Concurs RMCS , ediția a IV a, 28 februarie 2009, Oțelu – Roşu

RMCS

Clasa a IV a

1. În exercițiul $9 \cdot 4 : 2 + 10 - 2$ folosiți paranteze pentru a obține pe rând rezultatele:

a) 106;   b) 90;   c) 1.

Gazeta Matematică

2. Dacă 4 stilouri şi 3 cărți costă 100 de lei, iar două stilouri şi o carte costă 40 de lei, calculați:

a) cât costă un stilou şi cât costă o carte ;
b) câte stilouri şi câte cărți se pot cumpăra cu 50 de lei, folosind întreaga sumă, astfel încât să avem cel puțin un obiect din fiecare.

Lucian Dragomir

3. Aflați cinci numere naturale ştiind că suma lor este 2009 şi dacă din fiecare scădem un acelaşi număr obținem 7, 8, 13, 17, respectiv 24.

Gazeta Matematică

4. Familia Popa are trei copii: Andrei, Bogdan şi Ciprian. Tatăl, Popa Dumitru, are 35 de ani. Dublul sumei vârstelor celor trei copii este cu 5 mai mică decât vârsta tatălui şi egală cu vârsta mamei, Popa Elena.Cu un an înainte, cel mai mare dintre copii avea vârsta egală cu suma vârstelor fraților săi.

a) Calculați câți ani are Elena ;
b) Calculați câți ani are Ciprian, cel mai mare dintre frați;
c) Dacă Andrei are vârsta de trei ori mai mică decât cea a lui Bogdan, câți ani are cel mai mic dintre frați ?

Lucian Dragomir,RMCS(enunț modificat)

Notă: Timp de lucru : Două ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu maxim 7 puncte.

Concurs RMCS , ediția a IV a, 28 februarie 2009, Oțelu – Roșu

RMCS

Clasa a V-a

1. Calculați suma numerelor mai mari decât 29 şi mai mici decât 290 care prin împărțire la 4 dau restul 1.

Antoanela Buzescu, RMCS (enunț modificat)

2. Se consideră numărul $a = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{290}$.

a) Să se arate că numărul a este divizibil cu 93 ;

b) Să se arate că numărul a nu este pătrat perfect.

Lucian Dragomir

3. Un număr suferă o transformare *acceptabilă* dacă se înmulțeşte cu 3, apoi la rezultatul obținut se adună 4 ; un număr suferă o transformare *bună* dacă se înmulțeşte cu 4 apoi la rezultatul obținut se adună 5 şi un număr suferă o transformare *foarte bună* dacă se înmulțeşte cu 5 apoi la rezultatul obținut se adună 6.

a) Arătați că există un număr care printr-o transformare *acceptabilă* sau printr-o transformare *bună* devine 29 ;

a) Stabiliți dacă există un număr care printr-o transformare *acceptabilă* sau printr-o transformare *bună* , se transformă în 2009.

b) Stabiliți dacă există un număr care prin trei transformări succesive, una *acceptabilă,* apoi una *bună*,apoi una *foarte bună*, devine 2031 .

Lucian Dragomir,RMCS(enunț modificat)

4. Să se arate că, dacă suma cifrelor numărului $\overline{abc}$ este 25, iar suma cifrelor numărului $\overline{abc} + 2$ este un pătrat perfect, atunci produsul cifrelor numărului $\overline{abc}$ este un număr ale cărui cifre sunt numere consecutive.

Gazeta Matematică

Notă: Timp de lucru : două ore şi jumătate.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu maxim 7 puncte.

Concurs RMCS , ediția a IV a, 28 februarie 2009, Oțelu – Roşu

RMCS

Clasa a VI a

1. În jurul punctului O se formează cinci unghiuri, cu măsurile proporționale cu cinci numere naturale consecutive. Determinați măsura celui mai mic dintre unghiuri, ştiind că unghiul cel mai mare are măsura egală cu 88^{o} .

Lucian Dragomir

2. Pe o dreaptă d se consideră, în această ordine, punctele A,B,C,D,E astfel încât B este mijlocul lui (AD), D este mijlocul lui (BE), C mijlocul lui (AE) ,iar $BC=3cm$. Dacă F şi G sunt separate de dreapta d astfel încât $FC\perp d, GD\perp d, FC=6cm, GD=7cm$, atunci :

a) Calculați lungimea segmentului (AE) ;

b) Comparați lungimile segmentelor (FH) şi (EG),
unde $H\in(AB)$ astfel încât $HA=2cm$.

Delia şi Adrian Dragomir,RMCS (enunț modificat)

3. La un concurs de matematică sunt premiați şase concurenți, cu sume diferite de bani. Fiecare dintre primii patru premianți primeşte cât următorii doi clasați la un loc. Dacă orice premiant primeşte cel puțin 26 de lei, iar elevul care a câştigat premiul I primeşte 260 de lei, calculați ce sumă totală de bani s-a folosit pentru a premia pe cei şase învingători.

Gazeta matematică

4. Pe o tablă sunt scrise patru numere. O operație *interesantă* constă în : se aleg două dintre cele patru numere, li se adaugă câte o unitate şi se scriu pe tablă numerele obținute în locul celor alese.

Este posibil ca, prin mai multe operații *interesante* , să se ajungă, pornind de la numerele 2, 0, 0, 9, la patru numere egale ?

Concurs Rusia

Notă: Timp de lucru : două ore şi jumătate.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu maxim 7 puncte.

Concurs RMCS , ediția a IV a, 28 februarie 2009, Oțelu – Roșu

RMCS

Clasa a VII a

1. Să se determine numerele întregi x şi y pentru care $1+xy+2x=y^2$.

Gazeta Matematică

2. Să se determine numerele naturale nenule *a, b, c* pentru care

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 1 \quad \text{şi} \quad \frac{a\cdot\sqrt{3}+b}{b\cdot\sqrt{3}+c}=2.$$

Lucian Dragomir

3. Înălțimile unui triunghi ascuțitunghic ABC se intersectează în punctul H. Se ştie că $AB=CH$. Să se determine măsura unghiului $\measuredangle ACB$.

* * *

4. Pe laturile AB, BC, CD, DA ale pătratului $ABCD$ cu $AB=1$, se iau respectiv punctele K, L, M şi N astfel încât $AK+LC+CM+NA=2$.

Să se arate că : $MK\perp LN$.

Concurs Rusia

Notă: Timp de lucru : Trei ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu maxim 7 puncte.

Concurs RMCS , ediția a IV a, 28 februarie 2009, Oțelu – Roșu

RMCS

Clasa a VIII a

1. Se consideră numerele $p,q\in\mathbb{N}, 1\le q\le p$ și $a=\left(p+\sqrt{p^2+q}\right)^2$, $b=\left(p-\sqrt{p^2+q}\right)^2$.

Să se arate că :

a) nu există $p,q\in\mathbb{N}, 1\le q\le p$, pentru care $a+b=2009$;

b) a este irațional .

RMCS 25

2. a) Să se arate că există un singur număr natural *n* pentru care $\dfrac{n^3+4n+13}{n+2}\in\mathbb{N}$;

b) Să se determine numerele naturale *m* pentru care $m+4^m=(m+1)\cdot 2^m$;

c) Să se arate că nu există numere naturale *p* pentru care $1+2^p+4^p$ este pătrat perfect.

Lucian Dragomir

3. Pe planul pătratului *ABCD* cu lungimea laturii de 2 cm, se duce perpendiculara în A pe care se ia punctul E astfel încât $AE=2\sqrt{2}$ cm. Să se calculeze:

a) măsura unghiului $\measuredangle ECA$;

b) măsura unghiului determinat de dreptele *EC* și *AD ;*

c) distanța dintre dreptele *EC* și *BD.*

Gazeta Matematică

4. Se consideră un număr prim p , $p\neq 3$, pentru care există *a* și *b* numere întregi astfel încât $p/(a+b)$ și $p^2/(a^3+b^3)$.

a) Să se dea un exemplu de triplet (p,a,b), $a,b\neq 0, a\neq b$, care satisface condițiile din enunț ;

b) Să se arate că $p^2/(a+b)$ sau $p^3/(a^3+b^3)$.

(*Prin* x/y *se înțelege că numărul natural x divide numărul natural y).*

Baraj OBMJ 2008

Notă: Timp de lucru : Trei ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu maxim 7 puncte.

Concurs RMCS , ediţia a IV a, 28 februarie 2009, Oţelu – Roşu

RMCS

Clasa a IX a

1. Să se arate că, dacă $x, y \in [1,3]$ şi $x \cdot y = 4$, atunci $2 \leq \frac{x}{\sqrt{4y-y^2}} + \frac{y}{\sqrt{4x-x^2}} \leq 2 \cdot \sqrt{3}$

Ovidiu Bădescu,RMCS(enunţ modificat)

2. Să se determine funcţia $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că

$\left(x+2^{f(y)}\right)$ divide pe $\left(f(x)+2^{y}\right)$, $\forall x, y \in \mathbb{N}^*$.

Gazeta Matematică

3. Numerele 9, 25 şi 49 sunt termeni ai unei progresii aritmetice cu raţia strict pozitivă. Să se arate că numărul 2009 este deasemenea termen al acestei progresii.

Adaptare Concurs Rusia

4. Fie *ABCDE* un pentagon inscriptibil şi H_1, H_2, H_3, H_4 respectiv ortocentrele triunghiurilor *ABC, BCD, CDE* şi *ACE.* Demonstraţi că patrulaterul $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.

* * *

Notă: Timp de lucru : Trei ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu maxim 7 puncte.

Concurs RMCS , ediția a IV a, 28 februarie 2009, Oțelu – Roşu

RMCS

Clasa a X a

1. Să se rezolve ecuația : $a^{x-1} = (1-a)\cdot x + 3a - 2$, unde $a \in (0,\infty)$.

RMCS

2. Să se determine funcțiile $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ cu proprietatea că

$$f\left(x^2 \cdot f(y)\right) = x \cdot y \cdot f(f(x)) \ , \ \forall x, y \in (0,\infty).$$

Gazeta Matematică

3. a) Să se determine numărul funcțiilor $f:\{1,2,3,...,8\}\to\{0,1,2\}$ cu proprietatea că:

$$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(8)=3 \ .$$

RMCS

b) La un turneu de şah au participat de două ori mai mulți băieți decât fete.Fiecare pereche de participanți a jucat exact o dată şi nu s-au înregistrat remize.Raportul între numărul victoriilor obținute de fete față de cele obținute de băieți a fost $7:5$.

Găsiți câți participanți au fost la acest turneu.

OBMJ, 2000

4. a) Să se arate că, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, este adevărată egalitatea:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \ ;$$

b) Să se demonstreze că, dacă numerele reale *x, y, z* satisfac egalitățile

$$\cos x + \cos y + \cos z = 0 \text{ şi } \cos 3x + \cos 3y + \cos 3z = 0,$$

atunci $\cos 2x \cdot \cos 2y \cdot \cos 2z \le 0$.

Bogdan Enescu

Notă: Timp de lucru : Trei ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu maxim 7 puncte.

Concurs RMCS , ediția a IV a, 28 februarie 2009, Oțelu – Roşu

RMCS

Clasa a XI a

1. Să se arate că dacă numerele reale *a,b,c,* satisfac relațiile $a+2b+3c=3, a+3b+4c=4, 2a-b+c=1$, atunci $3\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 2$.

RMCS

2. Să se arate că dacă vârfurile unui triunghi sunt situate pe parabola de ecuație $y=x^2-3x$, iar abscisele lor sunt numere întregi consecutive, atunci aria triunghiului este un număr întreg.

Iacob Didraga

3. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1=1$ şi $a_{n+1}=\frac{1+a_n{}^2}{n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$; b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+...+a_n}{\ln n}$.

4. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcție monotonă pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(2x)-f(x)\right)=0$. Să se arate că pentru orice $a>0$ avem $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(ax)-f(x)\right)=0$.

Notă: Timp de lucru : Trei ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu maxim 7 puncte.

Concurs RMCS , ediția a IV a, 28 februarie 2009, Oțelu – Roșu

RMCS

Clasa a XII a

1. Să se arate că un grup $(G,\cdot)$ cu proprietatea că există $a,b \in G$ astfel încât $ab^2 = b^3a^2$ şi $b^4 = e$, conține un subgrup izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_2,+)$.

Lucian Dragomir,RMCS

2. Fie A un inel finit comutativ cu proprietatea că funcția $f : A \to A$, $f(x) = x^2$ este injectivă.
Să se arate că:

a) $1+1=0$;

b) pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a \in A$, polinomul $P(X) = X^{2n} + a$ se poate scrie ca produsul a două polinoame de grad cel puțin 1, cu coeficienți în A.

Gazeta Matematică

3. Să se arate că: $1 \le \int_3^5 \frac{1}{\sqrt{8x - x^2 - 12}} dx \le \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lucian Dragomir

4. a) Să se arate că: $\ln(1+x) \le x, \forall x \ge 0$;

b) Să se demonstreze că dacă $a > 0$, atunci $\lim_{n\to\infty} n \cdot \int_0^1 \frac{x^n}{a+x^n} dx = \ln \frac{a+1}{a}$.

Notă: Timp de lucru : Trei ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu maxim 7 puncte.