1. *Cristian Calude, Galati* (enunturi, solutii)
2. *Centre de excelenta Moldova, Suceava* (enunturi, solutii)
3. *Cezar Ivanescu, Targoviste* (enunturi, solutii)
4. *Gheorghe Lazar, Sibiu* (enunturi, solutii)
5. *Modus Vivendi, Valcea* (enunturi, solutii)
6. *Grigore Moisil, Cluj Napoca* (enunturi, solutii)
7. *Alexandru Myller, Iasi* (enunturi, solutii)
8. *Papiu Ilarian, Targu Mures* (enunturi, solutii)
9. *Traian Lalescu, Deva* (enunturi, solutii)
10. *Unirea, Focsani* (enunturi, solutii)

#

3.2.1 Concursul "Cristian Calude", Galaţi

1. a)Fie $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $X + Y = X \cdot Y$ pentru orice $X, Y \in \{A, B, C, D\}$.Să se arate că $2(A + B + C + D) = ABCD$.

   b)Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Să se rezolve, în mulţimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ecuaţia $X^n = A$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ fixat.

2. Fie $x_0 = 0$ şi $x_i \in (0, \infty), i \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel încât $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

   a)Dacă $\theta_0 = 0$ şi $\theta_i = \arcsin(x_0 + x_1 + \cdots x_i)$ pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$, atunci să se demonstreze că

$$\cos\theta_{i-1} = \sqrt{1 + x_0 + x_1 + \cdots x_{i-1}} \cdot \sqrt{x_i + x_{i+1} + \cdots x_n},$$

   pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

   b)Să se demonstreze că

$$1 < \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1 + x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1}} \cdot \sqrt{x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n}} < \frac{\pi}{2}.$$

3. a)Fie numerele reale strict pozitive a, b, c şi şirurile $(x_n)_{n\geq 0}, (y_n)_{n\geq 0}, (z_n)_{n\geq 0}$ astfel încât $x_0 = a$, $y_0 = b$, $z_0 = c$ şi pentru orice număr natural n avem recurenţele $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n + z_n}{3}$, $y_{n+1} = \frac{x_n \cdot y_n + y_n \cdot z_n + z_n \cdot x_n}{x_n + y_n + z_n}$, $z_{n+1} = \frac{3x_n \cdot y_n \cdot z_n}{x_n \cdot y_n + y_n \cdot z_n + z_n \cdot x_n}$.Să se arate că şirurile $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$, $(z_n)_{n\geq 0}$ sunt convergente şi să se calculeze limita fiecăruia.

   b)Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit astfel $a = \frac{1}{C_n^0} + \frac{1}{C_n^1} + \cdots \frac{1}{C_n^n}$.Demonstraţi că $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n(a_n - 2) = 2$.

Back

#

3.2.2 Concursul centrelor de excelenţă din Moldova, Suceava

1. Fiind date matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, să se dovedească relaţia:

$$|\det(A+iB)|^2 = \det(A^2+B^2) - tr((BA-AB)^*(A^2+B^2)).$$

2. Să se arate că există un şir de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$ cu $x_n \in \left(\frac{1}{2n\pi+\frac{3\pi}{2}}, \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)$ astfel ncât $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2x_n \sin\frac{1}{x_n} - \cos\frac{1}{x_n}\right) = \frac{2}{\pi}$.

3. Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(0 < a < b)$ două funcţii continue pe $[a,b]$ şi derivabile pe (a,b).Dacă g este strict crescătoare atunci există $c \in (a,b)$, astfel încât $\frac{2}{g(a)-g(c)} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \frac{2}{g(b)-g(c)}$.

4. Să se demonstreze că, dacă $a \in (0, 2\sqrt{2}]$, atunci $|\ln a + a - 1| \geq \sqrt{2}|a-1|$.

Back

#

3.2.3 Concursul "Cezar Ivănescu", Târgovişte

1. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale strict pozitive astfel încât şirul $y_n = n(x_{n+1}-x_n)$ este mărginit.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(x_{n+1}-x_n) = 0$ şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^{\frac{2n+1}{x_n}}$.

2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $A + A^t = O_n$.Demonstraţi că determinatul matricei $I_n - A^2$ este pătrat perfect, iar determinantul matricei $I_n + A^2$ este sumă de două pătrate perfecte.

3. Fie $a < b$ şi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie Rolle cu proprietăţile:

   a)$af(b) = bf(a)$;

   b)$f(x) \neq 0, \forall x \in [a,b]$.

   Demonstraţi că există $c \in (a,b)$ astfel încât $f(c) = cf'(c)$.

Back

#

3.2.4 Concursul "Gheorghe Lazăr", Sibiu

1. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale strict pozitive astfel încât şirul $y_n = n(x_{n+1}-x_n)$ este mărginit.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(x_{n+1}-x_n)=0$ şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^{\frac{2n+1}{x_n}}$.

2. Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $A+A^t=O_n$.Demonstraţi că determinatul matricei I_n-A^2 este pătrat perfect, iar determinantul matricei I_n+A^2 este sumă de două pătrate perfecte.

3. Fie $a<b$ şi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie Rolle cu proprietăţile:

   a)$af(b)=bf(a)$

   b)$f(x)\neq 0, \forall x\in[a,b]$.

   Demonstraţi că există $c\in(a,b)$ astfel încât $f(c)=cf^{'}(c)$.

Back

#

3.2.5 Concursul "Mathematica Modus Vivendi", Vâlcea

1. Fie $A,B,C\in\mathcal{M}_2\mathbb{R}$.Notăm cu $X=AB+BC+CA, Y=BA+CB+AC$ şi $Z=A^2+B^2+C^2$.Arătaţi că:

$$\det(2Z-X-Y)\geq 3\det(X-Y).$$

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ două progresii aritmetice cu $a_1>0, r>0$ respectiv $b_1>0, r_1>0$.Calculaţi:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_n+\frac{b_k}{a_n}}.$$

3. a)Să se arate că $\ln n! = n(\ln n - y_n)$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

   b)Fie şirurile $(a_n)_{n\geq 1}, (x_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_n = n^n-(n!)^x_n$. Să se arate că dacă şirul a_n este mărginit atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n^{x_n-1}=e$.

4. Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $A^m=(-1)^m\cdot I_n$ cu $m\in\mathbb{N}, m\geq 2$, atunci:

$$n\leq rang(I_n+A)+rang(I_n+\epsilon A)+\cdots+rang(I_n+\epsilon^{m-1}A)\leq(m-1)n,$$

   unde $\epsilon=\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m}$.

Back

#

3.2.6 Concursul "Grigore Moisil", Cluj Napoca

1. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin relaţia de recurenţă $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$, $a_1 > 0$.Arătaţi că:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 2$;

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(na_n-2)}{\ln n} = \frac{2}{3}$.

2. Fie $P \in \mathbb{C}[X]$ de grd $n \geq 2$ şi fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ două matrice astfel încât $AB \neq BA$ şi $P(AB) = P(BA)$.Să se demonstreze că există $\alpha \in \mathbb{C}$ astfel încât $P(AB) = \alpha \cdot I_2$.

3. Fie $a, b, c, d \in (0, \infty)$ astfel ca $ad - bc > 0$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$. Spunem că o matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este pozitivă dacă are toate elementele pozitive şi o notăm cu $X > 0$.Să se arate că:

   a)Pentru orice matrice pozitivă $X > 0$ există o matrice o pozitivă $Y > 0$ astfel încât $AY = X$.

   b)Există $X > 0$ astfel încât $AX > 0$.

4. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Arătaţi că:

   a)dacă f este derivabilă şi $\lim\limits_{x\to\infty} xf'(x) = 1$ atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

   b)dacă f este de două ori derivabilă şi $\lim\limits_{x\to\infty} (f''(x) + 5f'(x) + 6f(x)) = l, l \in \overline{\mathbb{R}}$, arătaţi că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{l}{6}$.

Back

#

3.2.7 Concursul "Al. Myller", Iaşi

1. Fie $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A^2 - I_4) < 0$.Să se arate că există $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| < 1$ astfel încât matricea $A + \alpha I_4$ să fie singulară.

2. Fie $A, B, S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, S fiind o matrice nesingulară astfel încât $B = S^{-1}AS$.Să se arate că:

$$tr(B^2) + 2tr(B^*) = (tr(A))^2.$$

3. Fie $a > 1$ un număr real. Pentru fiecare numă natural nenul n notăm prin $k(n)$ cel mai mic numă natural k astfel încât $(n+1)^k \geq an^k$. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k(n)}{n}.$$

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $\mathbb{Q}$, cu proprietatea:

$$f(x) < f\left(x + \frac{1}{n}\right), \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \text{ şi orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se arate că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Back

#

3.2.8 Concursul interjudeţean "Papiu Ilarian", Târgu Mureş

1. Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ numere naturale nenule ordonate $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$.
   a)Să se determine numarul funcţiilor $f : \{1, 2, .., n\} \to \mathbb{N}^*$ cu proprietatea:
   $(P) : f(k) \leq a_k, \forall k \in \{1, 2, ..., n\}$
   b) Care este numarul funcţiilor injective cu proprietatea (P) ?

2. Fie $(a_n)_n$ un şir de numerele naturale , $a_n \geq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ Să se arate că orice număr natural N poate fi scris în mod unic sub forma:
   $N = c_0 + c_1 \cdot a_1 + c_2 \cdot a_1 a_2 + ... + c_n \cdot a_1 a_2 \cdot .. \cdot a_n$
   unde $c_0, c_1, ..., c_n$ sunt numere naturale cu proprietatea :
   $0 \leq c_i < a_{i+1}$, $i = \overline{0, n-1}$, $c_n \neq 0$.

3. Fie a, b numere naturale nenule şi $d \neq 1$, c.m.m.d.c al lor. a)Să se arate că există o partiţie a lui $\mathbb{N}^*$ in două submulţimi A şi B ($A \cup B = \mathbb{N}^*$ şi $A \cap B = \emptyset$) cu proprietatea :
   $(P) : x \in A \Rightarrow x + a \in A$ şi $y \in B \Rightarrow y + b \in B$.
   b) Să se arate ca dacă (A, B) este o partitie a lui $\mathbb{N}^*$ cu proprietatea (P) atunci pentru orice $z \in \mathbb{N}^*$ numerele z şi $z + d$ sunt ambele in A sau ambele in B.

4. Pe suprafaţa unui poligon de arie 13 se aşeaza 10 poligoane de arie 6.Să se arate că există patru poligoane ce se suprapun după o arie mai mare ca $\frac{1}{70}$.

Back

#

3.2.9 Concursul "Traian Lalescu", Deva

1. Demonstraţi că ecuaţia $7^x + 1 = 9^x$ are o unică soluţie reală şi precizaţi un interval de lungime maximă $\frac{1}{2}$ care conţine această soluţie.

2. Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ un şir de numere reale astfel încât

$$a_0 = 1 \text{ şi } a_n = a_{\left[\frac{7n}{9}\right]} + a_{\left[\frac{n}{9}\right]} \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Arătaţi că:

a)Există $M, p \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_n \leq M \cdot n^p, \forall n \geq 1$.

b)Există un număr natural q astfel încât $a_q < \frac{q}{2008!}$.

(Se precizează că $[a]$ este partea întreagă a numărului real a).

3. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, se consideră matricea $A_n \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{Z})$,

$$A_n = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 5 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n+1 \end{pmatrix}$$

şi se notează cu D_n determinantul acesteia.Studiaţi mărginirea şirului $\frac{D_n}{n!}$ şi convergenţa şirul $\frac{D_n}{(n+1)!}$.

4. Studiaţi convergentţa şirului $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin:

$$x_{n+1} = \frac{(-1)^n}{2} x_n + \frac{n+n^2}{2^n}, \forall n \geq 0.$$

Back

#

3.2.10 Concursul "Unirea", Focşani

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a)Să se arate că dacă $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $AX = XA$ şi $X^2 = O_3$, atunci $X = O_3$.

   b)Să se arate că dacă $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi n este un număr natural nenul astfel încât $AX = XA$ şi $X^n = O_3$, atunci $X = O_3$.

2. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{5} & -\sin\frac{2\pi}{5} \\ \sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   a)Să se arate că $BA = A^4 B$.

   b)Să se determine numărul matricelor $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ care pot fi reprezentate sub forma $C = X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $X_i \in \{A, B\}$, pentru $i = \overline{1, n}$.

3. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de numere reale având următoarele proprietăţi: i)există $M_1, M_2 \in (0,\infty)$ astfel încât $|x_n| \le M_1$ şi $|y_n| \le M_2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n + y_n| = M_1 + M_2$.

Să se arate că există un şir de numere naturale $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strict crescător astfel încât $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} x_{n_k} = M_1 M_2$.

4. Calculaţi

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x + 2^{2x} + \cdots + 2^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}, \text{ unde } n \in \mathbb{N}^*.$$

Back

#

7.2.1 Concursul "Cristian Calude", Galaţi

1. a) $ABCD = (AB)(CD) = (A+B)(C+D) = AC + BC + AD + BD = A + C + B + C + A + D + B + D = 2(A+B+C+D)$.

b)Fie $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soluţie a ecuaţiei date.Din condiţia $AX = XA$ deducem că X trebuie sa fie de forma $X = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ c-x & 0 & c \end{pmatrix}$.Se arată prin inducţie

că $X^n = \begin{pmatrix} x^n & 0 & 0 \\ 0 & u^n & 0 \\ c^n - x^n & 0 & c^n \end{pmatrix}$.Din ecuaţia dată obţinem $x = \sqrt[n]{2}$, $u = -1$ (condiţie care impune n să fie impar) şi $c = \sqrt[n]{3}$.

2. a)$\cos\theta_{i-1} = \sqrt{1 - \sin^2\theta_{i-1}} = \sqrt{1 - (x_0 + x_1 + \cdots x_{i-1})^2} = \sqrt{1 + x_0 + x_1 + \cdots x_{i-1}}\sqrt{1 - (1 - x_i - x_{i+1} - \cdots - x_n)} = \sqrt{1 + x_0 + \cdots x_{i-1}}\sqrt{x_i + \cdots x_n}$.

b)Pentru fiecare $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$ avem

$$\sqrt{1 + x_0 + \cdots x_{i-1}}\sqrt{x_i + \cdots x_n} \le \frac{1}{2}(1 + x_0 + x_1 + \cdots x_n) = 1$$

de aici avem $\frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+\cdots x_{i-1}}\sqrt{x_i+\cdots x_n}} \ge x_i$.Însumând aceste inegalitaăţi se obţinem inegalitatea din stânga.

Pentru inegalitatea din dreapta avem următoarele:deoarece $x_i = \sin\theta_i - \sin\theta_{i-1}$.Astfel inegalitatea de demonstrat devine:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sin\theta_i - \sin\theta_{i-1}}{\cos\theta_{i-1}} < \frac{\pi}{2}.$$

Dar $\sin\theta_i - \sin\theta_{i-1} = 2\cos\frac{\theta_i+\theta_{i-1}}{2}\cdot\sin\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2} \le (\theta_i - \theta_{i-1})\cos\theta_{i-1}$.De aici rezultă că $E < \sum_{i=1}^{n}(\theta_i - \theta_{i-1}) = \theta_n - \theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

3. a)Din inegalitatea mediilor rezultă imediat că $x_n \ge y_n \ge z_n, \forall n \ge 1$. Mai mult $x_{n+1} - x_n = \frac{y_n+z_n-2x_n}{3} \le 0 \Rightarrow x_{n+1} \le x_n, \forall n \ge 1$.

   $z_{n+1} - z_n = \frac{2x_ny_nz_n - z_n^2(x_n+y_n)}{x_ny_n+y_nz_n+z_nx_n} \ge 0 \Rightarrow z_{n+1} \ge z_n, \forall n \ge 1$. Deoarece şirurile x_n şi y_n sunt monotone şi mărginite rezultă că sun convergente. $x_n - z_n = \frac{x_{n-1}+y_{n-1}+z_{n-1}}{3} - z_n \le \frac{2x_{n-1}+z_{n-1}-3z_n}{3} \le \frac{2x_{n-1}+z_{n-1}-3z_{n-1}}{3} = \frac{2}{3}(x_{n-1} - z_{n-1})$.De aici rezultă inductiv că $x_n - y_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n (x_0 - z_0)$.Rezultă că $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = L$.Din criteriul cleştelui rezultă de asemenea că $\lim_{n\to\infty} z_n = L$.Din relaţiile de recurentă obţinem că $x_{n+1}y_{n+1}z_{n+1} = x_ny_nz_n$, $\forall n \ge 0$.Deci $x_ny_nz_n = x_0y_0z_0$. $\Rightarrow L = \sqrt[3]{x_0y_0z_0}$.

   b)Fie $n \ge 6$.Deoarece $C_n^k \ge C_n^3, k = \overline{3, n-3}$ rezultă:

$$\frac{1}{C_n^0} + \frac{1}{C_n^n} + \frac{1}{C_n^1} + \frac{1}{C_n^{n-1}} < a_n < \frac{1}{C_n^0} + \frac{1}{C_n^n} + \frac{1}{C_n^1} + \frac{1}{C_n^{n-1}} + \frac{1}{C_n^2} + \frac{1}{C_n^{n-2}} + \frac{n-5}{C_n^3}.$$

   De aici aplicând criteriul cleştelui rezultă concluzia.

Back

#

7.2.2 Concursul centrelor de excelenţă din Moldova, Suceava

1. Dacă $C, D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ atunci are loc relaţia $\det(C + XD) = \det C + \alpha X + tr(D^*C)X^2 + (\det D)X^3$ cu $\alpha \in \mathbb{C}$, atunci $\det(C+D) + \det(C-D) = 2(\det C + tr(D^*C))$. În contextul enunţului $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

   $|\det(A+iB)|^2 = \det(A+iB)\cdot\overline{\det(A+iB)} = \det(A+iB)\cdot\det(A-iB) =$

   $\det(A^2+B^2+i(BA-AB)) \in \mathbb{R}$, de aici rezultă că $\det(A^2+B^2+i(BA-AB)) = \det(A^2+B^2-i(BA+AB)) \Rightarrow$

   $2|\det(A+iB)|^2 = \det(A^2+B^2+i(BA-AB)) + \det(A^2+B^2-i(BA+AB)) =$

   $= 2\left(\det(A^2+B^2) + tr\left(i(BA-AB)^*(A^2+B^2)\right)\right)$. Dar deoarece pentru orice $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avem $(iU)^* = -U^*$ concluzia rezultă.

2. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\cdot\sin\frac{1}{x}$ care este continuă şi derivabilă pe $(0,\infty)$ cu $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$.Considerăm şirurile $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$, unde $a_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{3\pi}{2}}$ şi $b_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$.Cum funcţia f este continuă pe $[a_n,b_n]$ şi derivabilă pe (a_n,b_n) putem aplica teorema lui Lagrange.Atunci există $x_n\in(a_n,b_n)$ astfel încât $f'(x_n)=\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$.Cu această scriere ajungem la $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=\frac{2}{\pi}$.

3. Considerăm funcţia $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ cu $F(x)=(g(x)-g(x))(g(b)-g(x))e^{f(x)}$.Deoarece $F(a)=F(b)$, din teorema lui Rolle deducem că există un $c\in(a,b)$ astfel încât $F'(c)=0\Leftrightarrow\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{g(a)+g(b)-2g(c)}{(g(a)-g(c))(g(b)-g(c))}$. Inegalitatea $\frac{f'(c)}{g'(c)}>\frac{2}{g(a)-g(c)}$ care e echivalentă cu $g(a)<g(b)$ care este evident adevărată. Pe de altă parte, inegalitatea $\frac{f'(c)}{g'(c)}<\frac{2}{g(b)-g(c)}$ echivalentă cu $g(b)>g(a)$ care este evident adevărată.

4. Fie $f:(0,2\sqrt{2}]\to\mathbb{R}$, $f(x)=(\ln x+x-1)^2-2(x-1)^2$.Avem $f'(x)=2\left(\frac{\ln x+2x-1+x\ln x-x^2}{x}\right)$.Studiin comportamentul funcţiei $g:(0,2\sqrt{2}]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\ln x+2x-1+x\ln x-x^2$ se poate stabili semnul ei, care corespunde cu semnul funcţiei f' şi se constată că $f'(x)\leq 0$ dacă $x\leq 1$ şi $f'(x)\geq 0$ dacă $x\geq 1$. $\Rightarrow$ $f(x)\geq 0,\forall x\in(0,2\sqrt{2}]$.

Back

#

7.2.3 Concursul "Cezar Ivănescu", Târgovişte

1. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale strict pozitive astfel încât şirul $y_n=n(x_{n+1}-x_n)$ este mărginit.Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(x_{n+1}-x_n)=0$ şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^{\frac{2n+1}{x_n}}$.

2. Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $A+A^t=O_n$.Demonstraţi că determinatul matricei I_n-A^2 este pătrat perfect, iar determinantul matricei I_n+A^2 este sumă de două pătrate perfecte.

3. Fie $a<b$ şi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie Rolle cu proprietăţile:
   a)$af(b)=bf(a)$
   b)$f(x)\neq 0,\forall x\in[a,b]$.
   Demonstraţi că există $c\in(a,b)$ astfel încât $f(c)=cf'(c)$.

Back

#

7.2.4 Concursul "Gheorghe Lazăr", Sibiu

1. $A^3 = A+I_n \Rightarrow A^4-A^2+I_n = A+I_n = A^3$.Dar $A^4-A^2+I_n = \left(A^2-\frac{1}{2}I_n\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}I_n\right)^2$. In continuare voi demnstra următoarea lemă: Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comută (i.e.$AB = BA$) atunci $\det(A^2+B^2) \geq 0$

   Demonstraţie: $A^2+B^2 = (A+i\cdot B)(A-i\cdot B) \Rightarrow$

   $\det(A^2+B^2) = \det((A+i\cdot B)(A-i\cdot B)) = \det(A+i\cdot B)(\overline{A+i\cdot B}) =$

   $= \det(A+i\cdot B)\cdot\overline{\det(A+i\cdot B)} = |\det(A+i\cdot B)|^2 \geq 0$. Conform acestei leme rezultă că $\det(A^4-A^2+I_n) \geq 0 \Rightarrow \det A^3 \geq 0 \Rightarrow \det A \geq 0$. Dar din relaţia $A(A^2-I_n) = I_n$ rezultă că $\det A \neq 0$.

   ⋆ O altă demonstraţie pentru această problemă s-ar putea face folosind următoarea idee: Polinomul X^3-X-1 nu are rădăcini în intervalul $(-\infty, 0]$, deci valorile proprii ale matricei A sunt ori complexe ori sunt strict pozitive în cazul in care sunt reale.Deoarece polinomul caracteristic al matricei A are coeficienţi reali rezultă că dacă există valori proprii complexe atunci acestea trebuie sa fie complex conjugate două cate două.Cu aceste observaţii putem scrie

   $$\det A = \prod_{k=1}^{p}\lambda_k\overline{\lambda_k}\cdot\prod_{k=1}^{n-2p}x_k$$

   , unde λ_k şi $\overline{\lambda_k}$ sunt valorile proprii complexe, iar x_k sunt valorile proprii reale ale matricei A.Astfel este evident că $\det A > 0$ deoarece $\lambda_k\overline{\lambda_k} > 0$ şi $x_k > 0$.

2. Voi arăta prin inducţie că $\left(\sqrt{\frac{6}{(n+1)(n+2)}}\right)^n \leq \frac{1}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}$. După verificare şi după ce se foloseşte ipoteza de inducţie este suficient să arătăm că: $6(n+3)^{n+2} \leq (n+2)(n+3)^{n+1} \Leftrightarrow 6\frac{n+3}{n+2} \leq \left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+2}$ Dar $(n+2)(n+3)^{n+1} \geq e^2, \forall n \in \mathbb{N}$ şi $6\frac{n+3}{n+2} \leq e^2, \forall n \geq 3$. Cazurile $n = 0, 1, 2$ se verifică de mână. Astfel avem $a_n \leq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} < e$.

3. a)Folosind scrierea $a_k = S_k - S_{k-1}, \forall k \geq 2$ avem:

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-(S_1+S_2+\cdots S_{n-1})+nS_n}{n} =$$

   $\lim_{n\to\infty}\left(S_n - \frac{S_1+S_2+\cdots S_{n-1}}{n}\right)$ Dar din lema lui Stolz avem $\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+\cdots S_{n-1}}{n} = \lim_{n\to\infty} S_n$, de aici rezultă concluzia dorită.

b)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_1+2a_2+\cdots ka_k}{k(k+1)}=a_1\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}+2a_2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k+1)}+\cdots+na_n\sum_{k=n}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=$$

$$=a_1\left(\frac{n}{n+1}-1+1\right)+2a_2\left(\frac{n}{n+1}-1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+na_n\left(\frac{n}{n+1}-1+\frac{1}{n}\right)=$$

$$-\frac{a_1+2a_2+\cdots na_n}{n}\cdot\frac{n}{n+1}+(a_1+2a_2+\cdots na_n).$$

Trecând la limită se obţine concluzia dorită.

4. Fie funcţia $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{x-a}\ln\frac{x-a}{b-x}$ şi $h(x)=g(x)-f(x)$.

Deoarece f este mărginită (din teorema lui Weierstrass) rezultă

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a}g(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to b}g(x)=+\infty\end{array}\right|\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a}h(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to b}h(x)=+\infty\end{array}\right|$$

Din continuitatea lui h rezultă că există un $c\in(a,b)$ astfel încât $h(c)=0$, ceea ce trebuia arătat.

Back

#

7.2.5 Concursul "Mathematica Modus Vivendi", Vâlcea

1. Fie ω o rădăcină de ordin trei a unităţii, diferită de 1. Notăm $M=(A-B)+\omega(B-C)+\omega^2(C-A)$ şi $N=(A-B)+\omega^2(B-C)+\omega(C-A)$. Astfel avem

$\det(MN)=\det(NM)=\det(M)\cdot\overline{\det M}=|\det M|^2\geq 0$. Să observăm că $MN=U\omega^2V+\omega T$ şi $NM=U+\omega V+\omega^2 T$, unde

$U=(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2=2Z-X-Y$

$V=(A-B)(B-C)+(B-C)(C-A)+(C-A)(A-B)=2X-Y-Z$

$T=(B-C)(A-B)+(C-A)(B-C)+(A-B)(C-A)=2Y-X-Z$.

Dar $\det(MN+NM)+\det(MN-NM)=2\det(MN)+\det(NM)\geq 0$, deci $\det(MN+NM)+\det(MN-NM)\geq 0$, echivalent cu

$\det(2U+(\omega^2+\omega)(V+T))+\det((\omega^2-\omega)(V-T))\geq 0$, echivalent cu

$\det(2U-(V+T))\geq 3\det(V-T)$ de unde rezultă şi concluzia.

2. $\frac{1}{a_n+\frac{b_n}{a_n}} \leq \frac{1}{a_n+\frac{b_k}{a_n}} \leq \frac{1}{a_n+\frac{b_1}{b_n}}$.

Prin însumare rezultă

$$\frac{n}{a_n+\frac{b_n}{a_n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_n+\frac{b_k}{a_n}} \leq \frac{n}{a_n+\frac{b_1}{b_n}}.$$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a_n+\frac{b_n}{a_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a_n+\frac{b_1}{b_n}} = \frac{1}{r}$ şi concluzia este imediată din criteriul cleştelui.

3. a) $y_n = \frac{n\ln n - \ln n!}{n}$.

Dar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1)-\ln(n+1)!-n\ln n+\ln n!}{n+1-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1$.Din lema lui Stolz rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

b)Din relaţia dată deducem că $x_n = \frac{\ln(n^n - a_n)}{\ln n!} \Rightarrow x_n = \frac{n\ln n+\ln\left(1-\frac{a_n}{n^n}\right)}{\ln n!} = \frac{n\ln n-\ln\left(1-\frac{a_n}{n^n}\right)}{n(\ln n-1)}$ de aici avem

$(x_n-1)\ln n = \frac{y_n \ln n}{\ln n - y_n} + \frac{\ln n}{y_n(\ln n - y_n)} \cdot \ln\left(1-\frac{a_n}{n^n}\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (x_n-1)\ln n = 1$, iar de aici rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} n^{x_n-1} = e$.

4. Se arată că are loc egalitatea

$$\prod_{k=0}^{m-1}(X+\epsilon^k Y) = X^m - (-Y)^m$$

pentru orice $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $XY = YX$.Folosind acest rezultat avem: $\prod\limits_{k=0}^{m-1}(I_n+\epsilon^k A) = I_n - (-1)^m A^m = 0$.

De aici şi din inegalitatea lui Sylvester

$$rang(A_1A_2\cdots A_m) \geq rangA_1 + rangA_2 + \cdots + rangA_m - (m-1)n$$

se obţine

$$0 = rang\left(\prod_{k=0}^{m-1}(I_n+\epsilon^k A)\right) \geq$$

$$\geq rang(I_n+A) + rang(I_n+\epsilon A) + \cdots + rang(I_n+\epsilon^{m-1}A) - (m-1)n$$

de unde rezultă inegalitatea din dreapta. Pentru inegalitatea din stânga vom folosi faptul că suma rangurilor este mai mare decât rangul sumei. $\sum\limits_{k=0}^{m-1}(I_n + \epsilon^k A) = mI_n + (1+\epsilon+\epsilon^2+\cdots+\epsilon^{m-1})A = mI_n$.Dar $rang(mI_n) = n$ şi de aici rezultă concluzia dorită.

Back

#

7.2.6 Concursul "Grigore Moisil", Cluj Napoca

1. a) Din inegalitatea $\ln(1+x) \leq x, \forall x \geq 0$ deducem că şirul x_n este descrescător.Deoarece $x_n > 0, \forall n \geq 1$ rezultă că şirul dat este convergent.Trecând la limită relaţia de recurenţă deducem că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) $\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\ln(1+a_n)} - \frac{1}{a_n}} =$ $\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x-\ln(1+x)} = 2.$

c) Limita cerută este egală cu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{\ln n}\left(n - \frac{2}{a_n}\right) = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}\left(n - \frac{2}{a_n}\right) =$$

folosind lema lui Stolz în continuare obţinem:

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1 - \frac{2}{a_{n+1}} + \frac{2}{a_n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{a_n} \cdot \frac{a_{n+1}a_n - 2a_n + 2a_{n+1}}{a_{n+1}a_n} =$$

$$= 4 \lim_{n\to\infty} \frac{a_n\ln(1+a_n) - 2a_n + 2\ln(1+a_n)}{a_n^3 \frac{\ln(1+a_n)}{a_n}} =$$

$$4 \lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+x) - 2x + 2\ln(1+x)}{x^3} = 4\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

2. Din teorema Cayley-Hamilton avem $(AB)^2 = aAB + bI_2$ şi $(BA)^2 = aBA + bI_2$, unde $a = tr(AB) = tr(BA)$ şi $b = -\det(AB) = -\det(BA)$.Indictiv se arată că $(AB)^k = a_kAB + b_kI_2$ şi $(BA)^k = a_kBA + b_kI_2$.Din această observaţie rezultă că $P(AB) = \alpha AB + \beta I_2$ şi $P(BA) = \alpha AB + \beta I_2$.Din $P(AB) = P(BA)$ rezultă că $\alpha(AB - BA) = O_2$, dar $AB \neq BA \Rightarrow \alpha = 0$, deci $P(AB) = P(BA) = \beta I_2$.

3. a) Fie $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ şi $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, unde $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.Ecuaţia $AY = X$ este echivalentă cu $\begin{pmatrix} ax - bz & ay - bt \\ -cx + dz & -cy + dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Deoarece sistemul

$$\left\{\begin{array}{l} ax - bz = \alpha \\ ay - bt = \beta \\ -cx + dz = \gamma \\ -cy + dt = \delta \end{array}\right|$$ are soluţii strict pozitive concluzia rezultă.

b) Reiese imediat din a).

4. a)Din ipoteză ştim că $\lim_{x\to\infty} x\cdot f'(x) = 1$ ceea ce se poate rescrie ca $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\ln'(x)} =$ 1, de aici rezultă din regula lui L'Hospital că $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\ln x} = 1$, de unde rezultă

imediat că $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

b) Deoarece $f''(x)+5f'(x)+6f(x) = \frac{(e^{2x}(2f'(x)+6f(x)))'}{(e^{2x})'}$ rezultă din regula lui L'Hospital că $l = \lim_{x\to\infty}(f''(x)+5f'(x)+6f(x)) = \lim_{x\to\infty}(2f'(x)+6f(x)) \Rightarrow \lim_{x\to\infty}(f'(x)+3f(x)) = \frac{l}{2}$. Dar din $f'(x)+3f(x) = \frac{(3e^{3x}\cdot f(x))'}{(e^{3x})'}$ rezultă, tot din regula lui L'Hospital că $\frac{l}{2} = \lim_{x\to\infty}(f'(x)+3f(x)) = \lim_{x\to\infty} 3f(x)$, de unde avem $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{l}{6}$.

Back

#

7.2.7 Concursul "Al. Myller", Iaşi

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \det(A - xI)$, funcţie continuă (deoarece este funcţie polinomială). Relaţia din ipoteză devine $f(1)f(-1) < 0$. Din proprietatea lui Darboux rezultă că există $\alpha \in (-1,1)$ astfel încât $f(\alpha) = 0$.

2. $\det(A-xI) = \det(S^{-1})\cdot\det(A-xI)\cdot\det(S) = \det(S^{-1}AS-xI) = \det(B-xI)$ Deci matricele A,B au aceleaşi valori proprii:$a, b, c \in \mathbb{C}$. Dar ţinând cont de faptul că $tr(B^2) = \sum a^2, tr(B*) = \sum ab$ iar $tr(A) = (\sum a)^2$ concluzia este imediată.

3. $(n+1)^{k(n)} \geq an^{k(n)} \Rightarrow k(n) \geq \frac{\ln a}{\ln(1+\frac{1}{n})}$. Deoarece $k(n)$ trebuie să fie cel mai mic număr natural care satisface această inegalitate, rezultă dubla inegalitate: $1 + \left[\frac{\ln a}{\ln(1+\frac{1}{n})}\right] \geq k(n) \geq \frac{\ln a}{\ln(1+\frac{1}{n})}$. Împărţind la n şi trecând la limită deducem $\lim_{n\to\infty}\frac{k(n)}{n} = \ln a$.

4. Prin inducţie se poate arăta că $f(x) < f(1+\frac{k}{n})$ pentru orice k, n numere naturale nenule. Adică $(*) f(x) < f(x+r), \forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}_+$ relaţie din care rezultă că f este strict crescătoare pe $\mathbb{Q}$. Fie x un număr real şi fie $a \in \mathbb{Q}, a > x$ şi $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}, \alpha = a - x$. Deoarece mulţimea numerelor raţionale este densă în mulţimea numerelor reale rezultă că există un şir de numere raţionale strict pozitive $r_n \to \alpha$. Din relaţia $(*)$ avem $f(x) < f(x+r_n)$ şi trecând la limită obţinem: $f(x) < \lim_{n\to\infty} f(x+r_n) = \lim_{t\to a} f(t) = f(a)$, deci $f(x) < f(a)$ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{Q}$ cu proprietatea că $x < a$. În mod analog, folosind relaţia $f(x-r) < f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}_+$ se obţine $f(a) < f(x)$ unde $a < x$, x real şi a raţional. Acestea împreună cu faptul că f este strict crescătoare pe $\mathbb{Q}$ rezolvă problema.

Back

#

7.2.8 Concursul interjudeţean "Papiu Ilarian", Târgu Mureş

1. a)$f(1) \in \{1, 2, ..., a_1\}$, $f(2) \in \{1, 2, ..., a_2\}$,....,$f(n) \in \{1, 2, ..., a_n\}$, rezultă că numărul căutat este egal cu $a_1 a_2 \cdots a_n$.

   b)Din $f(1) \le a_1$, $f(2) \le a_2$,...,$f(k) \le a_k$ şi $f(1), f(2), ..., f(k)$ distincte rezultă că dacă există $k = \overline{1,n}$ astfel încât $a_k < k$ atunci numărul funcţiilor este 0.

   Fie deci $a_k \ge k$, $k = \overline{1,n}$ şi notez cu F_k mulţimea funcţiilor injective şi cu $F_k = \{f : \{1,2...,k\} \to \mathbb{N}^* | f(i) \le a_i\}, i = \overline{1,k}$.Dacă $f \in F_n$ atunci $f_{|\{1,2,...,n-1\}} \in F_{n-1}$ şi reciproc: o funcţie $f \in F_{n-1}$ se prelungeşte la o funcţie $f \in F_n$ definind valoarea $f(n) \in \{1, 2, ..., a_n\} - Im(F_{n-1})$ care se poate face în $(a_n - (n-1))$ moduri.Am obţinut relaţia $|F_n|(a_n + 1 - n)|F_{n-1}|$, de unde rezultă $|F_n| = \prod_{k=1}^{n} (a_k + 1 - k)$.

2. Vom demonstra prin inducţie după $N \in \mathbb{N}$.
   Pentru $N = 1$ avem $n = 0$ şi $c_0 = 1$.

   Cel mai mare număr natural care poate fi scris folosind n coeficienţi este:

   $$(a_1 - 1) + (a_2 - 1)(a_1) + (a_3 - 1)a_1 a_2 + \cdots + (a_{n-1} - 1)a_1 a_2 \cdots a_n = a_1 a_2 \cdots a_n - 1$$

   Notăm cu $\alpha_n = a_1 a_2 \cdots a_n$

   Dacă $N \in [\alpha_n, \alpha_{n+1})$ partiţionăm intervalul astfel:

   $[\alpha_n, 2\alpha_n) \cup [2\alpha_n, 3\alpha_n) \cup \cdots \cup [(a_{n+1} - 1)\alpha_n, a_{n+1}\alpha_n)$ şi N se află în unul din intervalele partiţiei: $N \in [c\alpha_n, (c+1)\alpha_n)$.Scriem pe $N = c\alpha_n + N'$, unde $N' < \alpha_n$ şi $c < a_{n+1}$.Alegem $c_n = c$ şi pentru N' putem aplica ipoteza de inducţie.

   $N' = c_0 + c_1 a_1 + \cdots c_{n-1} a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \Rightarrow N = c_0 + c_1 a_1 + \cdots c_n a_1 a_2 \cdots a_n$.

3. a)Luăm $A = \{dn | n \in \mathbb{N}^*\}$ şi $B = \mathbb{N}^* - A$

   Pentru $x = dn \in A$ avem $x + a = x + da_1 = d(n + a_1) \in A$

   Pentru $y = dn + r$ cu $r \in \{1, 2, ..., d-1\}$, avem $y + b = dn + r + db_1 = d(n + b_1) + r \in B$.

   b)Dacă prin absurd există $z \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $z \in A$ şi $z + d \in B$ (sau invers) atunci pentru unici $m, n \in \mathbb{N}^*$, din ipoteză avem $z + na \in A$ şi $(z + d) + mb \in B$.Deoarece $d = (a, b)$ există $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ astfel încât $d = \alpha a + \beta b$.

Dacă $\alpha > 0$ şi $\beta < 0$ atunci alegem $n = \alpha$ şi $m = -\beta$ şi atunci $z + na = z + d + mb \in A \cap B$, contradicţie.

Dacă $\alpha < 0$ şi $\beta > 0$ există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\alpha + k\beta > 0$ şi atunci $d = (kb + \alpha)a + (\beta - ka)b$ şi pentru $n = k\beta + \alpha$ şi $m = ka - \beta$ avem $z + na = z + d + mb \in A \cap B$, contradicţie.

4. Notez cu P_k, $k = \overline{1, 10}$ cele 10 poligoane şi $I_1 = \bigcup_{k=1}^{10} P_k$, $I_2 = \bigcup_{i \neq j} (P_i \cap P_j)$, $I_3 = \bigcup_{i<j<k} (P_i \cap P_j \cap P_k)$,...,$I_{10} = \bigcap_{k=1}^{10} P_k$.

Avem relaţia $\sum_{k=1}^{10} S(P_k) = \sum_{k=1}^{10} S(I_k)$

Evident $I_{10} \subset I_9 \subset \cdots \subset I_1$, deci $S(I_1) \geq S(I_2) \geq \cdots \geq S(I_{10})$.Astfel avem: $\sum_{k=1}^{10} S(P_k) \leq 3S(I_1) + 7S(I_4) \Leftrightarrow 60 \leq 3 \cdot 13 + 7S(I_4) \Rightarrow S(4) \geq 3$.Dar avem C_{10}^4 intersecţii de câte patru poligoane.Deci există o intersecţie cu aria mai mică decât: $\frac{3}{C_{10}^4} = \frac{1}{70}$.

Back

#

7.2.9 Concursul "Traian Lalescu", Deva

1. Ecuaţia este echivalentă cu $\left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{9}\right)^x - 1 = 0$.Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{9}\right)^x - 1$.Evident funcţia este strict descrescătoare, deci injectivă.Deoarece $f\left(\frac{1}{2}\right) f(1) < 0$ rezultă, datorită continuităţii că are soluţie în intervalul $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ şi datorită injectivităţii aceasta este chiar unică.

2. a)Vom arăta prin inducţie că pentru $M \geq 2$ şi p soluţia ecuaţiei $\left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{9}\right)^x = 1$ are loc relaţia cerută. Pentru $n = 1$ şi $n = 2$ evident.Acum presupunem că $p(1), p(2), ..., p(n-1)$ sunt adevărate, unde $p(n) : a_n \leq M \cdot n^p, \forall n \geq 1$.Dorim să arătăm că $p(n)$ este adevarată. Dar $a_n = a_{\left[\frac{7n}{9}\right]} + a_{\left[\frac{n}{9}\right]} \leq M \left[\frac{7n}{9}\right]^p + M \left[\frac{n}{9}\right]^p \leq M \left(\frac{7n}{9}\right)^p + M \left(\frac{n}{9}\right)^p = Mn^p$.Ceea ce trebuia arătat.

   b)$\frac{a_n}{n} \leq \frac{M}{n^{1-p}}$.Dar din problema 1 avem $p < 1$, deci $\lim_{n\to\infty} \frac{M}{n^{1-p}} = 0$, deci şi $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$, de unde rezultă concluzia dorită.

3. Pentru şirul D_n avem relaţia de recurenţă $D_n = nD_{n-1} + (n-1)!$, $D_2 = 3 \Rightarrow \frac{D_n}{n!} = \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{n}$.De aici deducem că $\frac{D_n}{n!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n}$, deci şirul este nemărginit superior.

$\frac{D_n}{(n+1)!} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{n+1}$.De aici rezultă conform lemei lui Stolz $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

4. Fie şirul $y_n = x_n 2^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.Cu această notaţie relaţia de recurentă din ipoteză devine: $y_{n+1} = y_n = 2n(n+1)(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Rightarrow$

$$|y_{n+1}| = |y_1 + \sum_{k=1}^{n}(k+k^2)(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}| \le |y_1| + \sum_{k=1}^{n} |(k+k^2)(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}|$$

$= |y_1| + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =^{not} P(n)$ De aici avem: $|x_n| \le \frac{P(n)}{2^n} \to 0$.

Back

#

7.2.10 Concursul "Unirea", Focşani

1. a)Dacă $X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix}$ atunci din $AX = XA$ rezultă

$X = \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y' & 0 \\ z & 0 & x \end{pmatrix} \Rightarrow$

$X^2 = \begin{pmatrix} x^2+z^2 & 0 & 2xz \\ 0 & y'^2 & 0 \\ 2xz & 0 & x^2+z^2 \end{pmatrix}$.Din $X^2 = O_3 \Rightarrow x = z = y' = 0$, deci $X = O_3$.

b) Fie $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^{m-1} < n \le 2^m$.Evident $A^n = 0$ rezultă $\left(X^{2^{m-1}}\right)^2 = 0$ şi cum $X^{2^{m-1}}A = AX^{2^{m-1}}$ rezultă din punctul anterior că $X^{2^{m-1}} = 0$.Aşadar este suficient să arătăm că din $AX = XA$ şi $X^{2^m} = 0 \Rightarrow X = 0$, rezultat care se poate demonstra prin inducţie după m.

2. a)calcul direct.

b)Să observăm că $A^5 = B^2 = I_3$, mai mult din punctul anterior avem $BA = A^4B$.De aici rezultă că $C = X_1X_2\cdots X_n$ va fi egal cu $C = A^iB^j$ cu $0 \le i < 5$ şi $0 \le j < 2$, dacă vom înlocui întotdeauna pe BA cu

A^4B.Deci numărul matricelor C este cel mult egal cu 10.Cum matricele I_3, A, A^2, A^3, A^4 sunt distincte şi au determinanutul egal cu 1, iar matricele B, AB, A^2B, A^3B, A^4B sunt de asemenea distincte şi au determinantul egal cu -1, rezultă că numărul cerut este 10.

3. Deoarece şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit, rezultă din lema lui Cesaro că există un şir de numere naturale $(k_n)_{n\geq 0}$ astfel încât subşirul x_{k_n} este convergent la l_1.Mai mult, deoarece şirul $(y_{k_n})_{n\geq 0}$ este mărginit rezultă din lema lui Cesaro că există şirul de numere natural $(n_p)_{p\geq 0}$ astfel încât $y_{k_{n_p}}$ să fie convergent la l_2.Notez şirul $a_p = k_{n_p}$.Astfel avem $x_{a_p} \to l_1$ şi $y_{a_p} \to l_2$.Evident $|l_1| \leq M_1$ şi $|l_2| \leq M_2$.Astfel avem : $M_1 + M_2 = |l_1 + l_2| \leq |l_1| + |l_2| = M_1 + M_2 \Rightarrow |l_1| = M_1$ şi $|l_2| = M_2$.De unde rezultă concluzia.

4. Notez cu $L_x = \frac{(2^x-1)+(2^{2x}-1)+\cdots(2^{nx}-1)}{n}$.Evident că $\lim\limits_{x\to 0} L_x = 0$.Astfel putem scrie limita cerută ca:

$$\lim_{x\to 0}(1+L_x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+L_x)^{\frac{1}{L_x}\cdot\frac{L_x}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{L_x}{x}}.$$

Folosind limita fundamentală $\lim\limits_{u(x)\to 0} \frac{2^{u(x)}-1}{u(x)} = \ln 2$ putem deduce că $\lim\limits_{x\to 0} \frac{L_x}{x} = \ln 2^{\frac{n+1}{2}}$.Deci limita căutată este egală cu $2^{\frac{n+1}{2}}$.

[Back]