Mulțimi legate

La etapa județeană a olimpiadei de matematică din acest an (2006), una din problemele propuse la clasa a VII-a definea mulțimile legate ca fiind mulțimi de 4 numere naturale cu proprietatea că pentru orice x din mulțime cel puțin unul dintre numerele x-1, x+1 este în M. Vom încerca în această notă să definim mulțimile legate de ordin k eliminând condiția ca mulțimea să conțină patru elemente şi apoi vom încerca să identificăm o metodă de calcul a diferitelor tipuri de submulțimi legate ale mulțimii $A_n=\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Definiția 1: O mulțime M de numere naturale se numeşte **simplu legată** dacă este mulțimea vidă sau dacă pentru orice x din mulțime cel puțin unul dintre numerele x-1, x+1 este în M.

Observația 1: O mulțime nevidă de numere naturale simplu legată este formată din "blocuri" de numere consecutive de lungime cel puțin 2.

Definiția 2: Fie $k \geq 1$. O mulțime M de numere naturale se numeşte **legată de ordin k** dacă este mulțimea vidă sau dacă pentru orice x din M, cel puțin una din mulțimile $\{x-i, x-i+1, \ldots, x-i+k\}$ cu $0 \leq i \leq k$ este inclusă în M.

Observația 2: O mulțime nevidă de numere naturale legată de ordin k este formată din "blocuri" de numere consecutive de lungime cel puțin k+1. Dacă k=1 se obține definiția mulțimilor simplu legate. Mulțimile legate de ordin 2 le vom numi şi mulțimi dublu legate.

Fie acum mulțimea $A_n=\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Ne punem problema să determinăm numărul submulțimilor lui A_n simplu legate şi respectiv dublu legate .

Vom considera în acest sens mulțimea n-uplelor $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ în care $a_i \in \{0,1\}$ pentru orice $1 \leq i \leq n$; un astfel de n-uplu îl vom numi şi n-cuvânt. Vom asocia de asemenea fiecărei submulțimi X a lui A_n un n-cuvânt format în felul următor: Dacă $i \in X$ atunci $a_i=1$ altfel $a_i=0$.

Definiția 3: Se numeşte n-cuvânt legat de ordin k un n-cuvânt asociat unei mulțimi legate de ordin k.

Vom nota cu L_n^1, numărul n-cuvintelor legate de ordin 1 pe care le vom numi şi n-cuvinte simplu legate.

Propoziția 1: Cu notațiile anterioare avem următoarea relație de recurență:

$$L_n^1 = L_{n-1}^1 + L_{n-2}^1 + L_{n-4}^1 \text{ pentru orice } n \geq 4.$$

Demonstrație: Într-adevăr, numărul n-cuvintelor simplu legate care încep cu 0 este L_{n-1}^1. Numărul n-cuvintelor simplu legate care încep cu 1 îl vom calcula astfel: Vom observa

pentru început că un astfel de n-cuvânt are în mod obligatoriu în poziţia a doua elementul 1. Dacă la primele două poziţii adăugăm toate (n-2)-cuvintele simplu legate care se formează cu restul poziţiilor dintr-un astfel de cuvânt se obţin n-cuvinte simplu legate. Deasemenea n-cuvinte simplu legate mai putem obţine şi dacă în poziţiile 3 şi 4 punem 1 şi respectiv 0 iar în rest (n-4)-cuvinte simplu legate. Prin urmare numărul n-cuvintelor simplu legate care încep cu 1 este: $L_{n-2}^{1} + L_{n-4}^{1}$ şi deci relaţia de recurenţă este acum justificată.
Folosind un program simplu de calculator creat în limbajul Pascal am completat (prin identificare si numarare a submulţimilor legate fără a folosi recurenţa anterioară) următorul tabel:

k	L_k^1
0	1
1	1
2	2
3	4
4	7
5	12
6	21
7	37
8	65
9	114

Bineînţeles că având calculate valorile L_k^1 cu $2 \le k \le 5$, se pot calcula folosind relaţia de recurenţă dedusă şi celelalte date din tabel dar din curiozitate am continuat să calculez cu calculatorul şi pentru a verifica astfel relaţia de recurenţă dedusă.

Vom nota cu L_n^2, numărul n-cuvintelor legate de ordin 2 pe care le vom numi şi n-cuvinte dublu legate.
Propoziţia 2: Cu notaţiile anterioare avem următoarea relaţie de recurenţă:

$$L_n^2 = L_{n-1}^2 + L_{n-3}^2 + L_{n-5}^2 + L_{n-6}^2 \text{ pentru } n \ge 6.$$

Demonstraţie: Într-adevăr, numărul n-cuvintelor dublu legate care încep cu 0 este L_{n-1}^2. Numărul n-cuvintelor dublu legate care încep cu 1 îl calculăm astfel: Un astfel de n-cuvânt are în mod obligatoriu în poziţiile 2 şi 3 cifra 1. Dacă completăm aceste cuvinte cu (n-3)-cuvinte dublu legate se obţin n-cuvinte dublu legate. Deasemenea n-cuvinte dublu legate se mai pot obţine şi dacă completăm poziţiile 4 şi 5 cu cifrele 1 şi respectiv 0 şi în rest (n-5)-cuvinte dublu legate, sau dacă poziţiile 4, 5 şi 6 se completează cu cifrele 1, 1 şi respectiv 0 iar în rest cu (n-6)-cuvinte dublu legate. Prin urmare numărul n-cuvintelor dublu legate care încep cu 1 este $L_{n-3}^2 + L_{n-5}^2 + L_{n-6}^2$ şi deci relaţia din propoziţia 2 este acum justificată.

Folosind calculatorul am reuşit să completez (prin identificarea şi numărarea submulţimilor legate) următorul tabel:

k	L_k^2
0	1
1	1
2	1
3	2
4	4
5	7
6	11
7	17
8	27
9	44
10	72

Observație: Relațiile de recurență deduse în cele două propoziții permit determinarea unei formule de calcul pentru L_n^1, respectiv L_n^2.
Se observă că numerele obținute cu ajutorul calculatorului verifică relația de recurență.
Folosind relațiile de recurență deduse şi un program corespunzător pe calculator putem calcula L_n^1 şi L_n^2 pentru valori suficient de mari ale lui n . ■

Stăniloiu Nicolae, profesor, Bocşa