

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009**

**Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

---

**SUBIECTUL I (30p)**

- 5p** 1. Să se calculeze  $\left(\frac{(1-2i)(3i-1)}{5}\right)^4$ .
- 5p** 2. Să se arate că funcția  $f : (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$  este impară.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $5^x + 5^{-x} = 2$ .
- 5p** 4. Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, prima sa cifră să fie număr prim?
- 5p** 5. Fie  $ABC$  un triunghi și  $O$  centrul cercului circumscris lui. Știind că  $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OC}$ , să se arate că triunghiul  $ABC$  este dreptunghic.
- 5p** 6. Fie  $\alpha \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$ . Să se calculeze  $\operatorname{tg} 2\alpha$ .

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Fie  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$  și matricea  $A = \begin{pmatrix} a & a-b & a-b \\ 0 & b & b-c \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ .

5p a) Să se arate că  $A$  este matrice inversabilă.

5p b) Să se demonstreze că  $A^n = \begin{pmatrix} a^n & a^n - b^n & a^n - b^n \\ 0 & b^n & b^n - c^n \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

5p c) Să se calculeze  $A^{-1}$ .

2. Fie  $f \in \mathbb{R}[X]$  un polinom astfel încât  $f(X^2 + 3X + 1) = f^2(X) + 3f(X) + 1$  și  $f(0) = 0$ .

5p a) Să se determine  $f(-1)$ .

5p b) Să se determine restul împărțirii polinomului  $f$  la  $X - 5$ .

5p c) Să se demonstreze că  $f = X$ .

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcțiile  $f_n : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^{n+1} - (n+2)x + n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

5p a) Să se arate că graficele funcțiilor  $f_n$  nu admit asimptotă spre  $+\infty$ .

5p b) Să se arate că, pentru oricare  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  are exact un punct de extrem  $x_n$ .

5p c) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{n^2}$ , unde  $x_n$  este definit la punctul b).

2. Se consideră șirul  $(I_n)_{n \geq 1}$ ,  $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$ .

5p a) Să se calculeze  $I_1$ .

5p b) Să se arate că  $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$ ,  $\forall n \geq 1$ .

5p c) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .