CÂTEVA RELAȚII METRICE ÎN PATRULATERUL OARECARE ŞI ÎN TETRAEDRU

Fie ABCD un patrulater oarecare. Ne propunem sa evaluăm pentru început unghiul format de două laturi opuse, folosind funcția trigonometrică cos.

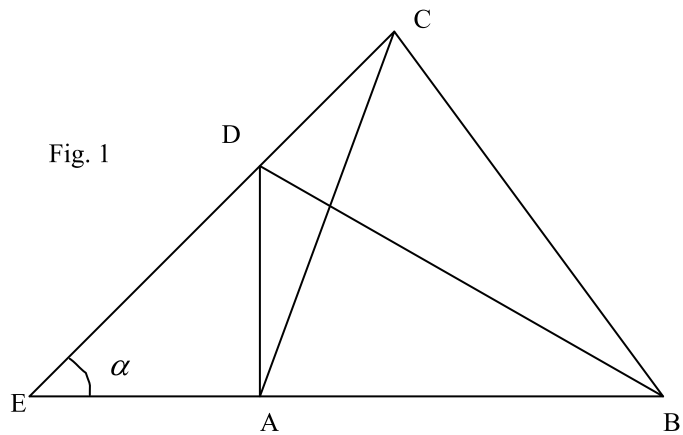

Fig. 1

Cu notațiile din figura 1 vom demonstra următoarea relație

$$\cos\alpha = \frac{BD^2 + AC^2 - AD^2 - BC^2}{2AB \cdot CD} \qquad (1)$$

Vom scrie pentru început următoarea relație vectorială:

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$. Ridicăm la pătrat această relație vectorială şi obținem:

$$BC^2 = AB^2 + AD^2 + CD^2 - \left(AB^2 + AD^2 - BD^2\right) - 2AB \cdot CD\cos\alpha - \left(AD^2 + DC^2 - AC^2\right)$$

Am ținut cont de egalitățile:

$$2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -\left(AB^2 + AD^2 - BD^2\right)$$
$$2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = -\left(DA^2 + DC^2 - AC^2\right)$$
$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$$

Explicitând $\cos\alpha$ din această relație se obține relația: $\cos\alpha = \dfrac{BD^2 + AC^2 - AD^2 - BC^2}{2AB \cdot CD}$

Observație: Această relație poate fi considerată ca un fel de teorema cosinusului pentru patrulatere.

Ca aplicație pentru această relație propunem următoarea:

1) Să se arate că într-un patrulater oarecare ABCD are loc inegalitatea:

$$2(BD^2 + AC^2) \leq \left(AD + BC\right)^2 + \left(AB + CD\right)^2$$

Soluție: Se observă mai întâi că având $\cos\alpha \leq 1$ se obține:

$BD^2 + AC^2 \leq AD^2 + BC^2 + 2AB \cdot CD$, cu egalitate dacă $\cos\alpha = 1$ adică AB//CD.

Analog se poate scrie că: $BD^2 + AC^2 \leq CD^2 + AB^2 + 2AD \cdot BC$, cu egaliate din nou când CB//AD. Adunând cele două relații se obține relatia din enunț.

Egalitatea are loc dacă ABCD este paralelogram.

Ne propunem în continuare să evaluăm unghiul format de diagonalele patrulaterului ABCD.

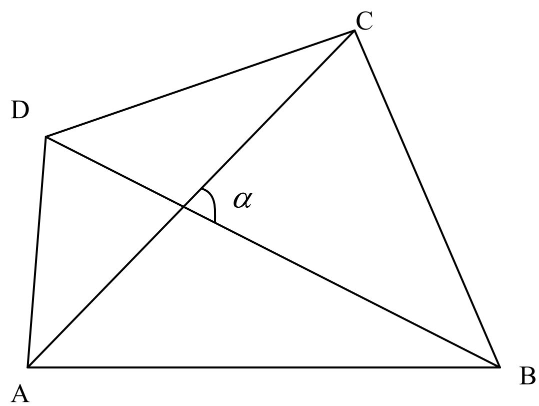

Fig. 2

Cu notațiile din figura 2 putem scrie:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$$

Ridicăm această relație vectorială la pătrat obținem:

$$BC^2 = BD^2 + DA^2 + AC^2 - \left(BD^2 + AD^2 - AB^2\right) - 2BD \cdot AC \cdot \cos\alpha - \left(AD^2 + AC^2 - CD^2\right)$$

Am ținut cont de egalitățile:

$$2\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DA} = -2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA} = -\left(DB^2 + DA^2 - AB^2\right)$$

$$2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = -\left(DA^2 + AC^2 - CD^2\right)$$

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Din relația precedentă prin explicitarea lui $\cos\alpha$ se obține următoarea relație:

$$\cos\alpha = \frac{AB^2 + CD^2 - AD^2 - BC^2}{2BD \cdot AC} \qquad (2)$$

Observație: Obținem ca o consecință următorul rezultat cunoscut:

Un patrulater ABCD are diagonalele AC şi BD perpendiculare dacă şi numai dacă:

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$$

Urmând un procedeu similar în cazul unui tetraedru oarecare ABCD, cu notațiile din figura 3 vom avea: $\cos\left(\hat{u}_{AB,CD}\right) = \dfrac{\left|AC^2 + BD^2 - BC^2 - AD^2\right|}{2 \cdot AB \cdot CD}$, (3)

unde prin $\hat{u}_{AB,CD}$ se înțelege unghiul dreptelor AB şi CD.

Vom scrie relația vectorială: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$, care după ridicare la pătrat devine:

$$AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 - \left(AB^2 + BC^2 - AC^2\right) \pm 2 \cdot AB \cdot CD \cdot \cos\left(\hat{u}_{AB,CD}\right) -$$

$$-\left(BC^2 + CD^2 - BD^2\right)$$

Întrucât ne referim la unghiul ascuțit al dreptelor AB şi CD se va alege semnul corespunzător în fața produsului $2 \cdot AB \cdot CD \cdot \cos(\hat{u}_{AB,CD})$. Prin separarea acestui produs şi trecerea la modul se obține:

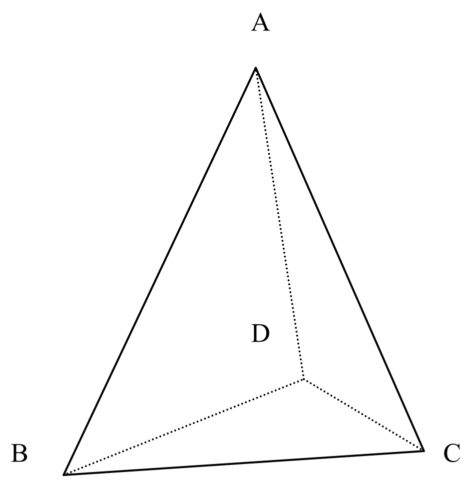

Figura 3

$$\cos(\hat{u}_{AB,CD}) = \frac{\left|AC^2 + BD^2 - BC^2 - AD^2\right|}{2 \cdot AB \cdot CD}.$$

Observație: Analog putem obține: $\cos(\hat{u}_{AC,BD}) = \dfrac{\left|AD^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2\right|}{2 \cdot AC \cdot BD}$ şi

$$\cos(\hat{u}_{BC,AD}) = \frac{\left|AB^2 + CD^2 - AC^2 - BD^2\right|}{2 \cdot BC \cdot AD}$$

De aici se obține o foarte cunoscută problemă care zice că:
Muchiile opuse ale unui tetraedru ABCD sunt perpendiculare dacă şi numai dacă:

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$$

Dacă considerăm acum ABCD un tetraedru echifacial, se ştie că acesta are muchiile opuse congruente. Dacă notăm AB=CD=a, AC=BD=b, BC=AD=c, se va obține:

$$\cos(\hat{u}_{AB,CD}) = \frac{\left|b^2 - c^2\right|}{a^2}, \quad \cos(\hat{u}_{AC,BD}) = \frac{\left|c^2 - a^2\right|}{b^2} \text{ şi } \cos(\hat{u}_{BC,AD}) = \frac{\left|a^2 - b^2\right|}{c^2}$$

Se poate arăta acum că dacă laturile opuse într-un tetraedru echifacial formează unghiuri congruente atunci tetraedru este regulat. În particular, dacă laturile opuse în tetraedru echifacial sunt perpendiculare atunci tetraedru este regulat.

Într-adevăr, dacă de exemplu am avea $a \le b \le c$ atunci rezultă că:

$\frac{c^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2 - a^2}{b^2} = \frac{b^2 - a^2}{c^2} = \frac{c^2 - a^2}{a^2 + c^2}$. Dacă $c^2 - a^2 \neq 0$ atunci $b^2 = a^2 + c^2$ ceea ce este fals. Prin urmare vom avea neapărat $c^2 = a^2$ şi ținând cont de ipoteză rezultă a=b=c ceea ce demonstrează afirmația.