimile de 3 cm și 4 cm. Determinați aria triunghiului.

3 Ipotenuza unui triunghi dreptunghic isoscel este de 20 dm. Calculați aria triunghiului.

4 Lungimile laturilor unui triunghi sunt $DE = 5$ cm, $DF = 100$ mm și înălțimea $FA = 8$ cm. Calculați lungimea înălțimii din E.

5 În figura alăturată $ABCD$ este paralelogram, $AB = 9$ cm, $DE = 4$ cm și $[DM] \equiv [MN] \equiv [NC]$.



a) Calculați aria paralelogramului $ABCD$.
b) Calculați aria patrulaterului $ABNM$.

6 Perimetrul unui dreptunghi este de 28 cm. Determinați aria dreptunghiului, știind că lungimea este cu 2 cm mai mare decât lățimea.

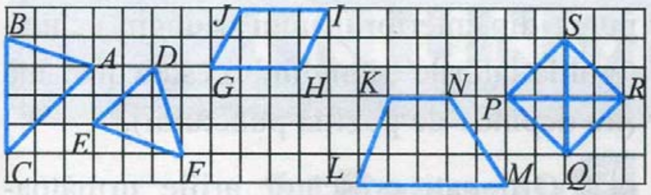
7 Aria unui trapez este de 528 cm^2, iar lungimea înălțimii de 22 cm. Determinați lungimea liniei mijlocii.

8 Într-un paralelogram $ABCD$, $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm, $m(\widehat{ABC}) = 30°$. Calculați aria paralelogramului.

9 Lungimile bazelor unui trapez dreptunghic sunt de 10 cm și 12 cm. Știind că trapezul are un unghi de măsură 45°, calculați aria trapezului.

10 Aria unui pătrat este 14400 m^2. Determinați lungimea laturii pătratului.

11 Calculați ariile poligoanelor din rețeaua de pătrate de mai jos (aria unui pătrat este unitatea).



12 Decupați dintr-un pătrat cu lungimea laturii de 6 cm trei triunghiuri cu ariile de 12 cm^2, 6 cm^2 și 18 cm^2.

13 Care este aria triunghiului colorat, dacă lungimea laturii pătratului mare din figura alăturată este de 4 cm?

14 În trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$), O este intersecția diagonalelor. Demonstrați că triunghiurile AOD și BOC au aceeași arie.

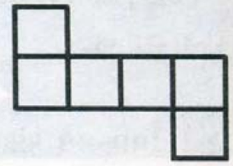
15 În triunghiul ABC, $[AM]$ este mediană și G este centrul de greutate.

a) Demonstrați că triunghiurile GBM și GCM au aceeași arie.

b) Demonstrați că triunghiurile AGB și AGC au aceași arie.

c) Determinați raportul ariilor triunghiurilor AGC și CGM.

16 Figura alăturată prezintă desfășurarea unui cub cu lungimea muchiei de 4 cm. Copiați acest desen pe un carton și construiți cubul. Care este aria cubului?



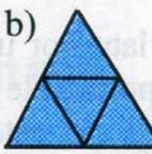
17 Un paralelipiped are baza pătrat, iar suprafața laterală se desfășoară după un pătrat cu aria 1024 m^2.
Care este aria totală a paralelipipedului?

18 a) Care dintre desenele de mai jos reprezintă desfășurarea suprafeței unei piramide triunghiulare? Verificați practic (figurile sunt formate din triunghiuri echilaterale de latură 1 cm).

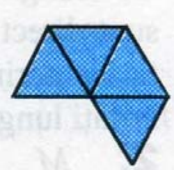
b) Făcând măsurători cu o riglă gradată în milimetri determinați aria totală a piramidei obținute din desfășurările date.

a)

b)



c)



Back

Exerciții recapitulative

1 Notăm: T – mulțimea patrulaterelor, P – mulțimea paralelogramelor, R – mulțimea romburilor, D – mulțimea dreptunghiurilor, Q – mulțimea pătratelor. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor de mai jos:
a) $Q \subset R \subset P$; b) $Q \subset D \subset P$; c) $P \cap R = \varnothing$;
d) $D \cap R = Q$; e) $D \cup R = P$; f) $D \setminus P = \varnothing$.

2 Demonstrați că simetricul unui segment $[AB]$ față de un punct M, $M \notin AB$, este un segment $[A'B']$ paralel și congruent cu $[AB]$.

3 În patrulaterul convex $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă punctul O este egal depărtat de laturile patrulaterului, demonstrați că $ABCD$ este romb.

4 Construiți un pătrat cu perimetrul de 6 cm.

5 $ABCD$ este paralelogram, $M, N \in [AD]$ astfel încât $[DM] \equiv [AN]$, $M \in (DN)$. Dacă $[NC] \equiv [MB]$, demonstrați că $ABCD$ este dreptunghi.

6 În patrulaterul convex $ABCD$ fie $E, F \in (AB)$ astfel încât $AE = EF = FB$ și $H, G \in [CD]$ astfel încât $DH = HG = GC$.
Arătați că $\mathcal{A}_{EFGH} = \dfrac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{ABCD}$.

7 Într-un sistem de axe ortogonale se dau punctele $A(-1,\ 1)$, $B(2,\ 0)$, $C(3,\ 4)$. Mărind cu 8 unități abscisele punctelor A, B, C, obținem punctele A', B', respectiv C'.
a) Reprezentați punctele A, B, C, A', B', C' (alegând convenabil unitatea de măsură).
b) Demonstrați că $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

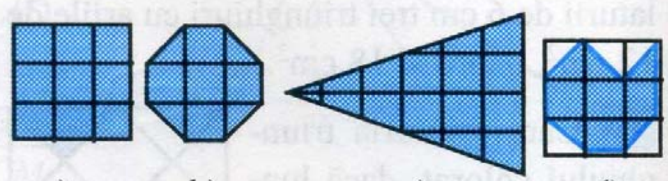
8 Demonstrați că într-un paralelogram lungimea oricărei laturi este mai mică decât media aritmetică a lungimilor diagonalelor.

9 $ABCD$ este paralelogram și $M \in CD$. Dacă aria paralelogramului este de 18 cm^2, calculați aria triunghiului AMB.

10 Diagonalele unui romb au lungimile de 12 cm și 15 cm. Calculați aria rombului.

11 Demonstrați că suma distanțelor unui punct din interiorul unui triunghi echilateral la laturile triunghiului este constantă (nu depinde de poziția punctului).

12 Ordonați crescător ariile următoarelor poligoane:



a) b) c) d)

13 Îndoind un triunghi ascuțitunghic după liniile sale mijlocii și apropiind vârfurile, obținem o piramidă triunghiulară. Verificați practic acest lucru, construind o piramidă cu aria de 20 cm^2. Care este aria unei fețe?

[Back]

Testul 1

1. Lungimile laturilor unui paralelogram sunt direct proporționale cu numerele 3 și 6, iar perimetrul său este egal cu 32 cm. Aflați lungimile laturilor paralelogramului.

2. M este mijlocul laturii $[BC]$ a paralelogramului $ABCD$ de centru O, iar E intersecția dreptelor AM și DC. Arătați că:

a) $\Delta ABM \equiv \Delta ECM$;

b) $ABEC$ este paralelogram;

c) $4 \cdot OM = DE$.

3. Fie $ABCD$ un dreptunghi, iar M și N două puncte, astfel încât $DN = BM$, $D \in (NC)$, $B \in (AM)$. Arătați că:

a) $AMCN$ este paralelogram;

b) Dacă P este simetricul lui M față de B, arătați că $APCN$ este trapez isoscel.

4. Rombul $ABCD$ are lungimea laturii egală cu 10 cm și $m(\sphericalangle A) = 30°$. Calculați distanța de la D la AB.

Timp de lucru: 50 min.

Barem: **1.** 2p; **2.** a) 1p; b) 1p; c) 1p: **3.** 2p; **4.** 2p.

Testul 2

1. Fie M, N, P mijloacele laturilor triunghiului ABC. Dacă perimetrul triunghiului MNP este de 12 cm, calculați perimetrul triunghiului ABC.

2. Aflați perimetrul trapezului isoscel $ABCD$ având $AD = BC = 6$ cm, $CD = 4$ cm și $m(\sphericalangle A) = 60°$.

3. Fie $ABEF$ un pătrat și ABC un triunghi echilateral cu latura de 4 cm.

a) Calculați măsurile unghiurilor triunghiului FCE.

b) Dacă punctul E este situat în exteriorul pătratului $ABEF$, aflați perimetrul poligonului $AFEBC$.

4. În triunghiul ABC, fie A', B', C', respectiv mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$, iar D piciorul înălțimii din A. Arătați că $A'DB'C'$ este un trapez isoscel.

Timp de lucru: 50 min.

Barem: **1.** 2 p; **2.** 2 p; **3.** a) 2 p; b) 1 p; **4.** 2 p.

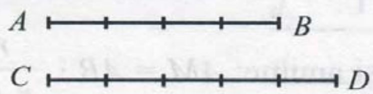
Back

II ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

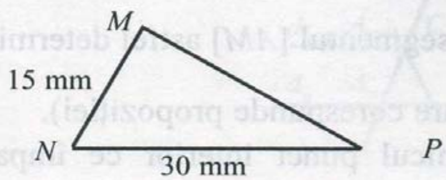
1. Raportul a două segmente

Definiție Raportul a două segmente, măsurate cu aceeași unitate de măsură, este raportul lungimilor lor.

Exemple

a) 

Raportul segmentelor $[AB]$ și $[CD]$ este $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{5}$.

b) 

$MN = 15$ mm
$NP = 30$ mm $\Rightarrow \frac{MN}{NP} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

În ambele exemple am exprimat lungimile segmentelor cu aceeași unitate de măsură.

2. Segmente proporționale

Reamintim: Șirurile de numere reale nenule $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ și $(b_1, b_2, ..., b_n, ...)$, sunt proporționale dacă $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Raportul constant $k = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ...$ se numește *factor de proporționalitate* (sau raport de proporționalitate); scriem: $(a_1, a_2, ..., a_n, ...) \sim (b_1, b_2, ..., b_n, ...)$.

Definiție Șirurile de segmente $([A_1B_1], [A_2B_2], [A_3B_3], \ldots)$ și $([A'_1B'_1], [A'_2B'_2], [A'_3B'_3], \ldots)$ se numesc proporționale dacă șirurile lungimilor lor sunt proporționale.

Exemple Dacă $AB = 2$ dm, $BC = 6$ dm, $CD = 8$ dm, $EF = 3$ dm, $FG = 9$ dm, $GH = 12$ dm, atunci $([AB], [BC], [CD]) \sim ([EF], [FG], [GH])$,

deoarece $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{2}{3}$.

Deci segmentele $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ sunt proporționale cu segmentele $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$. Factorul de proporționalitate este $\frac{2}{3}$.

Observații

1. Ordinea în care sunt scrise segmentele este esențială.
2. Când factorul de proporționalitate este 1, șirurile de numere coincid (respectiv segmentele sunt congruente).

Back

3. Împărțirea unui segment într-un raport dat

Propoziția 1. Există un singur punct interior segmentului care împarte un segment dat într-un raport dat.

Demonstrație

Fie $[AB]$ segmentul dat și r raportul dat. Ne propunem să determinăm un punct M, $M \in (AB)$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = r$, ceea ce este echivalent cu $\frac{AM}{AB} = \frac{r}{r+1}$.

Proporția este obținută pentru o singură valoare a lui AM, și anume: $AM = AB \cdot \frac{r}{r+1}$.

Deoarece $\frac{r}{r+1} < 1$ rezultă că $AM < AB$ (dacă „așezăm“ segmentul $[AM]$ astfel determinat peste AB, pornind din punctul A, obținem punctul M care corespunde propoziției).

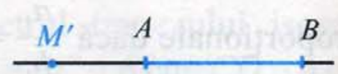
În particular: mijlocul segmentului $[AB]$ este unicul punct interior ce împarte segmentul AB în raportul $r = 1$.

Propoziția 2. Există un singur punct exterior segmentului care împarte un segment dat într-un raport dat, dacă raportul este diferit de 1.

Demonstrație

Fie $[AB]$ segmentul dat și $r \neq 1$ raportul dat.

Determinăm un punct $M' \in AB \setminus [AB]$ astfel încât $\frac{AM'}{M'B} = r$.



Cazul $r < 1$

Determinăm punctul M' pe dreapta AB astfel încât $A \in (M'B)$.

$$\frac{AM'}{M'B} = \frac{r}{1} \Leftrightarrow \frac{AM'}{AB} = \frac{r}{1-r} \Leftrightarrow AM' = AB \cdot \frac{r}{1-r}.$$

Cazul $r > 1$

Determinăm punctul M' pe dreapta AB astfel încât $B \in (AM')$.

$$\frac{M'A}{M'B} = r \Leftrightarrow \frac{AB}{M'B} = r - 1 \Leftrightarrow M'B = AB \cdot \frac{1}{r-1}.$$

Concluzie

Deducem din cele două propoziții că există două puncte care împart un segment dat în același raport ($r \neq 1$), unul interior și celălalt exterior segmentului.

Cele două puncte se numesc puncte *conjugate armonic* în raport cu capetele segmentului. În cazul când $r = 1$ există un singur punct (interior), și anume *mijlocul* segmentului.

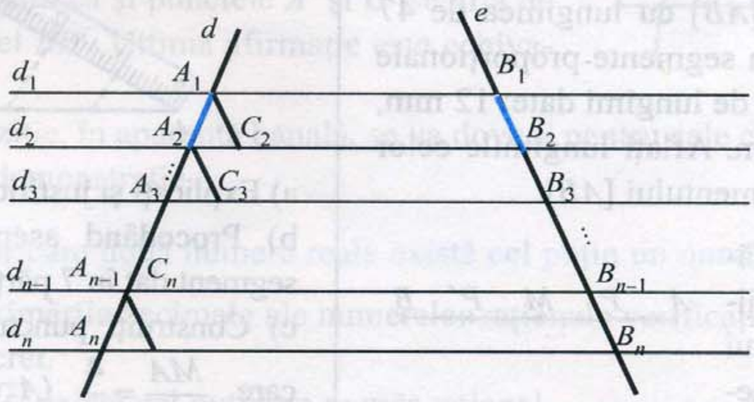
[Back](#)

4. Teorema paralelelor echidistante

Teoremă Dacă dreptele paralele $d_1, d_2, \ldots, d_n$ ($n \in \mathbf{N}, n \geqslant 3$) determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele determină pe orice altă secantă segmente congruente.

Demonstrație

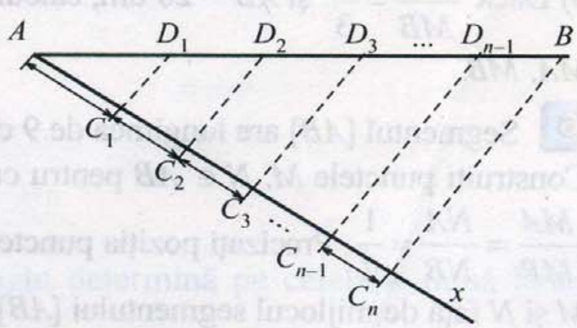
Cu notațiile din figura următoare, avem: $[A_1A_2] \equiv [A_2A_3] \equiv [A_3A_4] \equiv \ldots \equiv [A_{n-1}A_n]$.
Trebuie să demonstrăm că: $[B_1B_2] \equiv [B_2B_3] \equiv [B_3B_4] \equiv \ldots \equiv [B_{n-1}B_n]$.



Construim: $A_1C_2 \| e$ $(C_2 \in d_2)$, $A_2C_3 \| e$ $(C_3 \in d_3)$, ..., $A_{n-1}C_n \parallel e$ $(C_n \in d_n)$.
Deducem că: $\Delta A_1A_2C_2 \equiv \Delta A_2A_3C_3 \equiv \ldots \equiv \Delta A_{n-1}A_nC_n$ (cazul U.L.U.).
Deci: $[A_1C_2] \equiv [A_2C_3] \equiv \ldots \equiv [A_{n-1}C_n]$.
Din paralelogramele: $A_1C_2B_2B_1$, $A_2C_3B_3B_2$, ..., $A_{n-1}C_nB_nB_{n-1}$, deducem că $[A_1C_2] \equiv [B_1B_2]$, $[A_2C_3] \equiv [B_2B_3]$, ... , $[A_{n-1}C_n] \equiv [B_{n-1}B_n]$.
Prin urmare: $[B_1B_2] \equiv [B_2B_3] \equiv \ldots \equiv [B_{n-1}B_n]$.

Aplicație Împărțirea unui segment dat în n părți egale ($n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 3$).

Pentru a împărți segmentul $[AB]$ în părți egale aplicăm teorema paralelelor echidistante.
Procedăm astfel:



- Considerăm o semidreaptă oarecare $(AX$ pe care fixăm un punct oarecare C_1.
- Construim punctele $C_2, C_3, \ldots, C_n \in (AX$ astfel ca:
  $[AC_1] \equiv [C_1C_2] \equiv [C_2C_3] \equiv \ldots \equiv [C_{n-1}C_n]$.
- Prin punctele $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{n-1}$ construim dreptele paralele cu C_nB care intersectează segmentul $[AB]$ în punctele $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_{n-1}$.
- Rezultă: $[AD_1] \equiv [D_1D_2] \equiv [D_2D_3] \equiv \ldots \equiv [D_{n-1}B]$.

Back

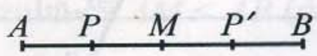
Exerciții

1 Determinați numerele a, b, c știind că $(a, b, c) \sim (3, 4, 5)$ și factorul de proporționalitate este 4.

2 Perimetrul triunghiului ABC este de 48 cm. Determinați lungimile laturilor triunghiului, știind că $(AB, AC, BC) \sim (6, 8, 10)$.

3 Segmentul $[AB]$ cu lungimea de 47 cm se împarte în segmente proporționale cu trei segmente de lungimi date: 12 mm, 15 mm și 20 mm. Aflați lungimile celor trei părți ale segmentului $[AB]$.

4 În figura alăturată, M este mijlocul segmentului $[AB]$, P' este simetricul punctului P față de M, $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{1}{3}$.



Calculați: $\dfrac{MA}{MB}$; $\dfrac{BP'}{BA}$; $\dfrac{P'B}{P'A}$.

5 Fie $[AB]$ un segment și $M \in (AB)$.

a) Dacă $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{2}{5}$, calculați:

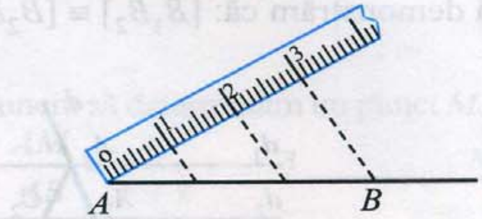
$\dfrac{MB}{MA}$; $\dfrac{MA}{AB}$; $\dfrac{AB}{MB}$; $\dfrac{4MA}{7MB}$; $\dfrac{MA+2MB}{MB}$; $\dfrac{2MA+MB}{MA+3MB}$;

b) Dacă $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{2}{3}$ și $AB = 20$ dm, calculați MA, MB.

6 Segmentul $[AB]$ are lungimea de 9 cm. Construiți punctele $M, N \in AB$ pentru care $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{NA}{NB} = \dfrac{1}{2}$. Precizați poziția punctelor M și N față de mijlocul segmentului $[AB]$.

7 Fie E simetricul punctului A față de mijlocul lui D al laturii $[BC]$ a triunghiului ABC. Arătați că G, centrul de greutate al triunghiului ABC, și E sunt puncte conjugate armonic în raport cu A și D.

8 Desenul următor vă sugerează un mod practic de împărțire în trei părți egale a unui segment dat $[AB]$.



a) Explicați și justificați procedeul.

b) Procedând asemănător, împărțiți un segment dat în 7 părți egale.

c) Construiți punctul M, $M \in [AB]$ pentru care $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{4}{3}$ (A și B fiind cunoscute).

d) Reprezentați pe axa numerelor reale punctele: $A\left(\dfrac{2}{3}\right)$; $B\left(\dfrac{5}{6}\right)$; $C\left(-\dfrac{2}{3}\right)$; $D\left(-\dfrac{5}{6}\right)$.

9 Fie $M, N \in (AB)$ astfel încât $\dfrac{AM}{MB} = r$ și $\dfrac{BN}{AB} = \dfrac{1}{r+1}$. Demonstrați că $M = N$ (coincid).

10 În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$; prin mijlocul M al laturii $[AD]$ construim $MN \parallel AB$, $N \in BC$. Demonstrați că N este mijlocul laturii $[BC]$.

11 Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele $E, F \in AC$, $G, H \in DB$ astfel încât $\dfrac{EA}{EC} = \dfrac{FA}{FC} = \dfrac{GD}{GB} = \dfrac{HD}{HB} = \dfrac{1}{3}$, $E \in (AC)$, $G \in (DB)$

a) Arătați că E, F, H, G sunt vârfurile unui trapez.

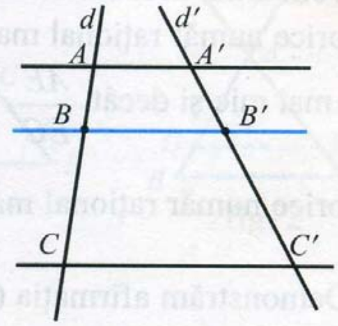
b) Dacă $AD = a$, calculați lungimile bazelor trapezului $EFGH$.

Back

5. Teorema lui Thales

Propoziția 1. Fie dreptele d și d' și punctele $A, B, C \in d$, $A', B', C' \in d'$ astfel încât $AA' \parallel BB' \parallel CC'$. Dacă $B \in (AC)$, atunci $B' \in (A'C')$.

Demonstrație



Deoarece $AA' \parallel BB'$, rezultă că punctele A și A' sunt situate de aceeași parte a dreptei BB'. Asemănător rezultă că punctele C și C' sunt situate de aceeași parte a dreptei BB'. Deoarece punctele A și C sunt situate de o parte și de alta a dreptei BB', rezultă că și punctele A' și C' se află de o parte și alta a dreptei BB'. Ultima afirmație este echivalentă cu $B' \in (A'C')$.

Următoarea propoziție, în aparență banală, se va dovedi pentru cele ce urmează foarte utilă. O reținem fără demonstrație.

Propoziția 2. Între oricare două numere reale există cel puțin un număr rațional.

Temă: Folosind aproximările zecimale ale numerelor raționale verificați adevărul propoziției 2 pe un caz concret.

Exemplu: între 2 și $\sqrt{5}$ există cel puțin un număr rațional.

Propoziția 3. Fie x și y două numere reale. Dacă orice număr rațional mai mic decât x este mai mic și decât y și orice număr rațional mai mic decât y este mai mic și decât x, atunci $x = y$.

Demonstrație

Presupunem prin reducere la absurd că $x \neq y$ (de exemplu $x < y$).

Conform propoziției 2 există un număr rațional $\frac{p}{q}$ astfel încât $x < \frac{p}{q} < y$.

Prin umare, numărul rațional $\frac{p}{q}$ este mai mic decât y, dar nu este mai mic și decât x.

Contradicție.

Efectuăm același raționament pentru cazul $y < x$.

Așadar $x = y$, ceea ce trebuia demonstrat.

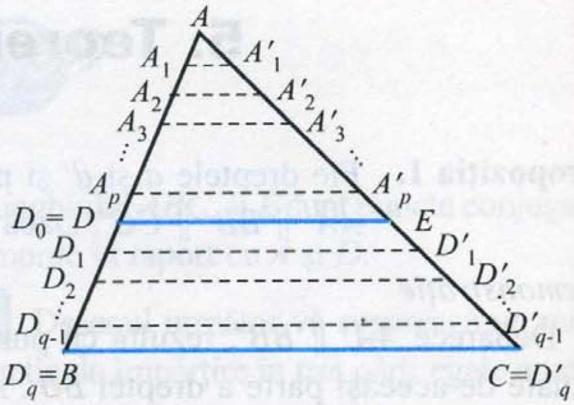
Teorema lui Thales

O paralelă dusă la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi segmente proporționale.

Demonstrație

Considerăm triunghiul ABC. Fie $D \in (AB)$ și $E \in (AC)$ astfel încât $DE \parallel BC$.

Trebuie demonstrat că $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$.



Pentru demonstrația acestei egalități aplicăm propoziția 3.

Vom arăta deci că:

(1) orice număr rațional mai mic decât $\dfrac{AD}{DB}$ este mai mic și decât $\dfrac{AE}{EC}$,

(2) orice număr rațional mai mic decât $\dfrac{AE}{EC}$ este mai mic și decât $\dfrac{AD}{DB}$.

Demonstrăm afirmația (1). Pentru aceasta fie p și $q \in \mathbf{N}$ astfel încât $\dfrac{p}{q} < \dfrac{AD}{DB}$ (3).

Împărțim segmentul $[DB]$ prin punctele $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_q$ în q părți egale (de lungime $\dfrac{DB}{q}$).

Paralelele prin $D_1, D_2, \ldots, D_{q-1}$ la DE intersectează $[EC]$ în punctele (interioare) $D'_1, D'_2, D'_3, \ldots, D'_{q-1}$, și determină pe $[EC]$ q segmente congruente de lungime $\dfrac{EC}{q}$ (conform teoremei paralelelor echidistante.)

Pe semidreapta $(AD$ considerăm punctele $A_1, A_2, \ldots, A_p$, în această ordine, astfel încât $AA_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{p-1}A_p = \dfrac{DB}{q}$.

Paralelele prin $A_1, A_2, \ldots, A_p$ la DE intersectează AE în punctele $A'_1, A'_2, \ldots, A'_p$ (în această ordine). Conform teoremei paralelelor echidistante $A_1A'_1 = A_2A'_2 = \ldots = A'_{p-1}A'_p = \dfrac{EC}{q}$ (toate segmentele mici de pe latura $[AC]$ fiind congruente).

Din (3) rezultă că $p \cdot \dfrac{DB}{q} < AD$ și deoarece $AA_p = p \cdot \dfrac{DB}{q}$, avem că $AA_p < AD$, ceea ce este echivalent cu $A_p \in (AD)$. Atunci, conform propoziției, rezultă că $A'_p \in (AE)$, deci $AA_p' < AE$.

Însă $AA'_p = p \cdot \dfrac{EC}{q}$. Prin urmare: $p \cdot \dfrac{EC}{q} < AE \Leftrightarrow \dfrac{p}{q} < \dfrac{AE}{EC}$.

Afirmația (1) este dovedită.

Analog se arată că dacă $\dfrac{p}{q} < \dfrac{AE}{EC}$, atunci $\dfrac{p}{q} < \dfrac{AD}{DB}$.

Observații

1. Folosind proprietățile proporțiilor, din teorema lui Thales rezultă și egalitățile: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, $\frac{DB}{DA} = \frac{EC}{EA}$, $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$ etc.

2. Dacă punctul D este exterior laturii $[AB]$, concluzia teoremei lui Thales rămâne adevărată.

Fie triunghiul ABC, $d \parallel BC$, $d \cap AB = \{D\}$ și $d \cap AC = \{E\}$. Atunci $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

Într-adevăr:

Dacă $B \in (AD)$ atunci (fig. 1):

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Leftrightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{CE}{AC}$.

Dacă $A \in (DB)$, construim $G \in (AB$ și $H \in (AC$ astfel încât $AG = AD$ și $AH = AE$ (fig. 2). Atunci:

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Leftrightarrow \frac{AG}{AB} = \frac{AH}{AC}$.

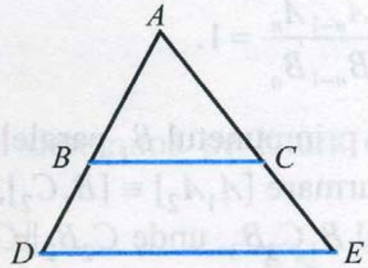


fig. 1

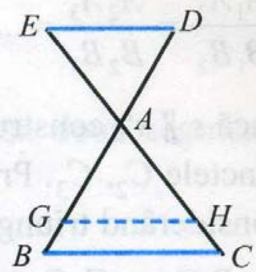


fig. 2

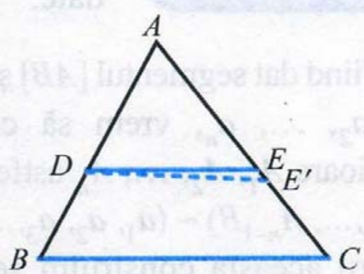
Back

Reciproca teoremei lui Thales

Dacă o dreaptă determină pe două laturi ale unui triunghi segmente proporționale, atunci ea este paralelă cu latura a treia a triunghiului.

Demonstrație.

Considerăm punctele $D \in (AB)$ și $E \in (AC)$ astfel încât $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{AC}$. Trebuie să demonstrăm că $DE \parallel BC$.



Este un caz tipic în care teorema reciprocă se demonstrează cu ajutorul teoremei directe. Conform propoziției 1, paralela prin D la BC intersectează AC în punctul E'. Conform teoremei directe, rezultă că $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$. Din ipoteză știm că $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. Rezultă că $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$.

Deoarece există un singur punct interior unui segment care îl împarte într-un raport dat rezultă că punctele E și E' coincid. Prin urmare: $DE \parallel BC$.

Observație

Concluzia reciprocei teoremei lui Thales rămâne adevărată și în cazul când punctele D și E sunt exterioare laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$. Justificați.

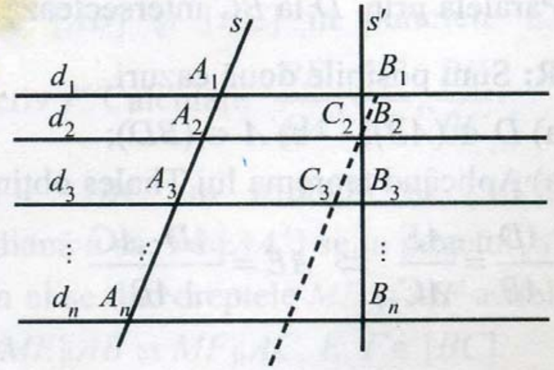
Back

Teorema paralelelor neechidistante

Dreptele paralele $d_1, d_2, \ldots, d_n$ ($n \geqslant 3$) determină pe două secante oarecare segmente proporționale.

Demonstrație

Notăm intersecțiile dreptelor paralele cu secantele s și s' ca în figura alăturată.



Trebuie să demonstrăm că: $\dfrac{A_1A_2}{B_1B_2} = \dfrac{A_2A_3}{B_2B_3} = \ldots = \dfrac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}$.

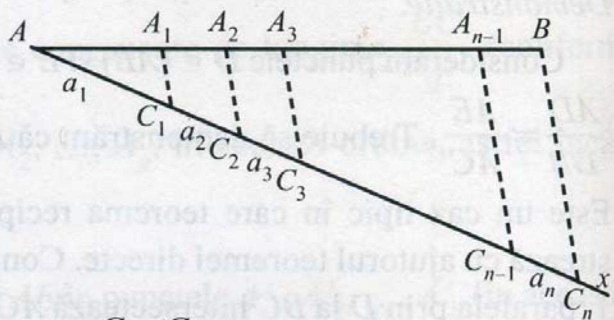
Dacă $s \parallel s'$ atunci $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, \ldots, A_{n-1}A_nB_nB_{n-1}$ sunt paralelograme și deci

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \ldots = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n} = 1.$$

Dacă $s \nparallel s'$, construim prin punctul B_1 paralela la s care intersectează dreptele d_2 și d_3 în punctele C_2, C_3. Prin urmare $[A_1A_2] \equiv [B_1C_2]$, $[A_2A_3] \equiv [C_2C_3]$.
Considerând triunghiul $B_1C_3B_3$, unde $C_2B_2 \parallel C_3B_3$ și aplicând teorema lui Thales, rezultă că $\dfrac{B_1C_2}{B_1B_2} = \dfrac{C_2C_3}{B_2B_3}$. Prin urmare $\dfrac{A_1A_2}{B_1B_2} = \dfrac{A_2A_3}{B_2B_3}$. Analog se demonstrează și egalitățile $\dfrac{A_2A_3}{B_2B_3} = \dfrac{A_3A_4}{B_3B_4} = \ldots = \dfrac{A_{n-2}A_{n-1}}{B_{n-2}B_{n-1}} = \dfrac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}$

Aplicație Împărțirea unui segment în părți proporționale cu numere (segmente) date.

Fiind dat segmentul $[AB]$ și numerele pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$, vrem să construim punctele interioare $A_1, A_2, \ldots, A_n$ astfel încât $(AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}B) \sim (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$.



Pentru aceasta construim semidreapta $(AX$ și punctele $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n \in (AX$, în această ordine astfel încât $AC_1 = a_1$, $C_1C_2 = a_2$, $C_2C_3 = a_3$, ..., $C_{n-1}C_n = a_n$.
Paralelele prin punctele $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{n-1}$ la C_nB intersectează $[AB]$ în punctele interioare $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$.
Conform teoremei paralelelor neechidistante avem că $\dfrac{AA_1}{AC_1} = \dfrac{A_1A_2}{C_1C_2} = \dfrac{A_2A_3}{C_2C_3} = \ldots = \dfrac{A_{n-1}B}{C_{n-1}C_n}$

și deci $\dfrac{AA_1}{a_1} = \dfrac{A_1A_2}{a_2} = \ldots = \dfrac{A_{n-1}B}{a_n}$.

[Back](#)

Probleme rezolvate

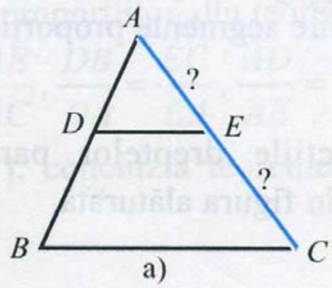
1 În triunghiul ABC, $AB = 6$ cm, $AC = 12$ cm și $D \in AB$ astfel încât $AD = 2{,}4$ cm. Paralela prin D la BC intersectează AC în E. Calculați lungimea segmentului $[CE]$.

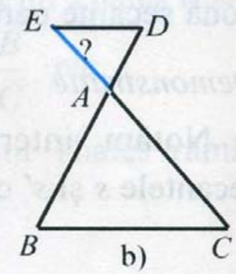
R: Sunt posibile două cazuri.

a) $D \in (AB)$; b) $A \in (BD)$;

a) Aplicând teorema lui Thales obținem:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AE = \frac{AD \cdot AC}{AB}$$





Rezultă $AE = \dfrac{2{,}4 \cdot 12}{6} = 4{,}8$ (cm), deci $EC = AC - AE = 7{,}2$ cm.

b) La fel ca la a), $AE = 4{,}8$ cm, deci $EC = AC + AE = 16{,}8$ cm.

2 *Teorema bisectoarei*

Într-un triunghi bisectoarea unui unghi determină pe latura opusă două segmente proporționale cu celelalte două laturi.

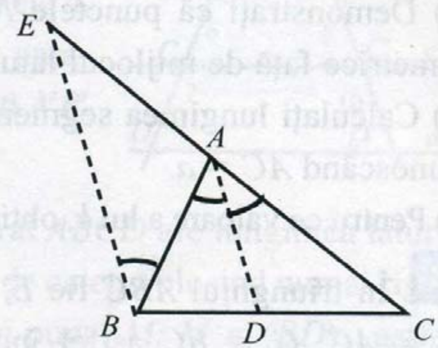
R: Fie $(AD$ bisectoarea unghiului BAC.

Trebuie să demonstrăm că $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$.

Paralela prin B la AD intersectează AC în E. Triunghiul ABE are unghiurile B și E congruente, deci este isoscel (justificați!) Rezultă $[AE] \equiv [AB]$.

Aplicând teorema lui Thales, obținem

$\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AB}{AC}$ c.c.t.d.



Back

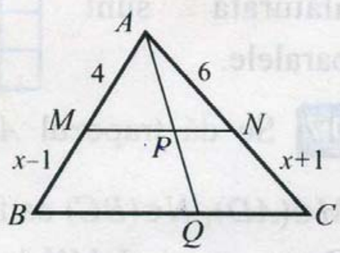
Exerciții

Teorema lui Thales

1 În triunghiul ABC, $M \in (CB$, $N \in (CA$ și $MN \parallel AB$. Copiați și completați tabelul de mai jos:

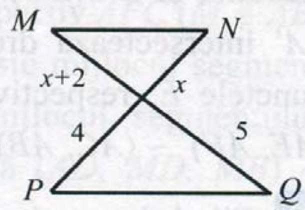
	BC	AC	CM	CN	MB	NA
a	8	6	4			
b	9	6		2		
c		12	4			9
d	30			37,5	5	
e			$\sqrt{3}$		$\sqrt{6}$	$\sqrt{2}$
f		3	8	7		

2 În figura alăturată, $MN \parallel BC$. Demonstrați că $AP = PQ$.



3 În trapezul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă $AC = 20$ cm și $\frac{DO}{OB} = \frac{3}{7}$, calculați lungimile segmentelor $[AO]$ și $[CO]$.

4 În desenul alăturat $MN \parallel PQ$. Calculați x.



5 Paralela prin centrul de greutate al triunghiului ABC la AC intersectează laturile $[AB]$ și $[BC]$ în punctele E, respectiv F. Calculați: $\frac{BE}{EA}$; $\frac{FC}{FB}$; $\frac{BF}{BC}$.

6 Fie ABC un triunghi și $[AA']$, o mediană a sa. Pe $[AA']$ se ia punctul M și prin el se duc dreptele ME și MF astfel încât $ME \parallel AB$ și $MF \parallel AC$, $E, F \in [BC]$.

Back

Să se arate că A' este mijlocul segmentului $[EF]$.

7 Se consideră triunghiul ABC și $M \in (AB)$ astfel încât $\frac{MA}{MB} = k$. Construim $MN \parallel BC$ $(N \in AC)$, $MP \parallel AC$ $(P \in BC)$ și $PQ \parallel AB$ $(Q \in AC)$.

a) Demonstrați că punctele N și Q sunt simetrice față de mijlocul laturii $[AC]$.

b) Calculați lungimea segmentului $[NQ]$, cunoscând $AC = a$.

c) Pentru ce valoare a lui k, obținem $N = Q$?

8 În triunghiul ABC fie $E, H \in (AB)$, $F \in AC$, $G \in BC$ astfel încât $EF \parallel BC$, $FG \parallel AB$ și $GH \parallel AC$. Arătați că $AE \cdot AH = BE \cdot BH$.

9 Se consideră triunghiul ABC și $M \in (AB)$, M diferit de mijlocul lui $[AB]$. Construim: $MN \parallel BC$ $(N \in AC)$, $NP \parallel AB$ $(P \in BC)$, $PQ \parallel AC$ $(Q \in AB)$, $QR \parallel BC$ $(R \in AC)$, $RS \parallel AB$ $(S \in BC)$ și $SM' \parallel AC$ $(M' \in AB)$. Arătați că punctele M și M' coincid.

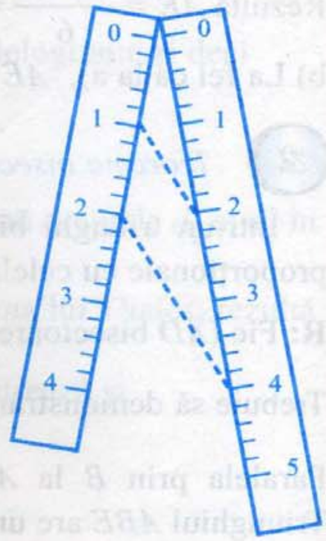
10 Se consideră triunghiul ABC, $[AA']$ mediană și $D \in (BC)$. Paralela prin D la AA' intersectează dreptele AC și AB în punctele E, respectiv F. Să se arate că $(AE, AF) \sim (AC, AB)$.

11 Fiind date trei segmente de lungimi cunoscute a, b, c, construiți cu rigla și compasul un segment de lungime $x = \frac{ab}{c}$. Justificați. Caz particular: $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $c = 10$ cm.

12 În triunghiul ABC, fie $E \in (BC)$ astfel încât $\widehat{BAE} \equiv \widehat{CAE}$. Dacă $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $AC = 7$ cm, calculați BE și CE.

Reciproca teoremei lui Thales

13 Așezăm două rigle gradate ca în figura alăturată.



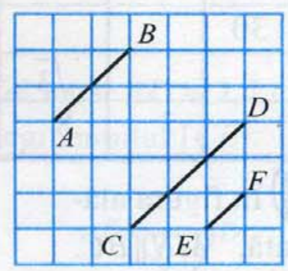
a) Unind punctul 1 de pe rigla din stânga cu punctul 2 de pe rigla din dreapta și punctul 2 respectiv cu punctul 4, obținem două segmente paralele. Justificați.

b) Dacă unim punctul 2 de pe rigla din stânga cu punctul 3 de pe rigla din dreapta, cu ce punct de pe rigla din dreapta trebuie unit punctul 4 de pe rigla din stânga pentru a obține drepte paralele? Justificați.

14 În triunghiul MNP, fie $E \in (MN)$ și $F \in (MP)$, astfel încât $\frac{ME}{EN} = k$ și $\frac{FP}{MP} = \frac{1}{k+1}$. Demonstrați că $EF \parallel NP$.

15 Fie O intersecția diagonalelor patrulaterului convex $ABCD$. Dacă $OA = 3$ cm, $OB = 4$ cm, $AC = 9$ cm și $BD = 12$ cm, demonstrați că patrulaterul $ABCD$ este trapez.

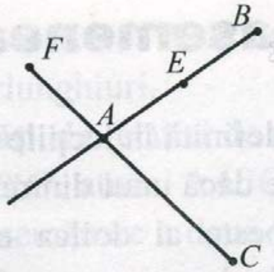
16 Arătați că dreptele AB, CD și EF din rețeaua alăturată sunt paralele.



17 Se dă trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ și $M \in (AD)$, $N \in (BC)$ astfel încât $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$. Demonstrați că $MN \parallel AB$.

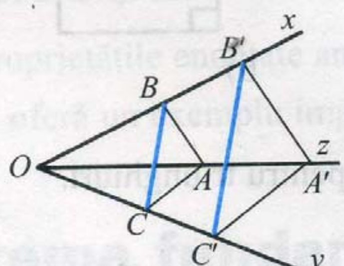
Back

18 În figura alăturată, $AE=30$, $BE=30$, $AC=70$ și $AF=35$. Găsiți eroarea din raționamentul următor:

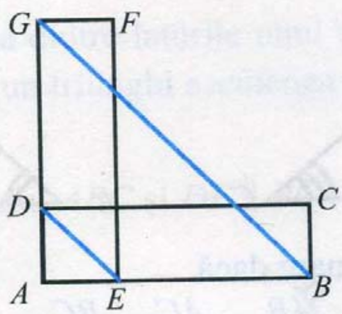


„Deoarece $\frac{AE}{AB}=\frac{1}{2}=\frac{AF}{AC}$ atunci, din reciproca teoremei lui Thales, rezultă $EF \parallel BC$."

19 În desenul alăturat, $AB \parallel A'B'$ și $AC \parallel A'C'$. Demonstrați că $B'C' \parallel BC$.



20 În figura alăturată, dreptunghiurile $ABCD$ și $AEFG$ au aceeași arie. Demonstrați că $BG \parallel DE$.

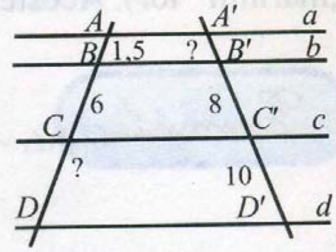


21 Fie $[AM]$ mediană în ΔABC. Bisectoarea unghiului AMB intersectează pe AB în N, iar bisectoarea unghiului AMC intersectează pe AC în P. Să se arate că $NP \parallel BC$.

Teorema paralelelor neechidistante

22 Folosind rigla și compasul, împărțiți un segment dat în părți proporționale cu numerele 2, 3 și 5.

23 În desenul alăturat dreptele a, b, c, d sunt paralele. Calculați $A'B'$ și CD.



24 Un pătrat $ABCD$ are lungimea laturii 10 pătrățele de caiet. Folosind numai rigla, construiți un punct M, $M \in (BD)$, astfel încât $\frac{MD}{MB}=\frac{3}{7}$.

25 În trapezul $ABCD$ cu $AD \parallel BC$, fie $M \in (AB)$ astfel încât $\frac{AM}{MB}=\frac{2}{7}$.

Paralela prin M la AD intersectează latura (DC) în N. Știind că $CD = 54$ cm, calculați lungimile segmentelor DN și NC.

26 În triunghiul ABC, P este mijlocul laturii $[BC]$, $(PM$ și $(PN$ sunt bisectoarele unghiurilor APB, respectiv APC ($M \in AB$, $N \in AC$). Dacă D este mijlocul segmentului $[AM]$ și E mijlocul segmentului $[AN]$, demonstrați că $(AD, MD, MB) \sim$ $\sim (AE, EN, NC)$.

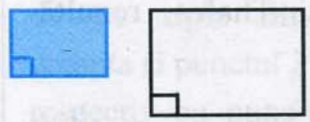
Back

6. Triunghiuri asemenea

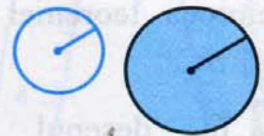
Relația de congruență a triunghiurilor a fost definită în lecțiile de geometrie din clasa a VI-a. Intuitiv, două triunghiuri sunt congruente dacă unul dintre ele, printr-o deplasare ce nu-i modifică forma, poate fi suprapus peste al doilea triunghi. Există figuri geometrice care „seamănă" dar care, prin orice deplasare, nu pot fi suprapuse (din cauza „mărimii" lor). Aceste figuri se numesc *asemenea*.

Exemple

a)



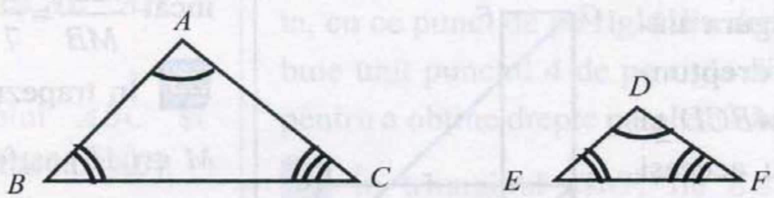
b)



c)

Definim în continuare noțiunea de asemănare pentru triunghiuri.

Definiție Fie triunghiurile ABC și DEF.



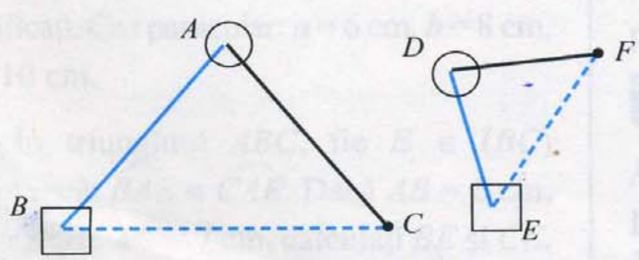
Între triunghiurile ABC și DEF există o asemănare dacă

$$\hat{A} \equiv \hat{D},\ \hat{B} \equiv \hat{E},\ \hat{C} \equiv \hat{F} \quad (1) \quad \text{și} \quad \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \quad (2).$$

Dacă între două triunghiuri există o asemănare, spunem că triunghiurile sunt asemenea.
Dacă sunt îndeplinite condițiile (1) și (2) scriem $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.
Ca și în cazul congruenței, între două triunghiuri pot exista mai multe asemănări.

Exemple Dacă ABC și DEF sunt triunghiuri echilaterale, atunci avem: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $\Delta ABC \sim \Delta EFG$ etc.

Când vorbim de asemănarea a două triunghiuri, trebuie să ținem cont, ca și la congruență, de corespondența dintre vârfuri și laturi.
Perechile de vârfuri (A, D), (B, E) și (C, F) se numesc *corespondente* (sau omoloage).
Perechile de laturi $([AB], [DE])$, $([AC], [DF])$ și $([BC], [EF])$ se numesc *corespondente* (sau omoloage).



$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$A \leftrightarrow D$	$AB \leftrightarrow DE$
$B \leftrightarrow E$	$AC \leftrightarrow DF$
$C \leftrightarrow F$	$BC \leftrightarrow EF$

Raportul lungimilor oricăror două laturi corespondente se numește *raportul de asemănare* a celor două triunghiuri.

Următoarele **proprietăți** ale relației de asemănare se deduc ușor din definiția dată.

1. Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, atunci $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (raportul lor de asemănare fiind 1).

2. Dacă raportul de asemănare a două triunghiuri asemenea este 1, atunci triunghiurile sunt congruente.

3. Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ și $\Delta A'B'C' \sim \Delta A''B''C''$, atunci $\Delta ABC \sim \Delta A''B''C''$.

4. $\Delta ABC \sim \Delta ABC$.

5. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, atunci $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$.

6. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ și $\Delta A'B'C' \sim \Delta A''B''C''$, atunci $\Delta ABC \sim \Delta A''B''C''$.

Temă: Justificați proprietățile enunțate anterior.

Teorema următoare oferă un exemplu important de triunghiuri asemenea.

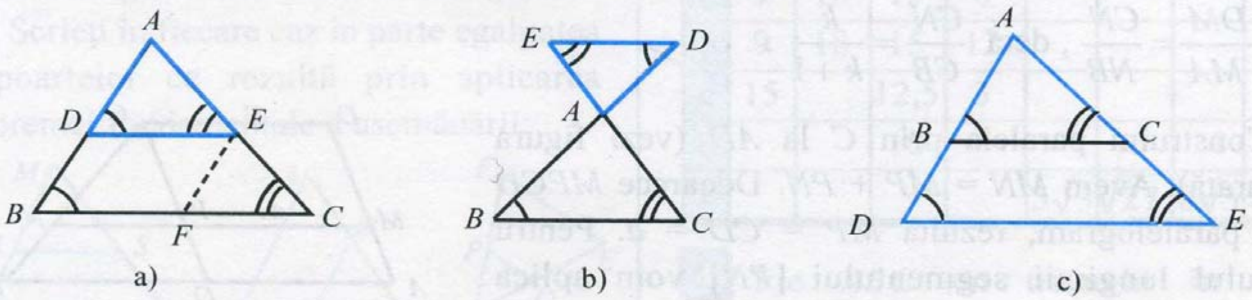
[Back](#)

7. Teorema fundamentală a asemănării

O paralelă la una dintre laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi (sau cu prelungirile lor) un triunghi asemenea cu cel dat.

Demonstrație

Considerăm triunghiul ABC și $DE \parallel BC$ ($D \in AB, D \neq A, E \in AC$).



Trebuie să demonstrăm că $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

Analizăm trei situații: a) $D \in (AB)$, b) $A \in (DB)$, c) $B \in (AD)$ (vezi figurile de mai sus).

Prezentăm demonstrația pentru cazul a) – celelalte cazuri tratându-se analog.

Deoarece $DE \parallel BC$, rezultă: $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ABC$, $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle ACB$ (unghiuri corespondente) și $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle BAC$.

Aplicând teorema lui Thales ($DE \parallel AB$), rezultă $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$.

Rămâne de arătat că $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$. Pentru aceasta, construim paralela EF la AB ($F \in BC$).

Aplicând din nou teorema lui Thales ($EF \parallel AB$), obținem $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BF}{BC}$.

Deoarece patrulaterul $BDEF$ este paralelogram, avem că $[BF] \equiv [DE]$ și de aici $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$.

Temă: Demonstrați că și în celelalte cazuri $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

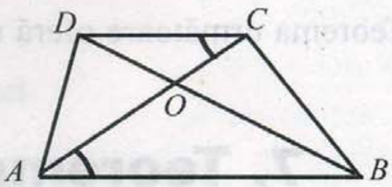
Remarcăm că teorema fundamentală a asemănării completează teorema lui Thales, având aceeași ipoteză, însă concluzia mai cuprinzătoare (referindu-se la toate laturile triunghiurilor ADE și ABC).

Back

Probleme rezolvate

1 Fie trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$) și O punctul de intersecție a diagonalelor. Demonstrați că $\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{OB}{OD}=\dfrac{AB}{CD}$.

R: Deoarece $AB \parallel CD$ rezultă, din teorema fundamentală a asemănării, că $\Delta AOB \sim \Delta COD$. Deci $\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{OB}{OD}=\dfrac{AB}{CD}$.

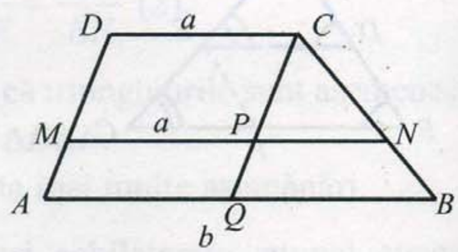


2 Se consideră trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AB=b, DC=a, a<b$ și $M \in (AD)$ astfel încât $\dfrac{DM}{MA}=k$. Calculați lungimea segmentului $[MN]$, $MN \parallel AB$ ($N \in BC$).

R: Conform teoremei paralelelor neechidistante, obținem:

$k=\dfrac{DM}{MA}=\dfrac{CN}{NB}$, deci $\dfrac{CN}{CB}=\dfrac{k}{k+1}$.

Construim paralela prin C la AD (vezi figura alăturată). Avem $MN = MP + PN$. Deoarece $MPCD$ este paralelogram, rezultă $MP = CD = a$. Pentru calculul lungimii segmentului $[PN]$ vom aplica teorema fundamentală a asemănării în triunghiul CQB ($PN \parallel QB$). Obținem:



$\dfrac{PN}{QB}=\dfrac{CN}{CB}=\dfrac{k}{k+1}$. Rezultă $PN = QB\cdot\dfrac{k}{k+1}=(b-a)\dfrac{k}{k+1}$.

Atunci $MN = MP + PN = a + (b-a)\dfrac{k}{k+1}=\dfrac{1}{k+1}a+\dfrac{k}{k+1}b$.

Cazuri particulare

1. $k=1$ (M este mijlocul segmentului $[AB]$, deci (MN) este linie mijlocie).

Obținem $MN=\dfrac{a+b}{2}$ (MN este media aritmetică a lungimilor bazelor).

2. $k = \frac{a}{b}$.

În acest caz $k = \frac{CD}{AB} = \frac{DO}{OB}$ (vezi figura problemei precedente). *MN* este segmentul paralel cu bazele, „dus“ prin punctul de intersecție a diagonalelor.

$MN = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ (*MN* se numește *media armonică* a lungimilor bazelor).

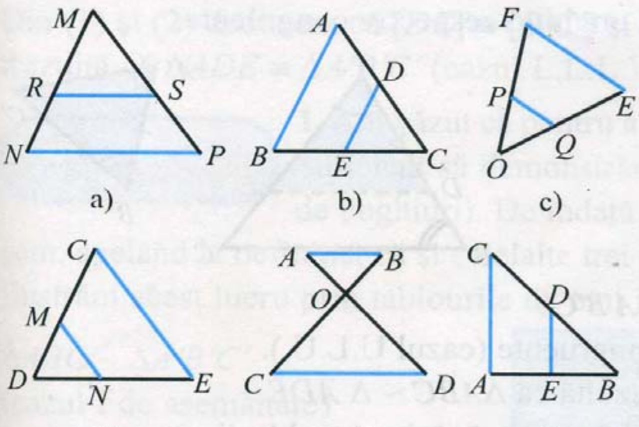
3. Pentru ce valoare a lui *k*, *MN* este media geometrică a lungimilor bazelor trapezului (adică $MN = \sqrt{ab}$)?

Din $\frac{1}{k+1}a + \frac{k}{k+1}b = \sqrt{ab}$ obținem: $a + kb = (k+1)\sqrt{ab} \Leftrightarrow k(b - \sqrt{ab}) = \sqrt{ab} - a \Leftrightarrow$ $k\sqrt{b}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) = \sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a})$. Deci $k = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Back

Exerciții

1 În desenele de mai jos dreptele suport ale segmentelor colorate sunt paralele. Scrieți în fiecare caz în parte egalitatea rapoartelor ce rezultă prin aplicarea teoremei fundamentale a asemănării:



a) b) c) d) e) f)

2 În triunghiul ABC, $D \in (AB$, $E \in AC$ și $DE \parallel BC$. Copiați și completați tabelul următor.

Analizați pentru fiecare caz, toate situațiile posibile.

	AB	AC	BC	AD	AE	DE	DB	EC
a	9	18	15	6				
b	9	18	15	12				
c	15		12,5	3				2,5
d			10			6	4	2
e					$5\sqrt{3}$	$\sqrt{27}$	$8\sqrt{3}$	$2\sqrt{75}$

3 Fie ABC un triunghi în care $AB = 18$ cm, $EF \parallel AB$ ($E \in AC$, $F \in BC$). Știind că $EC = 3$ cm, $FB = 6$ cm și $EF = 6$ cm, calculați perimetrul triunghiului ABC.

4 Fie MN o paralelă la latura AC a triunghiului ABC ($M \in AB$, $N \in BC$). Dacă perimetrul triunghiului BMN este de 24 cm, iar $\frac{BM}{BA} = \frac{1}{4}$, calculați perimetrul triunghiului ABC.

5 În triunghiul ABC, fie $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{5}$ și $\frac{CN}{CA} = \frac{5}{7}$.

Dacă $BC = 21$ cm, calculați lungimea segmentului $[MN]$.

6 Se consideră trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$) $AB = 3$ cm, $BC = 26$ cm, $DC = 22{,}5$ cm, $AD = 13$ cm. Fie M intersecția dreptelor AD și BC. Calculați: MA, MB, MC, MD.

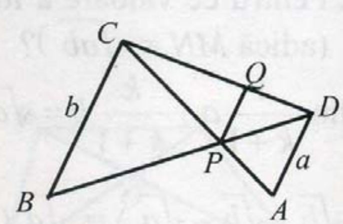
7 În paralelogramul $ABCD$ cu $AB = 18$ cm, $BC = 10$ cm, fie $E \in (DC)$ astfel încât $EC = \frac{1}{3}DC$. Dacă $AE \cap BC = \{F\}$, calculați EC și FC.

8 Fie $ABCD$ un trapez ($AD \parallel BC$) în care $AD = 4$, $BC = 13$. Fie $M \in (AB)$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{4}{5}$ și $MN \parallel AD$ ($N \in DC$). Calculați MN.

9 Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu $m(\hat{A}) = m(\hat{D}) = 90°$, $M \in (BC)$ astfel încât $\frac{CM}{MB} = \frac{1}{3}$ și $m(\sphericalangle MAD) = 60°$.

Știind că $AD = 18$ cm, calculați lungimea segmentului $[AM]$.

10 În figura alăturată, $AD \parallel BC \parallel PQ$. Calculați PQ.



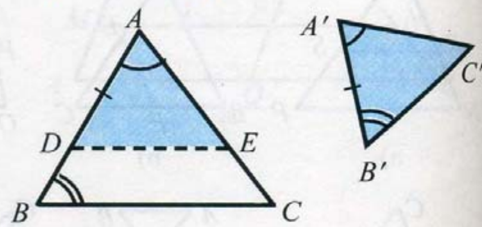
[Back]

8. Criterii de asemănare a triunghiurilor

Pentru a demonstra că două triunghiuri sunt asemenea, nu este nevoie să verificăm toate cele cinci condiții din definiția dată triunghiurilor asemenea (trei congruențe de unghiuri și două egalități de rapoarte). Așa cum rezultă din teoremele următoare, este suficient să verificăm doar două condiții. Ca și la congruența triunghiurilor, aceste teoreme vor fi numite cazuri (cazuri de asemănare).

Teorema 1. (cazul I de asemănare)

Două triunghiuri sunt asemenea dacă au două unghiuri respectiv congruente.



Demonstrație

Ipoteză: $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ și $\hat{B} \equiv \hat{B}'$.

Concluzie: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Fie $D \in (AB$ astfel încât $[AD] \equiv [A'B']$;

construim $DE \parallel BC, D \in (AC$.

Deoarece $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle A'B'C'$, rezultă $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$.

Rezultă că triunghiurile ADE și $A'B'C'$ sunt congruente (cazul U.L.U.).

Din teorema fundamentală a asemănării, rezultă că $\Delta ABC \sim \Delta ADE$.

Prin urmare $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (din proprietatea 3 a asemănării triunghiurilor).

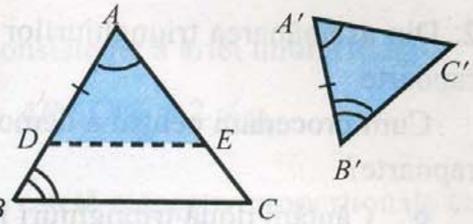
Teorema 2. (cazul II de asemănare)

Două triunghiuri sunt asemenea dacă au două laturi respectiv proporționale și unghiurile dintre laturile proporționale sunt congruente.

Demonstrație

Ipoteză: $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ și $\hat{A} \equiv \hat{A}'$

Concluzie: $\hat{B} \equiv \hat{B}', \hat{C} \equiv \hat{C}'$ și $\dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$.



Fie $D \in (AB$ astfel încât $AD = A'B'$, apoi construim $DE \parallel BC$, $E \in (AC$.

Atunci $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$. Însă $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ (din teorema fundamentală a asemănării), de unde rezultă că $A'C' = AE$.

Atunci $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$ (cazul L.U.L.). Deoarece $\Delta ABC \sim \Delta ADE$, obținem că $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

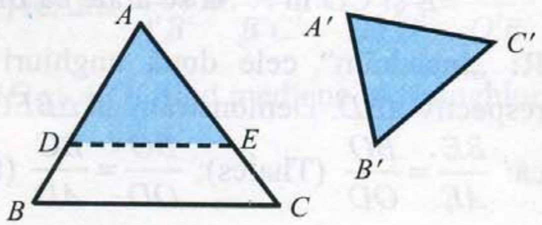
Teorema 3. (cazul III de asemănare)

Două triunghiuri sunt asemenea dacă au laturile respectiv proporționale.

Demonstrație

Ipoteză: $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$.

Concluzie: $\hat{A} \equiv \hat{A}', \hat{B} \equiv \hat{B}'$ și $\hat{C} \equiv \hat{C}'$.



Fie $D \in (AB$ astfel încât $[AD] \equiv [A'B']$.

Construim $DE \parallel BC$, $E \in (AC$; rezultă $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{A'C'}{AC}$ (1) .

Din teorema fundamentală a asemănării ($DE \parallel BC$) rezultă că $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AE}{AC}$ (2).

Din (1) și (2) deducem că $[DE] \equiv [B'C']$ și $[AE] \equiv [A'C']$.

Rezultă că $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$ (cazul L.L.L.). Prin urmare $\hat{A} \equiv \hat{A}'$; $\hat{B} \equiv \hat{D} \equiv \hat{B}'$; $\hat{C} \equiv \hat{E} \equiv \hat{C}'$.

Observații

1. Am văzut că pentru a demonstra asemănarea a două triunghiuri este suficient să demonstrăm doar două egalități (de rapoarte sau măsuri de unghiuri). De îndată ce știm că triunghiurile sunt asemenea, deducem, apelând la definiție, că și celelalte trei egalități sunt adevărate.

Ilustrăm acest lucru prin tablourile de mai jos.

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (cazul I de asemănare)	$\hat{A} \equiv \hat{A}'$; $\hat{B} \equiv \hat{B}'$	$\Rightarrow$	$\hat{C} \equiv \hat{C}'$; $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$
$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (cazul II de asemănare)	$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$; $\hat{A} \equiv \hat{A}'$	$\Rightarrow$	$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$; $\hat{B} \equiv \hat{B}'; \hat{C} \equiv \hat{C}'$
$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (cazul III de asemănare)	$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$	$\Rightarrow$	$\hat{A} \equiv \hat{A}'$; $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ $\hat{C} \equiv \hat{C}'$

2. Din asemănarea triunghiurilor putem deduce congruențe de unghiuri sau egalități de rapoarte.

Cum procedăm pentru a demonstra congruența a două unghiuri sau egalitatea a două rapoarte?

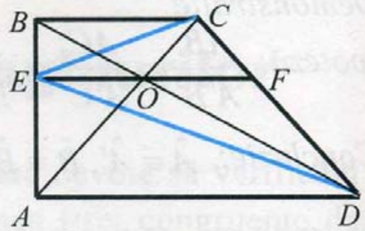
- Căutăm două triunghiuri în care unghiurile sau segmentele ce compun rapoartele sunt corespondente.
- Demonstrăm că triunghiurile sunt asemenea (printr-un caz de asemănare)

Pentru a deduce congruența a două unghiuri avem acum două metode: metoda triunghiurilor congruente și metoda triunghiurilor asemenea.

[Back]()

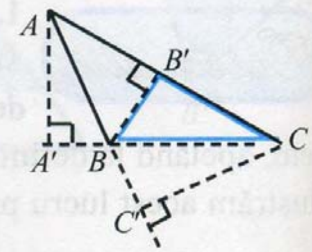
Aplicații

1 Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$ ($m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = 90°$). Prin punctul de intersecție a diagonalelor se construiește paralela la baze ce intersectează AB în E și CD în F. Să se arate că $\widehat{BEC} \equiv \widehat{AED}$.



R: „Încadrăm" cele două unghiuri în triunghiurile BEC, respectiv AED. Demonstrăm că $\Delta BEC \sim \Delta AED$. Observăm că: $\frac{BE}{AE} = \frac{BO}{OD}$ (Thales); $\frac{BO}{OD} = \frac{BC}{AD}$ (teorema fundamentală a asemănării în ΔAOD cu $BC \parallel AD$). Rezultă că $\frac{BE}{AE} = \frac{BC}{AD}$. Deoarece unghiurile dintre laturile $[BE]$ și $[BC]$, respectiv $[AE]$ și $[AD]$ sunt congruente (având măsura de $90°$), rezultă că $\Delta BEC \sim \Delta AED$ (cazul II de asemănare). Prin urmare: $\sphericalangle BEC \equiv \sphericalangle AED$ (unghiuri corespondente).

2 În orice triunghi produsul dintre lungimea unei laturi și lungimea înălțimii corespunzătoare ei este același.



R: Fie $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ înălțimile triunghiului ABC (vezi figura alăturată). Trebuie să demonstrăm că

$$BC \cdot AA' = AC \cdot BB' = AB \cdot CC'.$$

Vom demonstra că $BC \cdot AA' = AC \cdot BB'$, cealaltă egalitate demonstrându-se asemănător.

$BC \cdot AA' = AC \cdot BB' \Leftrightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{BB'}{AA'}$ (1). Segmentele $[BC]$ și $[BB']$ sunt laturi ale triunghiului $BB'C$. Segmentele $[AC]$ și $[AA']$ sunt laturi ale triunghiului $AA'C$. Pentru a demonstra egalitatea (1), este suficient să demonstrăm că $\Delta BB'C \sim \Delta AA'C$. Deoarece triunghiurile sunt dreptunghice, este suficient să demonstrăm congruența a două unghiuri ascuțite ale triunghiurilor. Observăm că unghiul C este comun.

Prin urmare triunghiurile sunt asemenea (cazul I de asemănare).

Perechile de laturi $[BC]$ și $[AC]$, respectiv $[BB']$ și $[AA']$ sunt corespondente (sunt opuse unghiurilor congruente). Deci $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ c.c.t.d.

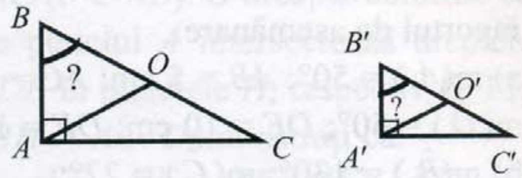
Observaţie Problema 2 stă la baza definiţiei consistente a ariei unui triunghi.

$$BC \cdot AA' = AC \cdot BB' = AB \cdot CC' = 2\mathcal{A}_{ABC}.$$

3 Dacă un triunghi dreptunghic are ipotenuza şi o catetă respectiv proporţionale cu ipotenuza şi o catetă a altui triunghi dreptunghic, atunci cele două triunghiuri sunt asemenea.

R: *Ipoteză:* $(BC, AB) \sim (B'C', A'B')$ (1).

Concluzie: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.



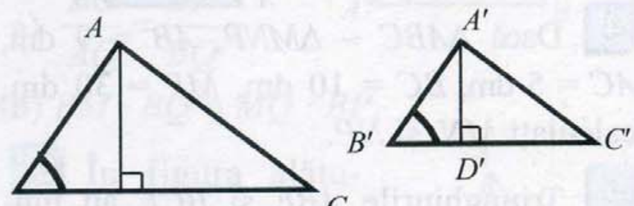
Deoarece triunghiurile sunt dreptunghice, este suficient să demonstrăm că două unghiuri ascuţite sunt congruente.

De exemplu, să arătăm că $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C$ (2).

Fie O şi O' mijloacele segmentelor $[BC]$, respectiv $[B'C']$. Pentru a demonstra (2), demonstrăm că $\Delta ABO \sim \Delta A'B'O'$. Într-adevăr, din (1) rezultă $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{2OB}{2O'B'} = \dfrac{OB}{O'B'}$, deci $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{OB}{O'B'}$. Dar $AO = \dfrac{BC}{2}$ şi $A'O' = \dfrac{B'C'}{2}$ (AO şi $A'O'$ fiind mediane în triunghiuri dreptunghice).

Prin urmare $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{OB}{O'B'} = \dfrac{AO}{A'O'}$, de unde rezultă că $\Delta ABO \sim \Delta A'B'O'$ (cazul III de asemănare), deci $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$.

4 Demonstraţi că raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului lor de asemănare.



R: Considerăm $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ şi $AD \perp BC$ $(D \in BC)$, $A'D' \perp B'C'$ $(D \in B'C')$. Din asemănarea triunghiurilor ABC şi $A'B'C'$, rezultă $\hat{B} \equiv \hat{B}'$. Deducem că $\Delta ABD \sim \Delta A'B'D'$ (cazul I de asemănare).

Deci $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AD}{A'D'}$.

$$\frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{A'B'C'}} = \frac{BC \cdot AD}{B'C' \cdot A'D'} = \frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AB}{A'B'} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2.$$

Back

Exerciții

Triunghiuri asemenea

1 Stabiliți în care dintre situațiile de mai jos triunghiurile ABC și DEF sunt asemenea. În caz de asemănare, precizați raportul de asemănare.

a) $m(\hat{A}) = 50°$; $AB = 5$ cm; $AC = 8$ cm; $m(\hat{D}) = 50°$; $DE = 10$ cm; $DF = 16$ cm.

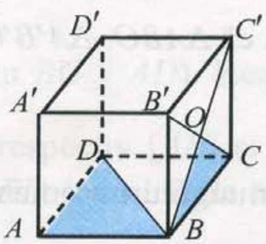
b) $m(\hat{B}) = 130°$; $m(\hat{C}) = 27°$; $m(\hat{D}) = 23°$; $m(\hat{E}) = 130°$;

c) $m(\hat{A}) = 30°$; $AB = 8$ cm; $AC = 7$ cm; $m(\hat{D}) = 30°$; $DE = 16$ cm; $DF = 15$ cm.

d) $AB = 5$ cm; $AC = 6$ cm; $BC = 7$ cm; $DE = 7{,}5$ cm; $DF = 9$ cm; $EF = 10{,}5$ cm.

2 Arătați că două triunghiuri dreptunghice isoscele sunt asemenea. Câte asemănări există între ele?

3 În figura alăturată este desenat un cub. Demonstrați că $\Delta ADB \sim \Delta OBC$.



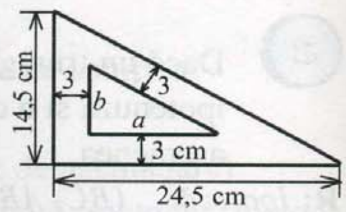
4 Dacă $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, $AB = 9$ dm, $AC = 5$ dm, $BC = 10$ dm, $MP = 30$ dm, calculați MN și NP.

5 Triunghiurile ABE și BCF au lungimile laturilor (în cm) 8, 6, 12, respectiv 12, 18 și 9. Demonstrați că triunghiurile sunt asemenea.

6 În triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) (BD este bisectoare ($D \in AC$) și $m(\widehat{BAC}) = 36°$. Demonstrați că $\Delta ABC \sim \Delta BDC$.

7 În ΔABC, $m(\hat{B}) = 45°$, $m(\hat{C}) = 75°$. Fie $D \in (BC)$ astfel încât $m(\widehat{BAD}) = 15°$. Demonstrați că $\Delta ADC \sim \Delta BAC$.

8 În figura alăturată este desenat un echer. Calculați raportul $\frac{a}{b}$.



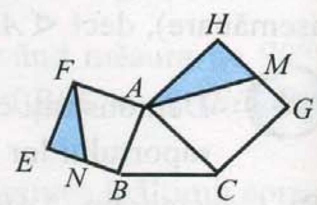
9 Demonstrați că în două triunghiuri asemenea raportul lungimilor medianelor corespunzătoare laturilor omoloage este egal cu raportul de asemănare a triunghiurilor.

10 Fie triunghiul ABC, $MN \parallel BC$ ($M \in (AB)$, $N \in (AC)$). Dacă $P \in (MN)$ și $Q \in (BC)$ astfel încât $\frac{PM}{PN} = \frac{QB}{QC}$, demonstrați că:

a) $\frac{MP}{BQ} = \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$; b) $\Delta AMP \sim \Delta ABQ$;

c) punctele A, P și Q sunt coliniare.

11 În figura alăturată $ACGH$ și $ABEF$ sunt pătrate, M și N sunt mijloacele segmentelor $[HG]$, respectiv $[BE]$. Demonstrați că $\Delta AHM \sim \Delta FEN$.



12 Punctele A', B', C' aparțin semidreptelor $(OA$, $(OB$, respectiv $(OC$, iar $A'B' \parallel AB$ și $B'C' \parallel BC$. Demonstrați că $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$.

13 Fie O un punct în interiorul triunghiului ABC.

a) Construiți cu rigla și compasul punctele $M \in (OA$, $N \in (OB$ și $P \in (OC$ astfel încât $\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{OC}{OP} = \frac{2}{3}$.

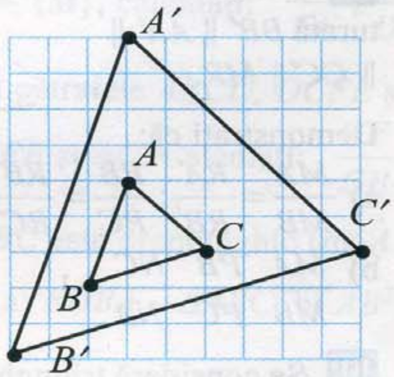
b) Demonstrați că $\Delta ABC \sim \Delta MNP$.

Back

14 Demonstrați că un triunghi este asemenea cu triunghiul determinat de mijloacele laturilor sale.

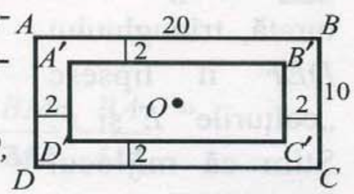
15 Raportul perimetrelor a două triunghiuri asemenea este $\frac{2}{5}$. Determinați raportul ariilor celor două triunghiuri.

16 În rețeaua din figura alăturată, triunghiul $A'B'C'$ are aria 36 (aria unui pătrat al rețelei fiind 1).



a) Demonstrați că $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.
b) Calculați aria triunghiului ABC.

17 În figura alăturată $ABCD$ și $A'B'C'D'$ sunt dreptunghiuri, iar O este centrul dreptunghiului $A'B'C'D'$.



a) Calculați dimensiunile dreptunghiului $A'B'C'D'$.
b) Sunt punctele O, B' și B coliniare?

Metoda triunghiurilor asemenea

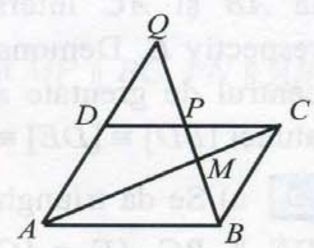
18 Fie M și N două puncte pe laturile $[AB]$, respectiv $[AC]$ ale triunghiului ABC astfel încât $\frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GM}$ (G fiind punctul de intersecție a dreptelor BN și CM). Demonstrați că $\sphericalangle MNB \equiv \sphericalangle NBC$.

19 Fie $ABCD$ un patrulater convex, $BC \nparallel AD$, $E \in (BC)$ și $F \in (AD)$ astfel încât $\frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FD} = \frac{AB}{CD}$. Construim paralelogramele $ABEG$ și $ECDH$.
Demonstrați că:
a) $AG \parallel DH$;
b) $\sphericalangle GFA \equiv \sphericalangle DFH$;
c) punctele G, F și H sunt coliniare;
d) EF este bisectoarea unghiului GEH.

20 Printr-un punct D al laturii $[BC]$ a ΔABC construim $DE \parallel AB$ ($E \in AC$), $DF \parallel AC$ ($F \in AB$). O dreaptă oarecare ce conține punctul A intersectează dreptele DF și DE în punctele H, respectiv G. Fie $\{I\} = BH \cap AC$. Demonstrați că:
a) $\frac{BF}{DE} = \frac{FD}{EC}$; $\frac{HF}{AE} = \frac{AF}{EG}$; $\frac{AF}{DE} + \frac{FD}{AE} = 1$;
b) $\sphericalangle AIB \equiv \sphericalangle ACG$.

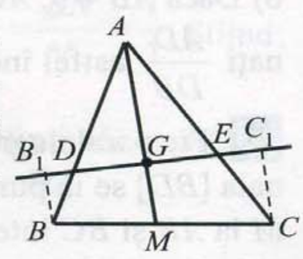
21 În triunghiul ABC, $AD \perp BC$, $(D \in BC)$. Bisectoarea unghiului ABC intersectează AD în E și perpendiculara în A pe AB în punctul F. Demonstrați că $\frac{AB}{BD} = \frac{BF}{BE}$.

22 În figura alăturată $ABCD$ este paralelogram.



Demonstrați că
a) $\frac{BC}{AQ} = \frac{BP}{BQ}$;
b) $BM \cdot BQ = MQ \cdot BP$.

23 În figura alăturată, $[AM]$ este mediană, $BB_1 \parallel CC_1 \parallel AM$ și G este centrul de greutate al triunghiului ABC.



Demonstrați că:
$\frac{BD}{DA} = \frac{BB_1}{AG}$ și $\frac{CE}{EA} = \frac{CC_1}{AG}$; $\frac{BD}{DA} + \frac{CE}{EA} = 1$.

24 Fie AM mediană în triunghiul ABC și $O \in (AM)$. O dreaptă oarecare prin O intersectează (AB) și (AC) în punctele D, respectiv E. Demonstrați că:
$$\frac{BD}{DA} + \frac{CE}{EA} = 2 \cdot \frac{OM}{OA}.$$

Back

Probleme recapitulative

1 Fie $[AB]$ un segment de lungime 24 cm și $M \in (AB)$ astfel încât $6AM = 5AB$.
a) Calculați lungimea segmentului $[AM]$;
b) Calculați $\frac{MB}{AB}$ și $\frac{NM}{AB}$ (N fiind mijlocul segmentului $[AM]$.

2 Demonstrați că există două puncte M și N pe dreapta AB pentru care $2MA = 3\,MB$ și $2NA = 3NB$. Construiți cu rigla și compasul aceste puncte.

3 Fie O intersecția diagonalelor trapezului $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Paralela prin O la baze intersectează (AD) în E, iar $AD \cap BC = \{F\}$. Demonstrați că E și F sunt conjugate armonic în raport cu A și D.

4 ABC este un triunghi oarecare, $[AM]$ este mediană, $P \in (AM)$. Paralelele prin P la AB și AC intersectează BC în D, respectiv E. Demonstrați că dacă P este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci $[BD] \equiv [DE] \equiv [EC]$.

5 a) Se dă triunghiul ABC, $D \in (AB)$, $DE \parallel BC$, $(E \in AC)$. Determinați $\frac{AD}{DB}$ știind că $\mathcal{A}_{ADE} = \mathcal{A}_{BCED}$.
b) Dacă $AB = 5$, $AC = 6$, $BC = 7$ determinați $\frac{AD}{DB}$ astfel încât $\mathcal{P}_{ADE} = \mathcal{P}_{BCED}$.

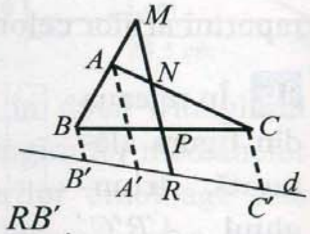
6 Fie paralelogramul $ABCD$. Pe diagonala $[BD]$ se ia punctul M. Paralelele prin M la AB și BC intersectează AD și DC în N, respectiv P. Demonstrați că $NP \parallel AC$.

7 În patrulaterul convex $ABCD$ paralela prin B la AD intersectează AC în E, iar paralela prin A la BC intersectează BD în F. Demonstrați că $\frac{OA}{OE} = \frac{OD}{OB}$; $\frac{OB}{OF} = \frac{OC}{OA}$; $EF \parallel CD$, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

8 În sistemul ortogonal xOy, fie $A(1; 12)$, $B(3; 10{,}4)$ și $C(6, 8)$. Sunt punctele A, B, C coliniare?

9 În triunghiul ABC, $M \in (AB)$ și $N \in AC$ astfel încât $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$. Este $MN \parallel BC$?

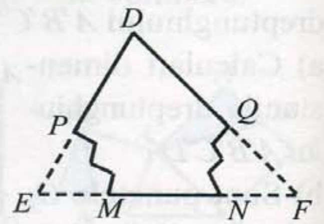
10 În figura alăturată $BB' \parallel AA' \parallel CC' \parallel MR$.



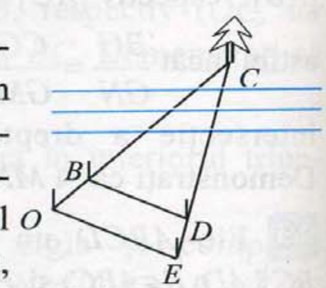
Demonstrați că:
a) $\frac{MA}{MB} = \frac{RA'}{RB'}$; $\frac{PB}{PC} = \frac{RB'}{RC'}$;
b) $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$.

11 Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N astfel încât $MN \parallel BC$, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$. Fie Q mijlocul segmentului $[MN]$ și $AQ \cap BC = \{P\}$. Demonstrați că P este mijlocul segmentului $[BC]$.

12 În figura alăturată, triunghiului DEF îi lipsesc „colțurile" E și F. Știm că mijlocul laturii $[EF]$ aparține segmentului $[MN]$. Construiți cu rigla și compasul centrul de greutate al triunghiului DEF considerând punctele E și F inaccesibile.



13 Desenul alăturat vă sugerează un mod de a afla distanța de la un observator, situat în punctul O pe malul unui râu, la copacul C situat pe celălalt mal. Spuneți cum trebuie alese punctele B, D, E, ce măsurători trebuie făcute și cum se poate calcula distanța OC.



[Back](#)

Teste de verificare

Testul 1

1. În paralelogramul $ABCD$ fie $E, F \in (CD)$ astfel încât $\frac{DE}{DC} = \frac{CF}{CD} = \frac{1}{3}$.

Dacă $AD \cap BF = \{M\}$, calculați: $\frac{DE}{EF}; \frac{DF}{DC}; \frac{MD}{MA}; \frac{BF}{FM}$.

2. Se consideră pătratele $ABCD$, $DCFE$ și $EFGH$, iar M și N intersecțiile dreptelor AG și EF, respectiv EB și AC. Calculați: $\frac{GF}{GB}; \frac{MF}{AB}; \frac{AM}{AG}; \frac{EN}{NB}$.

3. Triunghiul ABC este dreptunghic ($m(\hat{A}) = 90°$) și $AD \perp BC$, $D \in BC$.

Demonstrați că: a) $\Delta DBA \sim \Delta ABC$; b) $AB^2 = BD \cdot BC$; c) $AC^2 = DC \cdot BC$.

Barem: **1.** 2 p; **2.** 4 p; **3.** a) 1 p; b) 1 p; c) 1 p.

Timp de lucru: 40 min.

Testul 2

1. În triunghiul ABC, fie $M \in (AB)$, $N \in (BC)$ și $P \in AC$ astfel încât $MP \parallel BC$, $PN \parallel AB$ și $\frac{CP}{PA} = \frac{3}{4}$.

a) Calculați: $\frac{CN}{NB}; \frac{BM}{MA}; \frac{BA}{AM}$.

b) Este adevărată propoziția: $MN \parallel BC$? Justificați.

2. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $M \in (AD)$, $N \in (BC)$ astfel încât $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = \frac{1}{3}$. Știind că $AB = 10$ cm, $DC = 5$ cm, calculați MN.

3. Triunghiul ABC este isoscel ($[AB] \equiv [AC]$), AD și BE sunt înălțimi ($D \in BC$ și $E \in AC$), H este ortocentrul triunghiului. Demonstrați că $DC^2 = DH \cdot DA$.

Barem: **1.** a) 3 p; b) 1 p; **2.** 3 p; **3.** 2 p.

Timp de lucru: 45 min.

[Back](#)