#

1.4.1 Gheorghe Dumitrescu, 27 octombrie 2007, Craiova

1. Demonstraţi că pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$ există $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\left(m^4 - m^2 + 1\right)\left(n^4 - n^2 + 1\right)\left(m^4 + 3m^2 + 1\right)\left(n^4 + 3n^2 + 1\right) = x^2 + y^2.$$

Traian Tămâian, G.M. 7/2007

2. a) Dacă $a, b, c \in [0, \infty)$ atunci arătaţi că $[(a+b+c)/3]^3 \geq abc$.

   b) Folosind eventual punctul a) determinaţi maximul expresiei

$$x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + \ldots + x_{2005}x_{2006}x_{2007},$$

   unde $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{2005}, x_{2006}, x_{2007} \in [0, \infty)$ cu $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2007} = 2007$.

3. Fie $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ un poligon regulat cu n laturi înscris în cercul de centru O. Calculaţi suma

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}$$

   în fiecare din cazurile: a) n par; b) n impar.

Back

#

1.4.2 Nicolae Coculescu, Ziua 1, 30 noiembrie 2007, Slatina

1. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ şi $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\{kx\} = \{ky\}$ şi $\{(k+1)x\} = \{(k+1)y\}$. Să se arate că $\{nx\} = \{ny\}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Ovidiu Pop

2. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, \infty)$ şi $3abc = 1$, atunci are loc inegalitatea

$$\frac{3a^5}{3a^5 + 2bc} + \frac{3b^5}{3b^5 + 2ca} + \frac{3c^5}{3c^5 + 2ab} \geq 1.$$

Costel Anghel

3. Fie ABC un triunghi, punctele $M \in [AB]$, $N \in [AC]$, iar P şi Q mijloacele segmentelor $[MN]$ şi $[BC]$. Ştiind că PQ este paralelă cu bisectoarea unghiului A, arătaţi că $[BM] \equiv [CN]$.

Gheorghe Duţă

4. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n \geq 2$, există o unică partiţie a mulţimii $\{1, 2, ..., n\}$ în două mulţimi A_1, A_2 astfel încât $\lfloor \sqrt{x} \rfloor \neq y$, pentru orice $x, y \in A_k$, $k = 1, 2$.

Costin Bădică

Back

#

1.4.3 Nicolae Coculescu, Ziua 2, 1 decembrie 2007, Slatina

1. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi. Să se calculeze partea întreagă a numărului

$$x = \frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{(a^3+b^3+c^3)}.$$

Costel Anghel

2. Se consideră numărul real $u = 2+\sqrt{3}$.

a) Să se demonstreze că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, există $a_n, b_n \in \mathbb{N}, a_n > b_n$, astfel încât $u^n = a_n u - b_n$.

b) Să se arate că ecuaţia $x^2 - 4xy + y^2 = 1$ are o infinitate de soluţii în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Florian Dumitrel

3. Determinaţi mulţimile $A \subset \mathbb{N}^*$, cu cel puţin două elemente, având proprietatea că pentru orice $x, y \in A, x > y$, rezultă $\frac{x-y}{(x,y)} \in A$.

Marius Perianu

4. Fie M în interiorul triunghiului ABC. Se notează $\{D\} = AM \cap BC, \{E\} = BM \cap CA, \{F\} = CM \cap AB$. Să se determine punctul M pentru care produsul

$$\frac{MA}{MD} \cdot \frac{MB}{ME} \cdot \frac{MC}{MF}$$

are valoarea minimă.

***

Back

#

1.4.4 Unirea, 1 februarie 2008, Focşani

1. Fie progresiile aritmetice $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ şi $\mathbf{y} = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Să se arate că şirul $\mathbf{z} = (x_i \cdot y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ este o progresi aritmetică dacă şi numai dacă cel puţin una dintre progresiile $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ este constantă.

Dan Brânzei

2. Se consideră şirul $x_n = \alpha^n + a^{-n}$, unde $n \in \mathbb{N}$ şi $\alpha = 2 + \sqrt{3}$.

a) Să se arate că există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

b) Să se arate că $\{\alpha^n\} = 1 - \alpha^{-n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

***

3. Se dă triunghiul ABC, cu laturi de lungimi a, b, c şi cu semiperimetrul p. Se consideră punctele A_1, A_2 astfel ca $B \in [A_1C], C \in [BA_2]$ şi mijlocul A' al segmentului $[A_1A_2]$. Se definesc analog punctele B', C'. $A_1B = c, A_2C = b$. Să se arate că:

a) Segmentele $[AA'], [BB'], [CC']$ au în comun un punct N.

b) Pentru orice punct O din planul (ABC) are loc
$p \cdot \overrightarrow{ON} = (p-a) \cdot \overrightarrow{OA} + (p-b) \cdot \overrightarrow{OB} + (p-c) \cdot \overrightarrow{OC}$.

Dan Brânzei

4. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un şir strict crescător de numere impare. Notăm cu s_k suma primilor k termeni ai acestui şir. Să se arate că pentru orice k natural în inervalul $[s_k, s_{k+1}]$ se află cel puţin un pătrat perfect.

***

Back

#

1.4.5 Trepte în matematică, 16 februarie 2008, Călimăneşti

1. a) Să se arate că $|x-3| + |x-2| + |x-1| + |x+1| + |x+2| + |x+3| \geq 12$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Să se determine mulţimea valorilor lui x pentru care se obţine egalitatea.

b) Determinaţi $m \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât
$|x| + x^2 + ||x| - 1| + 6|x-2| + |x^2 - 1| + 3|2x+1| \geq m, \forall x \in \mathbb{R}$.

Stabiliţi mulţimea valorilor lui x pentru care se obţine egalitatea.

Florian Pană, Călimăneşti

2. Să se rezolve ecuaţiile

a) $\left\lfloor \frac{2x+2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2x-1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2x-4}{2} \right\rfloor = 2\sqrt{x^2 - x}$ în $\mathbb{Z}$.

b) $\left\lfloor \frac{2x+2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2x-1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2x-4}{2} \right\rfloor = \lfloor 2\sqrt{x^2 - x} \rfloor$ în $\mathbb{R}$, unde $\lfloor a \rfloor$ reprezintă parta întreagă a numărului a.

Florian Pană, Călimănești

3. Se consideră mulţimea $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} : x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Arătaţi că mulţimea A este nevidă.

b) Indicaţi 2008 elemente ale mulţimii A.

Vasile Buşagă, Călimănești

4. Fie $[BD$ şi $[CE$ bisectoare în triunghiul ABC, $E \in (AB)$, $D \in (AC)$.

a) Arătaţi că vectorii $\overrightarrow{ED}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari dacă şi numai dacă $\angle B = \angle C$.

b) În condiţiile de la punctul a) determinaţi $\left|\overrightarrow{ED}\right|$ în funcţie de $BC = l$, pentru cazurile

i) $\angle A = 90°$ şi ii) $\angle A = 36°$.

Florian Pană, Călimănești

Back

#

1.4.6 Mathematica - modus vivendi, 22-24 februarie, Rm Vâlcea

1. Să se rezolve ecuaţia: $\lfloor x^2 \rfloor + 1 = 2\lfloor x \rfloor$, unde $\lfloor x \rfloor$ reprezintă partea întreagă a numărului x.

Laurenţiu Panaitopol, București

2. În triunghiul ABC, cu $AB < AC, AB = 2BD$ unde $[AD$ este bisectoarea $\angle BAC, D \in (BC)$.

a) Demonstraţi că $IG \| BC$ unde G este centrul de greutate al triunghiului şi I este centrul cercului înscris triunghiului ABC.

b) Dacă $BC = 3AG$ arătaţi că $3a^2 = 2bc$, unde a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului.

Ion Ghica, Râmnicu Vâlcea

3. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \infty)$ astfel încât $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S$. Să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{a_k + a_{k+1}}{2S - a_k - a_{k+1}}} \geq 2,$$

unde $a_{n+1} = a_1$. Precizaţi când are loc egalitatea.

Dumitru Acu, Sibiu

4. Se consideră triunghiul ABC şi punctele D, Q, E cu proprietăţile:

$$D \in (AB), Q \in (CD), C \in (BE) \text{ şi } \frac{AB}{AD} = \frac{CQ}{QD} = \frac{BE}{BC}.$$

Se mai consideră şi punctele F şi M aşa încât

$$CE \| DF, DC \| FE, DE \cap FQ = \{M\}.$$

Să se arate că punctele Q, M şi F sunt coliniare dacă şi numai dacă $2 + \frac{AB}{AD} = \frac{DE}{DM}$.

Nicolae Pavelescu, Râmnicu Vâlcea

Back

#

1.4.7 Cezar Ivănescu, 15 martie 2008, Târgovişte

1. Demonstraţi că pentru orice numere reale nenule a, b, c, d, x, y are loc inegalitatea

$$\frac{(a + b\sin x)^2 + (c + d\sin y)^2 + (a + b\cos x)^2 + (c + d\cos x)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \leq 3.$$

Dinu Teodorescu

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{2}{x^2} + 3$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^*$. Calculaţi

$$S = \sum_{k=2}^{2007} \frac{1}{f(k) - 2}.$$

Gazeta Matematică

3. Să se aşeze numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 în tabelul de mai jos, astfel încât fiecare număr să apară o singură dată, iar sumele numerelor pe fiecare din cele trei linii şi cele patru coloane să fie cele scrise pe prima linie, respectiv prima coloană. Justificare!

$\sum$	21	10	18	29
24				
15				
39				

Adrian Atanasiu

Back

#

1.4.8 Gheorghe Lazăr, 21-23 martie 2008, Sibiu

1. Dacă $a_1, a_2, ..., a_n \in [0,1]$, să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{a_1}{a_1a_2+n-1}+\frac{a_2}{a_2a_3+n-1}+...+\frac{a_n}{a_na_1+n-1}\leq 1.$$

Alin Pop, Sibiu

2. Fie n un număr natural, $n \geq 3$ şi $2n$ numere reale $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ care constituie o progresie aritmetică de raţie $r \neq 0$. Arătaţi că oricum am alege submulţimea A cu $n+2$ elemente, $A \subset \{a_1, a_2, ..., a_{2n}\}$, există cel puţin două elemente distincte în A având suma $2(a_1+nr)$.

Dumitru Acu, Sibiu

3. Fie $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}$, $n \geq 4$, vectori în plan (nu neapărat diferiţi), pentru care:

$$|\overrightarrow{v_1}|+|\overrightarrow{v_2}|+...+|\overrightarrow{v_n}|=1.$$

a) Presupunând în plus că, că toţi vectorii sunt coliniari, arătaţi că există I o submulţime nevidă de indici, $I \subset \{1,2,...,n\}$, astfel încât $\left|\sum_{i\in I}\overrightarrow{v_i}\right|\geq\frac{1}{2}$.

b) În cazul general, demonstraţi că există J o submulţime nevidă de indici, $J \subset \{1,2,...,n\}$, astfel încât $\left|\sum_{j\in J}\overrightarrow{v_i}\right|>\frac{1}{4}$.

Dumitru Barac, Sibiu

4. Se consideră un triunghi ABC ascuţitunghic, $\angle B < 60^\circ$ şi P un punct oarecare din interiorul triunghiului (notaţiile sunt cele obilnuite). Definim funcţia $f : \text{Int}[\triangle ABC] \to (0,\infty)$, $f(X) = \min\{XM+MN+NP : M \in [BC], N \in [AB]\}$. Să se arate că există un singur punct Y în planul triunghiului având proprietatea $\frac{HY}{f(H)}=\frac{GY}{f(G)}=\frac{OY}{f(O)}$ şi să se precizeze modul de construcţie al lui Y.

Emanuel Vlad, Bucureşti

Back

#

1.4.9 Sfera, 22 martie 2008, Băileşti

Partea I.

1. Dacă $S = \sum_{n=1}^{1000} \lfloor\sqrt{n}\rfloor$, unde $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ este partea întreagă a lui n, atunci:

   a) $S = 20000$; b) $S = 20001$; c) $S = 20615$; d) $S = 20715$

2. Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $2008\,(x-1) + \lfloor x\rfloor$, unde $\lfloor x\rfloor$ reprezintă partea întreagă a lui x este:

   a) 0; b) 1; c) 2; d) 3

3. Dacă $S = \sum_{m\in A} m$, unde

   $$A = \{m \in \mathbb{Z} : \text{ecuaţia } x^2 - 2mx + m + 3 = 0 \text{ admite o rădăcină întreagă}\}$$

   atunci:

   a) $S = 7$; b) $S = 1$; c) $S = 10$; d) $S = 0$

4. Fie $x, y, z > 0$ astfel încât $x + y + z = xy + yz + zx$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$. Dacă $P = xyz$ atunci:

   a) $P = 0$; b) $P = \frac{1}{2}$; c) $P = 1$; d) $P = 2$

5. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat şi punctele $M \in (AC)$, $N \in (CE)$ astfel încât $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = k$. Valoarea lui k pentru care punctele B, M, N sunt coliniare este:

   a) $\frac{1}{2}$; b) 1; c) $\sqrt{3}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Cătălin Cristea, Craiova

Back

#

Partea a II-a

1. Fie M mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ABC. Notăm cu I şi J centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABM şi ACM. Dacă $\angle AIB - \angle MIJ = 90^\circ$, să se demonstreze că $[AB] \equiv [AC]$.

Marius Perianu şi Florian Dumitrel, Slatina

2. Fie $a, b, c > 0$. Demonstraţi că

$$a\sqrt{ab} + b\sqrt{bc} + c\sqrt{ca} \leq a^4 + b^4 + c^4 + \frac{3}{4}.$$

Cătălin Cristea, Craiova

Back

#

1.4.10 Traian Lalescu, 28-30 martie 2008, Deva

1. a) Să se arate că dacă $x, y \in (0, \infty)$ au produsul 1, atunci

$4 + x^2 + y^2 \geq 3(x + y)$.

b) Fie a, b, c, d numere reale pozitive cu $abcd = 1$. Să se arate că

$8 + (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq 3(a + b)(c + d)$.

Andrei Eckstein

2. Fie $k \in \mathbb{R}$ fixat.Să se determine mulţimea valorilor expresiei $\dfrac{(a+b+c)^3}{abc}$, unde a, b, c sunt numere reale nenule astfel încât $\dfrac{b+kc}{a} = \dfrac{c+ka}{b} = \dfrac{a+kb}{c}$.

Andrei Eckstein

3. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc de centru O. Notăm cu H_A, H_B, H_C şi H_D ortocentrele triunghiurilor BCD, CDA, DAB, respectiv ABC, iar cu G_A, G_B, G_C, G_D centrele de greutate ale acestor triunghiuri.

a) Demonstraţi că patrulaterele $H_AH_BH_CH_D$ şi $G_AG_BG_CG_D$ sunt inscriptibile.

b) Fie O_H şi O_G centrele cercurilor circumscrise patrulaterelor $H_AH_BH_CH_D$ şi $G_AG_BG_CG_D$. Arătaţi că punctele O, O_G şi O_H sunt coliniare.

Dorel Miheţ

4. Fie $n_0 \in \mathbb{N}$. Aflaţi numărul funcţiilor $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cu proprietăţile:

i) $f(f(n) + n) = f(n), \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $f(n_0) = 1$.

Dorel Miheţ

Back

#

1.4.11 Alexandru Myller, 11-13 aprilie 2008, Iaşi

1. Determinaţi numărul soluţiilor ecuaţiei

$$\frac{\lfloor x \rfloor}{\{x\}} = \frac{2007x}{2008}.$$

Mihail Bălună

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x^6 + x^5 + 4 = y^2$.

Ion Cucurezeanu

3. Fie $ABCDE$ un pentagon convex. Demonstraţi că

$$\frac{\text{aria}\,(ABC)}{\text{aria}(ABCD)} + \frac{\text{aria}\,(CDE)}{\text{aria}\,(BCDE)} < 1.$$

Dan Ismailescu

4. Fie C_1, C_2 două cercuri concentrice distincte şi $[AB]$ un diametru al cercului C_1. Considerăm două puncte variabile $M \in C_1, N \in C_2$, nesituate pe dreapta AB.

a) Arătaţi că există şi sunt unic determinate punctele P, Q situate pe dreptele MA, respectiv MB, astfel încât N să fie mijlocul segmentului $[PQ]$.

b) Arătaţi că suma $AP^2 + BQ^2$ este constantă, unde P, Q sunt definite la punctul a).

Mihai Piticari, Mihail Bălună

Back

#

1.4.12 Gheorghe Ţiţeica, 22-24 mai 2008, Drobeta Tr. Severin - Proba individuală

1. Găsiţi cel mai mic număr real A astfel încât pentru orice două pătrate având suma ariilor egală cu 1 există un dreptunghi de arie A în care pot fi introduse

cele două pătrate (fără ca interioarele celor două pătrate să se suprapună). Se va considera că laturile pătratelor sunt paralele cu laturile dreptunghiului.

***

2. Fie n şi k numere naturale nenule cu $k < n$ şi fie $x_1, ..., x_n$ numere reale pozitive.

(i) Să se arate că dacă $\sum_{i=1}^{n} x_i \le 1$, atunci

$$\frac{x_1}{x_2(x_3 + ... + x_{k+2})} + \frac{x_2}{x_3(x_4 + ... + x_{k+3})} + ... + \frac{x_n}{x_1(x_2 + ... + x_{k+1})} \ge \frac{n^2}{k};$$

(ii) Să se arate că dacă $\prod_{i=1}^{n} x_i \ge 1$, atunci

$$\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + kx_1x_2 + x_2^2} + \frac{x_2^3 + x_3^3}{x_2^2 + kx_2x_3 + x_3^2} + ... + \frac{x_n^3 + x_1^3}{x_n^2 + kx_nx_1 + x_1^2} \ge \frac{2n}{k+2}.$$

Constantin Cristian Dinu

3. Fie $f : [a, b] \to [-1, 1]$ o funcţie cu proprietatea că

$$(f \circ f)(x) = \frac{2x+1}{x+2}, \forall x \in [a, b].$$

Să se demonstreze că $f(a) + f(b) = 0$.

Romeo Ilie, Gazeta Matematică 7-8/1998

Back

#

1.4.13 Gheorghe Ţiţeica, 22-24 mai 2008, Drobeta Tr. Severin - Proba pe echipe

1. Să se găsească toate soluţiile reale ale sistemului

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_n = a \\ x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = a^2 \\ ... \\ x_1^n + x_2^n + ... + x_n^n = a^n \end{cases}$$

unde $a \in \mathbb{R}$ este dat.

***

2. Fie $d_1, d_2, ..., d_k$ toţi divizorii naturali ai numărului natural n, astfel încât

$1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n.$

Să se determine toate numerele n pentru care $k \geq 4$ şi

$n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2.$

***

Back

#

1.4.14 Concursul interjudeţean "Papiu Ilarian", Târgu Mureş

1. Fie a, b, c numere reale pozitive.Pentru fiecare număr natural n definim suma:

$$S_n = \frac{a^n b^n}{a^{2n+3} + b^{2n+3} + a^n b^n} + \frac{b^n c^n}{b^{2n+3} + c^{2n+3} + b^n c^n} + \frac{c^n a^n}{c^{2n+3} + a^{2n+3} + c^n a^n}$$

   Să se arate că:

   a)$S_n \leq S_{n-1}, \forall n \geq 1$;

   b)Dacă $abc = 1$ atunci $S_n \leq 1, \forall n \geq 1$.

2. Fie ecuaţiile de gradul doi: $x^2 - ax + b = 0$ şi $y^2 - bx + a = 0$.

   a)Să se arate că există o infinitate de perechi (a, b) de numere întregi pentru care ambele ecuaţii au rădăcinile întregi.

   b)Să se determine toate perechile (a, b) de numere naturale pentru care ambele ecuaţii au rădăcinile naturale.

3. Să se determine toate funcţiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ cu proprietatea:

$$f(m \cdot n) = (m, f(n)) \cdot [n, f(m)], \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

   (s-a notat (x, y) =c.m.m.d.c. şi $[x, y]$ =c.m.m.m.c. al numerelor x şi y).

4. Într-un cub cu muchia egală cu 1 se consideră n sfere cu suma ariilor suprafeţelor lor egală cu 32.

   a)Să se arate că există o dreaptă care taie cel puţin 9 sfere.

   b)Să se arate că există un plan care taie cel puţin 11 sfere.

Back

#

5.4.1 Gheorghe Dumitrescu, 27 octombrie 2007, Craiova

1. $\left(m^4-m^2+1\right)\left(n^4-n^2+1\right)\left(m^4+3m^2+1\right)\left(n^4+3n^2+1\right)=$
$\left(\left(m^2-1\right)^2+m^2\right)\left(\left(n^2-1\right)^2+n^2\right)\left(\left(m^2+1\right)^2+m^2\right)\left(\left(n^2+1\right)^2+n^2\right)$.
Vom folosi *identitatea lui Lagrange:* $\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+d^2\right) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$.

Astfel $\left(m^4-m^2+1\right)\left(n^4-n^2+1\right)\left(m^4+3m^2+1\right)\left(n^4+3n^2+1\right)=$
$[\left(\left(m^2-1\right)\left(n^2-1\right)+mn\right)^2 + \left(\left(m^2-1\right)n - \left(n^2-1\right)m\right)^2][\left(\left(m^2+1\right)\left(n^2+1\right)+mn\right)^2+\left(\left(m^2+1\right)n-\left(n^2+1\right)m\right)^2]$
şi concluzia rezultă tot din această identitate.

2. a) Se efectuează calculele şi inegalitatea revine la a arăta că $\sum\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 6$, adevărat.

b) Majorăm suma din enunţ prin
$\left(x_1+x_4+...+x_{2005}\right)\left(x_2+x_5+...+x_{2006}\right)\left(x_3+x_6+...+x_{2007}\right) \leq \left(\dfrac{x_1+x_2+...+x_{2007}}{3}\right)^3 = 669^3$. Egalitatea se poate atinge pentru $x_1=x_2=x_3=669$ şi $x_i=0, i=4,5,...,2007$.

3. a) Suma este $\overrightarrow{0}$ dacă poligonul are un număr par de laturi.

b) Fie S suma celor n vectori. Fiecare vârf se proiectează în mijlocul unei laturi "opuse" corespunzătoare. Suma a doi vectori cu extremităţile în capetele unei laturi este un vector coliniar cu vectorul care are extremitatea în vârful opus, adică putem scrie $v_k+v_{k+1}=\alpha v_{k+(n+1)/2}, \alpha<0$. Dar atunci $2S=\alpha S$ deci $S=0$.

Back

#

5.4.2 Nicolae Coculescu, Ziua 1, 30 noiembrie 2007, Slatina

1. Din $\{kx\} = \{ky\} \Rightarrow kx - ky \in \mathbb{Z}$ şi din $\{(k+1)x\} = \{(k+1)y\} \Rightarrow kx - ky + x - y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = y + t, t \in \mathbb{Z}$ astfel că $\{nx\} = \{ny + nt\} = \{ny\}$.

2. $\sum \frac{3a^5}{3a^5 + 2bc} = \sum \frac{9a^6}{9a^6 + 6abc} = \sum \frac{9a^6}{9a^6 + 2} \geq \frac{(3a^3 + 3b^3 + 3c^3)^2}{9a^6 + 9b^6 + 9c^6 + 6} \geq 1 \Leftrightarrow 18 \sum a^3b^3 \geq 6$ şi ultima inegalitate rezultă din inegalitatea mediilor.

3. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC} = \frac{MB}{c}\overrightarrow{AB} + \frac{NC}{b}\overrightarrow{AC}$ iar $\overrightarrow{AD} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC} \Rightarrow PQ \| AC \Leftrightarrow [BM] \equiv [CN]$.

4. Modul de "construcţie" al partiţiei este bine determinat. Fie $1 \in A_1$. Atunci $2, 3 \in A_2 \Rightarrow 4, 5, 6, ..., 15 \in A_1$. $4^2, ..., 16^2 - 1 \in A_2, 16^2, ..., 16^4 - 1 \in A_1 ...$ şi în general

$$A_1 = \left\{2^0, 2^2, ..., 2^4 - 1, 2^8, ..., 2^{16} - 1, ..., 2^{2^k}, ..., 2^{2^{k+1}} - 1\right\},$$

$$A_2 = \left\{2^1, 2^2 - 1, 2^4, ..., 2^8 - 1, ..., 2^{2^{k-1}}, ..., 2^{2^k} - 1\right\}.$$

Back

#

5.4.3 Nicolae Coculescu, Ziua 2, 1 decembrie 2007, Slatina

1. $x = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)}{a^3 + b^3 + c^3} = 1 + \frac{\sum a^2(b+c)}{a^3 + b^3 + c^3} > 1 + \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^3 + b^3 + c^3} = 2$ (din inegalitatea triunghiului).

   Pe de altă parte $x = 1 + \frac{\sum ab(a+b)}{a^3 + b^3 + c^3} \leq 1 + \frac{\sum (a^3 + b^3)}{a^3 + b^3 + c^3} = 3$. În concluzie $\lfloor x \rfloor = 3$ când triunghiul este echilateral şi $\lfloor x \rfloor = 2$ în rest.

2. a) Găsim $a_1 = 1, b_1 = 0, a_2 = 4, b_2 = 1$ şi demonstrăm prin inducţie că există $a_n > b_n$ astfel încât $u^n = ua_n - b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

   $u^{n+1} = u^n \cdot u = (a_n(2 + \sqrt{3}) - b_n)(2 + \sqrt{3}) = 7a_n - 2b_n + (4a_n - b_n)\sqrt{3}$. Punem $a_{n+1} = 7a_n - 2b_n$ şi $b_{n+1} = 4a_n - b_n$.

   b) $(x - 2y)^2 - 3y^2 = 1$. Este suficient să arătăm că ecuaţia $X^2 - 3Y^2 = 1$ are o infinitate de soluţii. Dar aceasta este o *ecuaţie Pell* cu soluţia minimală $(X, Y) = (2, 1)$ şi soluţia generală (X_n, Y_n) unde $X_n + Y_n\sqrt[a]{3} = (2 + \sqrt{3})^n$,

$X_n, Y_n \in \mathbb{Z}$. Se demonstrează prin inducţie că dacă (X_n, Y_n) este soluţie atunci şi (X_{n+1}, Y_{n+1}) este soluţie. Într-adevăr

$X_{n+1} + Y_{n+1}\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^n \cdot (2+\sqrt{3}) = (2+\sqrt{3})(X_n + Y_n\sqrt{3}) = 2X_n + 3Y_n + (X_n + 2Y_n)\sqrt{3}$ şi $X_{n+1} = 2X_n + 3Y_n$ şi $Y_{n+1} = X_n + 2Y_n$. Acum $X_{n+1}^2 - 3Y_{n+1}^2 = X_n^2 - 3Y_n^2 = 1$ şi soluţia se încheie.

3. Fie A o mulţime cu proprietatea din ipoteză şi $x_1 < x_2 < x_3 < ...$ elementele sale.

Fie $d = (x_1, x_2)$. Evident $\dfrac{x_2 - x_1}{(x_1, x_2)} < x_2$ deci $\dfrac{x_2 - x_1}{(x_1, x_2)} = x_1$. Dacă $x_1 = dx_1'$ şi $x_2 = dx_2'$, $\left(x_1', x_2'\right) = 1$ atunci $x_2' - x_1' = dx_1' \Rightarrow x_2' = x_1'(1+d) \Rightarrow x_1' = 1$ deci $x_1 = d$ şi $x_2 = d(d+1)$. Mulţimile A de câte 2 elemente $\{d, d(d+1)\}$ satisfac ipoteza. Să căutăm mulţimi A cu cel puţin 3 elemente. Dacă $(x_3, d) = 1$ atunci $x_3 - d \in A$ deci $x_3 - d = d$ sau $x_3 - d = d(d+1)$. Dacă $x_3 - d = d \Rightarrow x_3 = 2d$, imposibil. Deci $x_3 = d(d+2)$. Atunci $\dfrac{d(d+2) - d(d+1)}{d} = 1 \in A$ deci $d = 1$ şi pentru orice element $x_k \in A$ reiese că $x_k - 1 \in A$. De aici rezultă că toate mulţimile A de tipul $\{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, ...$ împreună cu cele de mai sus satisfac ipoteza.

4. Cu Teorema lui Menelaus obţinem

$$\frac{MA}{MD} = \frac{BC}{BD} \cdot \frac{EA}{EC} = \frac{BC}{CD} \cdot \frac{FA}{FB}, \frac{MB}{ME} = \frac{CA}{CE} \cdot \frac{FB}{FA} = \frac{CA}{AE} \cdot \frac{BD}{DC}, \frac{MC}{MF} =$$

$$= \frac{AB}{AF} \cdot \frac{CD}{DB} = \frac{AB}{BF} \cdot \frac{CE}{EA}.$$

Atunci $\left(\dfrac{MA}{MD} \cdot \dfrac{MB}{ME} \cdot \dfrac{MC}{MF}\right)^2 = \dfrac{BC^2}{BD \cdot CD} \cdot \dfrac{CA^2}{CE \cdot EA} \cdot \dfrac{AB^2}{AF \cdot FB} \geq 64$ deci $\dfrac{MA}{MD} \cdot \dfrac{MB}{ME} \cdot \dfrac{MC}{MF} \geq 8$, cu egalitate când M este centrul de greutate al triunghiului.

Back

#

5.4.4 Unirea, 1 februarie 2008, Focşani

1. Fie r_x, r_y, r_z raţiile celor 3 progresii. Avem $x_n = x_0 + nr_x$, $y_n = y_0 + nr_y$ şi $z_n = z_0 + nr_z, \forall n \in \mathbb{N}$.

Dar $z_0 + nr_z = z_n = x_n y_n = x_0 y_0 + nx_0 r_x + ny_0 r_y + n^2 r_x r_y \Rightarrow r_z = x_0 r_x + y_0 r_y + nr_x r_y, \forall n \in \mathbb{N}$. Deducem imediat că $r_x = 0$ sau $r_y = 0$.

2. a) $a = 4, b = -1$. Într-adevăr, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat prin recurenţa $x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$ cu termenii iniţiali $x_0 = 2, x_1 = 4$ are ecuaţia caracteristică $x^2 - 4x + 1 = 0$ şi soluţiile $x_1 = 2 - \sqrt{3}, x_2 = 2 + \sqrt{3}$ şi temenul general $x_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n = \alpha^n + \alpha^{-n}$.

b) Şirul de la punctul a) este de fapt şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $x_n = \alpha^n + \alpha^{-n}$. Dar acest şir are toţi termenii numere întregi. Cum $0 < \alpha^{-n} < 1 \Rightarrow \{\alpha^{-n}\} = \alpha^{-n}$. Cum $\alpha^n, \alpha^{-n} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ şi $\lfloor\alpha^n\rfloor + \lfloor\alpha^{-n}\rfloor + \{\alpha^n\} + \alpha^{-n} \in \mathbb{Z}$ concluzia se impune.

3. a) Se găseşte că $BA' = p - c$, $CA' = p - b$, $CB' = p - a$, $AB' = p - c$, $AC' = p - b$, $BC' = p - a$. Totul rezultă acum din teorema lui Ceva.

b) Se găseşte $\dfrac{NC'}{NC} = \dfrac{p-c}{c}$ şi $\overrightarrow{AN} = \dfrac{p-b}{p}\overrightarrow{AB} + \dfrac{p-c}{p}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{ON} = \dfrac{p-a}{p}\overrightarrow{OA} + \dfrac{p-b}{b}\overrightarrow{OB} + \dfrac{p-c}{c}\overrightarrow{OC}$

Remarcă. Punctele A', B', C' sunt punctele de tangenţă ale cercurilor exînscrise cu laturile iar N este *punctul lui Nagel*. Se ştie că N are coordonatele baricentrice $\left(\dfrac{p-a}{p}, \dfrac{p-b}{p}, \dfrac{p-c}{p}\right)$.

Back

#

5.4.5 Trepte în matematică, 16 februarie 2008, Călimăneşti

1. a) $|x-3| + |x-2| + |x-1| + |x+1| + |x+2| + |x+3| = |3-x| + |2-x| + |1-x| + |x+1| + |x+2| + |x+3| \geq 12$.

Egalitate pentru $x \in [-1, 1]$.

b) $|x| + x^2 + ||x|-1| + 6|x-2| + |x^2-1| + 3|2x+1|$

$= |x| + |x^2| + ||x|-1| + |-6x+12| + |-x^2+1| + |6x+3|$

$\geq |x + |x| + 15| = 15$ pentru $x \leq 0$. Deci $m = 15$ iar egalitatea se poate atinge pentru $x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right)$.

2. a) $x = 1$.

b) Evident $0 \leq x \leq 1$. Dacă $0 \leq x < \frac{1}{2}$ nu obţinem soluţii. Dacă $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ atunci $0 = \left\lfloor 2\sqrt{x - x^2}\right\rfloor$

Dar se verifică uşor că $0 \leq x - x^2 < \frac{1}{2}\ \forall x \in [0,1]$. În concluzie $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

3. Vom arăta că există o infinitate de numere întregi k astfel încât ecuaţia $x^2 - kx + 1 = 0$ să aibă rădăcini iraţionale. Rădăcinile sunt de forma $x_{1,2} =$

$\dfrac{k \pm \sqrt{k^2-4}}{2}$. Numărul k^2-4 este pătrat perfect doar pentru $k \in \{-2, 2\}$. În rest numărul $\dfrac{k \pm \sqrt{k^2-4}}{2}$ este iraţional.

4. a) Totul rezultă din teorema lui Thales şi din teorema bisectoarei.

   b) Dacă $\angle A = 90°$ atunci $AB = AC = \frac{l}{\sqrt{2}}$. Din teorema asemănarii şi teorema bisectoarei $\frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AB+BC} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \Rightarrow \left|\overrightarrow{ED}\right| = \frac{l}{1+\sqrt{2}}$. Dacă $\angle A = 36°$ atunci $AD = BD$ şi $\frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{AB} = \frac{\sin 36°}{\sin 72°} = \frac{1}{2\cos 36°} \Rightarrow \left|\overrightarrow{ED}\right| = \frac{l}{2\cos 36°}$. Altfel, să observăm că $ED = BE = CD$ şi în trapezul isoscel (deci inscriptibil) $BCDE$ cu teorema lui Ptolemeu obţinem $ED \cdot l + BE^2 = EC^2$ iar $CE = AE$, $AE = \frac{ED}{l} \cdot AB$ etc.

   Remarcă. Valoarea $\cos 36°$ poate fi efectiv calculată folosind faptul că $\cos 2 \cdot 36° = -\cos 3 \cdot 36°$ şi apoi utilizând formulele unghiului dublu şi triplu.

Back
#

5.4.6 Mathematica - modus vivendi, 22-24 februarie, Rm Vâlcea

1. Este clar că $x \geq 0$. Avem $\lfloor x^2 \rfloor + 1 \geq x^2$ şi $2\lfloor x \rfloor \leq 2x$ deci $x \leq 2$. Obţinem $x \in [1, \sqrt{2})$.

2. a) Din teorema bisectoarei $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{2DC}$ de unde $AC = 2DC$. Prin urmare $2a = b + c$.

   Exprimăm vectorii $\overrightarrow{IG}$ şi $\overrightarrow{BC}$ în funcţie de $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

   Astfel $\overrightarrow{IG} = \dfrac{a+c-2b}{3(a+b+c)}\overrightarrow{AB} + \dfrac{a+b-2c}{3(a+b+c)}\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Dreptele IG şi BC sunt paralele dacă şi numai dacă $-\dfrac{a+c-2b}{3(a+b+c)} = \dfrac{a+b-2c}{3(a+b+c)} \Leftrightarrow$ $2a = b + c$ şi demonstraţia se încheie.

   b) Triunghiul ABC este dreptunghic în A, deci $a^2 = b^2 + c^2$. Dar $4a^2 = b^2 + c^2 + 2bc$, de unde $3a^2 = 2bc$.

3. Rescriem inegalitatea ca

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{a_k + a_{k+1}}{2S - a_k - a_{k+1}}} \geq 2 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} (a_k + a_{k+1}) \sqrt{\frac{1}{(2S - a_k - a_{k+1})(a_k + a_{k+1})}} \geq 2.$$

   Dar $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + a_{k+1}) \sqrt{\frac{1}{(2S - a_k - a_{k+1})(a_k + a_{k+1})}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k + a_{k+1})}{S} = 2.$

Egalitatea se poate atinge pentru $a_1 = a_2 = \dfrac{1}{2}S$. Pentru $k \geq 3$ inegalitatea este strictă.

Back

#

5.4.7 Cezar Ivănescu, 15 martie 2008, Târgovişte

1. Din inegalitatea *Cauchy-Schwarz* obţinem

$$(a + b\sin x)^2 \leq (a^2 + b^2)(1 + \sin^2 x)$$
$$(c + d\sin y)^2 \leq (c^2 + d^2)(1 + \sin^2 y)$$
$$(a + b\cos x)^2 \leq (a^2 + b^2)(1 + \cos^2 x)$$
$$(c + d\cos x)^2 \leq (c^2 + d^2)(1 + \cos^2 x)$$

Sumând inegalităţile avem

$$\frac{(a + b\sin x)^2 + (c + d\sin y)^2 + (a + b\cos x)^2 + (c + d\cos x)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \leq$$

$$2 + \frac{(a^2 + b^2)(\sin^2 x + \cos^2 x) + (c^2 + d^2)(\sin^2 y + \cos^2 y)}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = 3,$$ şi inegalitatea este demonstrată.

2. Este natural să scriem relaţia funcţională şi pentru $\dfrac{1}{x}$. Obţinem

$f(x) + 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{2}{x^2} + 3$ şi $f\left(\dfrac{1}{x}\right) + 2f(x) = 2x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 3$. De aici reiese că $f(x) = x^2 + 1$.

Urmează că

$$2S = \sum_{k=2}^{2007} \frac{2}{f(k) - 2} = \sum_{k=2}^{2007} \frac{2}{k^2 - 1} = \sum_{k=2}^{2007} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{2007} \frac{1}{k+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2006} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2006} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2008}\right)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2007} - \frac{1}{2008}.$$

3.

$\sum$	21	10	18	29
24	7	3	5	9
15	4	1	2	8
39	10	6	11	12

Back

5.4.8 Gheorghe Lazăr, 21-23 martie 2008, Sibiu

1. Cum $a_i \in [0,1]$ rezultă că $\dfrac{a_1}{a_1a_2+n-1} \leq \dfrac{a_1}{a_1a_2...a_n+n-1}$ şi analoagele. Prin adunarea celor n inegalităţi obţinem că $\dfrac{a_1}{a_1a_2+n-1} + \dfrac{a_2}{a_2a_3+n-1} + ... + \dfrac{a_n}{a_na_1+n-1} \leq \dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{a_1a_2...a_n+n-1}$. Vom arăta că $a_1+a_2+...+a_n \leq a_1a_2...a_n+n-1$.

   Ştim că dacă $x,y \in [0,1] \Rightarrow (1-x)(1-y) \geq 0$ sau $x+y \leq xy+1$.

   Astfel avem $a_1+a_2+...+a_n \leq a_1a_2+1+a_3+...+a_n+n-2 \leq a_1a_2a_3+1+a_4+...+a_n+n-3 \leq ...$

   Repetând acest raţionament de $n-1$ ori vom obţine în final inegalitatea dorită.

2. Să luăm următoarele mulţimi de două elemente cu suma $2(a_1+nr)$: $\{a_2,a_{2n}\},\{a_3,a_{2n-1}\},...,\{a_n,a_{n+2}\}$, precum şi mulţimile $\{a_1\}$ şi $\{a_{n+1}\}$. Din principiul cutiei se vede uşor că oricum am selecta $n+2$ termeni ai progresiei vor exista 2 elemente care fac parte din aceeaşi mulţime şi problema se încheie.

3. a) Evident există un vector $\overrightarrow{v}$ de modul nenul. Fie acesta $\overrightarrow{v_1}$. Atunci $\overrightarrow{v_k} = a_k \cdot \overrightarrow{v_1}$ cu $a_k \in \mathbb{R}$.

   Dar $1 = \displaystyle\sum_{1\leq k\leq n} |\overrightarrow{v_k}| = \left|\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ a_k<0}} a_k\right| \overrightarrow{v_1} + \left|\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ a_k\geq 0}} a_k\right| \overrightarrow{v_1}$. Unul din cei 2 termeni ai acestei sume este cu siguranţă cel puţin egal cu $\dfrac{1}{2}$ şi alegem I mulţimea indicilor k respectivi.

   b) Fie $\overrightarrow{v_k} = x_k\overrightarrow{i} + y_k\overrightarrow{j}$, unde $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ sunt versori.

   Avem $1 = \displaystyle\sum_{1\leq k\leq n} |\overrightarrow{v_k}| = \sum_{1\leq k\leq n} \sqrt{x_k^2+y_k^2} \leq \sum_{1\leq k\leq n} (|x_k|+|y_k|) = \left|\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ x_k<0}} x_k\right|$

   $$+\left|\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ x_k\geq 0}} x_k\right| + \left|\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ y_k<0}} y_k\right| + \left|\sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ y_k\geq 0}} y_k\right|.$$

   Cu siguranţă una din cele 4 sume este cel puţin egală cu $\frac{1}{4}$ şi luăm J mulţimea de indici cu această proprietate. În cazul în care se realizează egalitatea, rămân 3 termeni cu suma 1, deci există o sumă mai mare sau egală cu $\frac{1}{3}$, deci mai mare decât $\frac{1}{4}$.

4. Pentru orice punct X avem că $f(X) = X'M_0 + M_0N_0 + N_0P' = X'P'$, unde X' este simetricul lui X față de BC, P' simetricul lui P față de AB și M_0, N_0 intersecțiile dintre dreapta $X'P'$ și BC respectiv AB. Să notăm acum $k = \frac{HY}{f(H)} = \frac{GY}{f(G)} = \frac{OY}{f(O)}$ și presupunem că $k \neq 1$. Dar atunci dacă Y' este simetricul lui Y față de BC, avem $k = \frac{HY}{f(H)} = \frac{H'Y'}{H'P'}$. Există punctele S, T astfel încât $\frac{SY'}{SP'} = \frac{TY'}{TP'}$ și atunci H' se află pe *cercul lui Apollonius* corespunzător diametrului ST. Dar analog se arată că G', O' se află și ele pe acest cerc. Însă H', G', O' sunt coliniare (se află pe simetrica *dreptei lui Euler* față de BC), imposibil. Atunci $k = 1$ iar punctul Y este simetricul lui Y' față de BC, unde Y' este simetricul lui P' față de d', d' este simetrica dreptei Euler față de BC iar P' simetricul lui P față de AB.

Back

#

5.4.9 Sfera, 22 martie 2008, Băilești

Partea I.

1. 1. c) 2. a) 3. b) 4. c) 5. d)

Back

#

Partea a II-a.

1. Fie $K = AM \cap IJ. \angle AIB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle AMB = 90^\circ + \angle MIJ \Rightarrow \angle JIM = \angle IMK$. Cum $\angle IMJ = 90^\circ$ rezultă că MK este mediana laturii IJ. Presupunem prin absurd că cele 2 cercuri nu sunt tangente. Ducem $IS \perp AM$ și $JT \perp AM$ $(S, T \in AM)$ și obținem $\triangle ISK \equiv \triangle JTK$ deci razele celor 2 cercuri sunt egale. Dar $\frac{1}{2}S_{ABC} = S_{AMB} = S_{AMC} = p_1 r = p_2 r$, unde p_1, p_2 sunt semiperimetrele celor 2 triunghiuri și r raza cercurilor înscrise. Așadar $p_1 = p_2$ și concluzia se impune.

2. Din inegalitatea mediilor $\sum a^4 + \frac{3}{4} = \sum\left(a^4 + \frac{1}{4}\right) \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{2}\sum a(a+b) \geq \sum a\sqrt{ab}$.

Back

#

5.4.10 Traian Lalescu, 28-30 martie 2008, Deva

1. a) Fie $S = a + b$. Avem de arătat că $S^2 - 3S + 2 \geq 0$ sau $(S-1)(S-2) \geq 0$, adevărat pentru că $S \geq 2$.

b) Să punem $x = ac, y = bd, z = ad, t = bc$. Aplicând inegalitatea de la a) obţinem $4 + x^2 + y^2 + 4 + z^2 + t^2 \geq 3(x + y + z + t) = 3(a + b)(c + d)$.

2. Dacă $a + b + c \neq 0 \Rightarrow \dfrac{b + kc}{a} = \dfrac{c + ka}{b} = \dfrac{a + kb}{c} = k + 1$. De aici obtinem sistemul

$$\begin{cases} b + kc = (k+1)a \\ c + ka = (k+1)b \\ a + kb = (k+1)c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a - c = k(c - b) \\ b - a = k(a - c) \\ c - b = k(b - a) \end{cases} \Longrightarrow a = b = c \text{ şi}$$

$$\frac{(a+b+c)^3}{abc} = 27.$$

Se arată uşor că în cazul $a + b + c = 0 \Rightarrow a = b = c$.

3. a) Din relaţia lui Sylvester obţinem că $\overrightarrow{OH_A} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ şi analoagele. Observăm mai departe că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OH_A} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH_B} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OH_C} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH_D} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OQ}$. Din $\overrightarrow{OH_A} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ} \Rightarrow \overrightarrow{QH_A} = \overrightarrow{AO}$ şi analoagele. Rezultă că $QH_A = OA = QH_B = OB = QH_C = OC = QH_D = OD$ ceea ce înseamnă că patrulaterul $H_AH_BH_CH_D$ este inscriptibil.

Ştim că $\overrightarrow{H_AG_A} = \overrightarrow{2G_AO}$ şi analoagele de unde reiese că patrulaterul $G_AG_BG_CG_D$ are laturile paralele cu $H_AH_BH_CH_D$ deci este inscriptibil.

b) Este clar că O este centrul omotetiei de centru O şi coeficient 2 care duce patrulaterul $G_AG_BG_CG_D$ in $H_AH_BH_CH_D$. Această omotetie duce cercul circumscris patrulaterului $G_AG_BG_CG_D$ în cercul circumscris lui $H_AH_BH_CH_D$, deci duce centrul O_G în centrul O_H şi de aici deducem coliniaritatea celor 3 puncte.

4. Pentru $n = n_0$ avem $f(n_0 + 1) = f(n_0) = 1$. Pentru $n = n_0 + 1$ obţinem $f(n_0 + 2) = 1$ şi se vede uşor că $f(n) = 1, \forall n \geq n_0$. În continuare fie $f(n_0 - 1) \geq 1$. Pentru $n = n_0 - 1 \Rightarrow f(n_0 - 1) = 1$. Dacă $f(n_0 - 2) \geq 2$ atunci punem $n = n_0 - 2$ şi din cele de mai sus rezultă $1 = f(n_0 - 2)$, imposibil. La fel arătăm că $f(n) \in \{0, 1\}$ dacă $n \leq n_0 - 1$. Dar dacă m este minim cu proprietatea că $f(m) = 1$ se observă imediat că $f(n) = 1, \forall n \geq m$ şi $f(n) = 0\ \forall n < m$. În concluzie sunt n_0 funcţii.

Back

#

5.4.11 Alexandru Myller, 11-13 aprilie 2008, Iaşi

1. Să observăm că $x > 0$. Să scriem $x = m + \alpha$, unde $m = \lfloor x \rfloor$ iar $\alpha = \{x\}$, $m \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in (0,1)$. Avem ecuaţia $\frac{m}{\alpha} = \frac{2007\,(m+\alpha)}{2008} \Leftrightarrow 2007\alpha^2 + 2007m\alpha - 2008m = 0$. Dacă $m \geq 2007$ atunci $2007 \leq 2007m\,(1-\alpha) + m = 2007\alpha^2 < 2007$, absurd. Deci $0 < m < 2007$. Arătăm că pentru fiecare $0 < m < 2007$ găsim un $\alpha \in (0,1)$ corespunzător. Fie $f(\alpha) = 2007\alpha^2 + 2007m\alpha - 2008m$. Avem $\triangle_\alpha \geq 0$, deci ecuaţia $f(\alpha) = 0$ are rădăcini, iar din relaţiile lui Viète reiese că o rădăcină este pozitivă şi cealaltă negativă. Cum $f(0) = -2008m < 0$ este suficient să arătăm că $f(1) > 0$, ceea ce se vede imediat. Atunci ecuaţia are 2006 soluţii.

2. Numărul $64x^6 + 64x^5 + 256$ trebuie să fie pătrat perfect. Să încercăm o încadrare a acestei expresii tip polinom între 2 pătrate perfecte. Avem $(8x^3 + 4x^2 - x)^2 = 64x^6 + 64x^5 + 16x^3 + x^2$ şi $(8x^3 + 4x^2 - x + 1)^2 = 64x^6 + 64x^5 + 8x^3 + 9x^2 - 2x + 1$. Pentru $|x| \geq 3$ numărul $64x^6 + 64x^5 + 256$ este cuprins între $(8x^3 + 4x^2 - x)^2$ şi $(8x^3 + 4x^2 - x + 1)^2$ deci nu poate fi pătrat perfect. Rămân de analizat posibilităţile $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ care conduc la soluţiile $(x, y) \in \{(-2, \pm 6), (-1, \pm 2), (0, \pm 2), (2, \pm 10)\}$.

Remarcă. Cu toate că cele 2 pătrate de expresii polinomiale nu sunt tocmai uşor de găsit, este natural să căutăm un poliom $f(x)$ de grad 3 şi coeficient dominant 8. Apoi pentru a obţine termenul $64x^5$ trebuie să adăugăm în expresia lui $f(x)$ şi pe $4x^2$. Adăugând şi pe $-x$ (pentru a mai reduce eventual din termenii care apar în plus) ridicăm la pătrat pe $f(x)$ şi obţinem ce ne dorim.

3. Fie $M = AC \cap BD$, $N = BD \cap CE$. Notăm d_1, d_2 distanţele de la B şi D la AC, d_3, d_4 distanţele de la B şi D la CE.

Atunci $\frac{\text{aria}\,(ABC)}{\text{aria}\,(ABCD)} = \frac{1}{1 + \frac{d_2}{d_1}} = \frac{BM}{BD}$ şi $\frac{\text{aria}\,(CDE)}{\text{aria}\,(BCDE)} = \frac{DN}{BD}$ şi evident $\frac{BM}{BD} + \frac{DN}{BD} < 1$.

4. a) Fie d simetrica dreptei AM faţă de N. $d \| AM \Rightarrow d \cap BM \neq \emptyset$, fie $Q = d \cap BM$. Dacă P este simetricul lui Q faţă de N este clar că P se află pe dreapta AM. Punctele P şi Q sunt cele căutate şi sunt unic determinate (unicitatea se demonstrează uşor).

b) $2\overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} \Rightarrow 4ON^2 = AP^2 + BQ^2 =$constant, deoarece $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ} = 0$, AB fiind diametru.

Back

#

5.4.12 Gheorghe Ţiţeica, 22-24 mai 2008, Drobeta Tr. Severin - Proba individuală

1. Să notăm x şi y lungimile laturilor celor 2 pătrate. Evident "lungimea" dreptunghiului este $x+y$ iar "lăţimea" este mai mare sau egală cu $\max(x,y)$. Dar suma ariilor celor 2 pătrate este egală cu $x^2+y^2=1$. Trebuie de fapt sa găsim maximul expresiei $x(x+y)$ în ipoteza $x^2+y^2=1$. Putem sa punem $x=\cos t$ şi $y=\sin t$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. Atunci $x(x+y)=\cos^2 t+\sin t\cos t=\frac{\cos 2t+\sin 2t+1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)\leq\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

2. (i) Să notăm $s_i=x_{i+2}+...+x_{i+k}$, pentru toţi i.

   Din inegalitatea mediilor $\sum_i\frac{x_i}{x_{i+1}(x_{i+2}+...+x_{i+k})}\geq n\sqrt[n]{\prod_i\frac{x_i}{x_{i+1}}\cdot\prod_i\frac{1}{s_i}}$.

   Dar $\prod_i\frac{x_i}{x_{i+1}}=1$ (1)

   şi

   $$\frac{1}{\sqrt{\prod_i s_i}}\geq\frac{n}{\sum_i s_i}=\frac{n}{k\sum_i x_i}\geq\frac{n}{k} \qquad (2)$$

   Din relaţiile (1) şi (2) obţinem inegalitatea dorită.

   (ii) Cum $x_1^2+kx_1x_2+x_2^2\geq(k+2)x_1x_2\Rightarrow\frac{(k+1)x_1x_2}{x_1^2+kx_1x_2+x_2^2}\leq\frac{k+1}{k+2}\Rightarrow 1-\frac{(k+1)x_1x_2}{x_1^2+kx_1x_2+x_2^2}\geq\frac{1}{k+2}\Rightarrow\frac{x_1^2-x_1x_2+x_2^2}{x_1^2+kx_1x_2+x_2^2}\geq\frac{1}{k+2}\Rightarrow\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^2+kx_1x_2+x_2^2}\geq\frac{x_1+x_2}{k+2}$. Prin sumarea inegalităţilor analoage rezultă concluzia.

3. Să observăm mai întâi că $f(x)\in[-1,1]$ apare ca argument pentru f prin $f\circ f$. Înseamnă că $a\leq-1$ şi $b\geq1$. Pentru $x=a$ în relaţia dată obţinem $-1\leq\frac{2a+1}{a+2}\leq1\Leftrightarrow-1\leq a\leq1$. Analog $-1\leq b\leq1$. Cu necesitate $a=-1$ iar $b=1$.

   $f(f(f(x)))=f\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)=\frac{2f(x)+1}{f(x)+2}$. Pentru $x=1,-1$ găsim $f(1)$, $f(-1)\in\{-1,1\}$. Cum funcţia f este bijectivă nu putem avea $f(1)=f(-1)$ deci $f(a)+f(b)=f(1)+f(-1)=0$.

Back

#

5.4.13 Gheorghe Ţiţeica, 22-24 mai 2008, Drobeta Tr. Severin - Proba pe echipe

1. Pentru $n = 1$ sau $n = 2$ se vede uşor că soluţiile sunt $x_1 = a$ respectiv $(x_1, x_2) \in \{(0,a),(a,0)\}$. Fie $n \geq 3$. Dacă $a = 0 \Rightarrow x_i = 0$. Dacă $a \neq 0$ împărţim egalitatea $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = a^2$ prin a^2 şi obţinem $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} + ... + \frac{x_n^2}{a^2} = 1$. În particular $\frac{x_i}{a} \leq 1$ şi deci $1 = \frac{x_1^3}{a^3} + \frac{x_2^3}{a^3} + ... + \frac{x_n^3}{a^3} \leq \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} + ... + \frac{x_n^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x_i}{a} = 1 \Rightarrow x_i = a$. Mai avem şi soluţiile $x_i = a$ şi $x_j = 0$, $\forall j \in \{1, 2, ..., n\} - \{i\}$.

2. n este par, deci $d_2 = 2$. Cum $d_1 = 1$ rezultă că d_3 şi d_4 au parităţi diferite. Să zicem că $d_3 = 2d$. Presupunem că $n \not\vdots 4$. Cum $d_3 = 2d$, d impar, atunci d_4 este impar şi $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \equiv 0 \pmod 4$, contradicţie. Deci $n \vdots 4$ şi $d = 2$, $d_3 = 4$. Dar atunci $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \equiv 2 \pmod 4$, absurd. Deci $d_4 = 2d_3$, d_3 prim. Cum d_3 este divizor al lui $n \Rightarrow d_3 \mid 5$, $d_3 = 5$ şi $n = 130$.

Remarcă. Problema a fost propusă de Bulgaria la Olimpiada Balcanică de Matematică desfăşurată în anul 1989 la Split.