Tabăra de MATE şi NU NUMAI

Râul Alb

Iunie 2019

Tabăra de MATE şi NU NUMAI

DIVIZIBILITATE în N-
probleme pentru clasele V / VI

prof. Camelia Pîrvu
Oraviţa, CS

Cuprins:

1. PROPRIETĂȚILE RELAȚIEI DE DIVIZIBILITATE

Definițe: Numărul natural b divide numărul natural a dacă există numărul natural c astfel încât a=b·c.

Notăm $b|a$ sau $a \vdots b$ (b divide a sau a se divide cu b);

$D_a = \{x \in N | x | a\}$ - citim mulţimea divizorilor lui a;

$M_a = \{x \in N | x \vdots a\}$ - citim mulţimea multiplilor lui a;

Proprietăţi ale relaţiei de divizibilitate:

1. ***Reflexivitate:*** $a|a, \forall a \in N$
2. ***Antisimetrie:*** $a|b$ şi $b|a$ atunci a=b, $\forall a, b \in N$;
3. ***Tranzitivitate:*** $a|b$ şi $b|c$ atunci $a|c$, $\forall a, b, c \in N$
4. $1|a, \forall a \in N$;
5. Dacă $a|1$ atunci a=1;
6. $a|0, \forall a \in N$;
7. Dacă $a|b$ atunci $a|b \cdot c, \forall a, b, c \in N$;
8. Dacă $a|b$ atunci $a \cdot c|b \cdot c, \forall a, b, c \in N$;
9. Dacă $a \cdot c|b \cdot c$ şi $c \neq 0$ atunci $a|b, \forall a, b \in N$;
10. Dacă $a_1|b_1, a_2|b_2, \ldots a_n|b_n$ atunci $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n | b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$;
11. Dacă $a|b_1, a|b_2, \ldots a|b_n$ atunci $a|b_1 \pm b_2 \pm \ldots \pm b_n$;
12. Dacă $a|b \pm c$ şi $a|b$ atunci $a | c, \forall a, b, c \in N$;
13. Dacă $a|b$ şi $a|c$ atunci $a|b \cdot n \pm c \cdot m, \forall n, m \in N$;
14. Dacă $a|c$, $b|c$ şi $(a, b) = 1$ atunci $a \cdot b|c$;
15. ***Teorema lui Gauss:*** **Dacă un număr natural divide produsul a două numere naturale şi este prim cu unul dintre factorii produsului, el va divide celălalt factor al produsului.**
    Dacă $a|b \cdot c$ şi $(a, b) = 1$ atunci $a|c$;

Demonstrație:

P₁₃: Dacă $a|b$ şi $a|c$ atunci $a|b \cdot n \pm c \cdot m, \forall n, m \in N$

$$\left.\begin{matrix} a|b \\ a|c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b = a \cdot x \\ c = a \cdot y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b \cdot n = a \cdot x \cdot n \\ c \cdot m = a \cdot y \cdot m \end{matrix}\right\} \Rightarrow b \cdot n \pm c \cdot m = a \cdot x \cdot n \pm a \cdot y \cdot m = a(x \cdot n \pm y \cdot m)$$

$$\Rightarrow a|b \cdot n \pm c \cdot m$$

P$_{14}$: Dacă $a|c$, $b|c$ şi $(a,b)=1$ atunci $a\cdot b|c$;

$$\left.\begin{array}{l} a|c \\ b|c \\ (a,b)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c=a\cdot x \\ \underline{c=b\cdot y} \\ 0=a\cdot x-b\cdot y \Rightarrow a\cdot x=b\cdot y \end{array}$$

Cum (a,b)=1 avem $\left.\begin{array}{l} a|y \\ b|x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=a\cdot t \\ x=b\cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=a\cdot b\cdot v \\ c=b\cdot a\cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow a\cdot b|c$

<u>Reţineţi:</u>

Dacă a,b$\in$ N, $a>b$ şi $n\in N^*$, atunci au loc relaţiile:

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}\cdot b+a^{n-3}\cdot b^2+...+a\cdot b^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\left(a^{2n}-a^{2n-1}\cdot b+a^{2n-2}\cdot b^2-...-a\cdot b^{2n-1}+b^{2n}\right)$$

Folosind aceste formule se pot demonstra proprietăţile:

Dacă a $a,b\in N$, $a>b$ şi $n\in N^*$, atunci:

1. $a^n-b^n=M_{a-b}$
2. $a^{2n+1}+b^{2n+1}=M_{a+b}$
3. $(a+b)^n=M_a+b^n=M_b+a^n$
4. $(a-b)^{2n}=M_a+b^{2n}=M_b+a^{2n}$

<u>APLICAŢII:</u>

1) Demonstraţi că dacă două numere naturale dau acelaşi rest la împărţirea cu un număr natural nenul n, atunci diferenţa numerelor este divizibilă cu n.
2) Demonstraţi că oricum am alege şapte numere naturale pătrate perfecte există două a căror diferenţă se divide cu 10.
3) Determinaţi x număr natural ştiind că

   a) $2x+1|21$; b) $x+1|3x+7$; c) $2x+3|4x+17$; d) $2x+1|3x+5$;
4) Demonstraţi că numărul $a=2^n\cdot 3^n\cdot 5^n+14\cdot 2^n\cdot 15^n-2\cdot 3^n\cdot 10^n$ se divide cu 13, oricare ar fi n număr natural.
5) Arătaţi că $a=1+7+7^2+7^3+...+7^{2015}$ se divide cu 800.
6) Fie x, y şi n numere naturale astfel încât $2x+3y=5\cdot 6^n$. Arătaţi că:

   a) $5|x-y$;

   b) $6|(x+3)(y+2)$
7) Fie numerele naturale a şi b astfel încât $7|2a+5b$. Arătaţi că $7|5a+2b$.
8) Arătaţi că $17|5a+8b$ dacă şi numai dacă $17|4a+3b$, oricare ar fi numerele a şi b naturale.
9) Determinaţi numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ cu proprietatea $\overline{abcd}=2\cdot\overline{ab}\cdot\overline{cd}$.
10) Arătaţi că 9^n+7 se divide cu 8, oricare ar fi n număr natural.
11) Să se arate că numărul $a=3^{3^{3n+1}}+10$ este divizibil cu 13.

2. CRITERII DE DIVIZIBILITATE:

1. ***Criteriul de divizibilitate cu 2:***

Un număr natural este divizibil cu 2 dacă şi numai dacă cifra unităţilor sale este pară;

2. ***Criteriul de divizibilitate cu 5:***

Un număr natural este divizibil cu 5 dacă şi numai dacă cifra unităţilor sale este 0 sau 5;

3. ***Criteriul de divizibilitate cu 10:***

Un număr natural este divizibil cu 10 dacă şi numai dacă cifra unităţilor sale este 0;

Obs: Un criteriu de divizibilitate cu 2, cu 5 sau 10 poate fi formulat astfel: Un număr natural este divizibil cu 2, cu 5 sau cu 10 dacă şi numai dacă cifra unităţilor sale este divizibilă cu 2, cu 5 sau cu 10.

Un număr natural este divizibil cu 2^n, cu 5^n sau cu 10^n dacă şi numai dacă numărul format din ultimele n cifre ale sale este divizibil cu 2^n, cu 5^n sau cu 10^n.

4. ***Criteriul de divizibilitate cu 3 sau 9:***

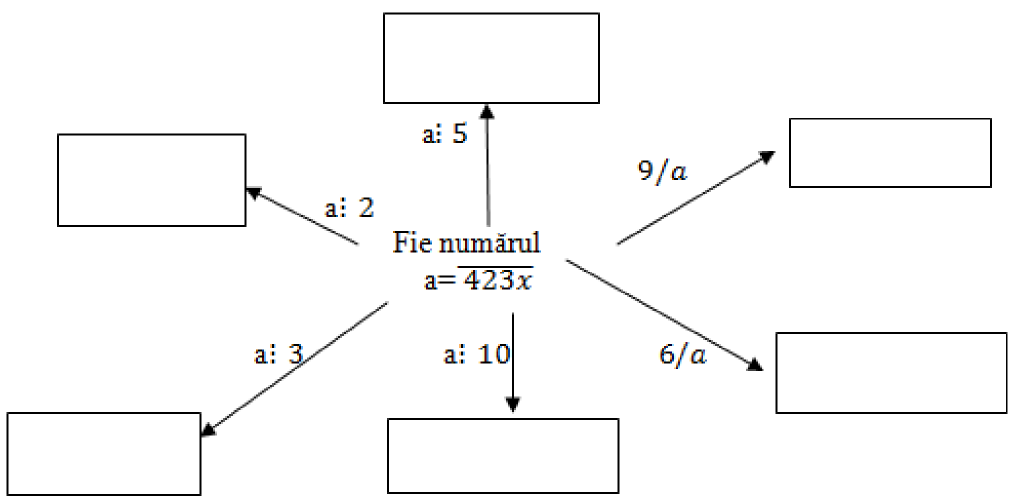
Un număr natural este divizibil cu 3 sau cu 9 dacă şi numai dacă suma cifrelor sale este un număr divizibil cu 3 sau cu 9;

5. ***Criteriul de divizibilitate cu 4 sau 25:***

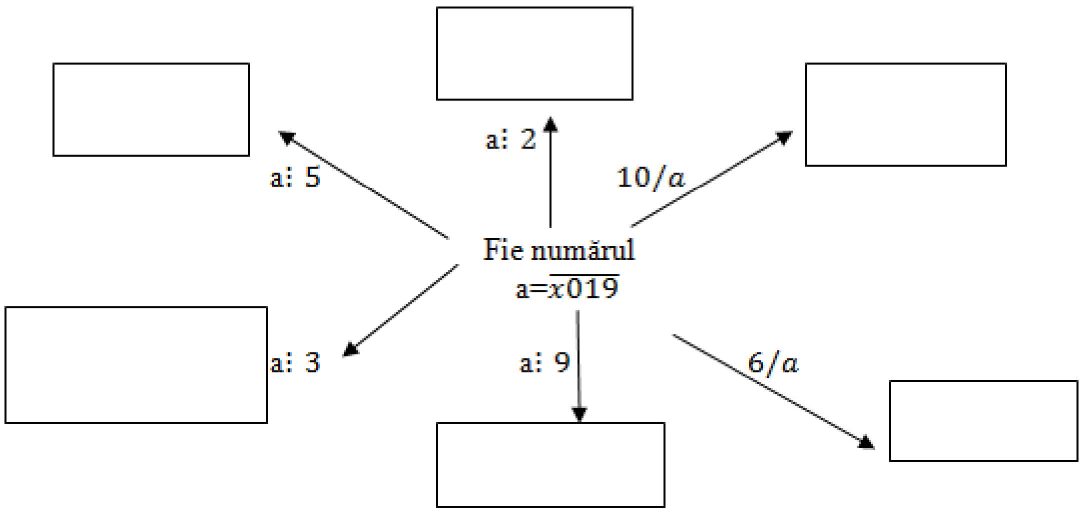
Un număr natural este divizibil cu 4 sau cu 25 dacă şi numai dacă numărul format din cifra zecilor şi a unităţilor numărului dat este divizibil cu 4 sau cu 25. (se admit şi grupurile de cifre 00, 04, 08);

Aplicaţii şi exemple:

Completează căsuţele, respectând condiţiile impuse



Completează căsuţele, respectând condiţiile impuse



12) Schimbaţi ordinea cifrelor numărului 81.532.769 astfel încât numărul astfel obţinut să fie multiplu al lui 25. Câte soluţii sunt?
13) Enumeraţi toţi anii bisecţi din al şaselea deceniu al secolului XX. (Indicaţie: anii bisecţi sunt divizibili cu 4).
14) Marele om politic francez Charles de Gaulle s-a nascut în a doua jumătate a secolului XIX. Anul naşterii este divizibil simultan cu 5 şi cu 9. În ce an s-a născut Charles de Gaulle?
15) Albă ca Zăpada are trei cufere cu galbeni, numărul acestora fiind, pentru fiecare cufăr, putere a lui 2. Ştiind că exponenţii acestor trei puteri sunt numere consecutive, arătaţi că Albă ca Zăpada poate împărţi galbenii, în mod egal, celor 7 pitici.
16) Demonstraţi că $a \vdots 9$, unde $a = 10^{2020} + 134$.
17) Explicaţi de ce nu există $n \in N$ pentru care 3 să fie divizor al numărului $202 + 4^n \cdot 25^n$.
18)
   a) Notăm cu $S(a)$ suma cifrelor numărului natural a. Arătaţi căa $9 | a - S(a)$;
   b) Fie numărul $B = 2019^{2020}$. Notăm cu S_1 suma cifrelor lui B, cu S_2 suma cifrelor numărului S_1, cu S_3 suma cifrelor numărului S_2 și așa mai departe până se obține un număr cu o singură cifră. Care este acesta?

ALTE CRITERII DE DIVIZIBILITATE:

În cele ce urmează voi prezenta câteva criterii de divizibilitate fără demonstraţii. Le voi însoţi de exemple.

6. Criteriul de divizibilitate cu 2^n şi 5^n, $n \in N^*$

Un număr m = $\overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0}$ se divide cu 2^n respectiv cu 5^n, k ≥ n, dacă şi numai dacă numărul format din ultimele n cifre ale lui m, este divizibil cu 2^n respectiv cu 5^n.

7. Criteriul de divizibilitate cu 7, 11, 13

Un număr natural se divide cu 7 (sau 11, sau 13) dacă şi numai dacă diferenţa dintre cele două numere naturale obţinute prin „tăierea” numărului dat în două astfel încât la dreapta să rămână un număr de 3 cifre, este divizibilă cu 7 (sau 11, sau 13).

Exemplu

Să arătăm că numărul 83564 se divide cu 13.

564 – 83 = 481; 481 ⋮ 13.

8. Criteriul de divizibilitate cu 11

Un număr natural se divide cu 11 dacă şi numai dacă diferenţa dintre suma cifrelor de rang par şi suma cifrelor de rang impar din numărul dat, se divide cu 11.

Exemplu

Fie numărul 72424.

p = 4 + 4 + 7 – (2 + 2) = 11

9. Criteriul de divizibilitate cu 3, 7 şi 19

Un număr natural se divide cu 3 (sau 7, sau 19) dacă şi numai dacă suma dintre numărul format din ultimele două cifre mărit de 4 ori şi numărul format din celelalte cifre, este divizibilă cu 3 (sau 7, sau 19).

Obs. Dacă este necesar se repetă procedeul până când se obţine un rezultat a cărui divizibilitate cu 3 sau 7 sau 19 este evidentă.

Exemplu

Fie numărul 1110987.

11109 + 4 · 87 = 11457

114 + 4 · 57 = 342

3 + 4 · 42 = 171 iar 171 ⋮ 19.

10. Criteriul de divizibilitate cu 19

Un număr natural se divide cu 19 dacă şi numai dacă suma dintre dublul cifrei unităţilor şi numărul format din celelalte cifre, este divizibilă cu 19.

Exemplu

Fie numărul 1110987.

111098 + 2 · 7 = 111112 11111 + 2 · 2 = 11115 1111 + 2 · 5 = 1121

112 + 2 · 1 = 114 11 + 2 · 4 = 19 iar 19 ⋮ 19

12. Criteriul de divizibilitate cu 27 şi 37

Un număr natural se divide cu 27, respectiv 37 dacă şi numai dacă suma numerelor naturale obţinute prin „tăierea” numărului în grupe de câte 3 cifre, începând de la dreapta, se divide cu 27, respectiv cu 37.

Exemplu

Fie numărul 5392158.

158 + 392 + 5 = 555 iar 37 / 555

13. Criteriul general de divizibilitate

Un număr natural m = $\overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0}$ se divide cu 10p ± q, n, p, q ∈ N^*, dacă şi numai dacă înlăturând ultima cifră, înmulţind numărul obţinut cu q şi scăzând (adunând) la noul număr de p ori cifra suprimată, se obţine un număr divizibil cu 10p ± q.

<u>*Exemplu*</u>

Să se verifice dacă numărul 232716 se divide cu 43.

43 = 10 · 4 + 3, deci p = 4 şi q = 3

$m_1 = 3 \cdot 23271 - 4 \cdot 6 = 69789$ $m_2 = 3 \cdot 6978 - 4 \cdot 9 = 20898$

$m_3 = 3 \cdot 2089 - 4 \cdot 8 = 6235$ $m_4 = 3 \cdot 623 - 4 \cdot 5 = 1849$

$m_5 = 3 \cdot 184 - 4 \cdot 9 = 516$ $m_6 = 3 \cdot 51 - 4 \cdot 6 = 129$; $129 \vdots 43$.

EXERCIŢII REZOLVATE:

1. Arătaţi că 37 / $\overline{abcxyz}$ dacă şi numai dacă 37 / $\overline{bcxyza}$.

<u>*Soluţie:*</u>

Fie $A = \overline{abcxzy} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + x \cdot 10^2 + y \cdot 10 + z$

şi $B = \overline{bcxyza} = b \cdot 10^5 + c \cdot 10^4 + x \cdot 10^3 + y \cdot 10^2 + z \cdot 10 + a$.

Observăm că $B = 10A - 999999a$. Folosind criteriul de divizibilitate cu 37 obţinem că $999999 \vdots 37$, iar (37, 10) = 1, deci 37 / A dacă şi numai dacă 37 / B.

2. Arătaţi că numărul $\overline{abb}$ se divide cu 7 dacă suma cifrelor numărului este 7.

<u>*Soluţie:*</u>

Numărul $\overline{abb} \vdots 7$ dacă şi numai dacă $4 \cdot \overline{bb} + a \vdots 7$.

Cum $4 \cdot \overline{bb} + a = 44b + a = 44b + 7 - 2b = 7(6b + 1) \vdots 7$.

3. Să se determine numerele naturale formate din patru cifre impare diferite, care sunt divizibile cu 21.

<u>*Soluţie:*</u>

Fie n = $\overline{abcd}$, a, b, c, d ∈ {1, 3, 5, 7, 9}, a ≠ b ≠ c ≠ d.

Cum 3 / n implică 3 / (a + b + c + d) ⇒ (a, b, c, d) ∈ {(1, 3, 5, 9), (3, 5, 7, 9), …..}. Avem astfel 4! + 4! = 48 de numere n cu proprietatea 3 / n.

Dintre acestea, folosind criteriul de divizibilitate cu 7, găsim pe cele divizibile cu 7. De exemplu 5397 (397 – 5 = 392 $\vdots$ 7).

4. Fie numărul n = 1234567891011…..9899. Stabiliţi dacă n se divide cu 11.

<u>*Soluţie:*</u>

Numărul n are 9·1 + 90·2 = 189 cifre.

Suma cifrelor de rang impar este $S_1 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 9\cdot(0 + 1 + 2 + … + 9) = 430$ iar suma cifrelor de rang par este $S_2 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10\cdot1 + 10 \cdot 2 + …. + 10\cdot 9 = 470$. Cum $S_2 - S_1 = 40$, numărul n nu se divide cu 11.

3. PROBLEME PROPUSE:

1) Determinaţi:
   a) câte numere naturale de trei cifre se divid cu 2;
   b) câte numere naturale de trei cifre au ca divizor prim doar pe 2;
   c) câte numere naturale de trei cifre se divid cu 2 şi cu 3;
   d) câte numere naturale de trei cifre au ca divizori primi doar pe 2 şi pe 3.

Supliment GM10/2014

2) Determinați cifrele x,a,b,c știind că $a+b=c$ și $\overline{200x}=3\cdot x\cdot\overline{abc}$.

Supliment GM5/2019

3) Aflați câte numere de forma $\overline{abcabcd}$ sunt divizibile cu 440.

Supliment GM5/2019

4) Determinați numerele $\overline{abcd}$ știind că $4|\overline{abcd}$, $15|\overline{cdab}$ și $a>b>c>d$.

Supliment GM5/2019

5) Suma cifrelor unui număr natural este 2019. Poate fi acest număr pătrat perfect?

6) Se consideră mulțimile $A=\{x\in N^*|x=7m+2,m\in N\}$, $B=\{x\in N^*|x=5n+4,n\in N\}$ și $C=\{x\in N^*|x=53p+9,\ p\in N\}$. Arătați că $A\cap B=C$.

GM5/2019

7) Arătaţi că dacă numărul $\mathrm{n}=\overline{\mathrm{abc}}\cdot\overline{\mathrm{bac}}$ este divizibil cu 6, atunci este divizibil cu 36.

RMCS 40

8) Arătaţi că numărul $\underbrace{\overline{\mathrm{abcabcabc...abc}}}_{2019\text{cifre}}$ este divizibil cu 7, 11, 13 oricare ar fi cifrele a,b,c.

GM 5/2010

9) Arătaţi că numărul $\overline{abc}$ este divizibil prin 8 dacă şi numai dacă $4a+2b+c$ este divizibil cu 8. Generalizare: un număr natural este divizibil cu 8 dacă şi numai dacă suma dintre cifra unităţilor, dublul cifrei zecilor şi cifra sutelor mărită de 4 ori, este divizibilă cu 8.

10)

a) Se divide numărul $N=1+5+5^2+...+5^{99}$ prin 26 ? Justificati;

b) Să se arate ca numărul $A=7^0+7^1+7^2+...+7^{2019}$ se divide cu 400;

c) Să se arate ca suma $A=6^{101}+6^{102}+6^{103}+...+6^{1000}$ este divizibila prin 6480;

d) Să se arate ca numărul $B=8^1+8^2+8^3+...+8^{888}$ este divizibil cu 73;

e) Să se arate ca numărul $D=3+3^2+3^3+...+3^{1992}$ se divide prin 39, 40 si 41;

f) Să se arate ca numărul $F=9+9^2+9^3+...+9^{2004}$ este divizibil cu patru numere naturale consecutive.

g) Fie $G=2+2^2+2^3+...+2^{2025}$. Arătați că S se divide cu 434 si deduceti apoi că $2^{2025}-1$ se divide cu 217.

4) INDICAȚII ȘI SOLUȚII:

P2: ***Indicaţie:*** $\overline{200x}\,\vdots\,3$

P3: ***Indicaţie:*** $\overline{abcabcd}=\overline{abc}\cdot 10010+d\Rightarrow d=0$.

De unde $\overline{abcabcd}=\overline{abc}\cdot 10010\,\vdots\,44$ și tinând cont de descompunerea lui $10010=2\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$ avem condiția necesară și suficientă ca $\overline{abc}\,\vdots\,2$

P5: ***Indicaţie:*** Se arată că este divizibil cu 3 și nu este divizibil cu 9.

P8: ***Indicaţie:*** Rețineți următorul rezultat $1001=7\cdot 11\cdot 13$ Se folosește descompunerea lui $\underbrace{\overline{abcabcabc...abc}}_{2019\text{cifre}}$ și rezultatul anterior.

P9: ***Soluție:***

$\overline{abc}=100a+10b+c=96a+9b+4a+2b+c=8(12a+b)+(4a+2b+c)$.

Deci $8\,|\,\overline{abc}$ dacă şi numai dacă $8\,|\,4a+2b+c$.

Generalizare: $\overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0}=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+...+a_3\cdot 10^3+100\cdot a_2+10\cdot a_1+a_0$

$\Rightarrow \overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0}=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+...+a_3\cdot 10^3+96\cdot a_2+8\cdot a_1+(4\cdot a_2+2\cdot a_1+a_0)$.

Deoarece $8\,|\,a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+...+a_3\cdot 10^3+96\cdot a_2+8\cdot a_1$, rezultă că $8\,|\,\overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0}$ dacă și numai dacă 8 / $8\,|\,4\cdot a_2+2\cdot a_1+a_0$

P10: ***Soluție:***

g) Cum $434=2\cdot 7\cdot 31$ (descompus în factori primi), demonstrăm divizibilitatea lui G cu 2, cu 7, respectiv cu 31.

Evident $G\,\vdots\,2$.

Cum $2+2^2+2^3=2\cdot(1+2+2^2)=2\cdot 7$ și G are 2025 termeni, se face gruparea a câte trei termeni consecutivi și se obține $G=7\cdot(2+2^4+...+2^{2023})\Leftrightarrow G\,\vdots\,7$

Cum $2+2^2+2^3+2^4+2^5=2\cdot(1+2+2^2+2^3+2^4)=2\cdot 31$ și G are 2025 termeni, se face gruparea a câte cinci termini consecutivi și se obține $G=31\cdot(2+2^4+...+2^{2021})\Leftrightarrow G\,\vdots\,31$

Din $\left.\begin{array}{l} G\,\vdots\,2 \\ G\,\vdots\,7 \\ G\,\vdots\,31 \\ (2,7,31)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow G\,\vdots\,434$.

Din calculul sumei de tip G, avem $G=2^{2026}-2\Rightarrow G=2\cdot(2^{2025}-1)$. Am demonstrat mai sus că

$G\,\vdots\,434\Rightarrow G=434k=2\cdot 217\cdot k$. Cum $G=2\cdot(2^{2025}-1)\Rightarrow(2^{2025}-1)=217k\Rightarrow(2^{2025}-1)\,\vdots\,217$.

5) ANEXE / CURIOZITĂȚI:

ANEXA 1:

ANEXA 2:

- Lucruri vechi şi noi despre divizibilitatea cu 7

Numărul 7 i-a plăcut foarte mult poporului, care l-a folosit în multe cântece şi zicători: Măsoară de 7 ori şi taie o dată. Şapte zile-n săptămână. Şapte dintr o lovitură. Copilul cu 7 doici rămâne fără moțul tăiat. Unul la muncă, şapte la mâncare... Numărul 7 se poate făli nu numai cu impresionantul său bagaj de zicători, ci şi cu diferite reguli de divizibilitate. Unele din regulile divizibilităţii cu 7 (reguli comune cu cele ale altor cifre) le cunoaşteţi din cele arătate până acum. Numărul 7 are însă şi câteva reguli individuale de divizibilitate. Pentru uzul propriu, alegeţi-vă oricare vă va părea mai interesantă din regulile care urmează:

7 CRITERII DE DIVIZIBILITATE CU 7

CRITERIUL NR 1

Se scrie numărul în baza 10 folosind puterile lui 10, se înlocuieşte numărul10 cu 3şi se fac calculele; Dacă rezultatul obţinut se divide cu 7,atunci şi numărul iniţial se divide cu 7.

Exemplu: fie numărul 5285; în baza 10 se scrie: $5\cdot10^3+2\cdot10^2+8\cdot10+5$ şi prin înlocuirea bazei 10 cu 3 se obţine $5\cdot3^3+2\cdot3^2+8\cdot3+5=182\vdots7$ deci $5285\vdots7$.

CRITERIUL NR 2 (o variantă a primei reguli)

Se înmulţeşte prima cifră din stânga cu 3 şi se adună cu cifra următoare; rezultatul se înmulţeşte cu 3 şi se adună cifra următoare ş.a.m.d. până la ultima cifră. Pentru simplificarea rezultatului se admite ca după fiecare operaţie să se scadă , din rezultatul obţinut 7 sau multiplu de 7.

Exemplu: fie numărul 5285; operaţiile sunt următoarele: $5\cdot3=15, 15+2=17,$ dar $17=7\cdot2+3;$ se renunţă la $7\cdot2$ şi se continuă $3\cdot3+8=17, 17=7\cdot2+3, 3\cdot3+5=14\vdots7$

CRITERIUL NR 3

Vom proceda ca la regula precedentă dar vom începe înmulţirea de la cifra unităţilor cu 5 de această dată: să exemplificăm pentru numărul $48902\Rightarrow$

$2\cdot5=10=7\cdot1+3;\ (3+0)\cdot5=15=7\cdot2+1;\ (1+9)\cdot5=50=7\cdot7+1;\ (1+8)\cdot5=45=7\cdot6+3;\ 3+4=7$ deci numărul $48902\vdots7$

CRITERIUL NR 4

Se dublează cifra unităților şi se scade din rezultat cifra zecilor; din nou se dublează rezultatul apoi se adună cu cifra sutelor;procedeul se continuă alternând scăderea cu adunarea,Acolo unde este posibil rezultatul se poate micsora cu un multiplu al lui 7.

Exemplu ; fie numărul 5943

$3\cdot2=6,\ 6-4=2,\ 2\cdot2=4,\ 4+9=13,\ 13=7+6,\ 6\cdot2=12,\ 12-5=7$,deci numărul $5943\vdots7$.

CRITERIUL NR 5

Este o regulă comună a divizibilităţii cu 7, 11, 13.

Se împarte numărul in clase: clasa unităţilor, clasa miilor, clasa milioanelor,etc. Dacă diferenţa sumelor grupelor numărului dat ,adunate din 2 în 2, se divide cu 7,cu 11 sau cu13, atunci numărul se divide cu 7, 11 sau13.

Exemplu: aplicăm regula pentru numărul $55285783\Rightarrow(783+55)-285=553$ este divizibil cu 7

CRITERIUL NR 6

Este o regulă comună a divizibilităţii cu 7, cu 3 sau cu 19. Se dau deoparte ultimile două cifre ale numărului , iar la numărul rămas se adună numărul format din cele două cifre date deoparte înmultit cu 4; dacă e necesar se repetă procedeul până se obţine un rezultat a cărui divizibilitate cu 3, cu 7 cu 19 este evidentă.

Exemplu: fie numărul 134064 $\Rightarrow 64\cdot4=256,\ 1340+256=1596$; repetăm regula:

$96\cdot4=384,\ 15+384=399$ numărul 399 se divide cu 7 şi cu 3

CRITERIU NR 7

Numărul natural N se divide cu 7 (cu 11 si cu 13) dacă şi numai dacă diferenţa nenegativă dintre cele două numere obţinute din numărul natural dat prin tăierea lui în două, astfel ca la dreapta să rămână trei cifre, se divide cu 7 (cu 11 sau 13). Dacă numărul are mai mullt de 6 cifre, împărțim de la dreapta la stânga numărul în grupe de câte trei cifre .Dacă diferenţa dintre suma numerelor exprimate prin grupe de rang par şi suma grupelor de rang impar se divide cu7, 11, 13, numărul dat se divide cu 7, 11, 13.

ŞTIAŢI ?

- Dacă un număr de două cifre se divide cu 7, atunci numărul format din aceleaşi cifre scrise in ordine inversă, mărit cu cifra zecilor din numărul iniţial se divide cu 7.

Exemplu $63 \vdots 7$; prin urmare numărul $36+6=42 \vdots 7$.

- Dacă un număr de trei cifre se divide cu 7 ,atunci numărul format din aceleaşi cifre scrise in ordine inversă, micşorat cu diferenta dintre cifra unităţilor si c sutelor numărului iniţial,se divide cu 7.

Exemplu: numărul 126 se divide cu 7.Numărul $621-(6-1)=616$ se divide cu 7

- Dacă suma cifrelor unui număr cu trei cifre este egală cu 7,el se divide cu 7 numai dacă cifra zecilor este egală cu cifra unităţilor .

Exemplu ;322 se divide cu 7deoarece $3+2+2=7$.

- Numărul de pe mormânt

În una din piramidele Egiptului savanţii au descoperit - pe o placă de piatră care acoperea mormântul - hieroglifa numărului 2.520. E greu de precizat motivul pentru care i s-a acordat o cinste atât de mare acestui număr. Poate pentru că se împarte exact la toate numerele întregi de la 1 până la 10. Într-adevăr, nu există un alt număr, mai mic ca 2.520, care să aibă această proprietate. Nu este greu să ne convingem că numărul 2.520 este cel mai mic multiplu comun al numerelor întregi din prima decadă.

- Există un asemenea număr

Există oare un număr care împărţit la 3 să dea rest 1, împărţit la 4 - să dea rest 2, împărţit la 5 să dea rest 3, iar împărţit la 6 să dea rest 4?

- Coşul cu ouă

O femeie se ducea la piaţă să vândă un coş cu ouă. Un trecător neatent a îmbrâncit-o, coşul i-a scăpat din mâini, iar ouăle, bineînţeles, s-au spart. Vinovatul, vrând s-o despăgubească, a întrebat-o: - Câte ouă ai avut în coş? - Nu-mi aduc aminte, - i-a răspuns femeia, - ştiu că dacă le scoteam câte 2, câte 3, câte 4 sau câte 5, în coş rămânea un singur ou, iar dacă le scoteam 7 - nu rămânea niciunul. Câte ouă erau?

- Un număr cu trei cifre

Cunosc un număr cu trei cifre din care dacă scad 7, se împarte la 7, dacă scad 8 se împarte cu 8, iar dacă scad 9 se împarte la 9. Care este numărul?

- Patru vapoare

Într-un port erau ancorate patru vapoare. În data de 2 ianuarie 1953, la amiază, toate patru au părăsit în acelaşi timp portul. Se ştie că primul vapor revine în 2 portul respectiv din 4 în 4 săptămâni, al doilea din 8 în 8 săptămâni, al treilea la fiecare 12 săptămâni, al patrulea 16 săptămâni. La ce dată s-au întâlnit din nou în port toate cele patru vapoare?

- Greşeala casierului

Adresându-se casierului unui magazin alimentar, un cumpărător i-a spus: - Aveţi de primit câte 90 de bani pentru 2 pachete de sare, câte 2,70 lei pentru 2 bucăţi de săpun şi, afară de asta, mai am de plătit 3 pacheţele cu zahăr vanilat şi 6 cutii cu chibrituri, dar nu-mi amintesc preţul zahărului şi al chibriturilor. Casierul i-a emis cumpărătorului un bon de 29,17 lei. Aruncându-şi o privire asupra bonului, cumpărătorul i 1-a înapoiat spunându-i: - Cred că aţi greşit la adunarea sumei totale. Casierul a verificat şi a recunoscut că a greşit, eliberând cumpărătorului un alt bon. Cum a descoperit cumpărătorul greşeala casierului?

- Rebus cu cifre

Raţionând aritmetic, să se găsească numărul t şi cifra cu care trebuie înlocuită litera a în următoarea egalitate $\left[3(230+t)\right]^2=\overline{492a04}$.