Concurs RMCS , ediția a IV a, 28 februarie 2009, Oțelu – Roşu

Barem de notare, corectare: Clasa a IV a

1) a) $9\cdot(4:2+10)-2=106$ b) $9\cdot(4:2+10-2)=90$ c) $(9\cdot4):(2+10)-2=1$	(2p) (2p) (3p)
Total :	**7 p**
2) □ 2 stilouri şi 2 cărți costă 100 – 40 = 60 de lei **,** deci un stilou şi o carte costă 30 de lei □ folosind a doua condiție din ipoteză, deducem că un stilou costă 10 lei, deci o carte costă 20 de lei □ cu 50 de lei putem cumpăra: 1 stilou şi 2 cărți, sau 3 stilouri şi o carte	(2p) (2p) (3p)
Total :	**7 p**
3) dacă numerele căutate sunt *a,b,c,d,e* , avem : $a-x=7, b-x=8, c-x=13, d-x=17, e-x=24$ □ deducem $2009-5x=69$ □ se ajunge la $x=388$ □ numerele căutate sunt : 395, 396, 401, 405 şi 412	(2p) (2p) (1p) (2p)
Total :	**7 p**
4) □ Elena are 30 de ani □ Ciprian are 7 ani □ Cel mai mic este Andrei şi are 2 ani.	(3p) (2p) (2p)
Total :	**7 p**

Concurs RMCS , ediția a IV a, 28 februarie 2009, Oțelu – Roșu

Barem de notare, corectare: Clasa a V a

1. □Un număr convenabil este de forma $4k+1, k \in \mathbb{N}$; din $29 < 4k+1 < 290$, deducem că: $8 \le k \le 72$	(2p)
□ Suma cerută este astfel egală cu : $S = (4 \cdot 8 + 1) + (4 \cdot 9 + 1) + ... + (4 \cdot 72 + 1) = 4 \cdot (8 + 9 + ... + 72) + 65$	(2p)
□ Se ajunge, într-un fel sau altul (dar explicit !) la $S = 10465$	(3p)
Total:	**7 p**
2. a) 290 este multiplu de 2 şi de 5, deci termenii sumei se pot grupa câte doi sau câte 5	(1p)
□Grupând termenii sumei câte doi avem *a* este multiplu de 3	(1p)
□ grupând termenii câte cinci, avem că *a* este multiplu de 31	(1p)
□ imediat se obține că *a* este divizibil cu 93	(1p)
b) orice pătrat perfect este de forma $4k$ sau $4k+1$, pe când numărul *a* este de forma $4k+2$ (începând cu al doilea termen, toți sunt multiplii de 4) sau: $a = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{290}$ conduce la $2a = 2^2 + 2^3 + ... + 2^{290} + 2^{291}$, de unde $2a - a = a = 2^{291} - 2 = 2(2^{290} - 1)$ este divizibil cu 2 , dar nu şi cu 4 (al doilea factor este impar)	(3p)
Total:	**7 p**
3. a) se arată imediat că numărul 6 devine, printr-o transformare *bună* , 29;	(3p)
b) dacă ar exista un astfel de număr n , am avea $3n+4=2009$, imposibil în $\mathbb{N}$, sau $4n+5=2009$, deasemenea imposibil în numere naturale; răspunsul este deci negativ	(2p)
c) $5 \cdot [4 \cdot (3n+4) + 5] + 6 = 2031$ conduce imediat la $n = 32$	(2p)
Total:	**7 p**
4. □ dacă $c \le 7$, atunci $a+b+c+2=27$, care nu este pătrat perfect, aşadar $c=8$ sau $c=9$	(3p)
□ dacă $c=8$, avem $a+b=17$, de unde $a=8, b=9$ sau $a=9, b=8$; analizând aceste cazuri,avem că numărul $\overline{898}$ satisface enunțul (suma cifrelor lui $\overline{898}+2=\overline{900}$ este 9, deci pătrat perfect, iar produsul cifrelor acestui număr este 576, deci cifrele sunt numere consecutive)	(2p)
□ pentru $c=9$, se ajunge la fel, la numărul $\overline{799}$ (verificarea condițiilor din enunț este, din nou, esențială !)	(2p)
Total:	**7 p**

Concurs RMCS , ediția a IV a, 28 februarie 2009, Oțelu – Roșu

Barem de notare, corectare: Clasa a VI a

1. Dacă $x<y<z<t<u$ sunt măsurile unghiurilor, avem $\frac{x}{n}=\frac{y}{n+1}=\frac{z}{n+2}=\frac{t}{n+3}=\frac{u}{n+4}=\frac{360^o}{5n+10}=\frac{72^o}{n+2}, n\in\mathbb{N}$	(3p)
□ din $\frac{72^o}{n+2}=\frac{88^o}{n+4}$ se ajunge la $n=7$	(2p)
□ în final se obține $x=56^o$	(2p)
total	**7 p**
2. a) într-un fel sau altul, se ajunge la $AE=18cm$;	(4p)
b) $HC=7cm$ şi deci $\Delta HCF\equiv\Delta GDE$	(2p)
aşadar se ajunge la $FH=EG$	(1p)
total	**7 p**
3. dacă al şaselea clasat primeşte x lei, iar cel situat pe locul 5 primeşte $y>x$ lei, cel de pe locul 4 primeşte $x+y$ lei, cel de pe locul 3 primeşte $x+2y$ lei, cel de pe locul 2 primeşte $2x+3y$, iar câştigătorul primeşte $3x+5y$ lei.	(3p)
□ din $3x+5y=260$, deducem că x este multiplu de 5 şi, conform enunțului, avem $x\geq 26$, deci $x\in\{30,35,40,...\}$	(1p)
□ din $x<y\Rightarrow 5x<5y\Rightarrow 3x+5x<3x+5y=260$, deci $8x<260\Rightarrow x<33$, aşadar $x=30$	(1p)
□ imediat se ajunge la $y=34$ şi suma cerută $S=8x+12y=648$ de lei	(2p)
total	**7 p**
4. după o operație, din numerele a,b,c,d cu suma $a+b+c+d$, se ajunge la patru numere cu suma $a+b+c+d+2$	(2p)
□ după n operații pe tablă vor fi scrise patru numere cu suma egală cu $a+b+c+d+2n$	(2p)
□ în cazul nostru, plecând de la 2, 0, 0, 9, pe tablă vom avea patru numere cu suma egală cu $11+2n$, care este un număr impar, pe când suma a patru numere egale este egală cu $4m$, adică un număr par	(3p)
total	**7 p**

Concurs RMCS , ediția a IV a, 28 februarie 2009, Oțelu – Roşu

Barem de notare, corectare: Clasa a VII a

1. □ $x(y+2)=y^2-1$ conduce la $x=\frac{y^2-1}{y+2}$ (se studiază şi ce se întâmplă dacă $y=-2$!), apoi $x=y-2+\frac{3}{y+2}$	(3p)
□ din $(y+2)/3$, ajungem la $y\in\{-5,-3,-1,1\}$	(2p)
□ $(x,y)\in\{(-8,-5),(-8,-3),(0,-1),(0,1)\}$, verificare.	(2p)
Total	**7 p**
2. □Egalitatea din enunț conduce la $(a-2b)\cdot\sqrt{3}=2c-b$	(2p)
Dacă $a\neq 2b$, atunci $\sqrt{3}=\frac{2c-b}{a-2b}\in\mathbb{Q}$, fals, aşadar $a=2b, b=2c$	(2p)
Inegalitatea din enunț devine $\frac{1}{4c}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{c}=\frac{1}{c}\cdot\frac{7}{4}\geq 1$, de unde $c=1, b=2, a=4$.	(3p)
Total	**7 p**
3. □ unghiurile $\measuredangle ABE$ şi $\measuredangle HCE$ au acelaşi complement : $\measuredangle BAC$	(2p)
□ $\Delta BEA\equiv\Delta CEH$	(2p)
□ se deduce $AE=EH$, deci triunghiul ΔHEA este isoscel, de unde $m(\measuredangle CAD)=45^o$, aşadar ΔDCA este dreptunghic isoscel	(2p)
□ $m(\measuredangle ACB)=45^o$	(1p)
Total	**7 p**
4. □ Considerăm $P\in(AB), Q\in(BC)$ astfel încât $CP//MK, DQ//NL$; deducem că $CMKP, DQLN$ sunt paralelograme	(2p)
□ Cum astfel s-a obținut $KP=CM, LQ=DN$, avem $2=AK+LC+CM+NA=AK+LQ+CQ+CM+NA=$ $=AK+KP+DN+NA+CQ=AP+AD+CQ=2-PB+CQ$	(2p)
□ Aşadar $PB=CQ\Rightarrow\Delta DQC\equiv\Delta CPB$	(1p)
□ $m(\measuredangle QDC)=m(\measuredangle PCB)=90^o-m(\measuredangle PCD)$, adică $DQ\perp CP\Rightarrow MK\perp LN$	(2p)
Total	**7 p**

Concurs RMCS , ediția a IV a, 28 februarie 2009, Oțelu – Roșu

Barem de notare, corectare: Clasa a VIII a

1. a) se ajunge imediat la $a+b=2(p^2+q)$, care este număr par b) □ se arată imediat că $p^2<p^2+q<(p+1)^2$, deci $\sqrt{p^2+q}\notin\mathbb{Q}$ □ $a=2p^2+q+2p\sqrt{p^2+q}\notin\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, justificare completă.	(4p) (2p) (1p)
total	**7 p**
2. a) se justifică, într-un fel sau altul (corect), că $n=1$ b) se ajunge la $(2^m-1)(2^m-m)=0\Rightarrow\ldots\Rightarrow m=0.$ c) se folosește $(2^p)^2<1+2^p+4^p<(2^p+1)^2$	(3p) (2p) (2p)
total	**7 p**
3. a) $m(\measuredangle ECA)=45^o$ (justificare completă) b) $m(\measuredangle ECB)=60^o$ (justificare completă) c) dacă $\{O\}=AC\cap BD$, din $EA\perp(ABC)$, rezultă $EA\perp BD$ (1). Cum $BD\perp AC$ (2), din (1) și (2) ajungem la $BD\perp(ACE)$. Construim $OF\perp CE$ și, din $OF\subset(ACE)$, rezultă $OF\perp BD$ și deducem că OF este distanța cerută. Din $\Delta ACE\sim\Delta FCO$ ajungem la $OF=1cm$.	(2p) (2p) (3p)
total	**7 p**
4. a) de exemplu , $p=2, a=4, b=6$ b) $p^2/(a^3+b^3)\Rightarrow p^2/(a+b)(a^2-ab+b^2)$ dacă $p^2/(a+b)$, problema s – a încheiat; dacă nu, atunci deducem $p^2/(a^2-ab+b^2)$ de unde $p/(a+b)^2-3ab$; ținând cont de ipoteză, ajungem la $p/3ab$. Cum $p\neq 3$ este prim, avem p/a sau p/b; deoarece $p/(a+b)$, deducem că p/a și p/b, de unde p^3/a^3 și $p^3/b^3\Rightarrow p^3/(a^3+b^3)$	(2p) (1p) (1p) (1p) (2p)
total	**7 p**

Concurs RMCS , ediția a IV a, 28 februarie 2009, Oțelu – Roșu

Barem de notare, corectare: Clasa a IX a

1. □ se arată imediat că, pentru $x \in [1,3]$, avem: $3 \le 4x - x^2 \le 4$ □ se deduce că $\frac{y}{\sqrt{3}} \ge \frac{y}{\sqrt{4x-x^2}} \ge \frac{y}{2}$ şi inegalitatea analoagă □ se adună inegalitățile obținute şi se foloseşte $6 \ge x + y \ge 2 \cdot \sqrt{xy} = 4$, finalizarea fiind imediată	(3p) (2p) (2p)
total	**7 p**
2. □ Pentru $x = y = 1$,notând $f(1) = k \in \mathbb{N}^*$, obținem: $2^k \le 1 + k$. Se arată prin inducție,de exemplu,că $2^k > 1 + k, \forall k \ge 2, k \in \mathbb{N}$,astfel că rămâne doar $f(1) = k = 1$ Pentru $y = 1$ obținem condiția $\frac{2 + f(x)}{x+2} \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x) \ge x, \forall x \in \mathbb{N}^*$ (1) . Din $x + 2^{f(y)} \le f(x) + 2^y, \forall x, y \in \mathbb{N}^*$,obținem , pentru $x = 1$: $1 + 2^{f(y)} \le 1 + 2^y \Rightarrow f(x) \le x, \forall x \in \mathbb{N}^*$ (2) Din (1) şi (2) deducem acum : $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{N}^*$, care verifică enunțul.	(2p) (2p) (2p) (1p)
total	**7 p**
3. □ Conform ipotezei avem că există $n < m < k$ naturale astfel încât $a_n = 9, a_m = 25, a_k = 49$; dacă rația este $r > 0$, ajungem imediat la $(m-n)r = 16, (k-m)r = 24$. □ deducem $(k - 2m + n)r = 8$, sau , cu notația $p = k - 2m + n > 0$, $pr = 8$ □ se ajunge astfel la $a_{k+sp} = a_k + spr = 2009$, unde $s = \frac{2009-49}{8} = 245$.	(3p) (2p) (2p)
total	**7 p**
4. □ Dacă O este centrul cercului circumscris pentagonului, identitatea lui Sylvester conduce la $\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ şi analoagele. □ Se arată acum uşor că $\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OH_2} + \overrightarrow{OH_4}$ □ Finalizarea	(3p) (2p) (2p)
total	**7 p**

Concurs RMCS , ediția a IV a, 28 februarie 2009, Oțelu – Roşu

Barem de notare, corectare: Clasa a X a

1. □ dacă $a=1$, ecuația are o infinitate de soluții : orice $x\in\mathbb{R}$ □ dacă $a>1$ sau $a\in(0,1)$, funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a^{x-1}, g(x)=(1-a)x+3a-2$ sunt strict monotone, dar de monotonii diferite, deci ecuația are cel mult o soluție □ $f(2)=g(2)\Rightarrow x=2$ este unica soluție a ecuației , dacă $a>0, a\neq 1$	(2p) (3p) (2p)
total	**7 p**
2. □ pentru $x=1$ avem $f(f(y))=y\cdot f(f(1))\overset{not}{=}y\cdot a$, cu $a>0$ şi se deduce imediat că *f* este funcție injectivă □ Obținem, în plus, şi $f(x^2\cdot f(y))=ax^2y, \forall x,y>0$ □ pentru $x=\dfrac{1}{\sqrt{y}}$, ajungem la $f\left(\dfrac{f(y)}{y}\right)=a, \forall y>0$ □ folosind injectivitatea funcției ajungem la $f(x)=ax, a>0$ □ se verifică faptul că orice astfel de funcție satisface enunțul.	(2p) (2p) (2p) (1p)
total	**7 p**
3. a) □ exact 3 dintre imaginile elementelor din domeniu trebuie să fie egale cu 3, restul egale cu 0; aceasta se poate alege în $C_8^3=56$ de feluri □ sau, o imagine este 1, alta este 2, iar celelalte şase sunt 0; în acest caz avem $A_8^2=56$ de posibilități; în total, 112 funcții satisfac condiția din enunț b) dacă numărul fetelor este *n*, atunci numărul băieților este *2n*, iar numărul participanților este *3n;* numărul meciurilor jucate este deci $C_{3n}^2=\dfrac{3n(3n-1)}{2}$ numărul de victorii ale băieților este astfel $\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{3n(3n-1)}{2}=\dfrac{5n(3n-1)}{8}$ □ meciurile jucate între băieți au fost în număr de C_{2n}^n şi, evident, se consideră victorii ale băieților; prin urmare, $\dfrac{5n(3n-1)}{8}\geq n(2n-1)\Rightarrow n\leq 3$; În plus, $\dfrac{5n(3n-1)}{8}\in\mathbb{N}$, deci $8/n(3n-1)$. Se ajunge imediat la $n=3$, iar numărul participanților la turneu este 9.	(2p) (3p) (1p) (1p)
total	**7 p**
4. a) fără probleme, diverse metode b) folosind egalitățile date ajungem la $\cos^3 x+\cos^3 y+\cos^3 z=0$ folosind identitatea $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ deducem $\cos x\cos y\cos z=0$ □ dacă, de exemplu, $\cos z=0$, obținem $-\cos y=\cos x\Rightarrow\cos 2x=\cos 2y$; Cum $\cos 2z=-1$, ajungem la $\cos 2x\cos 2y\cos 2z=-\cos^2 2x\leq 0$	(3p) (1p) (1p) (2p)
total	**7 p**

Concurs RMCS , ediția a IV a, 28 februarie 2009, Oțelu – Roșu

Barem de notare, corectare: Clasa a XI a

1. □ se consideră sistemul de ecuații liniare format din primele trei egalități și se arată că este compatibil nedeterminat, soluțiile fiind date de : $a=1-c, b=1-c, c\in\mathbb{R}$	(4p)
□ $a^2+b^2+c^2=3c^2-4c+2$	(1p)
□ valoarea minimă a lui $f(c)=3c^2-4c+2, c\in\mathbb{R}$, este $\frac{2}{3}$; finalizare.	(2p)
2. dacă $a<b<c$ sunt abscisele vârfurilor, atunci aria este $S=\frac{1}{2}\cdot\lvert\Delta\rvert$, unde $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2-3a & b^2-3b & c^2-3c\end{vmatrix}$	(3p)
□ se calculează imediat că $\Delta=(c-a)(c-b)(b-a)=2$	(3p)
□ Aria este deci egală cu $1\in\mathbb{Z}$	(1p)
3. a) Calculăm primii 4 termeni ai șirului și observăm că sunt mai mici decât 3	(1p)
□ dacă $a_1, a_2, ..., a_k<3$, atunci $a_k=\frac{1+a_{k-1}{}^2}{k-1}<\frac{10}{k-1}$ și $a_{k+1}=\frac{1+a_k{}^2}{k}<\frac{1+\frac{100}{(k-1)^2}}{k}=\frac{1}{k}+\frac{100}{k(k-1)^2}<3$ (pentru $k\geq 5$). Așadar, prin inducție, am arătat că $a_n<3, \forall n\geq 1$.	(2p)
□ se ajunge acum la $0<a_n<\frac{10}{n}$, de unde limita șirului este egală cu 0.	(2p)
b) cum $\lim\limits_{\infty} a_n=0$, avem $\lim\limits_{\infty} na_{n+1}=\lim\limits_{\infty}\left(1+a_n{}^2\right)=1$ și astfel , cu criteriul Cesaro-Stolz, limita cerută este egală cu $\lim\limits_{\infty}\frac{a_{n+1}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim\limits_{\infty}\frac{na_{n+1}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=1$	(2p)
4. □ Conform ipotezei avem și $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(2^n x)-f(2^{n-1}x)\right)=0, \forall n\geq 1$. Prin inducție se arată acum $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(2^n x)-f(x)\right)=0, \forall n\in\mathbb{N}$. (folosim $f(2^{n+1}x)-f(x)=f(2^{n+1}x)-f(2^n x)+\ +f(2^n x)-f(x)$).	(3p)
□ Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că *f* este crescătoare. Dacă $a\geq 1$ considerăm $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $2^{n-1}\leq a<2^n$ și obținem $f\left(2^{n-1}x\right)\leq f\left(ax\right)<f\left(2^n x\right)$ sau încă $f\left(2^{n-1}x\right)-f(x)\leq f\left(ax\right)-f(x)<f\left(2^n x\right)-f(x)$, pentru orice $x\in\left(0,\infty\right)$. Folosim acum criteriul cleștelui.	(2p)
Dacă $a\in\left(0,1\right)$ deducem $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-f(\frac{x}{2})\right)=0$ și prin inducție $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(\frac{x}{2^{n-1}})-f(\frac{x}{2^n})\right)=0, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Cum există $n\in\mathbb{N}^*$ astfel ca $\frac{1}{2^n}<a\leq\frac{1}{2^{n-1}}$, soluția e analoagă celei anterioare.	(2p)

Concurs RMCS , ediția a IV a, 28 februarie 2009, Oțelu – Roşu

Barem de notare, corectare: Clasa a XII a

1. înmulțim prima egalitate la stânga cu b şi avem : $bab^2 = a^2$, apoi înmulțim la dreapta cu b^2 şi avem $ba = aab^2$ sau $ba = ab^3a^2$; înmulțim acum la stânga cu b^3 şi la dreapta cu a şi ajungem la $b^4a^2 = b^3ab^3a^3$, adică $a^2 = b^3ab^3a^3$, de unde $e = b^3ab^3a$. Aşadar $x = b^3a$ are proprietatea că $x^2 = e$, deci $H = \{e, x\}$ are proprietatea dorită. □	(3p) (2p) (2p)
2. a) cum f este injectivă, iar $f(1) = f(-1)$, rezultă $1 = -1 \Rightarrow 1 + 1 = 0$; b) deoarece A este finită, avem că f este şi surjectivă, de unde avem că , pentru orice $a \in A$, există $b \in A$ astfel încât $f(b) = a$. □ deducem că $P(X) = X^{2n} + a = \left(X^n\right)^2 + b^2 = \left(X^n\right)^2 - b^2 = \left(X^n - b\right)\left(X^n + b\right) = \left(X^n + b\right)^2$	(3p) (1p) (1p) (2p)
3. □studiem variația funcției $f : [3,5] \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 8x - 12$ şi deducem imediat că $f(x) \geq 3, \forall x \in [3,5]$, de unde $\frac{1}{\sqrt{f(x)}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$; integrăm pe intervalul $[3,5]$. □ Pe de altă parte , $f(x) = (x-2)(6-x)$ şi, cu inegalitatea mediilor avem $\sqrt{(x-2)(6-x)} \leq \frac{x-2+6-x}{2} = 2$ .Se ajunge imediat la inegalitatea din stânga	(4p) (3p)
4. a) exercițiu de clasă b) $n \cdot \int_0^1 \frac{x^n}{a+x^n}dx = \int_0^1 x \cdot \frac{nx^{n-1}}{a+x^n}dx = \int_0^1 x \cdot \frac{\left(a+x^n\right)'}{a+x^n}dx$; urmează integrare prin părți şi se scrie $\int_0^1 \ln(a+x^n)dx = \ln a + \int_0^1 \ln(1+\frac{x^n}{a})dx$; folosind inegalitatea de la a), avem $0 \leq \int_0^1 \ln(1+\frac{x^n}{a})dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{a}dx = \frac{1}{a(n+1)}$. Mai avem de folosit,teorema „cleştelui”.Finalizarea e imediată.	(3p) (1p) (1p) (1p) (1p)