Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Caraş-Severin

REVISTA DE MATEMATICĂ

A ELEVILOR ȘI PROFESORILOR

DIN JUDEȚUL CARAŞ-SEVERIN

Nr. 43, An XIV – 2013

Acest număr al revistei are avizul Comisiei pentru publicații a SSMR

Editura „Neutrino"
Reşiţa, 2013

© 2013, Editura „Neutrino”
Titlul: Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din județul Caraş-Severin
I.S.S.N. 1584-9481

Mobil: 0741017700
www.neutrino.ro
E-mail: contact@neutrino.ro

CUPRINS

Citate celebre

● Când îți doreşti cu adevărat ceva, tot universul conspiră pentru îndeplinirea visului tău.

Paulo Coelho

● Nimeni nu pierde pe nimeni, pentru că nimeni nu posedă pe nimeni. Asta e adevărata experiență a libertății: să ai lucrul cel mai important din lume, fără a-l poseda.

Paulo Coelho

● Găseşte curajul de a fi tu însuți, chiar dacă nu ştii cine eşti.

Paulo Coelho

● Adevărații prieteni sunt aceia care se află alături de noi atunci când ni se întâmplă lucruri bune şi se bucură de victoriile noastre. Falşii prieteni apar în momentele grele, cu mutra plouată ” de solidaritate” cu noi, dar de fapt suferința noastră îi consoleaza pentru viața lor mizerabilă.

Paulo Coelho

● Fă ceea ce îți porunceşte inima şi Dumnezeu va fi mulțumit.

Paulo Coelho

● Eliberează-te de toate ideile astea blestemate, de mânia de a găsi o explicație pentru orice şi de a face numai lucruri cu care sunt de acord ceilalți.

Paulo Coelho

● Când ne vedem tot timpul cu aceleaşi persoane ele ajung să facă până la urma parte din viața noastră. Şi cum ele fac parte din viața noastră, încep să vrea să ne-o schimbe. Dacă nu eşti asa cum vor, se enervează. Fiindcă toată lumea are o noțiune exactă despre cum trebuie să ne trăim viața.

Paulo Coelho

● Niciodata nu putem judeca viața celorlalți, pentru că fiecare îşi cunoaşte propria durere şi renunțare.

Paulo Coelho

Matematica...altfel (partea a XIII-a)

Ioan Dăncilă, Bucureşti

Numărul 12

○ *Ce te face să te gândeşti la numărul 12?*

- Cei 12 apostoli, lunile anului, *Dodecim tabulae*, tăblițele de bronz care conțineau primele legi romane scrise, Cavalerii mesei rotunde, duzina, zeii din Olimp, semnele zodiacale, cel mai mare număr prezent pe cadranul orologiilor, cele 12 stele de pe drapelul U.E., care vor să sugereze perfecțiune şi plenitudine...

○ *Numai atât?*

- Bineînțeles că nu! Numărul 12 este prin excelență un număr mistic, în *Biblie* este pomenit de 184 de ori! 12 fii a lui Iacob, 12 triburi , 12 porți ale Ierusalimului....încă din cele mai vechi timpuri diviziunile spațio-temporare au fost 12. Numeroase mituri integrează numărul 12: mitul lui Osiris, muncile lui Hercule, Pământul ar avea forma unui **dode**caedru...

- Iar 12 este numărul de vertebre dorsale ale omului, care susțin 12 coaste, la o mână avem 12 falange ale degetelor, ce se opun degetului mare, tensiunea arterială optimă este 12...

- La automobile bateriile sunt "de 12 Volți" , apele teritoriale marine au o lățime de 12 mile, 12 pământeni au călcat pe Lună, jocul de şah conține $6\times 2=12$ piese diferite, un arhipelag grecesc se numeşte *Dodecanez*,...

- ți-aş mai aminte de filmele "Armata celor 12 maimuțe" şi "12 oameni furioşi ", dar şi mai interesante mi se par legăturile numărului 12 cu matematica. Numărul 12 este un număr d*reptunghiular* (de forma $n(n+1)$), este şi *pentagonal* (de forma $n(3n-1)/2$), este suma a trei numere consecutive ($12=3+4+5$) şi a două numere prime consecutive ($12=5+7$), iar în şirul lui Fibonacci al 12-lea număr este $F_{12}=12^2$.

Alte proprietăți interesante: $12=(5-1)\cdot(5-2)$, este "complementar" cu 5 şi $12=1!\cdot 2!\cdot 3!$

Funia care realizează istoricul triunghi egiptean are $3+4+5=1$ intervale între noduri succesive, cubul are 12 muchii, aşa cum am văzut (la *Numărul* 5) există doar 12 pentaminosuri diferite şi, în fine, suma a două numere prime *gemene*, mai puțin 3 şi 5, este întodeauna divizibilă cu

12; împreună cu răsturnatul său, numărul 12 are proprietățile: $3+4+5=1$ şi $21=6+7+8$, $12^2=144$ şi $21^2=441$.

○ *Ca o încununare a tuturor acestor proprietăți numărul 12 a fost decretat* ***sublim****!*

- Cum aşa?

- Atât numărul divizorilor săi 6, cât şi suma lor $28=1+2+3+4+6+12$ sunt numere *perfecte*; următorul număr cu astfel de proprietăți are nu mai puțin de 76 cifre!

Matematica universalis
(probleme rezolvate şi comentate din reviste străine)
Partea a II-a

Prof. Dr. Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

Cu toate că noua rubrică nu a stârnit interesul, noi vom continua serialul nostru cu încă un episod. Ca şi Lăpuşneanu nu-mi rămâne decât să vă spun că ”dacă voi nu mă vreți, eu vă vreau”. Fiind perioada olimpiadelor şi concursurilor şcolare, în articolul de față vă voi prezenta câteva probleme date la concursurile din alte țări.

<u>Probleme pentru clasele VII-VIII</u>: Problema a fost dată la a 28-a Olimpiadă Matematică din Italia.

Fie ABC *un triunghi cu unghiul drept* A *şi punctele* D, E, F *pe laturile* BC, CA, AB*, respectiv, astfel ca* $AFDE$ *este pătrat. Notăm cu* x *latura acestui pătrat. Arătați că* $\frac{1}{x}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$.

Soluție. Problema este evident banală. Sper însă să o facem interesantă prin comentariile pe care le vom face. Revenind la soluție, din asemănare avem $\frac{x}{AB}=\frac{CD}{CB}$ şi $\frac{x}{AC}=\frac{BD}{BC}$ de unde prin adunare suntem conduşi la $\frac{x}{AC}+\frac{x}{CA}=1$, adică $\frac{1}{x}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$ şi problema este rezolvată.

Comentarii. În cele ce urmează vom face câteva precizări legate de această problemă.

În mod evident problema poate fi generalizată astfel: Dacă ABC este un triunghi cu $m\left(\widehat{A}\right)=90^{\circ}$, iar punctele $E\in[AB]$, $D\in[BC]$, $M,F\in[AC]$ sunt astfel ca $EDFM$ este dreptunghi, atunci $\frac{EN}{h_a}+\frac{ED}{AC}=1$, unde h_a este lungimea înălțimii din A a triunghiului ABC. În mod cert soluția este ca şi cea de mai sus.

Legat de această configurație în literatura românească de specialitate se află următoarea problemă:

Determinați dreptunghiurile înscrise într-un triunghi dat având două dintre vârfuri pe o latură şi care au aria maximă.

Soluție: Admitem că triunghiul este ascuțitunghic, în caz contrar, raționamentele se simplifică. Fie ABC triunghiul, $MNPQ$ dreptunghiul cu $M\in[AB], N,P\in[BC], Q\in[CA]$. Atunci din asemănare avem $\frac{MQ}{BC}+\frac{MN}{h_a}=1$, unde h_a este lungimea înălțimii din A. Cu inegalitatea mediilor avem că $2\cdot\sqrt{\frac{MQ\cdot MN}{BC\cdot h_a}}\le\frac{MQ}{BC}+\frac{MN}{h_a}=1$, adică $aria[MNPQ]\le\frac{1}{2}aria[ABC]$. Vom arăta că egalitatea poate fi atinsă şi atunci $\frac{1}{2}aria[ABC]$ va reprezenta aria maximă. Pentru aceasta este suficient să ştim că în inegalitatea mediilor, egalitatea are loc dacă şi numai dacă numerele sunt egale, adică $\frac{MQ}{h_a}=\frac{MN}{BC}$, şi cum suma lor este 1, deducem că $MQ=\frac{1}{2}BC$, adică MQ este linie mijlocie în triunghiul ABC. Cu aceasta problema este rezolvată.

Tot legat de această configurație avem următoarea problemă, tot din “folclorul matematic” .

Fie ABC un triunghi cu $m\left(\widehat{B}\right), m\left(\widehat{C}\right) < 90^\circ$ şi $MNPQ$ un dreptunghi cu $M \in [AB], N, P \in [BC], Q \in [CA]$. Să se arate că centrul acestui dreptunghi se află pe segmentul determinat de mijlocul înălțimii din A şi mijlocul laturii $[BC]$.

Soluție. Fie D "piciorul" perpendicularei din A pe $[BC]$, E mijlocul lui $[AD]$, F mijlocul lui $[BC]$, S mijlocul lui $[MQ]$, T mijlocul lui $[NP]$. Atunci din motive de paralelism $S \in [AF]$ şi cum $ST \parallel AD$ acelaşi raționament dovedeşte că FE trece prin mijlocul segmentului $[ST]$, adică prin centrul dreptunghiului. În concluzie centrul pătratului se află pe segmentul determinat de mijlocul înălțimii din A pe mijlocul laturii $[BC]$. De remarcat că şi orice punct din interiorul acestui segment este centrul unui dreptunghi cu proprietățile din enunț.

Nu cum mult timp în urmă, o astfel de problemă purta "numele" de problemă de loc geometric. Din păcate în ultima vreme acest gen de probleme a dispărut, locul lor fiind luat de pseudoprobleme de geometrie. Sugerăm cititorului să încerce "trecerea" acestui gen de probleme în spațiu. Chiar nu-i nevoie de nicio rachetă.

Problemă pentru clasele IX-X: Problema a fost dată în 1997 la un concurs studențesc din Statele Unite ale Americii.

Dreptunghiul $HOMF$ are latura $HO = 11$ şi $OM = 5$. Triunghiul ABC are H ca ortocentru, pe O ca centru al cercului circumscris, M mijlocul laturii $[BC]$ şi F "piciorul" înălțimii din A. Care este lungimea lui $[BC]$?

Soluție. Deşi pare calculatorie, problema presupune cunoaşterea unor proprietăți geometrice remarcabile. Ne referim aici la aşa numita dreaptă a lui Euler, anume: în orice triunghi ABC centrul de greutate G se află pe segmentul $[OH]$ şi $2OG = GH$. Acest rezultat poate fi găsit în orice carte serioasă de geometrie plană. Revenind la problemă găsim din asemănarea triunghiurilor ΔAHO şi ΔMOG că $AH = 2OM = 10$ şi atunci cu teorema lui Pitagora în ΔAHO deducem că

$OC^2 = OA^2 = AH^2 + AO^2 = 221$ şi cum $BC = 2MC = 2\cdot\sqrt{221-25}$ se deduce că $BC = 28$.

Comentarii. Problema este imediată şi nu are o rezolvare grea, însă aceasta se bazează pe un rezultat care începe să fie cunoscut de cât mai puţini elevi. În continuare vom prezenta trei demonstraţii ale acestei teoreme a lui Euler, din nefericire nici una dintre ele nu-mi aparţin.

Demonstraţia I (sintetică) Admitem ABC un triunghi ascuţitunghic, raţionamentul păstrându-se şi în celelalte cazuri. Fie M mijlocul lui $[BC]$, atunci triunghiurile AGH şi MOG sunt asemenea deoarece $\widehat{HAG} \equiv \widehat{OMG}$ şi $\frac{HA}{OM} = \frac{GA}{GM} = 2$. Faptul că $\frac{GA}{GM} = 2$ este binecunoscuta proprietate a centrului de greutate. Cum $HA = 2R\cos A$, iar $OM = R\cos A$ (puţină trigonometrie nu strică nimănui) deducem că şi $\frac{HA}{OM} = 2$. Asemănarea celor două triunghiuri conduce la O, G, H coliniare şi $GH = 2OG$.

Demonstraţia II (vectorial) Cu aceleaşi notaţii ca în demonstraţia anterioară, se ştie că pentru orice M din planul ΔABC au loc relaţiile $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (Relaţia lui Sylvester), de unde $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ ceea ce conduce imediat la concluzie. De remarcat că cele două relaţii de mai sus provin din două relaţii mai generale şi anume $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ şi $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} + M\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MC}$ valabile pentru orice M din planul ΔABC.

Demonstraţia III (cu numere complexe) Dacă pentru un punct M din planul complex notăm cu m afixul său şi considerăm originea planului complex în O, atunci avem egalităţile $3g = a + b + c$ şi $h = a + b + c$, de unde concluzia este imediată.

Sugerăm cititorilor să consulte internetul pentru a obţine informaţii mai multe despre acest rezultat.

Problemă pentru clasele XI-XII: Problema a fost dată în anul 2012 la un concurs studenţesc din Statele Unite ale Americii.

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şirul definit astfel* $a_0 = 1$ *şi* $a_{n+1} = a_n + e^{-a_n}$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$. *Are şirul* $(a_n - \ln n)_{n\geq 1}$ *limită ?*

Soluție: Să începem cu observația că şirul $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător. Dacă $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit atunci el este convergent şi prin trecere la limită în recurență se obține o contradicție. Aşadar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty \Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-a_n\right)=0$.

Vom demonstra că acest şir este comparabil cu şirul $\left(\ln n\right)_{n\geq 1}$. În acest sens vom arăta că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\ln n}=1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\ln n\right)=0$.

Pentru prima limită aplicăm lema Cesaro-Stolz şi atunci avem de calculat

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-an}}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^{a_n}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^{a_n}}.$$

Aplicând iarăşi lema prezentată mai sus, limita revine la $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{e^{a_{n+1}}-e^{a_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{e^{a_n}\left(e^{a_{n+1}-a_n}-1\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{e^{a_{n+1}-a_n}-1}\cdot\frac{e^{-a_n}}{a_{n+1}-a_n}=1$ şi în concluzie $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\ln n}=1$. A doua limită, de fapt cerința problemei noastre revine la o limită de mai sus. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\ln n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln e^{a_n}-\ln n\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{e^{a_n}}{n}=\ln 1=0.$$

O altă cale de a proba existența limitei este să studiem monotonia şirului $\left(a_n-\ln n\right)_{n\geq 1}$. Pentru început arătăm că $a_n>\ln(n+1),\forall n\in\mathbb{N}$. Aşa cum este de aşteptat vom apela la inducție.. Pentru $n=0$ afirmația este adevărată. Admitem că $a_n>\ln(n+1),\forall n\in\mathbb{N}$, n arbitrar şi arătăm că $a_{n+1}>\ln(n+2)$. Cum $f:\left(0,\infty\right)\to\mathbb{R}, f(x)=x+e^{-x}$ este strict crescătoare deducem imediat că $a_{n+1}=f(a_n)>f(\ln(n+1))=$ $=\ln(n+1)+\frac{1}{n+1}>\ln(n+2)$ (din binecunoscuta dublă inegalitate

$\frac{1}{k+1} < \ln(k+2) - \ln(k+1) < \frac{1}{k+1}$). Conform inducției $a_n > \ln(n+1), \forall n \in \mathbb{N}$.

Urmează că $a_{n+1} - a_n = e^{-a_n} < \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ (vezi inegalitatea de mai sus) adică şirul $\left(a_n - \ln n\right)_{n\geq 1}$ este descrescător şi în consecință are limită.

Comentarii. O problemă de acest tip a fost tratată de briliantul matematician român D. Tătaru (există briliante şi în matematică, nu numai în fotbal) într-un articol din 1990 publicat în G.M.A nr. 1/1990 pag. 38-47. La un concurs din 2010 Radu Gologan, patronul spiritual al concursurilor şi olimpiadelor de la noi, a propus o problemă de acest gen.

Ne întrebăm dacă există un şir $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ astfel încâ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \left(\frac{a_n}{\ln n} - 1\right)$ să existe si să fie nenulă. Cu alte cuvinte să aflăm ordinul I de recurență al şirului $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$. Răspunsul este afirmativ cu $b_n = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Într-adevăr, $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{\ln n} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}\left(a_n - \ln n\right) =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}\left(\ln \frac{e^{a_n}}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{e^{a_n}}{n}\right)^{\frac{n}{\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n} - n}{n} \cdot \frac{n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n} - n}{\ln n}.$$

Pentru ultima parte apelăm la remarcabila Stolz-Cesaro şi avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_{n+1}} - e^{a_n} - 1}{\ln \frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n\left(e^{a_{n+1}} - e^{a_n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} ne^{a_n}\left(e^{a_{n+1} - a_n} - \frac{1}{e^{a_n}} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} ne^{a_n} \frac{e^{\frac{1}{e^{a_n}}} - \frac{1}{e^{a_n}} - 1}{e^{\frac{1}{2a_n}\cdot e^{2a_n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{a_n}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{e^{a_n}}} - \frac{1}{e^{a_n}} - 1}{\left(\frac{1}{e^{a_n}}\cdot\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Ar merita făcută o investigație asupra recurențelor de tipul : dacă $f : \left(0, \infty\right) \to \left(1, \infty\right)$ este o funcție cu anumite proprietăți, să se studieze convergența șirului $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ definit astfel $a_0 = a \in \left(0,\infty\right)$, $a_{n+1} = a_n f(a_n), n \in \mathbb{N}$. Dacă acceptați provocarea, adresa mea de e-mail este marinescuds@gmail.com

Olimpiada Județeană de Matematică

Matematica pare asemeni unui cub Rubik, colorată, însă greu de descifrat.

Ştiți că de fapt, aşa cum susține Wikipedia, aranjarea pieselor acestui cub se poate face în exact 43.252.003.274.489.856.000 posibilități şi că dacă s-ar pune cap la cap cuburi Rubik de 57 mm fiecare într-o permutare diferită, epuizând toate posibilitățile, șirul ar avea 261 ani lumină lungime? Şi că în pofida numărului mare de poziții posibile, toate cuburile se pot rezolva în cel mult douăzeci și cinci de mutări?

Dar să revenim la premianții noştri pentru care, suntem convinşi, acest cub s-ar părea că nu mai are niciun secret.

Felicitări lor, felicitări părinților, felicitări dascălilor care i-au pregătit.

Pentru a-i felicita şi voi atunci când aveți ocazia, vi-i prezentăm în rândurile care urmează:

Cls	**Nume şi prenume**	**Şcoala**	**Prof. îndrumător**	**Pre-miul**
V	CIOBANU ELENA	Şcoala Gimnazială Nr. 2 Reşița	Şandru Marius	I
V	PĂDUREAN DANIEL	Colegiul Național "Traian Lalescu" Reşița	Bejan Otilia	II
V	MEILĂ DENIS	Liceul Bănățean Oțelu-Roșu	Dragomir Adriana	III
V	ANGHELONI DENISA	Liceul Bănățean Oțelu-Roșu	Dragomir Adriana	M
V	IANCHIŞ BOGDAN	Liceul Pedagogic "C. D. Loga" Caransebeş	Mandreşi Ana	M

VI	BĂLĂNOIU ANA MARIA	Colegiul Național "Traian Lalescu" Reşița	Bejan Otilia	I
VI	POTOCEAN TEODORA	Şcoala Gimnazială Nr. 2 Reşița	Şandru Marius	II
VI	SMEU ANDRA	Colegiul Național "Traian Lalescu" Reşița	Bejan Otilia	III
VI	BĂIAŞU DAN	Liceul "Mathias Hammer" Anina	Pruteanu Silvia	M
VI	BUTOI ALINA	Şcoala Gimnazială nr.3 Oțelu-Roşu	Suciu Daniela	M
VII	MORARIU DORIAN	Liceul Bănățean Oțelu-Roșu	Feil Heidi	I
VII	LUNGOCEA M. AMALIA	Liceul Pedagogic "C. D. Loga" Caransebeş	Moatăr Lavinia	II
VII	MILENCOVICI R. MERIMA	Şcoala Gimnazială Nr. 2 Reşița	Drăghici Mariana	III
VII	GHERASIM B. DANIEL	Şcoala Gimnazială Nr. 9 Reşița	Belci Ion	M
VII	NIȚU M. NASTASIA	Liceul Tehnologic “Decebal” Caransebeş	Corici Carina	M
VIII	IONESCU T. ROBERTO	Liceul Teoretic "Traian Doda" Caransebeş	Dragomir Adrian	I
VIII	FIRANDA DENYSA	Liceul Bănățean Oțelu-Roșu	Feil Heidi	II
VIII	HRENYAK ALEXIA	Liceul Bănățean Oțelu-Roșu	Feil Heidi	III
VIII	ARDELEAN A. ANDRA	Liceul Pedagogic "C. D. Loga" Caransebeş	Moatăr Lavinia	M
VIII	JANTU PETRE MARIN	Liceul Bănățean Oțelu-Roșu	Feil Heidi	M
IX	CIOBANU C. ANCA	Colegiul Național "Traian Lalescu" Reşița	Bădescu Ovidiu	I
IX	VASILOVICI R. CAMIL	Colegiul Național "Traian Lalescu" Reşița	Bădescu Ovidiu	II
IX	RUS G. DANIEL	Colegiul Național "Traian Lalescu" Reşița	Bădescu Ovidiu	III
IX	LUNGOCIA I. MARIA	Liceul Teoretic "Traian Doda" Caransebeş	Dragomir Delia	M

IX	SZATMARI A. LARISA	Liceul Teoretic "Traian Doda" Caransebeş	Dragomir Delia	M
X	STEFANESCU ANDREI	Liceul Bănăţean Oţelu-Roşu	Dragomir Lucian	I
X	DINULICĂ C. AUGUSTIN	Liceul Pedagogic "C. D. Loga" Caransebeş	Buzescu Antoanela	II
X	DINULICĂ C. SEPTIMIU	Liceul Pedagogic "C. D. Loga" Caransebeş	Buzescu Antoanela	III
X	CIULU G. MIRUNA	Colegiul Naţional "Traian Lalescu" Reşiţa	Bădescu Ovidiu	M
X	PETCULESCU I. FLORIN	Liceul Teoretic "Traian Doda" Caransebeş	Dragomir Delia	M
XI	ADAM ALINA	Liceul Bănăţean Oţelu-Roşu	Dragomir Lucian	I
XI	BAILA DIANA	Liceul Bănăţean Oţelu-Roşu	Dragomir Lucian	III
XI	LAZĂR I. SILVIU	Colegiul Naţional "Traian Lalescu" Reşiţa	Ghimboaşă Pavel	III
XI	ŢUNEA P. MARIUS	Liceul Teoretic "Traian Vuia" Reşiţa	Buzilă Mircea	M
XI	BAN I. IOANA	Liceul Teoretic "Traian Doda" Caransebeş	Moatăr L.	M
XII	CACIULESCU M. SILVIU	Liceul Teoretic "Traian Doda" Caransebeş	Dragomir Adrian	I
XII	POPA A. ANDREEA	Liceul Teoretic "Traian Doda" Caransebeş	Dragomir Adrian	II
XII	PASCALAU T. CRISTIAN	Liceul Teoretic "Traian Doda" Caransebeş	Dragomir Adrian	III
XII	CURESCU ELENA CRISTINA	Liceul Teoretic "Eftimie Murgu" Bozovici	Pascariu George	M
XII	BUMBEŞ JOY P. ADONIA	Liceul Teoretic "Diaconovici-Tietz" Reşiţa	Vlăduceanu Cristina	M

Concursul Național A. Haimovici
Faza județeană

Cls	Nume şi prenume	Şcoala	Prof. îndrumător	Pre-miul
IX	NEAGOE D. LOREDANA	Liceul Teoretic "Traian Doda" Caransebes	Moatar Lavinia	I
IX	DODOIU A. OANA	Liceul Teoretic "Traian Doda" Caransebes	Moatar Lavinia	II
IX	MURGU C. TEODORA	Liceul Teoretic "General Dragalina" - Oravița	Lazarov Mihael	III
IX	CORCAN J. DRAGOŞ	Colegiul Național "Traian Lalescu" Reşița	Bădescu Ovidiu	M
X	RAUTU I. MARIA	Liceul Teoretic "Traian Doda" Caransebes	Dragomir Delia	I
X	SÎRB D. ROBERT	Colegiul Național "Traian Lalescu" Reşița	Călin Ciprian	II
X	PETRUȚ SILVIU IOVA ILIE	Liceul Tehnologic "Clisura Dunării"	Dărac Cornelia	III
X	GOANȚĂ M. LAURA	Liceul "Mathias Hammer" Anina	Neagoe Petrişor	M
XI	NEGRU L. VLAD	Colegiul Național "Traian Lalescu" Reşița	Călin Ciprian	I
XI	BIRO M. DARIUS	Liceul Teoretic "Traian Doda" Caransebes	Dragomir Adrian	II
XI	PERDEICĂ IONELA	Liceul Tehnologic "Clisura Dunării"	Dărac Cornelia	III
XI	NEGRU L. VLAD	Colegiul Național "Traian Lalescu" Reşița	Călin Ciprian	M

Concursul Interjudețean Traian Lalescu, Arad, 22-24 martie 2013

Fascinația unui concurs de matematică, emoțiile, bucuria succesului sau lacrimile eşecului, nu le pot înțelege decât cei care au trecut prin aşa ceva.

Poți fi cel mai bun la matematică în județul tău, poți fi Locul I la Olimpiada județeană însă aici, la acest concurs, să descoperi că problemele sunt IMPOSIBILE.

Nu poți deveni însă PUTERNIC decât luptându-te cu cei puternici, nu poți progresa decât dorind ca azi să fii mai bun decât ai fost ieri.

Felicităm pe toți participanții, toți cei prezenți aici sunt câştigători, însă cei care au reuşit să se claseze pe locuri premiante merită cu atât mai mult respectul nostru.

Cu dorința unor rezultate cel puțin la fel de bune anul viitor, cu speranța că problemele de matematică pe care aceşti minunați copii le rezolvă le vor forma o gândire logică, capabilă să abstractizeze şi să facă față unor situații noi, vă prezentăm pe CEI MAI BUNI DINTRE CEI BUNI:

Cls	**Nume şi prenume**	**Şcoala**	**Prof. îndrumător**	**Pre-miul**
V	PĂDUREAN C. DANIEL	Colegiul Național "Traian Lalescu" Reşița	Bejan Otilia	M
V	CIOBANU C. ELENA	Şcoala Gimnazială Nr. 2 Reşița	Şandru Marius	M
VI	POTOCEAN R. TEODORA	Şcoala Gimnazială Nr. 2 Reşița	Şandru Marius	I
VII	MILENCOVICI R. MERIMA	Şcoala Gimnazială Nr. 2 Reşița	Drăghici Mariana	M
IX	CIOBANU C. ANCA	Colegiul Național "Traian Lalescu" Reşița	Bădescu Ovidiu	I
IX	SZATMARI A. LARISA	Liceul Teoretic "Traian Doda" Caransebes	Dragomir Delia	II
IX	STEFANESCU ANDREI	Liceul Bănățean Oțelu Roşu	Dragomir Lucian	III

Un drum al succesului,
un alt vis devenit realitate

Elena Ciobanu,
Teodora Potocean,
Ana-Maria Bălănoiu

Cu toții am auzit, fie şi numai în treacăt afirmația: “Copiii din ziua de azi nu sunt ca altădată, pe vremea noastră se învăța mai mult”, şi nu pot decât să îi contrazic.

Într-adevăr, pe vremea noastră se învăța, însă DOAR se învăța, dezvoltarea multora dintre noi fiind – şi o recunosc acum cu regret – unilaterală. Nu sunt de vină dascălii de atunci, tot respectul pentru acei oameni, ci sistemul de învățământ ne transforma în adevărate biblioteci ambulante.

Acum societatea cere altceva, cere indivizi capabili să creeze, să improvizeze, să facă față situațiilor noi, nu să aplice rețete de rezolvare. Olimpicii zilei de azi au cu siguranță o inteligență care, raportată la vârstă, depăşeşte inteligența multora dintre noi. Ei sunt viitorul, ei vor fi liderii acestei societăți, şi merită din plin tot respectul nostru.

În acest articol, vom cita gândurile celor trei participanți la Olimpiada Națională de Matematică de la Sighişoara, Elena Ciobanu, clasa a V-a, Teodora Potocean şi Bălănoiu Ana-Maria, din clasa a VI-a.

Merită felicitările noastre şi profesorul însoțitor al lotului, domnul Marius Şandru ale cărui eleve, Elena Ciobanu şi Teodora Potocean au cucerit Medalia de Bronz la ediția din acest an.

Dar…să dăm cuvântul elevilor, ei sunt laureații noştri din acest an:

“Pot să vă spun, bucuroasă, că această tabără a fost o experiență inedită pentru mine. Care tabără?

Cea de la Sighişoara, desigur! Nu a fost doar etapa finală de la Olimpiada Națională de Matematică.

Am vizitat Cetatea medievală, am cunoscut copii din alte județe – concurenți adevărați ... Elevii de la Colegiul Național Mircea Eliade au avut bunăvoința de a pregăti un program artistic pentru noi ... am participat la săptămâna „Să ştii mai multe, să fii mai bun!”. Am adus şi premii ...

M-a bucurat faptul că am venit cu medalie acasă, chiar dacă sora mea, Anca Ciobanu, a avut pentru a doua oară ghinionul de a fi prima fără medalie.

În concluzie, atât la matematică, cât şi la alte discipline, pentru judeţul nostru a fost un drum al succesului.”

Ciobanu Elena

„Un alt an, o nouă ediţie a Olimpiadei Naţionale de Matematică, de data aceasta la Sighişoara. Şi cum putea fi această experienţă, aşteptată şi mult dorită de un an întreg dacă nu cea mai frumoasă?

Am avut parte de 4 zile de vis într-un loc de nedescris, cu copii plini de viaţă cu aceeaşi pasiune ca şi mine, profesori implicaţi si o atmosferă extrem de plăcută. Mulţumirea mea a venit când, cu multă concentrare, am reuşit sa biruiesc problemele, dificile dar în acelaşi timp frumoase, ce ne-au fost propuse. Cel mai aşteptat moment a fost festivitatea de premiere care, cu medalia de bronz obţinută, mi-a încununat succesul mult dorit.

Astfel, nu regret că am ales să particip la etapa naţională a olimpiadei de matematică şi nu a celei de fizică sau limba, comunicarea şi literatură romană şi aş face oricând aceeaşi alegere pentru că matematica nu este pentru mine doar o plăcere, ci este o pasiune, un mod de viaţă, calea spre reuşită, spre performanţă.

Matematica este arta de a îmblânzi infinitul.”

Teodora Potocean

„Faza naţională a olimpiadei de matematică Sighişoara 2013 a fost pentru mine un lucru pe cât de neaşteptat pe atât de plăcut! Neaşteptat pentru că eu niciodată nu am privit matematica ca fiind punctul meu forte, totuşi am muncit mult, am fost îndrumată şi sprijinită de oameni cu suflete mari şi am dat tot ce-i mai bun pentru a ajunge acolo! Am câştigat experienţă şi am cunoscut persoane minunate, alături de care am creat amintiri de neuitat.”

Ana-Maria Bălănoiu

Probleme rezolvate din RMCS nr. 39

Clasa a V-a

V. 241 Se consideră mulțimea $M=\{1;8;15;22;29;...;134\}$. Arătați că orice submulțime cu 12 elemente a mulțimii M conține două elemente a căror sumă este egală cu 142.

OJ Bihor

Soluție:

Elementele mulțimii sunt de forma $7n-6$.

Din $7n-6=134 \Rightarrow n=20$ (numărul elementelor mulțimii M).

Scriem mulțimea M ca reuniunea a 11 submulțimi disjuncte două câte două, după cum urmează:

$$M=\{1\}\cup\{8,134\}\cup\{15,127\}\cup\{22,120\}\cup...\cup\{64,78\}\cup\{71\}.$$

Observăm că submulțimile cu două elemente au suma elementelor 142 (aşa le-am şi construit de fapt!). Dacă submulțimea aleasă (cea cu 12 elemente) conține una dintre submulțimile cu două elemente de mai sus, problema este rezolvată. Dacă submulțimea aleasă ar conține câte un singur element din fiecare dintre cele 11 submulțimi, al doilea element ar trebui ales tot din una dintre submulțimile de câte două elemente şi obținem concluzia şi în acest caz.

V. 242 Arătați că suma tuturor pătratelor perfecte de 3 cifre nu este pătrat perfect.

Adrian Nemeş, Timişoara

Soluție:

Suma din enunț este $S=11^2+12^2+13^2+....+31^2$. Pătratele numerelor pare sunt evident multipli de 4; rămâne de studiat $S'=11^2+13^2+15^2+....+31^2$ (suma a 11 numere impare, pătrate perfecte). Cum pătratul unui număr impar este de forma $4k+1$, deducem că S' este de forma $4p+3$, deci S este de forma $4q+3$, adică nu poate fi pătrat perfect.

V. 243 La împărțirea a două numere naturale a şi b, câtul este jumătate din împărțitor, iar restul este un sfert din cât. Ştiind că suma dintre împărțitor, cât şi rest este 104, aflați numerele a şi b.

OJ Caraş- Severin

Soluție: Dacă $a > b$, avem că b este împărțitorul, deci $a = c \cdot b + r$.
Conform ipotezei, avem $c = 4r, b = 2c = 8r$. Din
$104 = b + c + r = 13r \Rightarrow r = 8, c = 32, b = 64 \Rightarrow a = 2056$

V. 244 O mulțime finită de numere naturale X se numeşte *interesantă* dacă se poate împărți în două submulțimi Y şi $X \setminus Y$ astfel încât suma elementelor din Y să fie egală cu suma elementelor din $X \setminus Y$. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, ..., 2010\}$. Arătați că :

a) Mulțimea $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ este *interesantă*

b) Mulțimea A *nu este interesantă*

c) Mulțimea $A \setminus \{1\}$ este *interesantă*

Aurel Bîrsan, Braşov

Soluție:
a) $Y = \{2,3,5\}$ şi $B \setminus Y = \{4,6\}$ satisfac condițiile din enunț $2+3+5=4+6$
b)Dacă X este „interesantă”, atunci suma elementelor sale este un număr par (!). Cum suma elementelor mulțimii A este $\frac{2010 \cdot 2011}{2} = 1005 \cdot 2011$, adică un număr impar, deducem că A nu este „interesantă”.
c)Punctul a) sugerează poziționarea mulțimii $A \setminus \{1\}$ în două mulțimi „interesante”, astfel $A \setminus \{1\} = B \cup \{7, 8, ..., 2010\}$.
Fie acum $C = \{2,3,5\}, D = \{4,6\}, E = \{7, 2010, 8, 2009, ..., 507, 1510\}$ şi $F = \{508, 1509, 509, 1508, ..., 1008, 1009\}$. Mulțimile $C \cup E$ şi $D \cup F$ o partiționează pe $A \setminus \{1\}$ şi au acelaşi număr de elemente.

V. 245 Un călător a parcurs un drum în trei zile. În prima zi, a parcurs o doime din drum, a doua zi a parcurs o pătrime din rest, iar a treia zi a parcurs restul de 9 km. Aflați lungimea întregului drum şi câți kilometri a parcurs în fiecare zi.

OL Cluj

Soluție: Fie x - numărul de km parcurşi (lungimea întregului drum) rezultă $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{2} + 9 = x \Rightarrow x = 24km$. În prima zi a parcurs 12 km, în a doua zi 3 km.

V. 246 Determinați numerele naturale care ridicate la o putere pară sunt de forma $\overline{2ab1}$.

Călin Burduşel, Tîrgovişte

Soluție: Fie N numărul căutat. Conform enunțului $2000 \leq \left(N^k\right)^2 \leq 2991$.

Avem $44^2 = 1936; 45^2 = 2045; 54^2 = 2916; 55^2 = 3025$. Deoarece ultima cifră a lui N^{2k} este 1, rezultă că ultima cifră a lui N^k este 1 sau 9. Singurele numere naturale care verifică $(*)$ sunt 49 şi 51.

V. 247 Un grup de prieteni vor să lanseze un joc pe internet după următoarea regulă. Primul prieten, adică John trimite în prima zi un e-mail lui Lucian. Lucian trimite acest e-mail a doua zi la alți doi prieteni, fiecare la rândul lor îl trimit a treia zi altor doi prieteni şi astfel jocul continuă.

a) Aflați în câte zile au fost trimise 2047 e-mail-uri.
b) Câți copii au participat în 11 zile?

OL Giurgiu

a)$1+2+2^2+...+2^n = 2047; 2^{n+1}-1 = 2047; 2^{n+1} = 2048; 2^{n+1} = 2^{11}$;
aşadar avem $n = 10$, deci în 11 zile au fost trimise mesajele;
b)$1+\left(1+2+2^2+...+2^{10}\right) = 2048$.

V. 248 Pitagora a fost întrebat de cineva câți discipoli are. „ Jumătate dintre discipoli învață numai matematică, un sfert din ei numai ştiințele naturii, o şeptime retorică, iar 3 filozofie” a răspuns. Câți discipoli a avut Pitagora?

OJ Harghita

Soluție: $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{7}+3 = x \Rightarrow x = 28$.

V. 249 Trei prinți au luptat cu balaurul cu multe capete. Primul prinț, a tăiat cu mâna dreaptă jumătate din capetele balaurului şi cu mâna stângă încă două. Al doilea prinț cu mâna dreaptă a tăiat jumătate din capetele rămase ale balaurului şi cu mâna stângă încă două. Al treilea a tăiat cu mâna dreaptă jumătate din capetele rămase şi cu mâna stângă ultimele două capete ale balaurului. Câte capete a avut balaurul?

OJ Harghita

Soluție: Metoda mersului invers. Al treilea prinț taie cu mâna dreaptă deci 2 capete, $2+2=4$ capete au rămas după al doilea prinț.
$4+2=6, \quad 6\cdot 2=12$ capete au rămas după primul prinț.
$12+2=14, \quad 14\cdot 2=28$ capete a avut balaurul.

V. 250 La etapa județeană a Olimpiadei de Matematică, elevii sunt repartizați la parterul, etajul unu şi etajul doi ale şcolii organizatoare. Sub etajul doi sunt repartizați 173 elevi. Deasupra parterului sunt repartizați 127 de elevi. Ştiind că numărul elevilor repartizați la etajul unu este egal cu numărul elevilor repartizați în total la celelalte nivele, determinați numărul de elevi repartizați la fiecare nivel al şcolii.

OJ Hunedoara

Soluție: Fie a,b,c numărul de elei repartizați la parter, etajul unu şi respectiv etajul doi. Avem $b+c=127, a+b=173, a+c=b$. Se obține $3b=300$ de unde $b=100, a=73, c=27$.

Clasa a VI-a

VI. 241 Într-un bazin sunt 72 de peşti. Dintre aceşti peşti unii sunt mici, iar alții sunt mari. Fiecare peşte mare mănâncă exact doi peşti mici, astfel încât că în bazin rămân doar peşti mari. După ce în bazin rămân doar peşti mari, se introduc în bazin câțiva peşti uriaşi. Ştiind că fiecare peşte uriaş mănâncă exact 3 peşti mari şi că în bazin rămân doar peştii uriaşi, să se afle câti peşti uriaşi au fost introduşi în bazin.

OJ Bihor

Soluție: Fiecare peşte mănâncă exact doi peşti mici şi numai rămân peşti mici rezultă că numărul peştilor mari este egal cu jumătate din numărul peştilor mici $\Rightarrow avem \dfrac{72}{3}=24$ peşti mari; apoi avem $\dfrac{24}{3}=8$ (peşti uriaşi).

VI. 242 Se consideră mulțimea $M=\{1,2,3,...,10\}$.

a) Să se arate că mulțimea M nu se poate împărți în două submulțimi A şi $M \setminus A$ astfel încât produsul elementelor din A să fie egal cu produsul elementelor din $M \setminus A$.

b) Să se determine un element x din mulțimea M astfel încât mulțimea $M \setminus \{x\}$ să se poată împărți în modul descris la punctul a)

Aurel Bârsan, Braşov

Soluție:Notăm cu $P(X)$ produsul elementelor mulțimii X.

a)Presupunem contrariul; cum $P(A)=P(M\setminus A)$, deducem: $P(M)=P(A)$ $P(M\setminus A)=(P(A))^2$, deci produsul elementelor lui M este pătrat perfect. Avem însă $P(M)=10!=2^8\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$, care nu este pătrat perfect, deci M nu poate fi împărțită în condițiile din ipoteză.

b) Evident $x=7$. Un exemplu de partiție a mulțimii $M\setminus\{7\}$ este: $\{1,2,3,4,5,6\}$ şi $\{8,9,10\}$.

VI. 243 Fie ΔABC dreptunghic în B şi $[AM$ bisectoarea unghiului BAC, $M\in(BC)$.

a)Dacă $MP\perp AC, P\in AC$, arătați că $[TB]\equiv[TP]$ pentru orice $T\in AC$.

b)Dacă $MP\cap AB=\{Q\}$, arătați că $AM\perp QC$.

Adrian Nemeş, Timişoara

Soluție: a) $\Delta ABM\equiv\Delta APM, AM$ este mediatoarea lui (BP) de unde concluzia. b)Concluzia se obține observând că M este ortocentrul triunghiului ΔACQ

VI. 244 Triunghiul OAB are $[OA]\equiv[OB]$, iar în exteriorul triunghiului se consideră $\sphericalangle OAE\equiv\sphericalangle OBD$, unde $E\in(BO$ şi $D\in(AO$. Să se arate că:

a) $[AE]\equiv[BD]$; b) $\Delta AED\equiv\Delta BDE$.

Vasile Şerdean, Gherla

Soluție:

a) $(U.L.U)\Rightarrow\Delta AOE\equiv\Delta BOD\Rightarrow[AE]\equiv[BD]$

$(L.U.L)\Rightarrow\Delta AED\equiv\Delta BDE$.

VI. 245 Fie ΔABC în care $m(\sphericalangle C)=60^o$. Pe prelungirea laturii AC dincolo de C se ia punctul D iar pe prelungirea laturii BC dincolo de C se ia punctul E, astfel încât $BD\equiv DE$. Dacă $AD\equiv CE$, demonstrați că ΔABC este echilateral.

Cătălin Burduşel, Tîrgovişte

Soluție: Considerăm punctul F între C şi E astfel încât $FE = BC; \Delta BDC \equiv \Delta DFE\left(L.U.L\right) \Rightarrow DF = DC$, deci ΔCDF este isoscel cu un unghi de 60^0, deci ΔCDF este echilateral.

$AD = CE,$ deci $AC + CD = CF + FE$, deci $AC + FE$, deci $AC + BC$, adică ΔABC ste isoscel cu un unghi de 60^0, deci este echilateral

VI. 246 Se consideră ΔABC cu măsura unghiului $\sphericalangle BAC$ de 80^0 şi în care $AB = 3 \cdot AC$. Demonstrați că măsura unghiului $\sphericalangle ACB$ este mai mare de 75^o.

OL Giurgiu

Soluție: Fie

$D, E \in \left(AB\right): AD = DE = EB; \Delta ACD$ isoscel $\Rightarrow$

$m\left(\sphericalangle C\right) = m\left(\sphericalangle D\right) = 50^0 \Rightarrow m\left(\sphericalangle CDB\right) = 130^0 \Rightarrow$

$m\left(\sphericalangle DBC\right) + m\left(\sphericalangle DCB\right) = 50^0 \left(1\right)$

Şi cum $BD = AD + AC > DC \Rightarrow BD > DC,$ în

$\Delta BDC \Rightarrow m\left(\sphericalangle DCB\right) > m\left(\sphericalangle DBC\right) \overset{(1)}{\Rightarrow} m\left(\sphericalangle DCB\right) > 25^0$

$\Rightarrow m\left(\sphericalangle ACB\right) > 25^0 + 50^0 = 75^0$

VI. 247 Vom spune că trei numere nenule se numesc prietenoase dacă oricare dintre ele divid suma celorlalte două (de exemplu, numerele 2,4,6 sunt prietenoase).

a) Determinați toate tripletele de numere prietenoase consecutive.
b) Determinați toate tripletele de numere prietenoase.

Concurs Hunedoara

Soluție: a) Fie $n, n+1, n+2$ numere naturale consecutive. Atunci n divide $2n+3$, de unde n divide pe 3. Atunci $n \in D_3 = \{1,3\}$. Se observă că doar $n = 1$ verifică, adică numerele căutate sunt 1,2,3

b) Se observă că tripletele de numere egale verifică condiția dată. Dacă unul dintre ele este strict mai mare decât celelalte două obținem tripletele $k, k, 2k$ şi $k, 2k, 3k$. Dacă două numere sunt egale, iar al treilea mai mic, problema nu are soluții.

VI. 248 Pe o tablă sunt scrise numerele de la 1 la 1000. Răzvan şi Ioana şterg pe rând , începând cu Răzvan, câte un număr. Pierde copilul care este obligat să şteargă primul un multiplu al lui 2 sau un multiplu al lui 5. Care elev câştigă, Răzvan sau Ioana?

Concurs Iaşi

Soluție: Sunt 500 de multipli de 2, 200 de multipli de 5 şi 100 multipli de 10, deci sunt 600 de multipli de 2 sau 5 şi rămân 400 de numere care nu sunt multipli nici de 2 nici de 5. Dacă Răzvan şterge primul număr care nu e multiplu de 2 sau 5, urmează Ioana care va şterge din nou un număr care nu e multiplu de 2 sau 5, etc. Cum sunt 400 de numere nedivizibile cu 2 sau cu 5, primul copil care este obligat să şteargă un număr divizibil cu 2 sau 5 va fi Răzvan.

VI. 249 Se consideră triunghiul ABC în care lungimile laturilor $[AB]$şi $[AC]$ sunt direct proporționale cu 2 şi 4, iar măsura unghiului A este egală cu 60^0. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.

Alexandru Blaga, Satu Mare

Soluție: Fie L mijlocul lui $[AC]$. Atunci ΔALB este echilateral şi ΔBLC este isoscel, $BL = CL = 2k$. Atunci $m(\sphericalangle CBL) = 30^0$, deci $m(\sphericalangle CBA) = 90^0$.

VI. 250 Arătați că, oricum am alege două elemente ale mulțimii $A = \{1,3,5,...,2011\}$, suma sau diferența acestora este multiplu de 4.

Lucian Petrescu, Brăila

Soluție: Fie numerele $a = 2p+1, b = 2q+1 \in A, p,q \in \mathbb{N}, a > b$. Atunci $a+b = 2(p+q+1), a-b = 2(p-q)$ şi deoarece $p+q, p-q$ au aceeaşi paritate $\Rightarrow 4|a-b$ dacă $p+q$ este par şi $4|a+b$ dacă $p+q$ este impar.

Clasa a VII-a

VII. 241 În trapezul $ABCD(AB \parallel CD, AB > CD)$ ducem $DM \perp AB, M \in (AB)$. Fie N mijlocul diagonalei BD. Demonstrați că $MN \parallel AC$ dacă şi numai dacă trapezul este isoscel

Aurel Bârsan, Braşov

Soluție: Fie P mijlocul diagonalei (AC). Se ştie că $PN \parallel AB$ şi $PN=\frac{AB-DC}{2}$ (se arată uşor). Avem astfel: $MN \parallel AC \Leftrightarrow MNPA$ paralelogram $\Leftrightarrow PN=AM \Leftrightarrow AM=\frac{AB-DC}{2}$. Dacă proiecția lui C pe AB este Q, egalitatea anterioară este echivalentă cu

$AM=\frac{AM+BQ}{2} \Leftrightarrow AM=BQ \Leftrightarrow AD=BC$.

VII. 242 În triunghiul ABC avem $AD \perp BC, D \in (BC), m(\sphericalangle C)=75^o, AD=4cm$ şi $BC=16cm$. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic.

Vasile Şerdean, Gherla

Soluție: Fie $E \in (BC)$ astfel încât

$m(\sphericalangle AEC)=30^0 \Rightarrow m(\sphericalangle EAC)=75^0 \Rightarrow \Delta AEC$ isoscel $\Rightarrow EA=EC$

ΔAED dreptunghic

$\Rightarrow AD=\frac{AE}{2} \Rightarrow AE=8cm=\frac{BC}{2}; EA=EC \Rightarrow EC=\frac{BC}{2} \Rightarrow$

$BE=\frac{BC}{2} \Rightarrow AE=BE=CE$

În ΔAEB avem

$m(\sphericalangle AEB)=150^0, AE=BE \Rightarrow m(\sphericalangle BAE)=m(\sphericalangle ABE)=$

$=\left(180^0-150^0\right):2=15^0 \Rightarrow$

$m(\sphericalangle ABC)=m(\sphericalangle BAE)+m(\sphericalangle EAC)=15^0+75^0=90^0 \Rightarrow$

triunghiul ABC este dreptunghic în A.

VII. 243 Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic, $AB \parallel CD$, $AD \perp AB$, în care $AD=AB+CD$ şi $M \in [AD]$ astfel încât $AM=AB$. Arătați că:

a) ΔBMC este dreptunghic;

b) Dacă N este mijlocul segmentului $(BC), MC \cap DN=\{P\}$ şi $AN \cap MB=\{Q\}$ atunci $MNPQ$ este dreptunghi.

OL Călăraşi

Soluție: a) Din ipoteză, rezultă că $[MD] \equiv [DC]$; deci triunghiurile BAM și CDM sunt dreptunghice și isoscele, așadar $m(\sphericalangle BMC) = 90^0$

b) În ΔCMB, dreptunghic în M, $[MN]$ - mediană, de unde $MN = \frac{BC}{2} = CN = BM$, așadar ΔCMN este isoscel cu $[NP$ - bisectoare. Apoi $\Delta DMN \equiv \Delta DCN$, de unde NP - înălțime $\Rightarrow NP \perp MC$. Analog ΔBMN - isoscel, implică $NQ \perp MB$, deci $PMQN$ are trei unghiuri drepte, deci este dreptunghi.

VII. 244 Arătați că dacă numerele $a, b \in \mathbb{Q}$ îndeplinesc simultan condițiile: $a + b < 4$ și $ab - 2a - 2b + 4 > 0$, atunci $a < 2$ și $b < 2$

OJ Harghita

Soluție: Din $a + b < 4$ avem $(a-2)+(b-2) < 0$,(1) iar din $ab - 2a - 2b + 4 > 0$ avem $(a-2)(b-2) > 0,(2)$. Din (1) și (2) avem 2 numere raționale a căror sumă este negativă și produsul pozitiv. Înseamnă că cele 2 numere sunt negative, deci $a - 2 < 0$ și $b - 2 < 0$ de unde $a < 2$ și $b < 2$.

VII. 245 Fie numerele $x = \frac{3n+2}{4}$ și $y = \frac{5n+a}{6}, n \in \mathbb{N}$

a) Dacă $a = 1$, să se arate că x și y nu pot fi, simultan, numere naturale.

b) Dacă $a = 2$, să se determine $n \in \mathbb{N}$, astfel încât x și y să fie, simultan, numere naturale.

Concurs Unirea

Soluție: a) $n = 12k + r, r \in \{0,...,11\}$

$$x = 9k + \frac{3r+2}{4} \in \mathbb{N} \Rightarrow r \in \{2,6,10\}, y = 10k + \frac{5r+1}{6} \in \mathbb{N} \Rightarrow r \in \{1,7\}$$

$x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow r \in \{2,6,10\} \cap \{1,7\} = \varnothing \Rightarrow x, y$ nu pot fi simultan numere naturale

b) $x = 9k + \frac{3r+2}{4} \in \mathbb{N} \Rightarrow r \in \{2,6,10\}, y = 10k + \frac{5k+2}{6} \in \mathbb{N} \Rightarrow r \in \{2,8\}$

$$x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow r \in \{2,6,10\} \cap \{2,8\} = \{2\} \Rightarrow n = 12k + 2, k \in \mathbb{N}$$

VII. 246 Un trapez $ABCD$ are baza mare $[AB]$și $[AC]\cap[BD]=\{O\}$. Linia mijlocie a trapezului intersectează pe AC în E şi pe BD în F.

a)Demonstrați că $ABCD$ este trapez isoscel dacă şi numai dacă $[OE]\equiv[OF]$.

b)Vârfurile trapezului şi punctul O reprezintă 5 oraşe, iar laturile şi diagonalele sale sunt şosele de legătură. Două maşini pleacă din D, respectiv C pe ruta cea mai scurtă spre A, respectiv spre B şi alte două maşini pleacă din A respectiv B spre D, respectiv C, trecând prin O pe ruta cea mai scurtă. Cele 4 maşini au aceeaşi viteză, constantă, pe întreg parcursul. Demonstrați că primele 2 maşini ajung simultan în D, respectiv C. Pot ajunge toate patru, în acelaşi timp la destinație?

Concurs Iaşi

Soluție:a) $OE=OF \Leftrightarrow m(\sphericalangle OEF)=m(\sphericalangle OFE)\Leftrightarrow$

$m(\sphericalangle OAB)=m(\sphericalangle OBA)=m(\sphericalangle ODC)=$

$=m(\sphericalangle OCD)\Leftrightarrow OD=OC, OA=OB \Leftrightarrow AC=BD \Leftrightarrow$ trapezul este isoscel

b)Problema revine la a arăta că $AD=BC \Leftrightarrow AO+OD=BO+OC$. Dacă $AD=BC$, adică trapezul este isoscel, atunci $AO=BO$ şi $CO=DO$ şi $AO+OD=BO+OC$. Reciproc

$OE=OA, EA=OA-CE=OA-CO-OE$ de unde $OE=\dfrac{OA-OC}{2}$.

Analog $OF=\dfrac{OB-OD}{2}$. Din $AO+OD=OB+OC$ rezultă $OE=OF$ ceea ce, după cum am văzut implică $AD=BC$. Nu pot ajunge toate patru simultan la destinație deoarece drumul prin O e mai lung decât cel direct: $CO+OB>BC$

VII. 247 În triunghiul ABC, în care $m(\sphericalangle C)=45^o$ şi $m(\sphericalangle B)=30^o$ fie E simetricul punctului B față de C. Să se determine $m(\sphericalangle AEB)$.

Concurs „Gheorghe Vrânceanu”

Soluție: Fie $AD\perp BC, D\in(BC)$ şi F mijlocul lui (AB). În $\Delta ABD \Rightarrow AD=\frac{1}{2}\cdot AB=AF=BF=FD$, iar în $\Delta ADC \Rightarrow AD=DC$.

Deoarece ΔADF echilateral $\Rightarrow m(\sphericalangle ADF)=60^0$ şi $m(\sphericalangle FDE)=150^0$, iar

din ΔDCF isoscel de bază $(CF) \Rightarrow m(\sphericalangle DCF) = 15^0$. Avem că FC este linie mijlocie în ΔABE rezultă $FC \parallel AE$. În final,
$m(\sphericalangle AEB) = m(\sphericalangle BCF)$ (corespondente $) = 15^0$.

VII. 248 Fie pătratul $ABCD$ şi E mijlocul laturii $[AB]$. Dreapta DE intersectează perpendiculara în A pe $[AC]$ în punctul F. Să se arate că punctele C, B, F sunt coliniare.

Ionel Patriche.

Soluție: Fie $DC \cap BC = \{F'\}$. Dacă vom arăta că $m(\sphericalangle F'AC) = 90^0$, atunci $F = F'$. Segmentul $[EB]$ este linie mijlocie în triunghiul $F'DC$, rezultă $F'B = BC + AB$, rezultă că triunghiul $F'AC$ este dreptunghic ($AB = \frac{1}{2} \cdot F'C$, deci $F \in BC$) şi rezultă că punctele C, B, F sunt coliniare.

VII. 249 Orice număr natural este *şmecher* sau *fraier*. Ştim că dacă a este *şmecher*, atunci $a + 10$ este *şmecher*; dacă b este *fraier*, rezultă că $b + 15$ este tot *fraier*.
a) Să se demonstreze că oricare ar fi numărul x natural, x şi $x + 5$ sunt sau *şmechere*, sau *fraiere*.
b) Să se găsească n minim pentru care putem afirma că oricum ar fi alese numerele, printre primele n numere naturale, sigur sunt cel puțin 401 *şmechere.*

Concurs „Louis Funar”

Soluție: a)Dacă x e şmecher şi $x + 5$ e fraier rezultă
$x + 20 = x + 2 \cdot 10 = (x + 5) + 15 \cdot 1$ e şi şmecher şi fraier – contradicție.
Dacă x e fraier şi $x + 5$ e şmecher analog se obține contradicție. Deci x şi $x + 5$ sunt de acelaşi tip
b)Dacă 0 e de un tip rezultă că 5,10,5,…sunt de acelaşi tip
Dacă 1 e de un tip rezultă că 6,11,16,..sunt de acelaşi tip
Dacă 2 e de un tip rezultă că 7,12,17,..sunt de acelaşi tip
Dacă 3 e de un tip rezultă că 8,13,18,..sunt de acelaşi tip
Dacă 4 e de un tip rezultă că 9,14,19,..sunt de acelaşi tip
Din cele ce mai sus se observă că cele 5 tipuri generat mai sus sunt disjuncte şi acoperă $\mathbb{R}$. Deci n minim va fi 2000.

VII. 250 Dacă în triunghiul ABC avem $2b+h_b=2c+h_c$, atunci triunghiul este isoscel.

Concurs „Gheorghe Popescu”

Soluție: Notând aria triunghiului ABC cu S, relația din enunț se scrie echivalent $2b+\frac{2S}{b}=2c+\frac{2S}{c}$ sau, după calcule $(b-c)(bc-S)=0$. Dar $c\ge h_b$ de unde $bc\ge bh_b=2S>S$ așadar $bc-S\ne 0$. Rezultă $b-c=0$ deci triunghiul este isoscel.

Clasa a VIII-a

VIII. 241 a) Să se demonstreze că :

$$\frac{x+n}{n+1}\ge\frac{n+3}{2x+n+1},\forall x\in\mathbb{N}^*,\forall n\in\mathbb{N}.$$

b) Să se determine $x\in\mathbb{N}$ pentru care verifică egalitatea:

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+...+\frac{x+2009}{2010}=\frac{5}{2x+3}+\frac{6}{2x+4}+...+\frac{2013}{2x+2011}$$

OL Botoşani

Soluție: a) Se arată imediat că $\frac{x+n}{n+1}\ge 1\ge\frac{n+3}{2x+n+1},\forall x\in\mathbb{N}^*$.

b) Folosind observația anterioară, avem: $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+...+\frac{x+2009}{2010}>2009,$ $\forall x>1$ şi $\frac{5}{2x+3}+...+\frac{2013}{2x+2011}<2009,\forall x>1$. Pentru $x=0$ folosim un raționament asemănător şi astfel: $x=1$ este soluție unică.

VIII. 242 a)Demonstrați că $2\left(x^2+y^2\right)\ge(x+y)^2$, pentru orice numere reale x şi y.

b) Dacă a,b,c sunt dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic şi d_1,d_2,d_3 sunt lungimile fețelor paralelipipedului, demonstrați că $(a+b+c)\cdot\sqrt{2}\le d_1+d_2+d_3$. În ce condiții are loc egalitatea?

OL Caraş Severin

Soluție: Deducem din $x+y\le\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$ că

$a+b\le d_1\cdot\sqrt{2},b+c\le d_2\cdot\sqrt{2},c+a\le d_3\cdot\sqrt{2}$.

Adunând, obținem concluzia.
Egalitatea are loc pentru $a=b=c$ adică în cazul unui cub.

VIII. 243 Să se arate, în mulțimea numerelor naturale, că dacă un număr se poate scrie ca suma a două pătrate perfecte, atunci şi dublul său şi pătratul său se poate scrie ca suma a două pătrate perfecte.

Vasile Şerdean, Gherla

Soluție: $a=x^2+y^2 \Rightarrow 2a=2x^2+2y^2=(x+y)^2+(x-y)^2$

$a^2=\left(x^2+y^2\right)^2=\left(x^2-y^2\right)^2+(2xy)^2$

VIII. 244 Găsiți numerele întregi x şi y ştiind că $2x^2+xy+3y+1=0$

Gh. Molea, Curtea de Argeş

Soluție: Relația din enunț este echivalentă cu $y(x+3)=-2x^2-1$. Cum $x=-3$ nu se poate şi atunci ecuația are soluția numai în cazul în care $\frac{-2x^2-1}{x+3}\in\mathbb{Z}$ adică $x+3\,|\,19$ de unde $x+3\in\{-19,-1,1,19\}$ şi se obține soluția problemei.

VIII. 245 Fie A,B,C,D patru puncte necoplanare şi E,F,G,H mijloacele segmentelor $(AB),(BC),(CD)$ respectiv (AD).

Arătați că : a) $EG<\sqrt{\frac{AC^2+BD^2}{2}}$;

b) $(EG)\equiv(HF)\Leftrightarrow AC\perp BD$.

Sorin Peligrad, Piteşti

Soluție: a) $EFGH$ este paralelogram, atunci din identitatea paralelogramului avem $EG^2+FH^2=2\left(EF^2+FG^2\right)=\frac{AC^2+BD^2}{2}$ de unde $EG^2<\frac{AC^2+BD^2}{2}$

b) $EG=HF\Leftrightarrow EFGH$ dreptunghi $\Leftrightarrow m(\sphericalangle FEH)=90^0\Leftrightarrow AC\perp BD$.

VIII. 246 Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x(3-2x)+y(3-2y)=2xy$.
Demonstrați că $0 \le x+y \le 2$

Ştefan Smarandache, Bucureşti

Soluție: Egalitatea dată se poate scrie: $3(x+y)=2\left(x^2+xy+y^2\right)$. Cum

$x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4} \ge 0$ deducem: $x+y \ge 0$. Pe de altă parte

$2x^2+2xy+2y^2=\frac{3}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(x-y)^2 \ge \frac{3}{2}(x+y)^2 \Rightarrow x+y<2$.

VIII. 247 Semidreptele în spațiu $[OB$ şi $[OC$ sunt perpendiculare, iar semidreapta $[OA$ formează cu celelalte două, unghiuri cu măsura de 45^o, respectiv 60^o. Calculați măsura unghiului dintre semidreapta $[OA$ şi planul (BOC).

Mircea Trifu, Bucureşti

Soluție: Notăm $D = pr_{BOC}A \Rightarrow \sphericalangle(OA,(BOC)) = \sphericalangle AOD$; alegem B aşa încât $AB \perp OB; C$ așa încât $DC \perp OC \Rightarrow OBDC$ este dreptunghi. Fie $a = OA;$ din $m(\sphericalangle OA;OB)=45^0$ şi $AB \perp OB$ deducem

$OB = AB; \sin \sphericalangle AOB = \frac{AB}{OA} \Rightarrow OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Folosim teorema celor trei

perpendiculare şi avem $AC \perp OC; m(\sphericalangle BAC)=30^0 \Rightarrow OC = \frac{a}{2}$.

Din $BC^2 = OB^2 + OC^2 \Rightarrow OD = BC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, apoi

$\cos \sphericalangle AOD = \frac{OD}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle AOD) = 30^0$.

VIII. 248 Triunghiurile ABD şi ACE sunt în plane diferite şi au mediana AM comună.

a) Dacă $AB^2 + AD^2 = AC^2 + AE^2$, arătați că $BCDE$ este dreptunghi.

b) Dacă se adaugă condiția $m(\sphericalangle ABE) = m(\sphericalangle BAC) = 90^0$ determinați poziția punctului A astfel încât aria triunghiului ABC să fie maximă.

Florian Pană, Rm.Vâlcea

Soluție: a) Aplicând teorema medianei în cele două triunghiuri , cu condiția din ipoteză, rezultă $BD = CE$ şi cum $BCDE$ este paralelogram $\Rightarrow BCDE$ dreptunghi

b)Din $BE \perp BC, BE \perp AB \Rightarrow (BCE) \perp (ABC)$. Cu inegalitatea mediilor avem $A_{[BAC]} = \dfrac{AB \cdot AC}{2} \le \dfrac{AB^2 + AC^2}{4} = \dfrac{BC^2}{4}$. Aria va fi maximă pentru $AB = AC$, deci A se află pe perpendiculara pe planul (BEC) dusă prin Q mijlocul lui $[BC]$ şi $AQ = \dfrac{BC}{2}$

VIII. 249 a) Calculați

$$S = \frac{1}{1\sqrt{2} + 2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}.$$

b) Arătați că $\sqrt{1 \cdot 2} + \sqrt{2 \cdot 3} + \ldots + \sqrt{n(n+1)} < n(n+1), n \in \mathbb{N}^*$

Laurențiu Panaitopol

Soluție: Observăm că $\left[n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}\right] \cdot \left[n\sqrt{n+1} - (n+1)\sqrt{n}\right] = -n(n+1)$.

Calculăm suma S, raționalizând fiecare fracție şi aplicând relația anterioară: $S = \dfrac{1\sqrt{2} - 2\sqrt{1}}{2-4} + \dfrac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{12-18} + \ldots + \dfrac{n\sqrt{n+1} - (n+1)\sqrt{n}}{-n(n+1)} = \dfrac{n-1-\sqrt{n+1}}{n+1}$.

Aplicând inegalitatea mediilor $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$ pentru $a, b > 0, a \ne b$

$$\sqrt{1 \cdot 2} + \sqrt{2 \cdot 3} + \ldots \sqrt{n(n+1)} < \frac{1+2}{2} + \frac{2+3}{2} + \ldots + \frac{n+n+1}{2} =$$

$$= 1 + 2 + 3 + \ldots + n + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+2)}{2} < n(n+1)$$

VIII. 250 Fie $[AB]$ şi $[CD]$ segmente necoplanare astfel încât

$$\frac{CA}{CB} + \frac{CB}{CA} + \frac{AD}{DB} + \frac{DB}{DA} = 4.$$

Demonstrați că, în aceste condiții, $AB \perp CD$.

OL Timiş

Soluție: $x+\frac{1}{x}\geq 2, \forall x>0$ (egalitate pentru $x=1$) (1)

Pe baza relației (1) avem acum: $\left(\frac{CA}{CB}+\frac{CB}{CA}\right)+\left(\frac{AB}{DB}+\frac{DB}{AB}\right)=4 \Leftrightarrow CA=CB$ şi $BA=BD$. Fie M mijlocul lui $[AD]$. Triunghiurile ABD şi ACD fiind isoscele $\Rightarrow BM\perp AD$ şi $CM\perp AD$. Aşadar $AD\perp(BMC)\Rightarrow AD\perp BC$

Clasa a IX-a

IX. 211 Fie m un număr rațional pozitiv. Aflați m ştiind că $2m+\frac{1}{m}$ este număr întreg.

Ion Pătraşcu, Craiova

Soluție: Dacă $m=\frac{p}{q}$ cu $p,q\in\mathbb{N}^*$ atunci trebuie ca $2\frac{p}{q}+\frac{q}{p}=k\in\mathbb{Z}_+^*$ de unde $2p^2-kpq+q^2=0$ sau $2\left(\frac{p}{q}\right)^2-k\left(\frac{p}{q}\right)+1=0$. Trebuie deci ca $\Delta=k^2-8\geq 0\left(deci\ k\geq 3\right)$ şi $\frac{p}{q}=\frac{k\pm\sqrt{k^2-8}}{4}\in\mathbb{Q}$.Pentru aceasta ar trebui ca k^2-8 să fie pătrat perfect. Pentru $k\geq 5$. $(k-1)^2<k^2-8<k^2$ deci k^2-8 nu poate fi pătrat perfect. Rămân rezultatele $k=3$ şi $k=4$.

$k=3\Rightarrow\frac{p}{q}=\frac{3\pm 1}{4}$ adică 1 sau $\frac{1}{2}$ şi $k=4$ care nu convine (dă $\frac{f}{q}\notin\mathbb{Q}$)

IX. 212 Într-un triunghi isoscel de bază a şi celelalte două laturi egale cu b unghiul de la vârf are măsura egală cu 20^0.

Demonstrați că $a^3+b^3=3ab^2$.

Concurs „Mathematica- Modus Vivendi”

Soluție: Cu teorema cosinusului avem

$a^2=b^2+b^2-2b\cos 20^0=2b^2\left(1-\cos 20^0\right)=4b^2\sin^2 10^0$, de unde

$a=2b\sin 10^0$. Înlocuind a în relația din enunț deducem

$8b^2\sin^3 10^0 + b^3 = 6b^3\sin 10^0$ şi cum $b \neq 0$ rezultă

$8\sin^3 10^0 + 1 = 6\sin 10^0 \Leftrightarrow 2\sin 10^0\left(3-4\sin^2 10^0\right)-1=0 \Leftrightarrow$

$2\sin 30^0 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cdot\frac{1}{2}=0$

IX. 213 Dacă $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt numere naturale nenule astfel încât

$$a = 1 + a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + ... + a_1a_2a_3...a_n \leq 2^n,$$

atunci să se arate că cel puțin două din numerele date sunt egale.

Gheorghe Țurcanu

Soluție: Presupunem că $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Atunci

$1 + a_1 + a_1a_2 + ... + a_1a_2...a_n \geq 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 3 + ... + 1\cdot 2\cdot ...\cdot n =$

$2 + 2! + 3! + ... + n! > 2^n$ (!) fals deci cel puțin două numere sunt egale.

IX. 214 Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $(x+1)(3x+5)(3x+4)^2 = 4$.

Daniela Covaci, Brăila

Soluție: Ecuația se scrie $\left(3x^2+8x+5\right)\left(9x^2+24x+16\right)=4$. Notând

$3x^2+8x+5 = y \Rightarrow y(3y+1)=4$ cu soluțiile $y_1 = +1,\ y_2 = -\frac{4}{3}$. Revenind

obținem $x_1 = -2,\ x_2 = -\frac{1}{3}$.

Clasa a X-a

X. 211 Determinați numerele reale x pentru care $\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{5-x} = 2$.

OL Caraş – Severin

Soluție: Notăm $a = \sqrt{2x+1}, b = \sqrt[3]{5-x}$ şi se obține sistemul

$\begin{cases} a^2 + 2b^3 = 11 \\ a - b = 2 \end{cases}$ cu $b = 1$, deci $x = 1$. Deoarece funcția

$f : \left[-\frac{1}{2}, \infty\right) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{5-x}$ este strict crescătoare, $x = 1$

este soluție unică.

X. 212 Dacă ε este o rădăcină a ecuației $x^2+x+1=0$, se cere:

a) Calculați $S=1+\varepsilon+\varepsilon^2+...+\varepsilon^{2012}$

b) Arătați că:

$$(i)(z-1)+\varepsilon(z-\varepsilon)+\varepsilon^2\left(z-\varepsilon^2\right)=0, \forall z\in\mathbb{C};$$

$$(ii)|z-1|^2+|z-\varepsilon|^2+\left|z-\varepsilon^2\right|^2=3\left(1+|z|^2\right), \forall z\in\mathbb{C}.$$

* * *

Soluție: a) $S=\left(1+\varepsilon+\varepsilon^2\right)+\varepsilon^3\left(1+\varepsilon+\varepsilon^2\right)+.....+\varepsilon^{2010}\left(1+\varepsilon+\varepsilon^2\right)=0$

Am folosit binecunoscutele: $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$ şi $\varepsilon^3=1$

b) (ii) $|z-1|^2+|z-\varepsilon|^2+\left|z-\varepsilon^2\right|^2=(z-1)\left(\overline{z}-1\right)+(z-\varepsilon)\left(\overline{z}-\overline{\varepsilon}\right)++\left(z-\varepsilon^2\right)\left(\overline{z}-\overline{\varepsilon}^2\right)=$

$(z-1)\left(\overline{z}-1\right)+(z-\varepsilon)\left(\overline{z}-\varepsilon^2\right)+\left(z-\varepsilon^2\right)\left(\overline{z}-\varepsilon\right)=3\left(1+|z|^2\right)$

X. 213 Determinați numerele naturale x, y şi numărul prim p, ştiind că

$$x^3+x=p^y+2.$$

Prof. Florin Stănescu, Găeşti

Soluție: Fie x, y, p soluție. Rezultă că p este par şi cum este prim

$\Rightarrow p=2$. Avem $(x-1)\left(x^2+x+2\right)=2^y \Rightarrow x-1=2^m, x^2+x+2=2^n$.

Prin eliminarea lui x se obține $m\in\{0,1,2\}$.

Deducem: pentru $m=0, x=2, y=3$ şi pentru $m=2, x=5, y=7$.

X.214 Fie $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{n}\notin\mathbb{N}$

şi $A=\left\{a+b\sqrt{n}\,\middle|\, a,b\in\mathbb{N}, a^2-nb^2=1\right\}$.

Arătați că funcția $f:A\to\mathbb{N}, f(x)=[x]$ e injectivă, dar nu e surjectivă.

OL Arad

Soluție: Fie $x=a+b\sqrt{n}\in A$. Deci $a^2-b^2n=1\Rightarrow a\geq 1$ şi $a>b\sqrt{n}$,

atunci $0<a-b\sqrt{n}=\dfrac{1}{a+b\sqrt{n}}\leq 1$ şi de aici $0\leq 1-\left(a-b\sqrt{n}\right)<1$. Astfel:

$[x]=\left[2a-1+1-\left(a-b\sqrt{n}\right)\right]=2a-1$. Funcția

$f : A \to \mathbb{N}, f\left(a+b\sqrt{n}\right)=2a-1$ nu este surjectivă deoarece nu ia valori pare; este injectivă deoarece, dacă $x=a+b\sqrt{n}, y=c+d\sqrt{n}$ şi $f(x)=f(y)$, atunci $a=c$, iar din $a^2-b^2n=1, c^2-d^2n=1 \Rightarrow b=d$, deci $x=y$.

Clasa a XI-a

XI. 211 Dacă $x,y,z,t \in \mathbb{Z}$ şi $\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \\ x^5 & y^5 & z^5 & t^5 \end{vmatrix}$, arătaţi că Δ este divizibil prin 30.

OL, Mehedinţi

Soluţie: Deoarece pentru $a \in \mathbb{Z}, a^2-a \vdots 2, a^3-a \vdots 3, a^5-a \vdots 5$ şi

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x^2-x & y^2-y & z^2-z & t^2-t \\ x^3-x & y^3-y & z^3-z & t^3-t \\ x^5-x & y^5-y & z^5-z & t^5-t \end{vmatrix}$$ rezultă că $\Delta \vdots 2\cdot 3\cdot 5$.

XI. 212 Dacă $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $A^3\cdot B = I_2 - B$, demonstraţi că $AB=BA$.

Dan Nedeianu, Drobeta Tr. Severin

Soluţie: $\left(A^3+I_2\right)\cdot B = I_2 \Rightarrow A^3+I_2 = B^{-1}$. Înmulţim la dreapta , apoi la stânga cu A egalitatea din enunţ şi avem $A^3BA = A - BA, A^4B = A - AB$. Prin scăderea acestor relaţii se obţine $A^3BA - A^4B = AB - BA$ sau $\left(A^3+I_2\right)\cdot\left(BA-AB\right)=O_2; B^{-1}\cdot\left(BA-AB\right)=O_2 \Rightarrow$.

$BA-AB=O_2 \Rightarrow AB=BA$

XI. 213 Se consideră şirul $(x_n)_{n\ge 0}$ definit prin $x_{n+1}=x_n+\dfrac{4}{x_n}, n\ge 0, x_0=1$.

Calculați: a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{n}}$.

OL Satu Mare

Soluție: a)Se arată, prin inducție matematică, că $x_n>0, \forall n\ge 0$. Atunci, $x_{n+1}-x_n=\dfrac{4}{x_n}>0 \Rightarrow$ şirul $(x_n)_{n\ge 0}$ este strict crescător. Dacă şirul $(x_n)_{n\ge 0}$ ar fi mărginit superior, deci convergent, trecând la limită, ar rezulta: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} x_n+\dfrac{4}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$, contradicție. Urmează $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$

b)Aplicând Lema Stolz –Cesaro avem:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^2}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n+1}^2-x_n^2\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(8+\dfrac{16}{x_n^2}\right)=8$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{\sqrt{n}}=2\sqrt{2}$.

XI. 214 Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ se notează $a_n=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^n x}{\cos^2 x}$.

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}\right)$.

OL Caraş Severin

Soluție: Deoarece $\dfrac{1-\sin^n x}{\cos^2 x}=\dfrac{(1-\sin x)\left(1+\sin x+\sin^2 x+...+\sin^{n-1} x\right)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$,

rezultă că $a_n=\dfrac{n}{2}$. Deci $x_n=\sqrt{\dfrac{n}{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Clasa a XII-a

XII. 211 Fie $G=\left\{ f:[0,1]\to[0,1] \mid f \text{ continuă şi bijectivă} \right\}$.

a) Arătaţi că toate elementele lui G sunt funcţii strict monotone.

b) Arătaţi că $(G,\circ)$ este grup;

c) Fie $g\in G$ cu proprietatea că este un element de ordin finit şi $g(0)=0$. Arătaţi că ordinul lui g în G este 1.

* * *

Soluţie: a) Deoarece f este continuă şi injectivă , este strict monotonă.
c)Fie $n=ord\ g>1$, deci $(g\circ g...\circ g)(x)=x,\forall x\in[0,1]$. Cum g este strict monotonă şi $g(0)=0$, rezultă că g este strict crescătoare. Dacă există $x_0\in[0,1]$ cu $g(x_0)<x_0$, atunci

$g(g(x_0))<g(x_0)<x_0,...,(g\circ g\circ g)(x_0)<x_0$, fals. La fel $g(x_0)>x_0$ este imposibil. Rezultă, deci $g(x)=x,\forall x\in[0,1]$ şi deci ord g=1.

XII. 212 Definim pe mulţimea $G=(3,\infty)$ operaţia

$x*y=xy-3x-3y+1\ ,\ \forall x,y\in(3,\infty)$. Arătaţi că $(G,*)$ formează un grup izomorf cu grupul $(\mathbb{R},+)$.

OL Bihor

Soluţie: Funcţia $f:G\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(x-3)$ este izomorfism de la $(G,*)la(\mathbb{R},+)$; în rest, problemă de clasă.

XII. 213 Arătaţi că, dacă $(G,\cdot)$ este un grup $a\in G$ un element fixat, atunci $f_a:G\to G, f_a(x)=a\cdot x\cdot a^{-1}$ este un automorfism al grupului G.

OL Caraş- Severin

Soluţie: Deoarece $f_a(xy)=f_a(x)f_a(y),\forall x,y\in G$, iar f_a este bijectivă, concluzia se impune imediat. Sigur că la un concurs sau examen, trebuie scris un pic mai detaliat !.

XII. 214 Arătați că $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{2+\cos x}$ este primitivabilă şi determinați mulțimea primitivelor sale.

Concurs Traian Lalescu

Soluție: Deoarece f este continuă , este primitivabilă. Pentru $x\in[0,\pi)$.

Pentru $tg\dfrac{x}{2}=t$ şi $\int f(x)dx=\dfrac{2}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C_1$. Pentru

$x\in(\pi,2\pi],tg\dfrac{x}{2}=t\Rightarrow\int f(x)dx=\dfrac{2}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C_2$. Prin urmare, primitiva funcției *f* are forma

$$F:[0,2\pi]\to\mathbb{R},F(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C_1,x\in[0,\pi)\\ C, \qquad\qquad\qquad\qquad ,x=\pi\\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\dfrac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+\mathrm{C}_2,x\in(\pi,2\pi)\end{cases}$$

Din continuitatea lui F rezultă $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}+C_1=C=-\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}+C_2$ şi apoi primitiva F .

Probleme alese

A 21. Dacă $a,b,c>0$, demonstrați inegalitatea

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\geq\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}.$$

Dorin Andrica

Soluție: Inegalitatea evidentă $(a+b)^2\geq 4ab$ conduce la $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{4}{a+b}$.

Analog se ajunge la $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq\dfrac{4}{b+c}$ şi $\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\geq\dfrac{4}{c+a}$. Prin însumare se ajunge la inegalitatea propusă.

A 22. Demonstrați că nu există numere naturale m, n, p astfel încât

$$n = m^4 \text{ şi } n^3 + 4n^2 + 6n + 4 = p^4.$$

Dorin Andrica

Soluție: Deoarece $n(n^3 + 4n^2 + 6n + 4) = (n+1)^4 - 1$, iar $(n+1)^4 - 1$ nu poate fi puterea a patra a unui număr natural, rezultă afirmația din enunț.

A 23. Determinați mulțimea

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \forall a \in \mathbb{N}, \text{ impar cu } a^2 < n \Rightarrow a \mid n \right\}.$$

Dorin Andrica

Soluție: Fie $A = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ cu $x_1 < x_2 < x_3 < ...$. Pentru $a = 1$ elementele mulțimii care verifică $1^2 < 1 \cdot k \le 3^2$ sunt $x_1 = 2, ..., x_8 = 9$.

Pentru $a = 3$, din $3^2 < 1 \cdot 3k \le 5^2$, ajungem la $x_9 = 12, x_{10} = 15, x_{11} = 18, x_{12} = 21, x_{13} = 24.$ Pentru $a = 5 \Rightarrow x_{14} = 30, x_{15} = 45$. Pentru $a = 7$ avem inegalitățile imposibile $7^2 < 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot k \le 9^2$, deoarece $105k > 81$; în general, pentru $a \ge 7$, din $N > (a+2)^2 \Rightarrow 3N > (a+4)^2$ (inducție). Aşadar avem $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9,12,15,18,21,24,30,45\}$.

A 24. Demonstrați că, dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci inegalitatea

$$\frac{1}{2^{n-1}} \le x^{2n} + \left(1 - x^2\right)^n \le 1 \text{ este adevărată pentru orice } x \in [-1,1].$$

Dorin Andrica

Soluție: Notăm $x = \sin y$ şi avem $1 \ge \sin^{2n} y + \cos^{2n} y \ge \frac{1}{2^{n-1}}$. Deoarece $|\sin y| \le 1, |\cos y| \le 1$, avem

$$\sin^{2n} y + \cos^{2n} y \le \sin^{2n-2} y + \cos^{2n-2} y \le ... \le \sin^2 y + \cos^2 y = 1.$$

Folosim acum inegalitatea $\frac{x_1^{\,n} + x_2^{\,n}}{2} \ge \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^n$ şi ajungem la

$$\frac{\sin^{2n} y + \cos^{2n} y}{2} \ge \left(\frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{2} \right)^n = \frac{1}{2^n},$$ de unde prima inegalitate din enunț se obține imediat.

Probleme propuse

(Se primesc soluții **până în data de 7 septembrie 2013**, nu mai târziu!.
Pe plic scrieți clasa în care sunteți, vă rugăm DIN NOU !)

Clasa a II-a

II. 161 Pe un platou sunt 7 fete şi doar 7 gutui. Cum trebuie împărțite aceste gutui la aceste 7 fetițe, astfel încât fiecare să ia câte o gutuie, iar pe platou să mai rămână o gutuie?

Neta Novac, Reşița

II. 162 Numărând din doi în doi, Andrei a ajuns la numărul 652.
De la care dintre numere ar fi putut porni: 561, 584, 625 ?

Neta Novac, Reşița

II. 163 Compuneți şi rezolvați o problemă plecând de la egalitățile

$a \times b = 150$ şi $b \times c = 200$.

* * *

II. 164 Un număr se adună cu el însuşi, apoi cu jumătatea lui, cu sfertul lui, iar în final i se mai adună numărul 36 şi se obține 80. Care este numărul inițial?

*** * ***

II. 165 În timpul unei excursii, Andrei, Bianca, Cristina şi Daniel au cheltuit împreună 775 lei. Dacă Bianca a cheltuit de două ori mai mult decât Andrei şi jumătate din suma cheltuită de Cristina, iar Daniel a cheltuit cu 50 de lei mai puțin decât Cristina, aflați câți bani a cheltuit fiecare dintre cei patru prieteni.

* * *

II. 166 Pe o bancă din Parcul Tricolorului din Reşița s-au aşezat patru colegi de clasă: Bianca, Cosmin, Gabi şi Andrada. Dacă Cosmin, primul din stânga, se mută între Bianca şi Andrada, atunci Andrada va fi prima din stânga.

Care este ordinea în care sunt aşezați cei patru copii ?

Mariana Mitrică, Reşița

II. 167 Determinați numerele formate din trei ordine care au suma cifrelor egală cu 13, iar cifra sutelor este de două ori mai mare decât cifra unităților.

Mariana Mitrică, Reşița

II. 168 Patru frați şi-au propus să confecționeze 100 de felicitări pentru ziua de Paşte. În fiecare zi, fiecare dintre copii reuşeşte să confecționeze câte 6 felicitări. Câte felicitări mai au de confecționat frații după patru zile de muncă ?

* * *

II. 169 Un grup de trei animale domestice se numeşte *liniştit* dacă cel puțin unul dintre animale este un purcel. Câte grupuri *liniştite* are bunicul lui Răzvan în ogradă dacă are în grijă un ied, doi miei şi trei purcei ?

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

II. 170 Bogdan, Ioana şi Mihai au împreună 30 de creioane. După ce Ioana a mai cumpărat 3 creioane, Andrei 4 creioane, Bogdan a cumpărat şi el 8 creioane şi astfel cei trei prieteni au acum acelaşi număr de creioane. Câte creioane a avut fiecare dintre cei trei la început ?

* * *

Clasa a III-a

III. 161 Află numerele de trei cifre $\overline{mnc}$ care verifică relația:

$$2\overline{mn} + 6\overline{mc} = 907$$

Neta Novac, Reşița

III. 162 12 creioane costă cât 9 pixuri, iar 5 creioane costă cu 6 lei mai mult decât 3 pixuri. Află cât costă un creion şi cât costă un pix.

Neta Novac, Reşița

III. 163 În clasa pregătitoare din şcoala noastră sunt 10 fetițe şi 12 băieți.De iepuraş, fiecare fetiță a primit câte un ursuleț, iar fiecare băiețel, câte o maşinuță.Cât a costat o jucărie din fiecare fel, dacă:

a) trei maşinuțe costă cât cinci ursuleți;
b) toate jucăriile au costat 300 lei ?

Mariana Mitrică, Reşița

III. 164 Pentru Bradul de Crăciun, mama a cumpărat 14 globulețe roşii şi un număr de globulețe galbene. Un globuleț galben costă 2lei, iar unul roşu, dublu. Câte globulețe galbene a cumpărat mama dacă a plătit la casă o bancnotă de o sută lei şi a primit rest a zecea parte din întreaga sumă?

Mariana Mitrică, Reşița

III. 165 Diferența dintre două numere este de 655, iar unul dintre numere este de 6 ori mai mare decât celălalt. Aflați cele două numere.

* * *

III. 166 Pe o masă sunt fructe, de patru ori mai multe prune decât mere. Patru prieteni servesc fiecare câte o prună şi un măr; pe masă au rămas astfel de şapte ori mai multe prune decât mere. Câte prune şi câte mere au fost la început pe masă ?

* * *

III. 167 Dublăm un număr şi adunăm la rezultat 15. Dublăm numărul obținut şi adunăm la rezultat 30. Dacă am obținut numărul 100, care a fost numărul inițial ?

* * *

III. 168 Suma a patru numere naturale consecutive este cu 45 mai mare decât cel mai mare dintre numere. Aflați numerele !

* * *

III. 169 Răzvan a cules prune şi acum le numără. Răzvan observă că, dacă le grupează câte patru obține cu două grămezi mai multe decât atunci când le grupează câte cinci. Puteți afla câte prune are Răzvan ?

* * *

III. 170 Pe un platou sunt mere. Armin a mâncat din ele până au rămas pe platou jumătate din numărul lor. Mama a mai pus pe platou atâtea mere câte erau la început şi acum sunt pe platou 15 mere. Câte mere a mâncat Armin ?

* * *

Clasa a IV-a

IV. 161 Ştiind că $a+b=28$ iar $b+c=54$, cât este rezultatul calcului

$$5\times a+8\times b+3\times c?$$

Mariana Mitrică, Reşiţa

IV. 162 În trei şcoli se află 2 885 elevi. Dacă în prima şcoală ar mai veni 5 elevi, atunci numărul elevilor ar fi jumătate din numărul elevilor din a doua şcoală şi triplul elevilor din a treia şcoală. Câţi elevi sunt în fiecare şcoală?

Mariana Mitrică, Reşiţa

IV. 163 Ionel, Andrei, Sorin şi Flavius au împreună 130 lei. Dacă Ionel ar primi de la fiecare ceilalţi trei copii câte 4 lei, atunci suma banilor avuţi ar putea fi patru numere naturale consecutive. Află câţi lei avea fiecare elev la început.

Neta Novac, Reşiţa

IV. 164 Aflaţi toate perechile de numere naturale (a,b) pentru care

$$(a+4)\times(b+5)=45.$$

* * *

IV. 165 Suma a trei numere naturale este 104. Dacă îl împărţim pe primul la al doilea sau pe al doilea la al treilea, se obţine câtul 3 şi restul 2. Aflaţi numerele.

* * *

IV. 166 În doi saci sunt 46 de kg de cartofi. Se iau 5 kg din primul sac şi se pun în al doilea şi astfel în acesta sunt cu 6 kg mai mult decât în primul sac. Câte kilograme de cartofi au fost la început în fiecare sac ?

* * *

IV. 167 Un strungar realizează un număr de *n* piese în fiecare oră, lucrând constant câte 7 ore pe zi, 5 zile pe săptămână. Pentru fiecare piesă strungarul primeşte 8 lei. Determinaţi numărul *n* ştiind că după o lună strungarul primeşte 1400 lei.

* * *

IV. 168 Scădem dintr-un număr, pe rând, numerele 15, 20, 21 şi 28; adunând cele patru rezultate obţinute observăm că avem un număr egal cu cel iniţial. Care este acest număr ?

* * *

IV. 169 Tatăl şi fiul au împreună 44 de ani. Când fiul avea 6 ani, tatăl avea 30 ani. Peste câţi ani vârsta fiului va fi o treime din vârsta tatălui ?

Concurs Iaşi

IV. 170 În exerciţiul următor $9 \cdot 4 : 2 + 10 - 2$ folosiţi paranteze pentru a obţine, pe rând, rezultatele:

a) 106; b) 90; c) 1.

Concurs RMCS

Clasa a V-a

V. 281 Un săculeţ conţine bile roşii şi albe, care cântăresc 100 grame. Fiecare bilă roşie cântăreşte 5 grame, iar fiecare bilă albă cântăreşte 7 grame. Câte bile sunt în săculeţ.

Olimpiada de Matematică, faza locală, Bistriţa Năsăud

V. 282 Suma a trei numere consecutive este 3^{2003}. Aflaţi ultimele două cifre ale produsului celor trei numere.

Olimpiada de Matematică, faza locală, Bucureşti

V. 283 Câte numere naturale de patru cifre se pot scrie cu ajutorul cifrelor 2,5 şi 0? Câte dintre acestea sunt divizibile cu 2, dar nu şi cu 5?

Olimpiada de Matematică, faza locală, Bucureşti.

V. 284 Aflaţi ultimele cinci cifre ale numărului :

$$A = 2^{2013} + 2^{2011} - 4^{1004} + 4^{1002}.$$

* * *

V. 285 Diferenţa a două numere este 6. Aflaţi câtul şi restul împărţirii sumei lor la numărul mai mic.

* * *

V. 286 Dacă aranjăm elementele mulțimii $\{3,6,10,13\}$ în ordinea $13,3,6,10$ atunci suma oricăror două numere vecine este pătrat perfect: $13+3=16, 3+6=9, 6+10=16$. Dacă aranjăm elementele mulțimii $\{1,2,3,...,15,16\}$ astfel ca suma oricăror două numere vecine să fie pătrat perfect, ce poziție ocupă numărul 16? Găsiți o astfel de aranjare.

Olimpiada de Matematică, faza locală, Sibiu

V. 287 Fie mulțimea $A=\{a,b,c\}$, unde a,b,c sunt numere raționale pozitive. Media aritmetică a elementelor mulțimii A este numărul natural $n \geq 5$. Dacă eliminăm cel mai mic element al mulțimii A, atunci media aritmetică a elementelor rămase diferă față de n cu 2. Dacă eliminăm cel mai mare element al mulțimii A, atunci media aritmetică a elementelor rămase diferă față de n tot cu 2. Arătați că numerele a,b,c sunt naturale.

Mircea Fianu, Bucureşti

V. 288 Un sportiv se antrenează urcând o scară în felul următor: urcă 5 trepte, coboară 4 şi urcă 6, după care repetă exercițiu. Câte trepte are scara dacă pentru parcurgerea ei sportivului îi sunt necesari 160 de paşi? (pas înseamnă urcarea sau coborârea unei trepte).

* * *

V. 289 Fie p şi q două numere naturale prime consecutive (în sensul că între ele nu mai există alt număr prim) cu $2<p<q$. Să se demonstreze că $(p+q):2$ este număr natural, nu este prim şi se poate scrie ca sumă de cel puțin două numere naturale prime nu neapărat distincte.

Dana Piciu, Craiova

V. 290 Într-o cameră sunt cinci dulapuri aşezate unul lângă altul în ordinea A,B,C,D,E. Cheia dulapului A deschide şi dulapul E, dulapul C se poate deschide cu cheia dulapului B şi fiecare cheie deschide cel puțin un dulap vecin. Care este numărul minim de chei necesar pentru a deschide toate dulapurile?

Olimpiada de Matematică, faza județeană, Harghita

Clasa a VI-a

VI. 281 Fie punctele distincte A, B, C, D situate în această ordine pe dreapta d, iar M, N şi P mijloacele segmentelor $[AB], [CD]$ respectiv $[MN]$. Lungimea lui $[BC]$ este egală cu 60% din lungimea lui $[MN]$, lungimea lui $[AM]$ este 30% din lungimea lui $[CD]$, iar $MC = 18cm$. Aflați lungimea lui $[AP]$.

Olimpiada de Matematică, etapa locală, Argeş

VI. 282 Fie $\sphericalangle XOY$ un unghi ascuțit şi punctele A şi B pe $(OX$, (A între O şi B), iar C şi D pe $(OY$, (C între O şi D), astfel încât $(OA) \equiv (OC)$ şi $(OB) \equiv (OD)$.

Fie $AD \cap BC = \{P\}$ şi $OP \cap BD = \{M\}$. Demonstrați că:

a) $(AD) \equiv (BC)$;

b) $(OP$ este bisectoarea $\sphericalangle XOY$;

c) $(MA) \equiv (MC)$.

Olimpiada de Matematică, etapa locală, Braşov

VI. 283 Doi colegi locuiesc în acelaşi bloc, unul la etajul 5, apartamentul 107, iar celălalt la etajul 4, apartamentul 158. Pe fiecare scară, atât la parter cât şi la fiecare etaj, sunt câte 4 apartamente. Aflați câte etaje are blocul.

* * *

VI. 284 Determinați numerele naturale m şi n astfel încât :

$$5 \cdot 7^m = 7^n - 2.$$

* * *

VI. 285 Să se afle toate numerele naturale a şi b ştiind că

$$\frac{9a+3b}{a+2b} \in \mathbb{N} \text{ şi } \frac{2a+4b}{3a+b} \in \mathbb{N}.$$

Olimpiada de Matematică, etapa locală, Giurgiu

VI. 286 Calculați măsura unui unghi ştiind că este $\frac{5}{14}$ din măsura suplementului complementului său.

* * *

VI. 287 Un număr natural se numeşte „norocos” dacă suma cifrelor sale se divide cu 13.

a) Aflați cel mai mic număr norocos nenul.
b) Există cel mai mare număr norocos?
c) Dați exemple de două numere consecutive, ambele norocoase.

Olimpiada de Matematică, etapa locală, Mureş

VI. 288 Se consideră în jurul unui punct unghiuri având măsurile exprimate în grade prin numere naturale consecutive. Diferența dintre măsurile celui mai mare şi măsura celui mai mic dintre unghiuri este 14^0. Aflați numărul unghiurilor şi măsurile lor.

* * *

VI. 289 Fie ABC un triunghi echilateral şi $O \in (AC)$ astfel încât $OC = \frac{OA}{2}$. Paralela prin C la AB intersectează $[BO$ în D. Ştiind că $\frac{AB}{CD} = 2$, se cere:

a) Să se arate că $[CO$ este bisectoarea unghiului DCB.
b) Să se arate că $CD \perp DA$

* * *

VI. 290 Determinați numerele $a, b \in \mathbb{N}$ dacă $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b+1} = 1$

Concursul interjudețean de matematic „Rado Ferenc”, Cluj

Clasa a VII-a

VII. 281 Să se determine intervalul $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^*$ cu lungimea cea mai mică, în care este situat numărul $\frac{3}{\sqrt{7}} - \frac{3}{\sqrt{14}}$.

Olimpiada de Matematică , faza locală, Giurgiu

VII. 282 Se îndoaie o foaie de hârtie. Prin punctele A, B ale muchiei de pliere se fac cu foarfeca două tăieturi drepte AC şi BC. Se scoate triunghiul ABC. Desfăcând hârtia apare o gaură. Să se determine condiții asupra triunghiului ABC**,** astfel încât gaura să fie:

i) Un triunghi;
ii) Un romb;
iii) Un pătrat;
iv) Un dreptunghi care nu este pătrat;
v) Un trapez;
vi) Un paralelogram care nu este romb sau dreptunghi.

Olimpiada de Matematică , faza locală, Dâmbovița

VII. 283 Fie $ABCD$ un pătrat şi $(BE$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABD, E \in AD$. Dreptele BE şi AC se taie în M, iar perpendiculara în M pe BE taie dreptele CD şi BD în F şi T.

a) Să se arate că triunghiul DET este isoscel.
b) Să se arate că $EF \parallel AC$.
c) Să se arate că $ET \perp BF$.

Olimpiada de Matematică , faza locală, Bucureşti

VII. 284 Fie triunghiurile isoscele ABC şi ADE cu $m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle DAE) = 90^0$ cu interioare comune. Dacă $AB = 1, AD = 2$ şi M, N, P, Q sunt mijloacele segmentelor $[BC], [CD], [DE], [EB]$ arătați că:

a) $\frac{AM}{MP} > \frac{1}{3}$
b) $MP \perp NQ$

Olimpiada de Matematică, faza locală, Gorj

VII. 285 Dreapta paralelă cu latura BC a triunghiului ABC intersectează latura (AB) în punctul P şi AC în Q. Fie F mijlocul laturii (AC), iar R intersecția lui PQ cu FB. Să se demonstreze că suma $PR + PQ$ este constantă.

Olimpiada de Matematică, faza locală, Gorj

VII. 286 Se consideră ΔABC în care D este mijlocul segmentului $[BC]$, iar E este piciorul bisectoarei din B. Să se arate că dacă $BE \perp ED$, atunci $BC = 3AB$.

Olimpiada de Matematică, faza locală, Iaşi

VII. 287 Să se arate că dacă $xy + x + y = 1, x, y \in \mathbb{Q}$, atunci

$$\sqrt{2\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)} \in \mathbb{Q}.$$

Olimpiada de Matematică, faza locală, Sălaj

VII. 288 Să se arate că: $n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right) \geq (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}\right)$, pentru orice număr natural $n \geq 1$.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

VII. 289 Fie p, q şi r trei numere prime, astfel încât $5 \leq p < q < r$. Ştiind că $2p^2 - r^2 \geq 49$ şi $2q^2 - r^2 \leq 193$, determinați p, q, r.

* * *

VII. 290 Numerele reale distincte x, y, z au proprietatea că $x^3 - x = y^3 - y = z^3 - z$. Să se arate că $x + y + z = 0$.

Concursul interjudețean „Alexandru Myller”, Iaşi

Clasa a VIII-a

VIII. 281 Să se determine $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ cu p prim, astfel încât

$$\frac{n^2+2}{2n} + \frac{p^3+3}{3p} \in \mathbb{N}^*$$

Concursul interjudețean „Alexandru Myller”, Iaşi

VIII. 282 a) Să se arate că dacă $x, y, z > 0$ şi $(x + y + z)z = 3xy$, atunci $x^2 + y^2 \geq 2z^2$.

b) Determinați numerele naturale a, b, c, d, e diferite două câte două, ştiind că $1 + a^2 + ab^2 + abc^2 + abcd^2 = abcde$.

Concurs „Gheorghe Lazăr”, Sibiu

VIII. 283 Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $a^{10}+b^{10}+c^{10}=4^5$.
Să se arate că $a^{11}+b^{11}+c^{11}\le 2^{11}$. Când are loc egalitatea?

Concurs Constanța

VIII. 284 Fie $a,b,c,d\in(0,\infty)$ astfel încât $ac=bd=12$. Demonstrați că :
$(a+3)(b+3)(c+4)(d+4)\ge 48^2$

Olimpiada de Matematică, faza locală, Brăila

VIII. 285 Fie $x\in\mathbb{R}^*$ şi numerele
$a=x+\frac{1}{x}, b=\frac{x}{x^2+x+1}, c=\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$. Să se arate că $a=\frac{b}{c}+1$

Olimpiada de Matematică, faza locală, Caraş- Severin

VIII. 286 Dacă $a,b\in\mathbb{R}_+^*$ şi $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$, arătați că:

$$a^2+b^2+c^2+\frac{a+b}{2ab}+\frac{a+c}{2ac}+\frac{b+c}{2bc}\ge 2.$$

Olimpiada de Matematică, faza locală, Iaşi

VIII. 287 Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea: $x=\frac{x^2+1}{x^4+1}$.

Olimpiada de Matematică, faza locală, Sălaj

VIII. 288 Se dau numerele: $a=\underbrace{99...99}_{n}$ şi $b=4\underbrace{99...99}_{n-1}\underbrace{00...00}_{n}{}^2$.

a) Să se arate că : $a^2=2\sqrt{b}+1$.

b) Să se calculeze $\sqrt{a^2+b}$.

Olimpiada de Matematică, faza locală, Tulcea

VIII. 289 Să se determine numerele iraționale x, astfel încât numerele x^2+2x şi x^3-6x să fie ambele raționale.

* * *

VIII. 290 Fie $a,b\in\mathbb{R}$. Să se arate că $|a-b|=2$ dacă şi numai dacă

$$|a+b|=2\sqrt{ab+1}$$

Concurs Constanța

Clasa a IX-a

IX. 241 Pentru orice mulțimi $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ de numere reale, se notează $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \cap ... = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} A_k$ şi $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup ... = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} A_k$.

Determinați mulțimile $H = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{2k}{k+2}\right]$ şi $G = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{2k}{k+2}\right]$.

Olimpiada de Matematică, etapa locală, Caraş- Severin

IX. 242 Pe o insulă trăiesc numai oameni cinstiți care spun întotdeauna adevărul şi mincinoşi care mint întotdeauna . La un moment dat se organizează alegeri pentru funcția de guvernator la care participă n candidați. Fiecare dintre cei n candidați a dat o declarație în care candidatul al $k-lea$ $(1 \le k \le n)$ a spus: „Fără a mă considera pe mine, între candidați, mincinoşii sunt cu k mai mulți decât cinstiții". Câți candidați la postul de guvernator au fost?

Olimpiada de Matematică, etapa locală, Bucureşti

IX. 243 Determinați $a, b, c \in \mathbb{Z}$, dacă $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| ax^2 + bx + c = 0\right\} = \{a, b\}$.

Dan Negulescu, Brăila

IX. 244 Fie $x, y \in (0, \infty)$ care satisfac inegalitățile:

$x \ge \frac{1}{4} + xy$ şi $y \ge \frac{1}{4} + xy$. Arătați că $x = y$

Ioan Tudor Stratulat, Fălticeni, Suceava

IX. 245 Arătați că, dacă paralelogramele $ABCX$ şi $DEFX$ au un vârf comun X, atunci triunghiurile ACE şi BDF au acelaşi centru de greutate.

* **

IX. 246 Fie patrulaterul $ABCD$ convex, E mijlocul diagonalei $[AC]$ şi P un punct oarecare în planul său. Atunci: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PE}$ dacă şi numai dacă $ABCD$ este paralelogram.

Paul Băiatu, Giurgiu

IX. 247 Fie $n \geq 2$ un număr natural şi A o submulțime nevidă a mulțimii $\{1, 2, ..., n\}$ cu proprietatea: oricum am lua două elemente $x, y \in A$, dacă $x + y \leq n$, atunci $x + y \in A$.

Arătați că media aritmetică a elementelor lui A este cel puțin $\frac{1}{2}(n+1)$.

Concurs „Vrânceanu-Procopiu”

IX. 248 Arătați că dacă $a, b > 0$, atunci $a + b \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{ab}$.

* **

IX. 249 Demonstrați că, pentru orice $x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, are loc inegalitatea:

$tgx + tgy + tgz \geq \frac{\sin x}{\cos y} + \frac{\sin y}{\cos z} + \frac{\sin z}{\cos x}$.

Concurs „Traian Lalescu”

IX. 250 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție. Demonstrați că există $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x \neq y$ astfel încât $\left|f(x) - f(y)\right| \neq 1$.

* * *

Clasa a X-a

X. 251 Rezolvați ecuația : $2^{\sin x} + 2^{\cos x} = 3$.

Olimpiada de Matematică, etapa locală, Gorj

X. 252 Fie ABC un triunghi cu $2\sin A + \sin B \sin C = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$. Arătați că triunghiul este isoscel.

* * *

X. 253 Determinați numerele reale x care verifică egalitatea:

$$\frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{1+3^x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+6^x}$$

Olimpiada de Matematică, etapa locală, Hunedoara

X. 254 Perechea de numere complexe $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ are proprietatea (P), dacă există un număr real $a \in [-2, 2]$, astfel încât $z_1^2 - az_1z_2 + z_2^2 = 0$. Arătați că, dacă (z_1, z_2) are proprietatea (P), atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}, \left(z_1^n, z_2^n\right)$ are proprietatea (P).

Prof. Dorin Andrica, Dej

X. 255 Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ cu proprietățile

$f(x) \geq 2^x, \forall x \in \mathbb{R}$ şi $f(x+y) \geq f(x) f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$

Prof. Vasile Pop, Cluj

X. 256 Fie a, b numere reale mai mari ca 1. Arătați că $a \neq b$ dacă şi numai dacă funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{Z}$, $f(x) = [\log_a x] - [\log_b x]$ este surjectivă.

* **

X. 257 Rezolvați în numere reale sistemul: $\begin{cases} 5^x + 12^y = 13^z \\ 5^y + 12^z = 13^x \\ 5^z + 12^x = 13^y \end{cases}$

Prof. Vasile Berinde, Baia Mare

X. 258 Vârfurile triunghiului ABC au în planul complex afixele a, b, c cu $|a| = |b| = |c| = 1$. Înălțimea din A taie din nou cercul circumscris triunghiului ABC în punctul D. Determinați afixul punctului D.

* * *

X. 259 Fie a un număr întreg. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ care au proprietatea: $f\left(f(x) + y\right) = x + f(y+a), \forall x, y \in \mathbb{Z}$

Concurs „Laurențiu Panaitopol”, Tulcea

X. 260 Arătați că $\sin\frac{\pi}{n} \geq \frac{1}{n-1}$ unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

* * *

Clasele a XI-a şi a XII-a

XI. 241 Fie matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ aşa încât $A^2 = A^3$. Arătați că matricea $I_n - A + A^2$ este inversabilă.

Olimpiada de Matematică, etapa locală, Suceava

XI. 242 Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A + B = AB$.

Arătați că: a) $AB = BA$;

b) $rangA^k = rangB^k, \forall k \in N^*$

Romeo Ilie, Braşov

XI. 243 Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 \geq 0$ şi $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{\ln(e + x_n)}, \forall n \geq 1$.

a) Demonstrați că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = 0$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} n \cdot x_n$.

c) Aflați $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x_n}{\ln n}$.

* **

XI. 244 Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir convergent şi $x_n = n \cdot (a_{n+1} - a_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Arătați că, dacă şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are limită, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Prof. Vladimir Cerbu, Câmpulung Moldovenesc, Suceava

XI. 245 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x$.

Arătați că:

a) Funcția f este bijectivă;

b) Există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $\left|f^{-1}(x)\right| \leq M|x|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Dorel I. Duca, Cluj – Napoca

XI. 246 Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2 + B^2 = AB$ şi $BA = O_2$.

Demonstrați că $AB = O_2$

Dinu Şerbănescu, Bucureşti

XI. 247 a) Dacă matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ satisface relația $A^3 - 3A^2 + 4A = 2I_2$, arătați că $Tr(A) = 2$, unde $Tr(A)$ reprezintă urma matricei A.

b)Arătați că există matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A^3 - 3A^2 + 4A = 2I_2$ şi $Tr(A) \neq 2$

prof. Dan Popescu, Suceava

XI. 248 Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă, cu $f(a) = b$ şi $f(b) = a$. Să se arate că există $c_1, c_2 \in (a,b)$ astfel încât $f'(c_1) f'(c_2) = 1$.

Dorel Miheț, Timişoara

XI. 249 Arătați că funcția $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x + \sin x$ este bijectivă.

* * *

XI. 250 Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă, cu $f(0) = 0$, astfel încât $(1 + x^2) \cdot f'(x) \geq 1 + f^2(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Lucian Dragomir, shortlist ONM

Rubrica rezolvitorilor

Înainte de a scrie aici ceva, trebuie să vă rugăm din nou ca, atunci când trimiteți rezolvările problemelor, **să scrieți pe plic**, jos în stânga, **clasa** în care sunteți !!!

Aşa cum anunțam în RMCS nr. 39, la pagina 21, punctajelor obținute în urma evaluării soluțiilor trimise pe adresa noastră li se adună cele publicate în Gazeta Matematică (sau pe www.viitoriolimpici.ro pentru participanții la concursul Gazetei), precum şi punctajul ponderat obținut (dacă e cazul) la ediția anterioară a Concursului RMCS.

Reamintim că punctajele cumulate le puteți găsi (atunci când comisia de evaluare finalizează această activitate) pe pagina www.neutrino.ro, la secțiunea CS MATE, 2012 – 2013, Concursuri, tabere, Rezolvitori _ concurs RMCS 2013.

Clasa a II-a

Şc. Nr. 2 Reşița: Buzera Vlad Petru (270), Volintiru Andrei (251), Doran Raisa (249), Constantin Teodora Cristina (243), Palik Diana (230), Calfa Nicoleta (225), Voicu Mădălina (171), Bereghi Mădălina (117), Foghiş Adrian (105), Pârvulescu Mădălina (101), Guță Raul (100), Potra Alexandru Andrei (100), Lozneanu Izabela (50), Şera Denisa (50); **Şc. Romul Ladea Oravița:** Teicu Dusan (45); **Col. Naț. Traian Lalescu Reşița:** Călin Radu (200); **Lic. Hercules Băile Herculane:** Cherciu Andra (195), Filipoaia Claudiu (194), Arjocu Ionuț (100), Iocşa Nicholas (100); **Lic. Eftimie Murgu Bozovici:** Negru Iasmina Anamaria (100), Borozan Tismanariu (99), Suta Boldea Andreea Dochia (97), Tunea Alexandra (96), Marin Victoria Maria Florina (95), Mustata Cristian (95), Stan Eduard Nicolae (90), Tudor Ariana Tania (90).

Clasa a III-a

Şc. Nr. 2 Reşița: Boc Alissia – Driada (1565), Rusu Adelin Dumitru (1502), Milcu Irina (1205), Florea Ioana Patricia (923), Neveanu Alexandra Elena (617), Dan Alexandru Mihai (566), Florea Patricia (284), Voina Vanesa(260), Voinea Alexandru **(**180**),** Şovîrlean Bianca (100), Rogobete Daria (40); **Şc. Nr. 9 Reşița:** Imbrescu Cosmin (1141), Melca Laurian (1048), Lupaşcu Eduard Mihnea (937), Florea Andrada (907), Puşu Antonia (843), Pusu Ştefania (689), Cîrjan Valeria (580), Popoviciu Daiana (514), Sinculet Teodora (445), Popescu Sebastian Marius (430), Roşeț Bogdan (229), Goga Florin (100), Imbrea Dorina (100), Baciuna Roberta (90); **Şc. Nr. 12 Reşița:** Glosic Dragoş (1075); **Şc. Romul Ladea Oravița:** David Darius (707), Marişescu Ionuț (368); **Col. Naț. Traian Lalescu Reşița:** Apostol Marian (190), Basa Adrian (190), Ciocheltca Alexia (190), Roşian Vlad (190), Nedelcovici Cristiana (180), Pop Alexandra (180), Bîcleşanu Mara (170), Inişconi Mark (90), Petrea Ianis (90), Liută Alexandra (90), Liută Georgiana (80); **Lic. Hercules Băile Herculane:** Murguleț Alexandru (1317), Popa Maria Alexandra (987), Dina Emanuel (713), Băltățeanu Valentina (310), Gavril Tania (180), Stan Elena Andreea (20); **Lic. Eftimie Murgu Bozovici:** Icnea Alina (350), Turnea Alexandru (168), Mihoc Cristian (160), Stanec Timeea Maria (80); **Lic. General Dragalina Oravița:** Cean Larisa (338); **Lic. Mehadia:** Dumbrava Alexandru (170), Danci Lica (96); **Lic. Ped C.D. Loga Caransebeş:** Tătar Sebastian (619), Răduți Daiana (239), Constantin Eveline (191), Jura Andra (100), Țiplea Gabriel (100), Grecu Robert (99); **Lic. Bănățean Oțelu Roşu:** Oparlescu Bogdan Alexandru (300); **Şc. Sf. Nicolae Tg. Jiu:** Silivescu Andrei (300); **Şc. Cornea:** Sabalina Ioan Daniel (132); **Şc. Bănia:** Golâma Florin (70); **Şc. Nr. 1 Moldova Nouă:** Zaberca Alexia (40).

Clasa a IV-a

Şc. Nr. 2 Reşița: Boloca Mădălina (2519), Țucă Wiliger Andra (2209), Jula Diandra (2190), Terfăloagă Mario (1809), Stuparu Daniel (1641), Cismaru George (1140), Dumitru Maria (1451), Mircea Antonia (421), Țibru Maria Bianca (310), Doran Andrei (280), Patrica Andra (280), Bîtea Iulia (230); **Şc.gen. 6 Reşița:** Buga Andru (1207); **Şc. gen. 12 Reşița:** Glosic Dragoş (120); **Şc. Romul Ladea Oravița:** Dumitru Ana-Maria (1112), Tomici Bogdan (1088), Novac Naomi (820), Ivanus Rares (659,)Nicolae Maria (360), Diaconescu Mădălina (307), Chileban Dragoş (240), Teicu Dusan (198); **Lic. Bozovici:** Clipa Andreea (3754), Anton Iulia Andreea (3590), Ignea Alina (2896), Marin George (2789), Mihoc Cristian (2754), Oniga Nicoleta (2686), Boldea Patricia (1641), Gherasim Marius (1277), Borchescu Ionică (280), Stanec Timeea Maria (80); **Lic. Bănățean O. Roşu:** Feil Nadia (1850), Schelean Alexandra (1340); **Lic. Hercules:** Bolbotină Flavia (1248), Bolbotină Iulia (1048), Țimbota

Alexandru Valentin (95); **Lic. Tehnic Mehadia:** Dumbravă Alexandru (1138); **Lic.Ped. Caransebeş:** Ostoea Maria (1010), Hotima Narcis (407), Scalcău Stănoia (160)**.**

Clasa a V-a

Şc. gen.2 Reşiţa: Ciobanu Elena (2015), Milencovici Radoliub (1695), Roescu Codruța (1291), Rotariu Răzvan (986), Racoceanu Rareş (840), Cicortaş Raul (656), Paulescu Patrik (313), Dumitru Maria (280), Szazi Timeea (260), Secăşan David (210), Pirvu Cristina (159), Istvancek Andreea (150); **Sc. gen.6 Reşiţa:** Gremene Alina (50) **Şc.gen.9 Reşiţa:** Voinea Nicoleta (1466), Negrea Alexandra (1271**),** Davidescu Olivia (1202), Păvălan Patricia (140); **Sc. gen.8 Reşița:** Coandă Amelia (1343), Purdea Mădălina (314), **Col. Naț. Traian Lalescu Reşița:** Pădurean Daniel (2393), Kovacs Iulia (778), Borca Giulia (121), Baciu Adeline Ştefania (90); **Lic. Bănățean Oțelu Roşu:** Angheloni Denisa (2023), Meilă Denis (1017), Tunea Alessandra (563), Baderca Flavius (528), Draghici Mihail (328), Groza Adrian (290), Jantu Lucian (97),; **Lic. Hercules Băile Herculane:** Cîrdei Bogdan (1478), Staicu Ariana (1431), Petru Egon (958), Grozăvescu Andreea (814), Pervulescu Răzvan (330), Cionca Cosmina (602), Bohnsack Alex (520), Vladică Alexandra (509), Onica Razvan (210), Blidariu Mihai (208), Daescu Valentina (100); **Scoala Romul Ladea Oravița:** Balmez Cristina (1180), Mureşan Eliza (820), Marocico Denis (430); **Lic. Dragalina Oravita**: Lazarov Andrei (908); **Lic. E. Murgu Bozovici:** Albu Iosefin Lorena (340), Albu Oana Iulia (310), Băciță Cristian (310), Stanec Timeea Maria (299), Musoiu Bianca (185), Ruva Patricia (179), Romanu Iliuta (161), Pascariu Anda (120), Kovaci Sabrina (110), Pîşlea Ionuț (70), Ruva Oana (46); **Lic. Ped. Caransebeş:** Ghimboaşă Petronela (1336), Iacob Rareş (1242), Huian Cosmina (789), Dogaru Raul (363), Bogdan Alexandra (298), Boncalo Sebastian (180), Bona Alin (70); **Lic. Tehnologic Decebal C-bes:** Coman Catalin (471), Sulea Serban (463), Sulea DRAGOS Ioan (456); **Lic. C.D. Loga Cransebeş:** Hotima Narcis (250); **Şc. Bucova:** Răduță Silviu (200); **Şc. Băuțar:** Guşiță Cristina (448); **Lic. Moldova Noua:** Gruescu Alexandra (130), Dragomir Victor (120), Mareş Anița (90); **Şc. Berzeasca:** Cerni Cristina (120), Lupulovici Larisa (120), Pătraşcu Roxana(120), Crețа Florentina (110), Udului Iasmina (110), Oprea Roxana (100), Lacatus Mihaela (90); **Şc Mehadia:** Moga Raluca (130), Hanc Darius (110), Munteanu Vlad (80), Sasu Alexandra (80), Moldovan Georgiana (60), Bârză Ana Maria (50); **Sc. Rusca Teregova:** Davidescu Alina Simona (72); Milu Cristina (49); **Sc. Vîrciorova:** Ştirban George (50); **Şcoala Traian Craiova:** Balaci Andrei (170).

Clasa a VI-a

Şc. gen.2 Reşiţa: Potocean Teodora Aura (2342), Istvancsek Andreas (70); **Şc. gen. 6 Reşiţa:** Ochialbi Andrada (180), Cremene Alina (140); **Şc. gen. 8 Reşiţa:** Goian Tudor (603**),** Streng Flavius (473), Surugiu Dragoş (359), Ţeperde Darius (294), Cenda Sabina (270), Paidola Flavius (215), Teperdel Darius **(160),Şc. gen. 9 Reşiţa:** Jumanca Patricia (1081), Filipescu Raul (566), Păniţa Nadine (260); **Col. Naţ. Traian. Lalescu Reşiţa:** Bălănoiu Ana-Maria (722) Apati Richard Ştefan (651), Smeu Andra (194); **Liceul Daiconovici Tietz Reşiţa:** Cocoroiu Vanda (440); **Şc. R. Ladea Oraviţa:** Preda Damir (608), Muresan Eliza (247), Popa Gordana (125), Dumitraşcu Bogdan (111), Stoica Cezar (35); **Lic. Hercules:** Bolbotină Gabriel (1511), Dancău Maria Ileana (1413), Nicoară Rebeca (1045), Ciobanu Antonia (898), Stoican Anastasia (683), Negoiţescu Nicoleta (610), Grigorie Simona (330); **Lic. Bănăţean Oţelu Roşu:** Voiţ Iulia (1218), Butoi Drăghici Alina (1076), Ursu Raluca (785), Buţă Jana Adina (737), Popescu Robert (690), Munteanu Andra (663), Honciuc Raul (460), Oltean Antonia Carmen (190), Stanciu Cosmina (170), Mezaroş Rebeca (150), Săvescu Fabian (87), Gander Patricia (60), Gutan Andrei (34); **Şc. nr. 3 Oţelu Roşu:** Şulea Mariela (465), Văran Anamaria (270), Vaszi Alexandru (245), Vodă Denisa (206), Tamas Cristina (169), Savescu Andrei (120), Petculescu Iulia (118), Olah Andrada (80); **Lic. Traian Doda Caransebes:** Craciun Daniela (812), Dumitru Sorin (275), Dumitru Sorina (114); **Lic. Pedagogic Caransebeş:** Ţuican Alexandu (299), Refchi Ionut (80), Hotima Damaris (71); **Lic. E. Murgu Bozovici:** Pascariu Anda (614), Ruva Patricia Madalina (233), Pervu Cosmina (163), Văluşescu Andrei (137), Pirtea Ionuţ (100), Rîncu Daiana (100) Stanciu Vlad (50); **Lic. Mehadia:** Ardeleanu Adelin (310), Croitoru Ionut (296); **Şc. Armeniş:** Ghinescu Lucian (73); **Şc. Rusca Teregova:** Humita Ionut (67), Humita Ionela (43), Oprisan Madalina Maria (20), Banda Alin (20), Milu Andrei Marius (15); **Şc. Berzeasca:** Drăgan Ion Gabriel (43); **Şc. Băuţar:** Codea Anna Ruanna (38).

Clasa a VII-a

Şc. nr.2 Reşiţa: Milencovici Merima Nicole (1102), Nicola Elena Beatrice (323), Turtunea Oana (170); **Sc. gen.9 Reşiţa:** Zaharia Flavia Cristiana (1112), Gherasim Daniel (550), Imbrescu Raluca (410), Remo Denis (229), Călina Antonia (30); **Şc. Gen. nr.8 Reşiţa:** Cipu Draghici (368), Tiutiu Mădălin (215), Copocean Carmen (100); **Şc. R. Ladea Oraviţa:** Murgu Teodora (190); **Liceul Hercules:** Popa Andrei (143); **Lic.E. Murugu Bozovici:** Pricope Tudor Vlad (270), Romanu Iosimela (253), Pervu Cosmina (180), Melecescu Florina (170), Băin Oriana (150), Strain Ana (130), Careba Geanina (100), Sandu Dan (100), Bihoi Simona (80), Murgu Rebeca (70), Bârsan Maria(60); **Lic. Mehadia:** Dumbravă Marius (1680), Pepsilă Matei (461); **Sc Berzeasca:** Lăcătuş Cristian (60), Robescu Nicoleta (60), Bitea Nadin (50), Drăgan Andra (50), Gavriloi Alexandra (50), Radovan Iasmina (50); **Lic Bănăţean Oţelu –Roşu:** Morariu Dorian (628), Stan Darius (313), Stefan Carina (160), Drăgan Lavinia (100), Draghici Maria (95), Rusu Claudia (91), Racolţa Annlee (86), Lala Roxana (70), Rosu Florina (40); **Şc. nr. 3 Oţelu Roşu:** Zărnescu Gabriela (565), Buzuriu Andreea (210), Olariu Nicoleta Diana (170), Piess Claudiu (129); **Lic. Ped. C.D. Loga:** Balint Alina (323), Cherşa Adrian Octavian (175), Ruja Daiane Maria (144), Dedar Anca (110), Lalo Tania (109), Bernenanţu Anamaria (107), Budu Monica (100), Vuc Adelina (87), Teregovan Nicoleta (85), Lungocea Amalia (67), Cernicica Andrei (60), Moroşanu Oana (60), Sidei Davida (60), Buliga Maria (52), Ştefănigă Răzvan (49), Mutaşcu Ioana (40), Boba Bianca (39), Lazăr Lavinia (34); **Liceul Ped. Caransebeş:** Tunsoiu Oana (200), Buzescu Mălina (110), Urechiatu Blanca (100); **Şc. Rusca Teregova:** Stepanescu Iuliana (99), Codospan Sonela (92), Blaj Luciana (42), Maritescu Ileana (40), Rodica Elisaveta (14); **Şc. Băuţar:** Codea Ermioni (36), Vînaga Andrada (27).

Clasa a VIII-a

Şc. Gen. nr.2 Reşiţa: Pinte Ana-Maria (170), Mihancea Miruna (40); **Sc. Nr. 8 Reşiţa:** Cipu Draghici Cosmin (223); **Sc. Gen. Nr. 9 Reşiţa:** Moroti Cristina (40); **Şc. R. Ladea Oraviţa:** Borzan Ionuţ (374), Cocar Lorena Melissa (110), Sutila Alexandra (36); **Liceul Dragalina:** Jumanca Larisa (70); **Lic. Eftimie Murgu Bozovici:** Melcescu Florina (710), Băin

Oriana (580), Voda Ana Maria (190), Murgu Rebeca (100), Cherescu Casian (90), Marin Cosmina (90), Novac Georgiana (90), Maresescu Miruna (80), Fesu Larisa (60); **Lic. Bănățean Oțelu Roşu:** Firanda Denysa (1793), Suciu Alexandra (1339), Epuraş Georgian (998), Rus David Andrei (868), Hrenyak Alexia (740), Cioarcă Adnana (410), Graszl Bianca (340), Janțu Marin Petre (290), Boştină Dorian (150), Săvescu Ovidiu (112), Pănescu Sergiu (90), Mateuț Cristian (40), Mihuț Casiana (40); **Lic. Ped. Caransebeş:** Ciobanu Iulia (1217), Ardelean Andra (90), Jura Victor (294), Miculescu Adrian (36); **Lic T.Doda Caransebeş:** Ionescu Roberto (240,5); **Şc. Rusca Teregova:** Humita Dana (93), Stepanescu Larisa (88), Vingon Irina (58), Andrei Petru (53), Codospan Alina (42); **Şc. Berzeasca:** Mogoşan Sara (50), Radovan Iasmina (50), Robescu Irina (50), Stoian Marius (50).

Clasa a IX-a

Col. Naț. Traian Lalescu Reşița: Ciobanu Anca (1170), Rus Daniel (809), Neațu Monica (600), Gaita Nadine (20); **Lic. Dragalina Oravita**: Balmez Andrada (845); Murgu Teodora (293); Ciobanu Vlad (64); **Lic. Traian Doda:** Szatmari Larisa (1251), Stoicănescu Petru (444), Nedelcu Loredana (107), Ratiu Roxana (60), Văran Alexandra (50); **Lic. Bănățean Oțelu Roşu:** Toader Răzvan (478), Trifu Teodora (397), Simescu Larisa (315), Erdei Dorian (191), Honciuc Laura (150), Guşiță Bianca (107), Cerna Miruna (70), Drăgoi Sergiu (52), Micşoni Armina (34); **Lic Hercules B. Herculane:** Stanciu Ana Maria (326), Stanciu Ana (296), Cîrdei Alex (285), Moagă Alexandru (236), Popa Andrei (216), Urdes Florin (176), Urzică Ionuț Sorin (0); **Lic. E. Murgu Bozovici:** Marin Mihaela Cosmina (190), Romînu Denisa (160); **Şc. Rusca Teregova:** Blaj Elisabeta (37), Banda Ioan (15).

Clasa a X-a

Col. Naț. Traian Lalescu Reşița: Ciulu Miruna (761), Avram Maria (10), Bercean Bogdan Alexandru (10), Peptan Andrei (10), Şandru Bogdan (10), Feraru Carla Raluca (8); **Lic.Gen. Dragalina Oravița:** Pîrvu Ancuța Iulia (617);
Grup Şcolar Ind. Moldova Nouă: Damian Melisa Dana (417), Lupu Denisa (223), Rujici Marina (158), Mereu Mădălina (137); **Lic. Ped. CD Loga Caransebeş:** Dinulică Petru Augustin (1200), Dinulică Ioan

Septimiu (760), Nica Hermina (90), Bogdan Roxana (70), Afilipoaie Ana Gabriela (50); **Lic. Traian Doda:** Petculescu Florin Cristian (276), Voicu Vlad (150), Trica Ovidiu Andrei (130), Petculescu Florin (80), Toma Alexandru (50); **Lic. Bănățean Oțelu – Roşu:** Ştefãnescu Nicolae Andrei (1256), Rosu Ionut (50), Manea Florina (47), Barbu Daniel (43), Sîrbu Petre (43), Bistrean Andra (20), Bunei Silvana (20).

Clasa a XI-a

Lic. E. Murgu Bozovici: Pîrciu Viorel Damaschin (67); **Lic Hercules B. Herculane:** Timaru Sorin (20); **Lic T. Doda Caransebeş:** Ban Ioana (358), Pop Silvia (238), Iova Miruna (30), Trica Lazăr Ioan (30), Valuşescu Andreea (30), Bogdan Sorin (28), Călțun Adrian (28), Serghie Alexandru (28); **Lic. Ped. C.D. Loga:** Stanciu Georgiana (70); **Lic. Mehadia:** Vlaicu Maria Elisabeta (545), Ionescu Alexandra (315); **Lic. Bănățean Oțelu Roşu:** Adam Alina (946), Radu Ionela (756), Băilă Diana (725), Preda Gabriela Dagmar (456), Pop Cristian (315), Cucuruz Marilena (101), Ciama Mirela (90), Samfireag Anița (90), Cerbulescu Ribana (87), Jurma Cristina Maria (43).

Clasa a XII-a

Lic. Gen. Dragalina Oravița: Dinu Andrei Mario (76); **Lic. E. Murgu Bozovici:** Surulescu Ilie (127); **Grup Moldova Nouă:** Iorgovan Georgina (150); **Lic. Bănățean Oțelu Roşu:** Krokoş Lorena (160), Buzuriu Lucian (120); **Liceul G.Moisil Timişoara:** Stoicănescu Gelu (560).