

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.
 - La toate subiectele se cer rezolvări complete.
-

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se arate că $\sqrt{6+4\sqrt{2}} \in \{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $|1+x|=1-x$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[6]{x^2-2x+1} = \sqrt[3]{3-x}$.
- 5p** 4. Să se arate că 11 divide numărul $C_{11}^1 + C_{11}^2 + \dots + C_{11}^{10}$.
- 5p** 5. Fie ABC un triunghi și G centrul său de greutate. Știind că $A(1,1)$, $B(5,2)$ și $G(3,4)$, să se calculeze coordonatele punctului C .
- 5p** 6. Fie $a \in \mathbb{R}$ cu $\operatorname{tg} a = \frac{2}{5}$. Să se calculeze $|\sin a|$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se demonstreze că $(I_2 + A)^2 = I_2 + A$.

5p b) Să se demonstreze că mulțimea $\{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită.

5p c) Să se rezolve ecuația $X^3 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ și polinomul $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$.

5p a) Să se arate că $f(1) + f(-1)$ este număr par.

5p b) Să se arate că, dacă $f(2)$ și $f(3)$ sunt numere impare, atunci polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.

5p c) Să se arate că polinomul $g = X^3 - X + 3a + 1$, $a \in \mathbb{Z}$, nu poate fi descompus în produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x^3 - x^2 + x$.

5p a) Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p b) Să se arate că funcția f este inversabilă.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(x)}{\ln x}$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 3x + 2} dx$.

5p a) Să se calculeze I_1 .

5p b) Să se arate că $I_{n+2} + 3I_{n+1} + 2I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$.