Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Caraş-Severin

REVISTA DE MATEMATICĂ

A ELEVILOR ŞI PROFESORILOR

DIN JUDEŢUL CARAŞ-SEVERIN

Nr. 36, An XII – 2011

Acest număr al revistei are avizul Comisiei pentru publicaţii a SSMR

Editura „Neutrino"
Reşiţa, 2011

Titlul: Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din județul Caraş-Severin
I.S.S.N. 1584-9481

Mobil: 0741017700
www.neutrino.ro
E-mail: contact@neutrino.ro

CUPRINS

● Gânduri şi replici (Grigore Mosil)....................................... pag. 4

● Chestiuni metodice, note matematice(şi nu numai)

■ Matematica...altfel (Ioan Dăncilă)................................ pag. 5

■ Povestea unui duel (Ioan Dăncilă)............................... pag. 6

■ Asupra unei relații metrice într-un patrulater (Nicolae Stăniloiu) .... pag. 8

■ O proprietate în patrulaterul circumscriptibil (Petrişor Neagoe)............................. pag. 13

■ Concursul Interjudețean Traian Lalescu, ediția a XXV a, Reşița (Lucian Dragomir)...................... pag. 17

■ Matematică pe plaiuri bihorene, ONM 2011 (Silviu Lazăr).................................. pag. 18

■ Cronică ieşeană (Mihai Lazarov) .... pag. 20

● Probleme rezolvate din RMCS nr. 33 (Lucian Dragomir).... pag. 23

● Probleme propuse ………………………………………........ pag. 49

● Probleme alese .... pag. 63

● Rubrica rezolvitorilor ………………………………… pag. 64

Gânduri şi replici

Grigore Moisil

♦ – Îl cunosc bine pe cutare, zice cineva, apoi Moisil adaugă: *E bine să cunoşti* ***bine*** *pe cineva. Dacă-l cunoşti foarte bine, e rău.*

♦ Profesorul Moisil, la 65 de ani, după ce şi-a scrântit piciorul: *Ştiam că la vârsta mea te scrânteşti la cap, nu la picior.*

♦ La şedința de Consiliu profesoral în vederea titularizarii, profesorul Ştefan Procopiu a votat contra numirii lui Moisil, "candidatul fiind prea tânăr pentru a ocupa postul de profesor". *E un defect de care mă corectez în fiecare zi,* a replicat Moisil.

♦ În timpul unui curs, profesorul Moisil începe să caute printre hârtiile pe care le avea pe masă. Nu găseşte însemnările de care are nevoie, se opreşte şi spune: *Lăutarii cântă dupa ureche, muzicanții, după note. Eu mi-am uitat notele acasă.*

♦ Cineva l-a întrebat: "Credeți că e potrivit ca un profesor să facă glume la cursuri?". Profesorul Moisil a răspuns: *Ştiința nu e tristă, decât pentru unii.*

♦ *Sunt unii oameni care cred că matematica trebuie făcută între cutare şi cutare oră. Nu e adevărat. Matematica nu se face la ore fixe. Matematica se face când îți vine o idee. Noaptea sau dimineața, când te scoli, când te speli, gândeşti. Dacă nu te speli, gândeşti când nu te speli…*

♦ *Noi, matematicienii, facem activitate fără planuri, nu de alta, dar ca să ne deosebim de alții, care fac planuri fără activitate.*

♦ *Într-adevăr, dacă este ceva cu care trebuie să rămână absolventul unor cursuri liceale, acel ceva este învățatul de a gândi just.*

Matematica...altfel (partea a VI-a)

Ioan Dăncilă, Bucureşti

Eka, dva, tri, cătar, panca, şas...

Şas o fi , oare, prescurtarea, în sanscrită, a indicației: să treci la primul deget de la cealaltă mână ? Oricum, strămoşii noştri, romanii, au respectat indicația şi ... după ce au terminat cu numerotarea degetelor unei mâini (V), au adăugat un deget, obținând (VI).

Am ajuns astfel la numărul 6, considerat numărul creației (filozoful Philon din Alexandria sugera că Dumnezeu a creat lumea în şase zile deoarece 6 era un număr perfect). Adjectivul *perfect* era asociat numerelor care sunt egale cu suma tuturor divizorilor lor naturali, precum $6=1+2+3$. Numărul 6 este şi produsul primului număr feminin, 2, cu primul număr masculin, 3, fiind astfel considerat un număr al echilibrului şi armoniei, al sănătății şi norocului. Numărul 6 este triunghiular, este un factorial $(3!=6)$, este hexagonal (de forma $n(2n-1)$), apare în triunghiul lui Pascal... Legătura lui 6 cu geometria poate fi evidențiată, de exemplu, prin următoarele : hexagonul regulat, alături de triunghiul echilateral şi pătratul, este forma plană cu care se poate acoperi perfect spațiul din jurul unui punct ; hexaedrul regulat (cubul) este unul dintre cele cinci corpuri platonice (cel mai simplu dintre acestea este tetraedrul, care are 6 muchii).

Arta hindusă, arta chineză, arhitectura clasică, după cum arăta Luc Benoist, cuprind *şase* reguli ce reflectă creația divină.

Să remarcăm prezența pregnantă a numărului şi în natură :

● insectele au, în general, 6 picioare.

● multe flori, în general cele care ne încântă primăvara (anemonele de pădure, lalelele, narcisele, crinii albi) care au şase petale.

● cristalizarea fulgilor de nea se face *numai* în formă hexagonală.

● al şaselea element din tabloul lui Mendeleev este carbonul, element fundamental în apariția vieții pe Pământ.

● există 7 sisteme cristalografice, unul dintre acestea fiind hexagonal (astfel cristalizează minerale ca şi smaraldul, berilul, grafitul, apatitul).

Povestea unui duel

Ioan Dăncilă, Bucureşti

Anul 1535. Bologna. Lumea Renaşterii aprecia acum şi altfel de dispute cavalereşti. Dueluri ale minţii. Matematicieni şi alţi învăţaţi erau implicaţi în dezbateri şi dispute publice, care atrăgeau o mulţime de oamenei : oficiali, universitari, judecători, studenţi, spectatori oarecare ; majoritatea se amuzau şi făceau pariuri. Şi deoarece algebra (arta *chestiunii*) înflorea în peninsula italică, un duel algebric între Antonio Maria del Fiore şi Niccolo Fontana, zis Tartaglia, urma să aibă loc. Data fixată : 12 februarie. Fiecare dintre concurenţi a depus la notar (!) o listă cu 30 de probleme, împreună cu o sumă de bani, iar cel care în 40 de zile avea să rezolve cele mai multe probleme urma să fie declarat învingător şi să primească întreaga sumă de bani.

Toate problemele propuse de Maria del Fiore implicau ecuaţii de forma $ax^3 + bx = c$ şi, spre stupoarea propunătorului, Tartaglia le-a rezolvat pe toate în câteva zile.

1. *Doi oameni câştigă împreună 100 de ducaţi, câştigul primului fiind rădăcina cubică a sumei câştigate de al doilea. Cât câştigă fiecare ?*
2. *Un cămătar dă împrumut o sumă de bani cu condiţia ca la sfârşitul anului dobânda primită să fie rădăcina cubică a sumei împrumutate. La sfârşitul anului primeşte 800 de ducaţi (suma împrumutată + dobânda). Care a fost suma împrumutată ?*

Acestea sunt două dintre problemele propuse de del Fiore. La rezolvarea lor, Tartaglia a folosit o metodă generală, descoperită de el cu doar câteva săptămâni înainte de concurs. Formulele descoperite de el erau atât de complicate încât, pentru a nu le uita, le-a descris în câteva versuri, numai de el ştiute : « Când cubul şi câteva chestii sunt egale/ Cu un anumit număr dat/ Tu caută alte două numere // A căror diferenţă este egală cu numărul dat/ şi găseşte-le pe acelea a căror produs/ Este egal cu cubul treimii numărului chestiilor.// Atunci chestia de la început/ Este diferenţa rădăcinilor cubice/ A celor două numere tocmai găsite. »

La vremea aceea, *chestie* (cuvânt provenit din arăbescul *cheie* via latinescul *casa*) denumea *necunoscuta* (unei ecuaţii). « Acest lucru pe care îl caut voi începe prin a-l numi. Dar cum nu-l cunosc, deoarece tocmai îl caut, îl voi numi pur şi simplu *chestia* » - explica Mohamed al-Khwārizmī , autorul uneia dintre cele mai celebre cărţi de matematică din istoria lumii, scrisă în jurul anului 830 : *al-Jabr w'al Muqâbala*. (din *al-Jabr* provine cuvântul *algebră !*).

Să vedem însă şi două probleme propuse de Tartaglia :

3. *Dacă la numărul ce reprezintă suprafața unui cub aduni numărul ce reprezintă dublul volumului cubului, obții 10. Care-i numărul ce reprezintă lungimea muchiei cubului ?*

4. *Un butoi este plin cu vin nebotezat. În fiecare zi se iau din butoi două găleți de vin şi se pun în locul lui două găleți de apă. După şase zile conținutul butoiului este jumătate vin, jumătate apă. Ce capacitate are butoiul ?*

După 40 de zile, del Fiore nu rezolvase nicio problemă din cele propuse de adversarul său. Declarat învingător, Tartaglia nu a vrut să accepte nimic din partea unui jucător atât de slab. Se cuvine să facem o remarcă : pe cei doi matematicieni nu i-a interesat plauzibilitatea, aplicabilitatea sau utilitatea problemelor. Pe atunci, matematica era cultivată, de cele mai multe ori, doar pentru propria ei plăcere.

Imaginează-ți că cei doi adversari te-au provocat pe tine, cititorule, cu cele patru probleme. Fii cavaler ! Ridică mănuşa ! Şi, peste secole, găseşte (şi tu) soluțiile !

Bibliografie :

(1) Denis Guedj – *Le thèorème du perroquet*, Edition du Seuil, 1998
(2) Mario Livio - *Ecuația care nu a putut fi rezolvată*, Editura Humanitas, 2007

Asupra unei relații metrice într-un patrulater

Nicolae Stăniloiu

Rezumat: *În prezenta notă matematică voi prezenta o aplicație a relației lui Stewart prin care se evaluează lungimea segmentului determinat de două puncte de pe diagonalele unui patrulater oarecare, fixate prin intermediul raportului determinat de aceste puncte pe diagonalele respective, după care voi prezenta câteva particularizări ale acestei relații.*

Teorema 1.

Dacă *ABC* este un triunghi iar $M \in [BC]$ şi $\lambda \in [0,1]$ astfel încât $\frac{BM}{BC} = \lambda$, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM - AM^2 \cdot BC = BM \cdot MC \cdot BC$ **(Relația lui Stewart)**

b) $AM^2 = (1-\lambda)AB^2 + \lambda AC^2 - \lambda \cdot (1-\lambda) BC^2$.

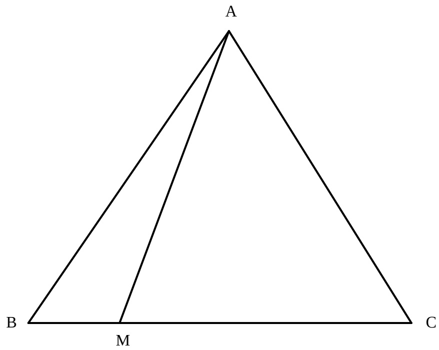


Fig 1

Demonstrația este banală şi are la bază observațiile: $\frac{MC}{BC} = 1 - \lambda$,

$BM \cdot MC = \lambda \cdot (1-\lambda) BC^2$.

Vom enunța în continuare o propoziție de evaluare a lungimii segmentului care uneşte două puncte de pe diagonalele unui patrulater convex în funcție de laturile şi diagonalele patrulaterului dar şi în funcție de rapoartele determinate de aceste puncte pe diagonalele respective.

Propoziția 1: Dacă *ABCD* este un patrulater convex, $M \in [AC]$, $N \in [BD]$ şi $\alpha, \beta \in [0,1]$ astfel încât $\alpha = \frac{AM}{AC}$ şi $\beta = \frac{BN}{BD}$, atunci:

$$\begin{aligned} MN^2 &= (1-\alpha)(1-\beta)AB^2 + \alpha(1-\beta)BC^2 + \alpha\beta CD^2 + \\ &+ (1-\alpha)\beta DA^2 - \alpha(1-\alpha)AC^2 - \beta(1-\beta)BD^2 \end{aligned} \qquad (*)$$

Demonstrație: (vezi Fig. 2)
Vom evalua, bazându-ne pe Teorema 1, mai întâi segmentele BM şi DM

Vom avea: $BM^2 = (1-\alpha)AB^2 + \alpha BC^2 - \alpha(1-\alpha)AC^2$ (1)

$$DM^2 = (1-\alpha)AD^2 + \alpha DC^2 - \alpha(1-\alpha)AC^2 \qquad (2)$$

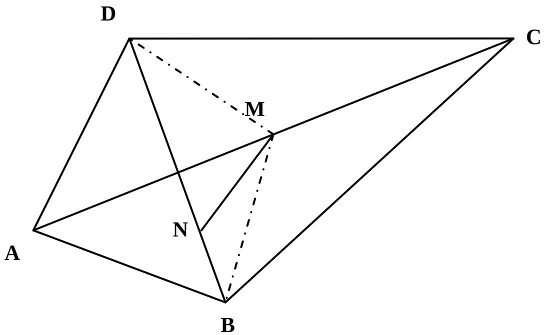


Fig 2.

$MN^2 = (1-\beta)BM^2 + \beta DM^2 - \beta(1-\beta)BD^2$ şi, folosind acum (1) şi (2), se va obține relația din enunț.
O primă consecință foarte importantă a relației (*) este următoarea:

Propoziția 2. Dacă $\alpha, \beta \in [0,1]$ şi *ABCD* este un patrulater convex atunci

$$\begin{aligned} &(1-\alpha)(1-\beta)AB^2 + \alpha(1-\beta)BC^2 + \alpha\beta CD^2 + (1-\alpha)\beta DA^2 \geq \\ &\geq \alpha(1-\alpha)AC^2 + \beta(1-\beta)BD^2 \end{aligned} \qquad \textbf{(i)}$$

Demonstrație: Evidentă, deoarece $MN^2 \geq 0$

Consecințele relației (**) sunt multiple tocmai datorită implicării în enunțul său a doi parametri arbitrari care pot fi particularizați într-o multitudine de moduri.

Exemplu: Dacă înlocuim $\alpha \to 1-\alpha$ se obține:

$$\alpha\left(1-\beta\right)AB^2+\left(1-\alpha\right)\left(1-\beta\right)BC^2+\left(1-\alpha\right)\beta CD^2+\alpha\beta DA^2 \geq \geq \alpha\left(1-\alpha\right)AC^2+\beta\left(1-\beta\right)BD^2 \quad \textbf{(ii)}$$

Particularizând convenabil mai putem obține:

$$\alpha\beta AB^2+\left(1-\alpha\right)\beta BC^2+\left(1-\alpha\right)\left(1-\beta\right)CD^2+\alpha\left(1-\beta\right)DA^2 \geq \geq \alpha\left(1-\alpha\right)AC^2+\beta\left(1-\beta\right)BD^2 \quad \textbf{(iii)}$$

sau

$$\left(1-\alpha\right)\beta AB^2+\alpha\beta BC^2+\alpha\left(1-\beta\right)CD^2+\left(1-\alpha\right)\left(1-\beta\right)DA^2 \geq \geq \alpha\left(1-\alpha\right)AC^2+\beta\left(1-\beta\right)BD^2 \quad \textbf{(iv)}$$

Propoziția 2 poate fi reformulată şi astfel:

Propoziția 3 Dacă $\alpha,\beta \in \left[0,1\right]$ şi *ABCD* este un patrulater convex, atunci există $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4 \in \mathbf{R}_+$, cu $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1$, asfel încât:

$$\lambda_1 AB^2+\lambda_2 BC^2+\lambda_3 DA^2+\lambda_4 {}^2 \geq \alpha\left(1-\alpha\right){}^2+\beta\left(1-\beta\right){}^2$$

Dacă în relația **(i)** se ia $\alpha=\beta$ se obține:

Propoziția 4. Dacă $\alpha \in \left[0,1\right]$ şi *ABCD* este un patrulater convex atunci:

$$AC^2+BD^2-BC^2-AD^2 \leq \frac{1-\alpha}{\alpha}AB^2+\frac{\alpha}{1-\alpha}CD^2 \quad \textbf{(v)}$$

Propoziția 4 o putem reformula astfel:

Propoziția 5. Dacă *ABCD* este un patrulater convex atunci $\forall m,n \in \mathbb{R}_+$ astfel încât $m \cdot n=1$ avem

$$AC^2+BD^2-BC^2-AD^2 \leq m \cdot AB^2+n \cdot CD^2$$

Alte particularizări deosebit de interesante în relația **(i)** cât şi în relațiile derivate din aceasta ar putea fi următoarele:

1) $\alpha=\dfrac{AB}{AB+CD},\beta=\dfrac{BC}{BC+AD}$

2) $\alpha=\sin^2 A,\beta=\sin^2 C$

3) $\alpha=\cos^2 A,\beta=\cos^2 C$

Cu particularizarea din 1), dacă notăm $S_1 = AB + CD$ şi $S_2 = BC + DA$, prin efectuarea calculelor şi grupând convenabil termenii putem obţine relaţia:

$$AB \cdot CD\left(AD \cdot AB + BC \cdot CD\right) + BC \cdot AD\left(AB \cdot BC + CD \cdot DA\right) \geq$$
$$\geq \frac{S_2}{S_1} AB \cdot CD \cdot AC^2 + \frac{S_1}{S_2} BC \cdot AD \cdot BD^2 \qquad \textbf{(vi)}$$

relaţie care capătă forme mai simple în patrulatere particulare. De exemplu, în patrulaterul în care bisectoarele a două unghiuri opuse sunt concurente cu diagonala determinată de celelalte două vârfuri se ştie că $AB \cdot CD = BC \cdot AD$ şi va rezulta:

$$AD \cdot AB + BC \cdot CD + AB \cdot BC + CD \cdot DA \geq \frac{S_2}{S_1} AC^2 + \frac{S_1}{S_2} BD^2 . \qquad \textbf{(vii)}$$

Dacă se notează cu S_{XY} suma produselor laturilor având vârful *X* şi respectiv *Y* în comun atunci relaţia (vi) se mai poate scrie:

$$AB \cdot CD \cdot S_{AC} + BC \cdot AD \cdot S_{BD} \geq$$
$$\geq \frac{S_2}{S_1} AB \cdot CD \cdot AC^2 + \frac{S_1}{S_2} \cdot BC \cdot AD \cdot BD^2 \qquad \textbf{(viii)}$$

iar relaţia (vii) se mai scrie:

$$S_{AC} + S_{BD} \geq \frac{S_2}{S_1} AC^2 + \frac{S_1}{S_2} BD^2 \qquad \textbf{(ix)}$$

Dacă considerăm relaţia (viii) în patrulaterul circumscriptibil atunci $S_1 = S_2$ şi va rezulta că

$$AB \cdot CD\left(S_{AC} - AC^2 \right) + BC \cdot AD\left(S_{BD} - BD^2 \right) \geq 0 \qquad \textbf{(x)}$$

Cu particularizarea din 2) se obţine:

$$\cos^2 A \cos^2 C \cdot AB^2 + \sin^2 A \cos^2 C \cdot BC^2 +$$
$$+ \sin^2 A \sin^2 C \cdot CD^2 + \cos^2 A \sin^2 C \cdot DA^2 \geq \qquad \textbf{(xi)}$$
$$\geq \sin^2 A \cos^2 A \cdot AC^2 + \sin^2 C \cos^2 C \cdot BD^2$$

Dacă considerăm relaţia anterioară în patrulaterul inscriptibil atunci $\sin A = \sin C$ şi $\cos A = -\cos C$ şi va rezulta

$$ctg^2 A \cdot AB^2 + tg^2 A \cdot CD^2 \geq AC^2 + BD^2 - BC^2 - DA^2 \qquad \textbf{(xii)}$$

Cu particularizarea din 3) evident se va obţine:

$$\sin^2 A\sin^2 C\cdot AB^2+\cos^2 A\sin^2 C\cdot BC^2+\cos^2 A\cos^2 C\cdot CD^2+$$
$$+\sin^2 A\cos^2 C\cdot DA^2\geq\sin^2 A\cos^2 A\cdot AC^2+\sin^2 C\cos^2 C\cdot BD^2 \quad \textbf{(xiii)}$$

Adunând **(xi)** cu **(xiii)** se obține:

$$\left(\sin^2 A\sin^2 C+\cos^2 A\cos^2 C\right)\left(AB^2+CD^2\right)+$$
$$+\left(\sin^2 A\cos^2 C+\cos^2 A\sin^2 C\right)\left(BC^2+AD^2\right)\geq$$
$$\geq 2\sin^2 A\cos^2 A\cdot AC^2+2\sin^2 C\cos^2 C\cdot BD^2$$

sau:

$$\left(\cos^2(A+C)+\cos^2(A-C)\right)\left(AB^2+CD^2\right)+$$
$$+\left(\sin^2(A+C)+\sin^2(A-C)\right)\left(BC^2+AD^2\right)\geq \quad \textbf{(xiv)}$$
$$\geq\sin^2 2A\cdot AC^2+\sin^2 2C\cdot BD^2$$

Făcând aceleaşi particularizări însă în relația **(ii)** evident se va obține:

$$\left(\sin^2(A+C)+\sin^2(A-C)\right)\left(AB^2+CD^2\right)+$$
$$+\left(\cos^2(A+C)+\cos^2(A-C)\right)\left(BC^2+AD^2\right)\geq \quad \textbf{(xv)}$$
$$\geq\sin^2 2A\cdot AC^2+\sin^2 2C\cdot BD^2$$

Dacă particularizăm relația **(xiv)** considerând-o într-un patrulater cu $\sphericalangle A\equiv\sphericalangle C$ atunci:

$$\left(1+\cos^2(2A)\right)\left(AB^2+CD^2\right)\geq\sin^2 2A\left(AC^2+BD^2-BC^2-AD^2\right)$$

de unde se obține că într-un astfel de patrulater avem:

$$\cos^2 2A\geq\frac{AC^2+BD^2-AB^2-BC^2-CD^2-DA^2}{AC^2+BD^2+AB^2-BC^2+CD^2-DA^2} \quad \textbf{(xvi)}$$

Bibliografie:

(1) Vasile Pop – Geometrie pentru gimnaziu, liceu şi concursuri, Editura Mediamira,Cluj – Napoca, 2007

(2) Virgil Nicula – Geometrie plană , Editura Gil, Zalău, 2002

(3) Mihai Megan, ş.a – Capitole speciale de matematică pentru performanță în liceu – Editura Mirton, Timişoara, 2007

Profesor, Şcoala Tirol

O proprietate în patrulaterul circumscriptibil

Petrişor Neagoe

Rezumat: *În data de 4.08.2009 am propus pe site-ul Art of problem solving problema de mai jos; deoarece am primit mai multe soluții, toate însă folosind noțiuni de geometrie avansată, cred că poate fi utilă prezentarea unei rezolvări elementare.*

Fie $ABCD$ un patrulater circumscris unui cerc $\mathcal{C}$, V intersecția diagonalelor sale şi J centrul cercului înscris în triunghiul BCD. Dacă semidreapta $(JV$ intersectează cercul $\mathcal{C}$ în punctul K, atunci $(KV$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BKD$.

Pentru început, să demonstrăm două rezultate ajutătoare:

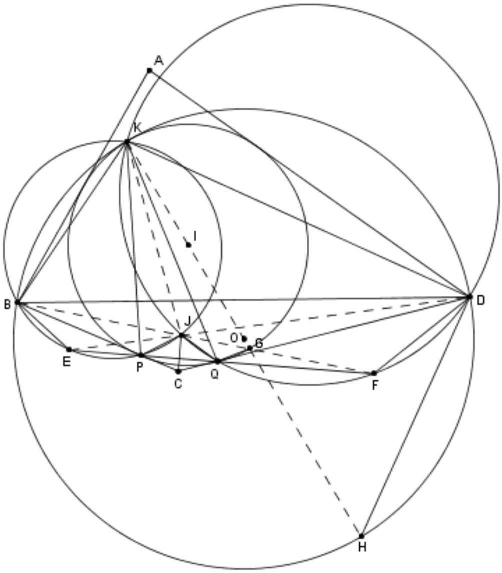
Lema 1. Fie $ABCD$ un patrulater circumscris cercului $\mathcal{C}$ şi J este centrul cercului înscris în triunghiul BCD. Dacă un cerc ce trece prin punctele B şi D este tangent cercului $\mathcal{C}$ în punctul K (punctele A şi K se află de aceeaşi parte a dreptei BD), atunci semidreapta $(KJ$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BKD$.

Demonstrație:
Fie I centrul cercului $\mathcal{C}$ şi $\Gamma(O)$ cercul ce trece prin punctele B, D şi este tangent cercului $\mathcal{C}$ în K. Evident, punctele K, I, O sunt coliniare. Laturile BC şi CD sunt tangente cercului $\mathcal{C}$ în punctele P, respectiv Q. Dreapta PQ intersectează a doua oară cercurile circumscrise triunghiurilor KBP şi KDQ în punctele E, respectiv F, iar dreapta KI intersectează a doua oară cercurile $\mathcal{C}$ şi Γ în punctele G, respectiv H. Deoarece patrulaterele $KBEP$, $KPQG$ sunt inscriptibile şi $[KG]$ este diametru al cercului $\mathcal{C}$ rezultă că

$$\sphericalangle KBE = \sphericalangle KPQ = 180^\circ - \sphericalangle KGQ = 180^\circ - \left(90^\circ - \sphericalangle QKG\right) = 90^\circ + \sphericalangle QKG.$$

Deoarece patrulaterul $KBHD$ este inscriptibil şi $[KH]$ este diametru al

cercului Γ rezultă că $\sphericalangle KBD = \sphericalangle KHD = 90^\circ - \sphericalangle DKH$. Deci
$\sphericalangle EBD = \sphericalangle KBE - \sphericalangle KBD = \left(90^\circ + \sphericalangle QKG\right) - \left(90^\circ - \sphericalangle DKH\right) =$
$= \sphericalangle QKG + \sphericalangle DKH = \sphericalangle QKD = 180^\circ - \sphericalangle QFD$.
Ultima egalitate a rezultat din faptul că patrulaterul $KQFD$ este inscriptibil .Astfel $\sphericalangle EBD + \sphericalangle EFD = 180^\circ$, deci patrulaterul $BEFD$ este inscriptibil. Fie J' al doilea punct de intersecție al dreptei BF cu cercul circumscris triunghiului KBP.



Deoarece dreapta BC este tangentă cercului $\mathcal{C}$ în punctul P şi patrulaterul
$KBPJ'$ este inscriptibil rezultă că $\sphericalangle QKJ' = \sphericalangle QKP - \sphericalangle J'KP = \sphericalangle CPQ -$
$- \sphericalangle J'BP = \sphericalangle CPF - \sphericalangle FBP = \sphericalangle PFB = \sphericalangle QFJ'$, deci $\sphericalangle QKJ' = \sphericalangle QFJ'$.
Prin urmare, patrulaterul $KFQJ'$ este inscriptibil, deci punctul J' aparține cercului circumscris triunghiului KDQ.
Astfel, punctul J' reprezintă cel de-al doilea punct de intersecție al cercurilor circumscrise triunghiurilor KBP şi KDQ.
Deoarece patrulaterul $KDQJ'$ este inscriptibil, dreapta CD este tangentă

cercului $\mathcal{C}$ în punctul Q şi, spre final, patrulaterul $KEPJ'$ este inscriptibil rezultă că

$\sphericalangle KJ'D = \sphericalangle KQD = \sphericalangle KPQ = 180^\circ - \sphericalangle KPE = 180^\circ - \sphericalangle KJ'E$, deci

$\sphericalangle KJ'D + \sphericalangle KJ'E = 180^\circ$. Aşadar, $J' \in DE$, deci $BF \cap DE = \{J'\}$.

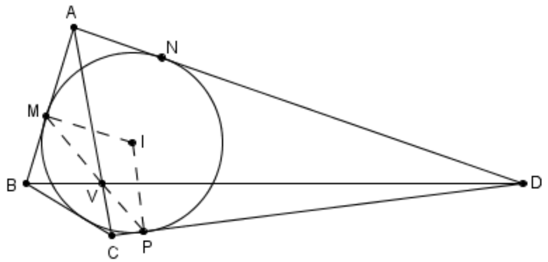
Deoarece patrulaterele $BEFD$ şi $BEPJ'$ sunt inscriptibile rezultă că $\sphericalangle FBD = \sphericalangle FED = \sphericalangle PEJ' = \sphericalangle PBJ' = \sphericalangle CBF$, deci $(BF$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle CBD$.Analog se demonstrează că $(DE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle CDB$, deci punctele J' şi J coincid.

Se demonstrează uşor că $\triangle CJP \equiv \triangle CJQ$, deci $\sphericalangle CPJ = \sphericalangle CQJ$. Astfel, folosind faptul că patrulaterele $KBPJ$ şi $KDQJ$ sunt inscriptibile, obținem că $\sphericalangle BKJ = \sphericalangle DKJ$, deci $(KJ$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BKD$.

Lema 2. Fie $ABCD$ un patrulater circumscris cercului $\mathcal{C}$ şi V intersecția diagonalelor sale. Dacă laturile AB şi AD sunt tangente cercului $\mathcal{C}$ în punctele M, respectiv N, atunci are loc relația

$$\frac{VB}{VD} = \frac{BM}{DN}.$$

Demonstrație:

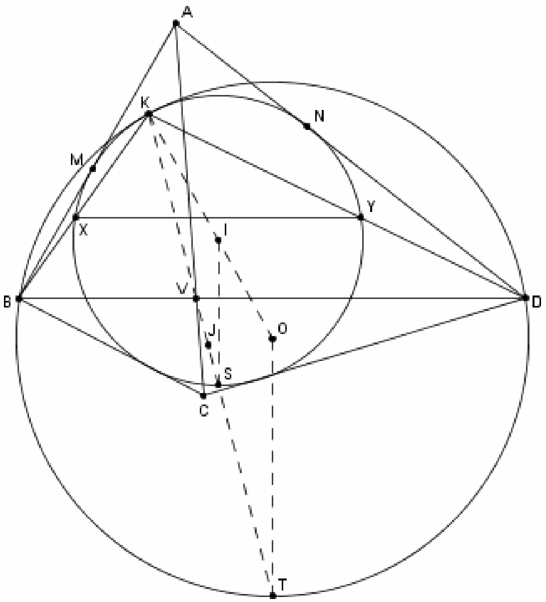


Fie P punctul de tangență al laturii CD cu cercul $\mathcal{C}$. Din teorema lui Newton avem că $V \in MP$.

Deoarece $\sphericalangle AMP = 90^\circ + \sphericalangle IMP = 90^\circ + \sphericalangle IPM = \sphericalangle DPM$ rezultă că $\sphericalangle BMV = 180^\circ - \sphericalangle DPV$, deci $\sin(\sphericalangle BMV) = \sin(\sphericalangle DPV)$. Astfel, aplicând teorema sinusurilor în triunghiurile BMV şi DPV obținem

$$\frac{VB}{BM}=\frac{\sin\left(\sphericalangle BMV\right)}{\sin\left(\sphericalangle BVM\right)}=\frac{\sin\left(\sphericalangle DPV\right)}{\sin\left(\sphericalangle DVP\right)}=\frac{VD}{DP}$$, deci $\frac{VB}{VD}=\frac{BM}{DP}$. În plus, ținând cont că $DP=DN$ rezultă că $\frac{VB}{VD}=\frac{BM}{DN}$.

Demonstrația problemei inițiale:



Fie I centrul cercului $\mathcal{C}$ şi $\Gamma\left(O\right)$ cercul ce trece prin punctele B, D şi este tangent cercului $\mathcal{C}$ în K. Evident, punctele K, I, O sunt coliniare. Dreapta KJ intersectează a doua oară cercurile $\mathcal{C}$ şi Γ în punctele S, respectiv T. Din problema 1 avem că semidreapta $\left(KJ\right.$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BKD$. Dreptele KB şi KD intersectează a doua oară cercul $\mathcal{C}$ în punctele X, respectiv Y. Cum $\sphericalangle ISK=\sphericalangle IKS$ şi $\sphericalangle OTK=\sphericalangle OKT$ rezultă că $\sphericalangle ISK=\sphericalangle OTK$, deci $IS \parallel OT$. Deoarece $\left(KS\right.$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle XKY$ rezultă că $IS\perp XY$ şi analog, deoarece $\left(KT\right.$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BKD$ rezultă că $OT\perp BD$.
Din $IS \parallel OT$, $IS\perp XY$ şi $OT\perp BD$ rezultă că $XY \parallel BD$. Astfel
$$\frac{BX}{DY}=\frac{BK}{DK}, \text{ deci } \frac{BX\cdot BK}{DY\cdot DK}=\left(\frac{BK}{DK}\right)^2.$$
Din puterea punctelor B şi D față de cercul $\mathcal{C}$ rezultă că $BM^2=BX\cdot BK$ şi $DN^2=DY\cdot DK$.

Din cele de mai sus $\Rightarrow \frac{BM^2}{DN^2} = \left(\frac{BK}{DK}\right)^2$, deci $\frac{BM}{DN} = \frac{BK}{DK}$. Cum, din problema 2, $\frac{VB}{VD} = \frac{BM}{DN}$ rezultă că $\frac{VB}{VD} = \frac{KB}{KD}$, deci semidreapta $(KV$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BKD$.

Profesor, Grup Şcolar „Mathias Hammer” Anina

Concursul Interjudețean Traian Lalescu
Reşița, 25-27 martie 2011

Lucian Dragomir

Cu mari eforturi, de diverse feluri şi genuri, județul nostru a organizat cea de-a XXV-a ediție a tradiționalului concurs, reunind, ca deobicei, cei mai buni elevi din județele Arad, Caraş – Severin, Hunedoara şi Timiş. Programul, subiectele şi rezultatele pot fi găsite, aşa cum v-ați obişnuit, la www.neutrino.ro. Nu putem să spunem multe despre organizare (când organizatorul este alt județ, o facem), trebuie însă subliniat totuşi că această ediție nu s-ar fi desfăşurat fără agitația pozitivă a multor cadre didactice, a unor părinți apropiați într-un fel sau altul de matematică... Pentru a nu supăra pe cineva, ne-am propus să nu dăm nume ; nu putem totuşi să ne abținem şi astfel ne facem o datorie de onoare şi suflet subliniind aportul decisiv, vital chiar, al Domnilor (profesori în primul rând) Adrian Doxan şi Marius Şandru (în ordine alfabetică).

Ne vom rezuma aici a felicita elevii din Caraş – Severin care au reuşit să fie printre cei mai buni ; evident, în aceeaşi măsură felicităm şi dascălii lor, acei puțini care mai luptă cu pasiune şi dăruire, dincolo de răsplata (!?) societății... deasemenea, un cuvânt de mulțumire părinților care înțeleg că au copii de excepție şi care le aduc astfel, în general, numai bucurii şi satisfacții ; de fapt mulțumiri tuturor celor care cred încă în puterea intelectului, a faptului că şcoala, educația, învățătura conduc la progres, la o viitoare bunăstare, indiferent de ce fel o fi ea.

Ca de obicei, pentru cei care azi sau ieri nu au câştigat : e extraordinar că sunteți printre cei buni, mâine veți fi poate mai buni, de voi depinde,vă luptați de fapt cu voi înşivă (de cele mai multe ori).

Aşadar, cei mai buni din 2011, în ziua de concurs (!) :

Clasa	Nume, prenume	Şcoala	Premiu
5	Freisz Patrick	Lic.Traian Lalescu Reşiţa	M
7	Ciobanu Anca	Şcoala Gen. nr.2 Reşiţa	I
7	Neaţu Monica	Şcoala Gen. nr.2 Reşiţa	M
7	Balmez Andrada	Şc. Romul Ladea Oraviţa	M
8	Ciulu Miruna	Şcoala Gen. nr. 6 Reşiţa	I
8	Dinulică Augustin	Lic.C.D.Loga Caransebeş	M
8	Dinulică Septimiu	Lic.C.D.Loga Caransebeş	M
8	Ştefănescu Andrei	Şcoala Gen.nr.1 Oţelu-Roşu	M
9	Lazăr Silviu	Lic. Traian Lalescu Reşiţa	M
9	Ţeudan Adina	Lic. Traian Lalescu Reşiţa	M
10	Krokoş Lorena	Liceul Bănăţean Oţelu Roşu	M
11	Semenescu Anca	Lic.C.D.Loga Caransebeş	M
12	Zanfir Cristian	Lic.Tr. Doda Caransebeş	M
12	Cococeanu Oana	Liceul Bănăţean Oţelu Roşu	M

Matematică pe plaiuri bihorene
(ONM 2011, 16-21.04.2011)

Silviu Lazăr

Am ţinut să intitulez aceste rânduri „Matematică pe plaiuri bihorene” deoarece aceasta a fost sintagma preferata a gazdelor noastre (au folosit-o la toate festivităţile) şi într-adevăr ele merită tot respectul participanţilor deoarece au realizat o treabă excelentă. Mai mult decât o organizare foarte bună a olimpiadei, cazarea elevilor şi a profesorilor în condiţii bune, judeţul Bihor a dat dovadă că respectă cu adevărat munca elevilor din toată ţara care au reuşit să ajungă la această fază naţională trimiţând cele mai importante personalităţi politice la festivitatea de premiere (primarul oraşului Oradea şi prefectul judeţului Bihor).

Privită în ansamblu, această olimpiadă a fost o experienţă nouă şi interesantă pentru mine, pe care aş repeta-o oricând. Această viziune se datorează concursului propriu-zis, dar şi grupului minunat de elevi care au reprezentat judeţul nostru : Andrada Balmez şi Anca Ciobanu la clasa a7-a (un adevărat exemplu de prietenie în ciuda competiţiei ce există între cele două), Andrei Ştefănescu, Miruna Ciulu, Augustin şi Septimiu Dinulică la clasa a 8-a (ţin să menţionez că Augustin a reuşit să participe cu succes şi la faza naţională a olimpiadei de română, desfăşurată în aceeaşi săptămână, la care a obţinut menţiune, felicitări!), veteranii lotului

: Ioana Mocanu la clasa a11-a şi Cristi Zanfir la clasa a12-a, din păcate pentru cei doi este ultima olimpiada de matematică din postura de elevi (Ioana se concentrează pe facultate de la anul, iar Cristi va ocupa un loc în băncile Politehnicii din Timişoara şi cu ocazia asta vreau să îi urez multă baftă, de fapt el merită cele mai multe felicitări pentru anii de muncă asiduă în care a reprezentat judeţul la faza naţională de unde a adus de-a lungul timpului şi două medalii de bronz) şi, bineînţeles, subsemnatul. Nu pot să o trec cu vederea pe profesoara noastră însoţitoare, doamna Antoanela Buzescu, o profesoară într-adevăr extraordinară, pasionată de matematică, care nu se teme să interacţioneze cu elevii şi care merită tot respectul nostru.

Concursul a fost interesant şi intrigant, probleme extrem de grele, dar frumoase, care pun în alertă mintea oricărui matematician ; emoţii atât înainte, cât şi după, dezbateri de ultimă clipă asupra subiectelor care ar putea fi date ... şi în sfârşit proba, 4 ore foarte lungi în care Lagrange sau Cauchy ar fi fost mândri să se afle pe holurile colegiului „Emanuil Gojdu” din Oradea, căci formulele lor au fost invocate într-adevăr des. La final, lotul judeţul nostru s-a întors acasă cu 3 medalii de bronz : Anca Ciobanu (la doar câteva puncte de argint, o performanţă grozavă), Miruna Ciulu şi Septimiu Dinulică (efectiv nu se putea desprinde de medalie, dovadă a efortului mare pe care l-a depus şi a fericirii care l-a cuprins odată cu răsplătirea acestui efort).

Cât despre Oradea şi Băile Felix, aici am fost cazaţi, la Hotel Padiş, vă pot spune că sunt două localităţi foarte frumoase. Băile Felix pentru peisajul încă natural şi neatins, dar şi pentru liniştea şi relaxarea de care de poţi bucura. Iar în Oradea, deşi nu am vizitat prea multe obiective turistice, vă pot recomanda centrul istoric al oraşului (clădiri cu o arhitectură superbă, pasaje acoperite şi o mulţime de cafenele ce te trimit măcar pentru o clipă cu gândul la Paris) şi Biserica cu Lună (un glob argintiu imens care imită fazele lunii); de asemenea, sunt convins că toţi membrii lotului pot fi ghizi în mall-ul din Oradea, căci pe acesta l-am explorat în amănunt (îi mulţumim Ioanei pentru lecţiile de bowling !).

La anul, olimpiada naţională are loc la Constanţa şi sunt sigur că lotul judeţului va face o impresie cel puţin la fel de bună ca şi lotul de anul acesta, le urăm multă baftă şi spor la pregătire încă de pe acum tuturor colegilor noştri !

Elev, Liceul Traian Lalescu, Reşiţa

Cronică ieşeană

Mihai Lazarov

Nu ştiu alții cum sunt, dar eu când mă gândesc la oricât de „mititel" concurs, mă ia cu fiori pe „şira spinării". Anul acesta am fost desemnat să fiu „soacra cu cinci nurori", adică să însoțesc pe cele cinci concurente la faza finală a Concursului Național de Matematică Aplicată „***Adolf Haimovici***", mai cu seamă că „păstoresc" (la matematică, evident) trei dintre ele. Punctul „ $t = 0$ " al călătoriei noastre am decis să fie gara din Lugoj, unde am întâlnit-o pe Roxana (de la Caransebeş) căreia i-am „prezis" că va ajunge măcar ministrul transporturilor, la cât de informată e în materie de „mersul trenurilor". În scurt timp ni s-au alăturat Paula (de la Reşița) şi (orăvițencele) Alexandra, Mădălina şi Monica.

Nesperat de precis, la ora scrisă pe bilet trenul pleacă din gara Lugoj spre „aventura" ieşeană. Am „măsurat" timp de 17 ore drumul până la Iaşi. Aşa cum am promis, nu am făcut matematică pe tren (riscam să fiu vopsit în roz de către admiratoarele Hannei Montana), preferând să glumim, să râdem şi să dormim pe alocuri (mai ales că am împărțit acelaşi vagon cu o mână de „*moldobeni adivarați*" care, întorcându-se acasă, au cărat cu „dânşii" o cantitate însemnată din licorile bahice produse la Teremia Mare.

La fel de precis, la ora stabilită am ajuns în frumoasa gară din Iaşi, deşi eu am uitat să-mi pun o „chietrişicî" în gură, păşind pentru prima oară pe aceste meleaguri. Pe peron am fost aşteptați de doamna profesoară Butnăraşu, ghidul nostru, (semăna izbitor cu Andreea Marin) care ne-a condus la microbuzul ce avea să ne ducă la Colegiul Tehnic „Gheorghe Asachi", unde am fost cazați. Condițiile de cazare au fost excelente, demne de un hotel cu multe stele.

Deşi obosiți de „glasul roților de tren", motivați de vremea bună pe care am sperat să o simțim cu câteva zile în urmă (am plecat pe o vreme tomnatică de acasă), am vizitat Bojdeuca lui Ion Creangă şi ne-am plimbat puțin prin împrejurimi. Fiecare am primit câte un ecuson cu care am putut călători gratuit pe toate mijloacele de transport (şi cum să nu „ridici pieptul" când câte o pereche de ochi curioşi citea pe acestea „***Caraş-Severin***" ?). Seara profesorii au avut o şedință tehnică în care am strâns mâna câtorva din „greii" matematicii româneşti şi mi-am regăsit câțiva colegi de facultate pe care nu-i mai văzusem de multă vreme. După ce i-am dat dreptate lui Ştefan cel Mare în privința nobleței conținutului unui pahar de „busuioacă", emoțiile mele aveau să crească precum o funcție exponențială (cu baza supraunitară) la auzul unui *„noi nu mai ştim nimic*” în receptorul telefonului venit din partea „enoriaşelor” mele. Aşadar, am convocat „mintenaş” o „şedință” la fel de „tehnică”, precum colegiul în care ne aflam în care (ne-)am recapitulat o grămadă de formule şi tehnici matematice.

Abia a doua zi mi-am dat seama de amploarea şi seriozitatea concursului despre care se vorbea cu o seară înainte. După un mic dejun cu *„olicuțî di pastramî*”, am intrat în marea de oameni din fața Facultății de Construcții de Maşini şi Management Industrial. Peste 600 de elevi alături de profesorii lor aşteptau cu multe emoții şi la fel de multă nerăbdare apariția subiectelor. În timp ce concurenții se luptau cu subiectele eu am colindat prin Iaşi împreună cu „omologul” meu din Braşov. Am trecut prin câteva librării („Junimea” şi „Cartea Românească”), „am pus o vorbă” la moaştele Sf. Parascheva şi am savurat celebrele *„poale-n brâu*”. După prânz am trecut la corectat - am fost desemnat să corectez la clasa a 12-a Servicii. Am avut de lucru (multe lucrări, vreo 50 la număr), mai ales că toți elevii au abordat subiectele corectate de mine. Am întâlnit şi formulări mai originale, chiar şi o „perlă” care merită a fi citată. La subiectul 4 era vorba despre o furnică inteligentă care merge între două puncte de coordonate date pe graficul unei funcții care s-a dovedit a fi una de gradul al II-lea; ei bine, într-o lucrare am întâlnit un text care suna aproximativ astfel: *„dacă furnica e inteligentă, înseamnă că va căuta drumul cel mai scurt între cele două puncte, deci va merge în linie dreaptă, adică pe o funcție de gradul I !”*. Seara – alte emoții; grație gazdelor noştri am pătruns în „culise” pentru a afla rezultatele (poate că aici a fost singurul „minus” al organizării, deoarece în îmbulzeala care s-a produs la afişarea rezultatelor nu am reuşit să aflăm imediat rezultatele). Deşi „subsemnatul” se aştepta la mai mult, (aşa sunt toate „soacrele”) am obținut 4 mențiuni şi un loc foarte aproape de ultima mențiune. „Ziua cea mai lungă” s-a încheiat cu o cină târzie şi o plimbare prin Parcul Copou, pe lângă teiul lui Eminescu. La acea oră (greu de crezut) am trecut pe lângă un grup de elevi care s-au aşezat în chioşcul din fața copacului celebru pentru a asculta o prelegere a profesorului lor despre Eminescu, evident…

A doua zi am fost la festivitatea de premiere şi pot să spun că am fost mândru de elevele mele, în momentul când au fost nominalizate. Efortul organizatorilor de a populariza acest concurs şi de a „propovădui” matematica a fost răsplătit cu multe aplauze. Cu strângerile de mână sincere şi cu promisiunea de a reveni, am plecat de la facultate. Ieşenii au de ce să fie mândri: peste 100 de biserici, monumente de cultură şi însemne ale istoriei sunt la tot pasul. În foarte mare grabă am reuşit să vedem Mânăstirea „*Sf. Trei Ierarhi*”, Palatul Culturii, Piaţa Unirii, Piaţa Independenţei. Zadarnic am încercat să înţeleg câte ceva din… „filosofia shopping-ului” – m-a obosit mai tare decât orice altceva. Seara ne-am urcat în acelaşi vagon care ne-a adus. Împreună cu colegii din Bihor am verificat relativitatea timpului, scurtându-l cu glume, impresii şi câteva partide de „cruce” (şi acolo e ceva matematică, nu ?).

Ne-am despărţit la Lugoj, a doua zi dimineaţă, făcându-ne fiecare planuri (poate prea multe) pentru (o) vacanţă (prea scurtă). Deoarece eu am fost delegat pentru a face „cronica”, închei cu speranţa că în viitor vom găsi mai multă înţelegere pentru sprijinirea mai „consistentă” acestor (din ce în ce mai puţini) adepţi ai „reginei ştiinţelor”. Cu gândul că la anul vom umple un vagon pentru a merge „să le luăm premiile” (sunt vorbele domnului inspector de matematică Nicu Miron, „porta-vocea” organizatorilor), închei prin a felicita (eu atât pot face) pe reprezentantele judeţului nostru: **Roxana-Anuţa Margan** – clasa a X-a Filologie, Liceul Teoretic „Traian Doda” Caransebeş – **menţiune**, **Paula-Evelina Bulata** – clasa a XI-a Servicii, Colegiul Economic al Banatului Montan, Reşiţa – **menţiune**, **Monica-Maria Epure** – **menţiune**, **Raluca-Mădălina Goian** – **menţiune** şi **Alexandra-Mirela Pană,** clasa a XI-a, Ştiinţe ale Naturii, Liceul Teoretic „General Dragalina”, Oraviţa.

Profesor, Liceul Teoretic „General Dragalina”, Oraviţa

Probleme rezolvate din RMCS nr. 33

Clasa a V-a

V.191 Suma a 40 numere impare distincte este 1602. Arătați că cel puțin unul este mai mare decât 80.

Prof.Tilincă Daniela şi Mihăilă Adriana, Brăila

Soluție**:** Dacă toate numerele ar fi cel mult egale cu 79 atunci, deoarece $1+3+5+7+9+...+79=1600$ şi suma din enunț este 1602 , rezultă că măcar unul dintre numere trebuie mărit cu 2 ; dacă le mărim pe cele strict mai mici decât 79, două numere devin egale, deci cel puțin unul este mai mare decât 80. Pentru a obține punctajul maxim în concurs la o astfel de problemă, ar trebui să arătăm efectiv că suma 1602 se obține pentru numerele... încercați !

V.192 Se consideră mulțimea $A=\{x \mid x=n^4; n\in\mathbb{N}\}$. Arătați că în orice submulțime cu cinci elemente a lui *A* se găsesc cel puțin două a căror diferență este divizibilă cu 10.

Olimpiadă Brăila

Soluție: Dacă *n* este număr natural, atunci ultima cifră a lui n^4 aparține mulțimii $B=\{0,1,5,6\}$. Alegând 5 elemente din mulțimea *A*, acestea au ultima cifră printre elementele mulțimii *B*. Conform principiului cutiei, două din cele 5 elemente au aceeaşi ultimă cifră, deci diferența lor are ultima cifră 0 şi, în concluzie, este divizibilă cu 10.

V.194 Un tren lung de 25 dam intră pe podul de la Cernavodă cu viteza de 600 m/min, ieşind de pe pod după 7 minute. Ce lungime are podul de la Cernavodă ?

Concurs Rm. Vâlcea

Soluție: în 7 minute, trenul parcurge $600\cdot 7=4200$ m. Deoarece trenul intră pe pod cu locomotiva şi iese cu ultimul vagon, lungimea podului este $4200-250=3850$ m.

V.195 Ştiind că $a+b=54$, $b+c=72$ şi $c+d=91$, calculaţi restul împărţirii numărului $a+3b+5c+3d$ la numărul $a+d$.

Prof.Marius Perianu, Slatina

Soluţie: $a+3b+5c+3d=(a+b)+2(b+c)+3(c+d)=...=471$. Pe de altă parte, avem: $a+d=(a+b)-(b+c)+(c+d)=...=73$ .Avem astfel: $471=6\cdot 73+33$, deci restul cerut este 33.

V.196 Un bazin poate fi umplut de trei robinete identice dacă acestea funcţionează cinci ore.Bazinul este gol şi pornesc toate cele trei robinete. În cât timp se umple bazinul, dacă după o oră se opreşte primul robinet, iar după alte trei ore se opreşte şi al doilea ?

Concurs Slatina

Soluţie: Dacă ar funcţiona numai un robinet, bazinul s-ar umple în 15 ore. Împărţim bazinul în 15 părţi egale(ca volum).După o oră de funcţionare, se umplu 3 părţi din cele 15;după următoarele trei ore în care mai funcţionează doar două robinete, se mai umplu 6 părţi şi astfel mai rămân 6 părţi, care se umplu în şase ore de funcţionare ale ultimului robinet.

V.197 Andra are câteva bile de culori diferite: roşii, galbene şi albastre. Ştiind că 36 dintre acestea nu sunt roşii, 33 nu sunt galbene şi 27 nu sunt albastre, aflaţi câte bile de fiecare culoare are Andra.

Prof.Heidi Feil,, Oţelu – Roşu

Soluţie: Bilele galbene şi albastre sunt în total 36, cele roşii şi albastre sunt 33, iar cele roşii şi galbene sunt 27. Numărul total de bile este aşadar $(36+33+27);2=48$; avem astfel $48-36=12$ bile roşii, $48-33=15$ bile galbene şi 21 bile albastre.

V.198 Mergând cu autoturismul, un şofer observă că, la ora 9:10, pe kilometrajul de la bord apare numărul 12921. La ora 11:00, pe kilometraj apare următorul număr care concide cu răsturnatul său. La ce oră va observa şoferul din nou un astfel de număr, presupunând că se deplasează cu viteză constantă?

Concurs Iaşi

Soluţie: Următoarele numere care concid cu răsturnatele lor sunt 13031 şi 13131.Viteza de deplasare este astfel $(13031-12921):110=1\ km/\min$. Pentru a parcurge

$13131-13031=100\ km$, şoferul va mai avea nevoie de 100 de minute, deci ora căutată este 12:40.

V.199 O mulțime *A* care conține exact patru elemente, numere naturale, se numeşte *legată* dacă, pentru orice $x\in A$, cel puțin unul dintre numerele $x-3$ sau $x+3$ este element al lui *A*.

a) Arătați că există mulțimi *legate;*

b) Demonstrați că produsul oricărei mulțimi *legate* nu poate fi egal cu 102.

Prof. Daniela Vlaicu, Zalău

Soluție: a) De exemplu, $A=\{1,4,5,8\}$ este o mulțime *legată*; b)Dacă *x* este cel mai mic element al unei mulțimi legate, atunci aceasta este de forma $A=\{x,y,x+3,y+3\}, x,y\in\mathbb{N}, x\neq y$ .Presupunând concluzia falsă, avem $xy(x+3)(y+3)=102$ .Deducem că produsul elementelor este divizibil cu 3, deci exact unul dintre factorii produsului este multiplu de 3;dacă *x* este divizibil cu 3, atunci şi $x+3$ are această proprietate, deci 102 este divizibil cu 9, fals.Analog se raționează şi pentru celelalte cazuri.

Clasa a VI-a

VI.190 Aflați $a_1,a_2,...,a_{2010}$ numere naturale nenule pentru care avem:

$$\frac{1\cdot 2}{a_1\cdot a_2}=\frac{2\cdot 3}{a_2\cdot a_3}=...=\frac{2009\cdot 2010}{a_{2009}\cdot a_{2010}} \text{ şi } a_1+a_{2010}=1006.$$

Demonstrați că numărul $S=a_1+a_2+...+a_{2010}$ este divizibil cu 2010.

Prof.Carmen şi Viorel Botea, Brăila

Soluție:

$$\frac{a_1}{1}=\frac{a_3}{3}=\frac{a_5}{5}=....=\frac{a_{2009}}{2009},\frac{a_2}{2}=\frac{a_4}{4}=......$$

$$...=\frac{a_{2010}}{2010}\Rightarrow a_{2010}=1005\cdot a_2\Rightarrow a_3=3,a_5=5,......,a_{2009}=2009$$

$$a_4=2,a_6=3,......,a_{2008}=1004,a_{2010}=1005\Rightarrow$$

$$S=(a_1+a_3+a_5+....+a_{2009})+(a_2+a_4+a_6+...+a_{2010})$$

$$(1+3+5+....+2009)+(1+2+3+4...+1005)=$$

$$=1005^2+\frac{1005\cdot 1006}{6}=1005\cdot 1508$$

$$1005\cdot 2=2010\Rightarrow S\,\vdots\,2010$$

VI.191 Demonstrați că niciunul dintre numerele 275, 2775, 27775, 277775,... nu este pătrat perfect.

Red. RMCS

Soluție:

● $275 = 25 \cdot 11$, $2775 = 25 \cdot 111$, $27775 = 25 \cdot 1111$ şi aşa mai departe...

● 25 este pătrat perfect, dar numerele 11, 111, 1111, ... sunt de forma $4k+3$, deci nu sunt pătrate perfecte.

VI.192 Determinați numerele naturale a şi b pentru care
$\left(3^a+2^a\right)^b-\left(3^b-2^b\right)^a=1$.

Prof.Manuela Prajea, Drobeta Tr.-Severin

Soluție:

● Dacă $a,b \geq 1$, atunci numerele $\left(3^a+2^a\right)^b$ şi $\left(3^b-2^b\right)^a$ sunt impare, deci diferența lor nu poate fi egală cu 1.

● dacă $a=0$, atunci $2^b-1=1 \Rightarrow b=1$.

● dacă $b=0$, atunci obținem $1-0^a=1$, deci a poate fi orice număr natural nenul.

● Soluțiile problemei sunt aşadar perechile: $(0,1)$, $(a,0), a \in \mathbb{N}^*$.

VI.193 Pe o tablă sunt scrise numerele 1, 2, 3, 7, 9, 10 şi 12. Doi elevi au şters câte trei numere de pe tablă şi au remarcat că suma numerelor şterse de unul dintre ei este de două ori mai mare decât suma numerelor şterse de către celălalt. Găsiți ce număr a rămas pe tablă.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

Soluție :

● dacă a,b,c sunt numerele şterse de primul elev, iar d,e,f sunt cele şterse de celălalt, avem
$a+b+c=2(d+e+f) \Rightarrow a+b+c+d+e+f=3(d+e+f)$, aşadar suma tuturor numerelor şterse de pe tablă este de forma *3k*

● suma numerelor aflate inițial pe tablă este 44, adică un număr de forma $3p+2$; deducem că numărul rămas pe tablă trebuie să fie de forma $3m+2$; singurul de această formă este 2.

VI.194 Determinați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții pentru $n \in \mathbb{N}$, număr par nenul:

a) Există un număr par de fracții nenule, cu numitorul n, care nu sunt supraunitare.

b) Există un număr par de fracții echiunitare cu numitorul mai mic decât n.

c) Există un număr par de fracții nenule, subunitare cu numitorul mai mic decât $2n+2$.

Prof. Loreta Ciulu, Reșița

Soluție: a) Fracțiile nenule care nu sunt supraunitare şi care au numitorul n sunt toate de forma $\frac{p}{n}$ unde $p \in \{1,2,3,.....,n\}$. Aceste fracții sunt în număr de n. Cum n este par rezultă că propoziția a) este adevărată.

b) Fracțiile echiunitare cu numitorul mai mic decât n, sunt fracțiile de forma $\frac{p}{p}$, $p \in \{1,2,3,.....,n-1\}$. Fracțiile de această formă fiind în număr de $n-1$ şi cum n este par, rezultă ca $n-1$ este impar, adică propoziția b) este falsă.

c) Fracțiile nenule, subunitare, cu numitorul mai mic decât $(2n+2)$ sunt:

$$\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3},$$
$$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4},$$
…………………………..
$$\frac{1}{2n+1}, \frac{2}{2n+1}, \dots, \frac{2n}{2n+1}.$$

Numărul acestor fracții este $1+2+3+...+2n$.

În această sumă n termeni sunt pari, iar n termeni sunt impari; dacă n este par, rezultă că suma $1+2+3+...+2n$ este număr par deci propoziția c) este adevărată.

VI.195 Determinați lungimile a,b,c ale laturilor unui triunghi ştiind că sunt numere naturale dintre care a şi b sunt numere prime şi $a^b = a+b$.

Prof. Loreta Ciulu, Reşița

Soluție:Deoarece $a^b = a+b$, rezultă că $a=2$ sau $b=2$.

Dacă $a,b \notin \{2\}$, atunci $a=2k+1$, $b=2m+1$ şi deci $a+b=2\cdot(m+k+1)$ care este multiplu de 2 pe când a^b este impar, şi deci egalitatea $a^b = a+b$ este imposibilă.

Dacă $a=2$, atunci $a^b = a+b$ devine $2^b = b+2$ sau $2\cdot\left(2^{b-1}-1\right)=b$ şi deci sau $b=1$ sau $b=2$. Dar $b=1$ este imposibil deoarece ar însemna ca $0=b$ ceea ce este absurd. Prin urmare din $a=2$ rezultă $b=2$.

Dacă $b=2$ atunci din $a^b = a+b$ rezultă $a^2 = a+2$ adică $a\cdot(a-1)=2$, deci $a=2$ sau $a-1=2$.

Pentru $a=2$ avem $a-1=1$ şi deci egalitatea $a^b = a+b$ se verifică. Pentru $a-1=2$ avem $a=3$ ceea ce ar însemna că $3^2 = 3+2$ adică o absurditate. Deci, $a=b=2$.

Datorită faptului că într-un triunghi o latură este mai mare decât diferența celorlalte două şi mai mică decât suma lor, rezultă că $c \in \{1,2,3\}$. Prin urmare triunghiurile care satisfac enunțul au lungimile laturilor: (2, 2, 1), (2, 2, 2), (2, 2, 3).

VI.196 Determinați numerele naturale nenule *a* şi *b* ştiind că suma lor este 74 şi, împărțind pe *a* la *b*,se obține un cât egal cu restul împărțirii.

Olimpiadă Bucureşti

Soluție: Din $a+b=74$ şi $a=bq+q, q<b$ se deduce: $b(q+1)+b=74$ sau $b(q+2)=74$;se analizează cazurile posibile şi se ajunge imediat la $b=a=37$.

VI.197 Determinați numerele naturale nenule *n* pentru care numărul $A=2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot(2n)+73$ este pătrat perfect.

Olimpiadă Constanța

Soluție: Se foloseşte următorul rezultat: Orice pătrat perfect este de forma $7k, 7k+1, 7k+2$ sau $7k+4$. Dacă $n \geq 7$,atunci

$A=2^n\cdot1\cdot2\cdot...\cdot6\cdot7\cdot...\cdot n+70+3$, deci *A* este de forma $7k+3$,adică nu poate fi pătrat perfect.Se ajunge acum, prin verificare imediată, la $n=2$ sau $n=3$.

VI.198 Un număr natural se numeşte *miraculos* dacă este egal cu suma pătratelor a doi divizori distincți ai săi.
a) Dați un exemplu de număr *miraculos;*
b) Arătați că există cel puțin 2010 numere *miraculoase.*

Prof. Marius Damian, Brăila

Soluție:a) Cum $20 = 2^2 + 4^2$,iar 2 şi 4 sunt divizori ai lui 20, avem că 20 este un număr *miraculos;*b) se foloseşte,de exemplu, egalitatea $20n^2 = (2n)^2 + (4n)^2, n \in \mathbb{N}^*$.

VI.199 Mulțimea $A = \{a, b, c, d, e\} \subset \mathbb{N}$ are următoarele proprietăți:
a) media aritmetică a elementelor mulțimii *A* este egală cu 2008;
b) dacă eliminăm cel mai mic element din *A*, media aritmetică a elementelor rămase este 2010;
c) dacă eliminăm cel mai mare element din *A*, media aritmetică a elementelor rămase este 2006.

Câte astfel de mulțimi există?

Prof. Mircea Fianu, Bucureşti

Soluție: Considerăm $a < b < c < d < e$ şi avem: $a + b + c + d + e = 10040$, $b + c + d + e = 8040$, $a + b + c + d = 8024$ .Deducem astfel: $a = 2000, e = 2016$ şi $b + c + d = 6024$, unde $2000 < b < c < d < 2016$ .Dacă $b = 2001$, atunci $(c, d) \in \{(2008, 2015), (2009, 2014), (2010, 2013), (2011, 2012)\}$, adică avem 4 soluții;analog se studiază celelalte cazuri şi în final se ajunge la un total de 25 de mulțimi.

Clasa a VII-a

VII.190 Se consideră un triunghi ABC şi *I* punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor lui. Notăm cu *D* şi *E* mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$. Să se arate că ΔABC $([AB] \equiv [AC])$ este isoscel dacă şi numai dacă $[ID] \equiv [IE]$.

Olimpiadă Brăila

Soluție: Fie *P, Q* picioarele perpendicularelor din *I* pe laturile $[AB]$ şi respectiv $[AC]$. Punctul *I* este centrul cercului circumscris triunghiului

ABC, deci $[AI$ este bisectoare unghiului *BAC* şi din proprietatea bisectoarei, avem $IP = IQ$.

$"\Rightarrow"$. Ştim că $[AB]\equiv[AC]$ şi demonstrăm că $[ID]\equiv[IE]$. Într-adevăr, $\Delta AID \equiv \Delta AIE(L.U.L.) \Rightarrow [ID]\equiv[IE]$.

$"\Leftarrow"$. Ştim că $[ID]\equiv[IE]$ şi demonstram că $[AB]\equiv[AC]$.

Mai întâi, $\Delta DIP \equiv \Delta EIQ(I.C.) \Rightarrow [DP]\equiv[EQ]$. (1)

Apoi $\Delta AIP \equiv \Delta AIQ(I.U.) \Rightarrow [AP]\equiv[AQ]$. (2)

Din (1) şi (2) rezultă că $AD = AE$ şi imediat $AB = AC$.

VII.191 Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația

$$x^2(y-1)+y^2(x-1)=1.$$

Prof.Gabriel Mîrşanu, Iaşi

Soluție: Notăm $x-1=a$ şi $y-1=b$ şi ajungem la:

$a^2b+2ab+b+ab^2+a=1$, apoi $(a+b+4)(ab+1)=5$ .Analizăm imediat cazurile posibile în numere întregi şi obținem

$(a,b)\in\{(0,1),(1,0),(-6,1),(1,-6)\}$; finalizarea e imediată.

VII.192 Pe o insulă trăiesc 12 cameleoni.La un moment dat trei au culoarea roşie, patru au culoarea galbenă, iar ceilalți cinci au culoarea verde. Se ştie că dacă se întâlnesc doi cameleoni cu două culori diferite atunci ambii îşi schimbă culoarea în cea de-a treia culoare;în rest, ei nu îşi schimbă culoarea. Arătați că:

a) este posibil ca la un moment dat niciun cameleon să nu aibă culoarea verde;

b) nu este posibil ca la un moment dat toți cameleonii să aibă culoarea verde.

Olimpiadă Gorj

Soluție: a) dacă 4 dintre cameleonii colorați în verde se întâlnesc cu cei 4 colorați în galben, iar al cincilea colorat în verde se întâlneşte cu unul colorat în roşu, atunci vor fi doi colorați în galben şi restul în roşu; b) presupunem că după *m* întâlniri dintre un cameleon galben şi unul verde, după *n* întâlniri între unul verde şi unul roşu şi după *p* întâlniri între un cameleon galben şi unul roşu, toți cameleonii sunt colorați în verde. Se ajunge astfel la egalitățile: $\begin{cases} 12 = 5 + 2p - m - n \\ 0 = 4 + 2n - m - p \\ 0 = 3 + 2m - n - p \end{cases}$; scădem primele două egalități şi avem: $3p - 3n = 11 \Rightarrow 3(p - n) = 11$, absurd.

VII.193 Fie *S* şi *T* două puncte în interiorul triunghiul *ABC* dreptunghic în *A*, astfel încât $AS \perp BS, AT \perp BT$. Dacă $ST \perp BC$, demonstrați că $AS = DT$, unde *D* este piciorul perpendicularei din *A* pe *[BC]*.

Prof.Stănică Nicolae, Brăila

Soluție: Fie *M* mijlocul segmentului *[AB]*.
În triunghiul *ASB* dreptunghic, *[MS]* este mediană $\Rightarrow$ *MS=AM=BM.*
În triunghiul *ABT* dreptunghic, *[MT]* mediană $\Rightarrow$ *MT=AM=BM.*
În triunghiul *ADB* dreptunghic, *[DT]* mediană $\Rightarrow$ *MD=AM=BM.*
Deci *M* se află pe mediatoarea lui *[ST]* şi *[AD]*, iar *din* $ST // AD$ (perpendiculare pe *BC*) obținem că *M* se află şi pe mediatoarea lui *[PE]*, unde $\{P\}=AD \cap MS$, $\{E\}=AD \cap MT$, deci *AP=DE (*)*.În final, avem: *AP=DE* (din (*), *PS=ET* (diferențe de segmente congruente: *MS-MP=MT-ME)* $\sphericalangle APS \overset{alt.int.}{\equiv} \sphericalangle SPST \equiv \sphericalangle MTS \overset{\triangle MST\ isoscel\ alt.\ int.}{\equiv} \sphericalangle TED$,
Deci, conform axiomei L.U.L., obținem $\Delta ASP \equiv \Delta DTE \Rightarrow AS=DT.$

VII.194 Se consideră un triunghi *ABC* în care $AB = 6,\ AC = 7,\ BC = 9$ şi se notează cu *M* şi *N* proiecțiile punctului *A* pe bisectoarele interioare ale unghiurilor $\widehat{B}$, respectiv $\widehat{C}$. Calculați lungimea segmentului *(MN).*

Prof. Liliana Niculescu, Craiova

Soluție :

Notăm $AM \cap BC = \{P\}$ şi $AN \cap BC = \{Q\}$.

● Triunghiul *ABP* este isoscel, deoarece *BM* este bisectoare şi înălțime, deci $AB = BP = 6$. Deducem $PC = 3$ (1)

● Analog se obține că triunghiul *ACQ* este isoscel, deci $AC = CQ = 7 \Rightarrow QB = 2$ (2)

● Din (1) şi (2) ajungem la $PQ = 4$.

● Se deduce imediat că *MN* este linie mijlocie în triunghiul *APQ* şi astfel : $MN = 2$.

VII.195 Calculați $x+y+z$ știind că:

$$\frac{x}{x+1}=\frac{y}{y+2}=\frac{z}{z+3} \text{ şi } \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=54.$$

Olimpiadă Olt

Soluție: Avem imediat: $\frac{x+1}{x}=\frac{y+2}{y}=\frac{z+3}{z}$, de unde:

$1+\frac{1}{x}=1+\frac{2}{y}=1+\frac{3}{z}.$ sau $\frac{1}{x}=\frac{2}{y}=\frac{3}{z}.=18$; concluzia este imediată.

VII.196 Arătați că, dacă $a,b\in\mathbb{Z}$ şi 9 divide $a^2+4ab+b^2$, atunci 3 divide numărul $ma+nb$, pentru orice $m,n\in\mathbb{Z}$.

Concurs Suceava

Soluție: Deoarece 9 divide $a^2+4ab+b^2=(a+2b)^2-3b^2$, deducem că $3/(a+2b)\Rightarrow 9/(a+2b)^2$, de unde $9/3b^2\Rightarrow 3/b$;cum $3/(a+2b)$, ajungem şi la $3/a$, aşadar evident: $3/(ma+nb),\forall m,n\in\mathbb{Z}.$

VII.197 Într-o cameră sunt 16 persoane. Fiecare persoană cunoaşte exact alte trei persoane din acea cameră. Se presupune că dacă persoana A îl cunoaşte pe B, atunci şi B îl cunoaşte pe A.

a) Dacă se realizează o strângere de mână între fiecare două persoane care se cunosc, să se precizeze câte strângeri de mână au loc;

b) Să se studieze în ce context că putem împărți cele 16 persoane în grupe de câte 4, astfel încât în interiorul fiecărei grupe, oricare două persoane să nu se cunoască între ele.

Prof. Mihai şi Steluța Monea – Deva

Soluție: a) Fiecare persoană realizează o strângere de mână cu alte 3 persoane, deci ar fi $16\cdot 3=48$. Dar trebuie împărțit la 2 deoarece relația dintre persoanele A şi B am numărar-o de două ori, o dată din punctul de vedere al lui A şi apoi din punctul de vedere al lui B.Deci răspunsul este 24. b) Situația aceasta se poate realiza numai dacă există patru grupe de câte 4 persoane cu proprietatea că în fiecare grupă, fiecare cunoaşte pe ceilalți trei. Notăm aceste grupe cu numerele 1,2,3, respectiv 4. Atunci putem forma alte grupe alegând câte un singur membru din fiecare dintre grupele 1,2,3 respectiv 4.

VII.199 Se consideră paralelogramul $ABCD$, M mijlocul laturii $[BC]$ şi P, Q proiecțiile lui D pe AM, respectiv a lui A pe DM. Să se arate că $BQ = CP$.

Olimpiadă Brăila

Soluție: Fie $\{E\} = AM \cap DC$ şi $\{F\} = DM \cap AB.$

$\triangle ABM \equiv \triangle ECM\ (U.L.U.) \Rightarrow AB = CE.$ Cum $AB = DC,$ rezultă că $DC = CE.$ Asemănător, $AB = BF$ şi, în plus, $AF = DE.$

În triunghiul dreptunghic $QAF,$ $[BQ]$ este mediană, deci $BQ = \frac{1}{2} \cdot AF.$

În triunghiul $PDE,$ $[PC]$ este mediană, deci $CP = \frac{1}{2} \cdot DE.$

Din ultimele trei egalități, rezultă că $BQ = CP.$

Clasa a VIII-a

VIII.190 Determinați numerele reale x, y, z ştiind că $x + y + z = 6$ şi $xy + xz + yz = 12$.

Olimpiadă Brăila

Soluție: Arătăm că $x = y = z = 2.$

Într-adevăr,

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 2\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx\right) =$$
$$= 2\left[(x+y+z)^2 - 3(xy + yz + zx)\right] = 2\left(6^2 - 3 \cdot 12\right) = 0,$$

deci $x = y = z.$ Ținând cont că $x + y + z = 6,$ rezultă $x = y = z = 2.$

VIII.191 Arătați că: $3+ab-2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\geq 0$, pentru orice $a,b\in[0,1]$.

Concurs Suceava

Soluție:

$$3+ab-2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=(1-a)(1-b)+\left(\sqrt{a}-1\right)^2+\left(\sqrt{b}-1\right)^2\geq 0, \forall a,b\in[0,1].$$

VIII.192 Dacă $x\in(0,2)$, demonstrați că $\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)\geq 4$.

Prof. Octavia Popa, Brăila

Soluție**:** Notăm $a=\sqrt{x}$ şi $b=\sqrt{2-x}$, iar $a>0$ şi $b>0$. Atunci $a^2+b^2=2$ şi $2=a^2+b^2\geq 2ab$ de unde $ab\leq 1$ şi $\sqrt{ab}\leq 1$.

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 1+\frac{1}{ab}+\frac{2}{\sqrt{ab}}\geq 1+1+2=4$$

VIII.193. O cutie din lemn are 9 compartimente distribuite sub forma unui pătrat de tipul 3×3. În fiecare compartiment se găsesc bile distribuite ca în figura alăturată. Bilele se pot muta dintr-un compartiment în altul cu condiția ca această mutare să se realizeze între compartimente vecine, situate pe aceeaşi linie sau aceeaşi coloană.

1 bilă	2 bile	3 bile
4 bile	5 bile	6 bile
7 bile	8 bile	9 bile

a) Demonstrați că se pot realiza mutări de bile astfel încât la final numărul de bile din fiecare compartiment să fie acelaşi;

b) Arătați că indiferent de numărul de mutări efectuate nu putem obține număr par de bile în fiecare compartiment.

Prof. Mihai şi Steluța Monea – Deva

Soluție: a) Mutăm, pe rând, câte trei bile din linia a treia pe a doua şi apoi pe prima şi vom avea pe prima coloana câte 4 bile, pe a doua câte 5 bile şi pe a treia câte 6 bile. Apoi câte o bilă din coloana a treia o mutăm până ajunge pe prima coloană. b)În total sunt 45 de bile deci nu pot fi dispuse în număr par în fiecare compartiment.

VIII.194 Se ştie că exact unul dintre numerele reale *x,y,z* este irațional, iar numărul $N = xy + yz + zx$ este rațional.Demonstrați că: $N \le 0$.

Prof. Mircea Fianu, Bucureşti

Soluție: Presupunem, de exemplu, că $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi ajungem astfel la: $N = x(y+z) + yz \in \mathbb{Q} \Rightarrow ...y + z = 0$, de unde $N = -y^2 \le 0$.

VIII.195 Determinați numerele naturale *n* pentru care valoarea numerică a expresiei $E(n) = n^4 - 16n^2 + 100$ este un număr prim.

Olimpiadă Bistrița-Năsăud

Soluție: Avem imediat:
$E(n) = n^4 - 16n^2 + 100 = (n^2 - 6n + 10)(n^2 + 6n + 10)$ .Se impune astfel: $n^2 - 6n + 10 = 1$ sau $n^2 + 6n + 10 = 1$ .Deoarece $n^2 - 6n + 10 < n^2 + 6n + 10$,ajungem la $n^2 - 6n + 10 = 1$, de unde $n = 3$, pentru care $E(3) = 37$ este număr prim.

VIII.196 Pe un teren dreptunghiular de lungime *L* şi de lățime *l* este situat un zid paralelipipedic de lungime *l* şi înălțime *H* poziționat paralel cu lățimea terenului.O furnică pleacă dintr-un colț al terenului şi ajunge în colțul opus.Care este lungimea minimă a drumului pe care ar putea merge furnica?

Concurs Deva

Soluție: Desfăşurăm în plan suprafața formată din: partea de teren până la zid,fața anterioară a zidului,creasta zidului,fața posterioară a zidului şi partea de teren din spatele zidului;obținem astfel un dreptunghi de dimensiuni *l* şi $L + 2H$ .Evident,drumul cel mai scurt al furnicii trebuie să fie pe diagonala acestui dreptunghi, deci are lungimea $\sqrt{l^2 + (L + 2H)^2}$.

VIII.197 În extremitățile A, B ale unui diametru al unui cerc se duc tangentele AA' şi BB' la acel cerc. Se ia un punct M pe cerc diferit de A şi B. AM intersectează pe BB' în C, iar BM intersectează pe AA' în D. Demonstrați că $AD \cdot BC = AB^2$.

Prof. Loreta Ciulu, Reşița

Soluție: Conform ipotezei avem că AA' şi BB' sunt tangente. Rezultă că acestea sunt perpendiculare pe diametrul AB în A respectiv în B şi deci triunghiurile DAB şi ABC sunt dreptunghice. Deoarece M aparține cercului şi AB este diametru, obținem că unghiul AMB este drept. De aici , $\angle MAB \equiv \angle ADM$, pentru că au acelaşi complement, unghiul DAM .Aşadar triunghiurile DAB şi ABC sunt asemenea şi rezultă relația cerută.

VIII.198 Calculați valoarea expresiei
$E = \sqrt{4x^2 + 4y - 3} + 2 \cdot \sqrt{y^2 - 6x - 2y + 10}$, ştiind că $1 < y < 2$ şi $x - y + 1 = 0$.

Prof. Florica Banu, Bucureşti

Soluție: Se obține imediat: $E = |2y - 1| + 2 \cdot |y - 4| = 2y - 1 + 2(4 - y) = 7$.

VIII.199 Vârfurile unui cub se colorează în roşu, galben sau albastru.Putem proceda astfel încât fiecare mulțime formată din patru vârfuri coplanare să conțină toate cele trei culori ?

Prof. Gabriel Popa, Iaşi

Soluție: Pe baza inferioară a cubului $ABCDA'B'C'D'$ o culoare ar trebui să apară cel puțin de două ori; presupunem că aceasta este roşu.Deosebim cazurile: (1) Dacă o muchie a bazei inferioare are ambele extremități roşii, vârfurile diametral opuse în cub trebuie colorate în galben şi albastru;în aceste condiții, pe fața din spate nu vom avea vârfuri colorate cu roşu. (2) Dacă o diagonală a bazei inferioare a cubului, de exemplu AC are ambele extremități roşii, atunci diagonala bazei superioare paralelă cu aceasta,adică $A'C'$ va avea capetele colorate în galben şi albastru;în punctul B' ar trebui atunci să avem galben(pentru planul diagonal) şi atunci fața $ABB'A'$ nu va conține albastru. Aşadar, nu putem găsi o colorare ca în enunț.

Clasa a IX-a

IX.180 Studiați dacă există numere întregi nenule *a, b, c* pentru care $a+b=c$ şi $ab+c=0$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu Roşu

« Soluția » inițială a autorului: $a+b=c$ şi $ab=-c$. Ecuația de gradul al doilea cu rădăcinile *a* şi *b* este astfel $x^2-cx-c=0$. Aceasta are discriminantul $\Delta=c^2+4c$; o condiție necesară ca rădăcinile să fie întregi este ca acesta să fie pătrat perfect. Deoarece $c^2\le c^2+4c<c^2+4c+4=(c+2)^2$, $c\neq 0$,deducem: $c^2+4c=(c+1)^2=c^2+2c+1\Rightarrow c=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$.Aşadar nu există numere care satisfac enunțul.

Vă invităm să găsiți greşeala din « soluția » anterioară, pentru că Doamna profesoară Adriana Dragomir a găsit, ca şi câțiva (puțini) elevi, un răspuns pozitiv: Egalitățile din enunț conduc la $ab+a+b=0$, de unde $a(b+1)=-b$, deci, pentru $b\neq -1$, avem $a=\frac{-b}{b+1}=\frac{-b-1+1}{b+1}=-1+\frac{1}{b+1}$. Este suficient să observăm acum că, pentru $b=-2\in\mathbb{Z}$ se obține $a=-2\in\mathbb{Z}$, apoi $c=-4\in\mathbb{Z}$, valori care verifică egalitățile din enunț !!!

IX.181 Pe fiecare dintre laturile *(AB), (BC)* şi *(CA)* ale unui triunghi *ABC* se consideră câte trei puncte, două colorate cu roşu şi unul cu albastru.

Calculați câte triunghiuri au vârfurile printre cele nouă considerate. Determinați câte dintre acestea au vârfurile colorate cu aceeaşi culoare.

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: a) ● deosebim două cazuri:
(1) triunghiurile au câte un vârf pe fiecare latură; cu principiul produsului avem că în acest caz sunt $3\cdot 3\cdot 3=27$ de triunghiuri;
(2) două vârfuri sunt pe o latură şi al treilea vârf este pe una din celelalte două laturi; avem în acest caz: $3\cdot 3\cdot 6=54$ de triunghiuri.
● în total avem $27+54=81$ de triunghiuri.
b)● dacă luăm două vârfuri roşii pe o latură, avem12 triunghiuri cu vârfurile roşii ;
● dacă luăm câte un vârf roşu de pe fiecare latură, mai avem încă 8 triunghiuri;

● la acestea se adaugă şi un triunghi cu vârfurile albastre aşadar avem 21 de triunghiuri cu vârfurile de aceeaşi culoare.

IX.182 Nicu are plantați în livadă n pruni, numerotați distinct cu numerele 1, 2, 3, …, n .

Într-o zi, Nicu se apucă de cules prune respectând următoarea regulă: din prunul cu numărul 1 culege două prune, din prunul cu numărul 2, culege cinci prune, din prunul cu numărul 3, opt prune, şi aşa mai departe, culegând cu trei prune mai mult decât din pomul precedent.

Câți pruni ar trebui să aibă plantați Nicu pentru a fi sigur că, respectând regula indicată, la sfârşitul zilei are culese cel puțin 2010 prune?

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție : ● Notăm numărul de prune culese din pomul cu numărul n cu x_n şi, observând că $(x_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică cu $x_1 = 2$ şi rația $r = 3$, deducem imediat că $x_n = 3n - 1$.

● Obținem imediat că suma prunelor culese este

$$S_n = \frac{(2+3n-1)n}{2} = \frac{(3n+1)n}{2}$$

● Din condiția $\frac{(3n+1)n}{2} \geq 2010$ ajungem la $n(3n+1) \geq 4020$.

● încercări imediate conduc la:

$36 \cdot (3 \cdot 36 + 1) = 36 \cdot 109 = 3924 < 4020$

şi $37 \cdot (3 \cdot 37 + 1) = 37 \cdot 112 = 4144 > 4020$ şi astfel deducem $n \geq 37$, adică Nicu ar trebui să aibă cel puțin 37 de pruni.

IX.183 Pe malul unui lac în formă de disc, sunt situate trei persoane care sunt dispuse asemenea unui triunghi echilateral. Pe apă pluteşte o barcă şi fiecare persoană are o frânghie legată de barcă. Se ştie că persoanele sunt la fel de puternice şi depun acelaşi efort în momentul în care trag de frânghie cu scopul de a trage barca spre mal.

a) Să se arate că dacă în poziția inițială barca era în centru lacului, atunci indiferent de efortul celor trei persoane, barca nu se va mişca;

b) Dacă poziția inițială a bărcii nu era în centrul lacului, să se precizeze până în ce punct pot trage barca cele trei persoane.

Prof. Mihai şi Steluța Monea – Deva

Soluție:a) Dacă notăm persoanele cu A, B, C şi O centrul lacului atunci $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$ deoarece triunghiul ABC este echilateral. Prin urmare barca nu se mişcă.

b)Fie M poziția inițială. Atunci $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MO}$, deci barca se va mişca pe direcția dreptei MO, până va ajunge în O şi aici se opreşte.

IX.184 Demonstrați că: $\dfrac{x^2}{x-1}+\dfrac{y^2}{y-1}\geq 8$, pentru orice $x, y \in (1,\infty)$.

Olimpiadă Dâmbovița

Soluție: Inegalitatea se poate scrie: $\dfrac{x^2-1+1}{x-1}+\dfrac{y^2-1+1}{y-1}\geq 8$ sau

$x+1+\dfrac{1}{x-1}+y+1+\dfrac{1}{y-1}\geq 8$ sau $x-1+\dfrac{1}{x-1}+y-1+\dfrac{1}{y-1}\geq 4$; este

suficient acum să folosim inegalitatea $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$, adevărată pentru orice

$a>0$.

Clasa a X-a

X.180 Se consideră o mulțime $\mathcal{M}$ de puncte din plan care satisface următoarele proprietăți:

a) $A(1,0)\in\mathcal{M}$;

b) dacă $P(x,0)\in\mathcal{M}$, cu $x\in\mathbb{R}$, atunci $Q(\cos x,\sin x)\in\mathcal{M}$;

c) dacă $S(\cos 2x,\sin 2x)\in\mathcal{M}$, cu $x\in\mathbb{R}$, atunci $T(x,0)\in\mathcal{M}$;

Arătați că mulțimea $\mathcal{M}$ conține punctele $B(-1,0)$ şi $C(0,1)$.

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție:

● Din c) , pentru $x=\pi$, avem : $S_1(\cos 2\pi,\sin 2\pi)=A(1,0)\in\mathcal{M}$

şi astfel, din c) obținem: $T_1(\pi,0)\in\mathcal{M}$

● folosind b) ajungem la : $Q_1(\cos\pi,\sin\pi)=B(-1,0)\in\mathcal{M}$.

● Avem acum : $S_2(\cos 2\cdot\frac{\pi}{2},\sin 2\cdot\frac{\pi}{2})=B(-1,0)\in\mathcal{M}$ şi, folosind c),

deducem: $T_2(\frac{\pi}{2},0)\in\mathcal{M}$. Din nou, cu b), ajungem la:

$$Q_2\left(\cos\frac{\pi}{2},\sin\frac{\pi}{2}\right)=C(0,1)\in\mathcal{M}$$

X.181. Rezolvați ecuația: $2^{2^{x+2}}+2^{2^{-x}}=8.$

Prof. Traian Tămâian, Carei

Soluție: Notăm $2^x=t>0$ şi avem: $2^{4t}+2^{\frac{1}{t}}=8$ sau $4^{2t}+4^{\frac{1}{2t}}=8$ .Cum $4^{2t}+4^{\frac{1}{2t}}\geq 2\cdot\sqrt{4^{2t+\frac{1}{2t}}}\geq 2\cdot\sqrt{4^2}=8$, egalitatea se obține pentru $2t=\frac{1}{2t},t>0\Rightarrow t=\frac{1}{2}\Rightarrow x=-1$.Verificare.

X.182. În urma unor cercetări, s-a stabilit că solubilitatea în apă a unei substanțe *s* în raport cu temperatura (măsurată în grade Celsius), este dată de o formulă de forma $S(t)=at^2+bt+c$, unde $a,b,c\in(0,\infty)$, iar $t\geq 10$ (grade Celsius).

Experimental, s-au determinat valorile solubilității la câteva temperaturi, anume: $S_1=10,S_2=15,S_3=25$, pentru temperaturile $t_1=20,t_2=25,$ respectiv $t_3=30$.

(Solubilitatea *S* este exprimată în *g* substanță *s* la 100g apă).

a) Găsiți valoarea solubilității substanței date *s* la temperatura de 50^o;

b) Arătați că există două temperaturi diferite la care solubilitatea substanței *s* este aceeaşi.

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție:

a) ● se poate rezolva sistemul de ecuații $S(20)=10,S(25)=15,S(30)=25$ sau putem considera $S(t)=10+m(t-20)+n(t-20)(t-25)$, pentru care avem $S(20)=10$

● din $S(25)=15$ deducem $10+5m=15 \Rightarrow m=1$, apoi , din $S(30)=25$, avem: $20+50n=25 \Rightarrow n=\frac{1}{10}$

● Ajungem aşadar la funcția de gradul al doilea

$S:[10,\infty) \to \mathbb{R}$, $S(t)=10+(t-20)+\frac{1}{10}(t-20)(t-25)$ (bine, domeniul e exagerat…)

sau $S(t)=\frac{1}{10}t^2-\frac{35}{10}t+40$ ● Obținem acum imediat $S(50)=115$.

b) ● deoarece funcția S admite un punct de minim, anume $t_{\min}=(-\frac{b}{2a})=\frac{35}{2}=17,5$, deducem că există, de exemplu $t_1=17,5-2,5=15$ şi $t_2=17,5+2,5=20$, pentru care $S(15)=S(20)$

X.183 a) Să se arate că în orice triunghi de laturi a,b,c avem: $b\cos C+c\cos B=a$

b) Demonstrați inegalitatea: $\left(b^2+c^2\right)\left(8R^2-c^2-b^2\right)\geq 4R^2a^2$, unde a,b,c si R sunt laturile şi respectiv raza cercului circumscris unui triunghi.

Ovidiu Stăniloiu, student,Timişoara

Soluție: a) Rezultă din calcul direct folosind teorema cosinusului.

b) După împărțire cu $4R^2$ se obține: $\left(b^2+c^2\right)\left(\frac{8R^2-c^2-b^2}{4R^2}\right)\geq a^2$ şi de aici folosind teorema sinusului vom obține:

$\left(b^2+c^2\right)\left(2-\sin^2 C-\sin^2 B\right)\geq a^2$ sau

$\left(b^2+c^2\right)\left(\cos^2 C+\cos^2 B\right)\geq a^2$. Aplicăm acum inegalitatea CBS şi proprietatea de la punctul a) şi se obține:

$\left(b^2+c^2\right)\left(\cos^2 C+\cos^2 B\right)\geq \left(b\cos C+c\cos B\right)^2=a^2$

X.184 Determinați numerele întregi m pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(m-1)\cdot 2^x+(m-6)2^{-x}$ intersectează axa *Ox* într-un punct care are coordonatele numere raționale.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție:

● graficul funcției intersectează axa Ox dacă ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție reală.

● ecuația conduce imediat la: $(m-1)\cdot 2^{2x}+(m-6)=0$ sau $2^{2x}=\dfrac{6-m}{m-1}$

● deoarece $2^t>0 \quad ,\forall t\in\mathbb{R}$, ajungem la condiția $\dfrac{6-m}{m-1}>0 \Leftrightarrow m\in(1,6)$

● deducem imediat $m\in\{2,3,4,5\}$

● pentru $m=2$ obținem ecuația $2^{2x}=4$ cu soluția $x=1\in\mathbb{Q}$ (evident, cealalată coordonată este $y=0\in\mathbb{Q}$)

● pentru $m=3$, avem $2^{2x}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow 2^{2x+1}=3$; dacă $x\in\mathbb{Q}$, atunci

$2x+1=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}, p,q\in\mathbb{N}, q\neq 0$, de unde: $2^q=3^p$, egalitate imposibilă dintre un număr par şi unul impar.

● pentru $m=4$, ecuația este $2^{2x}=\dfrac{2}{3}$; analog, această ecuația nu are soluții raționale.

● pentru $m=5\Rightarrow 2^{2x}=\dfrac{1}{4}=2^{-2}\Rightarrow x=-1\in\mathbb{Q}$.

Aşadar $m=2$ sau $m=5$.

Remarcă: Folosind faptul că $2^t>0 \quad ,\forall t\in\mathbb{R}$, puteam de la început să observăm că, pentru $m<1$, avem $f(x)<0$, iar pentru $m>6$ avem $f(x)>0$, etc.

Clasa a XI-a

XI.180 Se consideră familia de drepte $d_m:(m+1)\cdot x-(m-1)\cdot y-5m-3=0$ cu $m\in\mathbb{Z}$. Arătați că:

a) familia dată conține o dreaptă paralelă cu dreapta de ecuație $4x-2y-3=0$;

b) toate dreptele familiei considerate trec printr-un punct fix;

c) familia considerată conține o singură pereche de drepte perpendiculare.

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție:

● panta unei drepte oarecare din familie este egală cu $\frac{m+1}{m-1}$

a) panta dreptei date este egală cu 2 şi astfel condiția de perpendicularitate revine la $\frac{m+1}{m-1}=2$, de unde $m=3$.

b) Putem, de exemplu , rezolva sistemul format din ecuațiile dreptelor d_1 şi d_2; obținem că punctul de intersecție a acestor drepte este $A(4,-1)$ şi se arată apoi că $A\in d_m$, pentru orice număr întreg m.
Putem , de asemenea, să scriem $d_m: m(x-y-5)+x+y-3=0$ şi arătăm imediat că sistemul $\begin{cases} x-y-5=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$ are soluția $x=4, y=-1$.

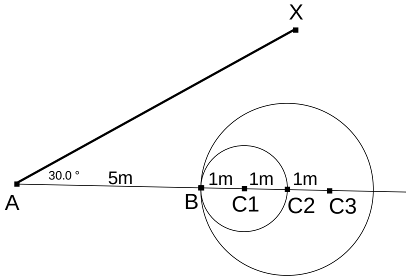
c) Dreptele d_m şi d_n sunt perpendiculare dacă şi numai dacă $\frac{m+1}{m-1}\cdot\frac{n+1}{n-1}=-1$; această ecuație în numere întregi conduce imediat la: $mn=-1$ şi astfel avem doar perechea $\left(d_{-1},d_1\right)$ de drepte perpendiculare.

XI.181 Fie punctul $A\left(1,y\right)$, $\left|y\right|\geq 1$ într-un sistem de axe de coordonate. Din punctul *A* se duc tangentele la cercul centrat în origine de rază 1. Fie T_1 şi T_2 punctele de tangență cu cercul respectiv. Determinați *y* dacă patrulaterul AT_1OT_2 se poate înscrie într-un cerc de rază 1.

Ovidiu Stăniloiu , student, Timişoara

Soluție: Se observă că *AO* este diametrul cercului circumscris patrulaterului AT_1OT_2. Se va pune condiția ca lungimea segmentului *AO* să fie 2. Se obține $y=\pm\sqrt{3}$.

XI.182. Figura alăturată modelează zborul unei muşte în apropierea unei clădiri a cărei perete este reprezentat de dreapta AX . Musca porneşte din B şi descrie cercul de centru C_1 în sensul acelor de ceas. Apoi din B descrie cercul de centru C_2 în acelaşi sens, apoi cercul de centru



C_3, C_4,…., C_n, toate aceste centre fiind coliniare şi situate la 1 m unul după celălalt . Musca se opreşte din zbor în clipa în care atinge peretele.
a) Care este centrul cercului pe care se situează musca în clipa în care se opreşte din zbor?
b) Care a fost lungimea zborului?

Prof. Mihai şi Steluța Monea – Deva

Soluție:

a) Zborul se opreşte când traiectoria coincide cu cercul tangent lui AX . Dacă C_n este centrul acestui cerc atunci $d\left(C_n, AB\right)$ este raza acestui cerc şi egală cu $AC_n / 2$ datorită unghiului de 30 grade. Dar $AC_n = 5 + n$. Dar raza este egală şi cu BC_n, adică cu n .Obținem ecuația $\dfrac{5+n}{2} = n$, de unde $n = 5$, centrul este C_5 .

b) Musca parcurge complet primele 4 cercuri şi 1/6 din al cincilea cerc, adică $2\pi + 4\pi + 6\pi + 8\pi + \dfrac{10\pi}{6} = \dfrac{65\pi}{3}$.

XI.183 Rezolvați în $\mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$ ecuația $X^2 + 2X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Olimpiadă Hunedoara

Soluție: Putem scrie $\left(X+I_2\right)^2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & 4\end{pmatrix}$.Dacă $Y=X+I_2$, din

$Y^2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & 4\end{pmatrix}$ deducem $\det Y=0\Rightarrow Y^2=tY$, unde $t=trY$ .Ajungem astfel

la $Y=\frac{1}{t}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow t=\frac{1}{t}\cdot 6\Rightarrow t\in\left\{\pm\sqrt{6}\right\}$ şi astfel finalizarea este imediată.

XI.184 Se consideră şirul $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ pentru care $x_n^2-2nx_n+n^2-1\leq 0$, $\forall n\geq 1$.

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$. * * *

Soluție: Din $\left(x_n-n\right)^2\leq 1$ deducem $n-1\leq x_n\leq n+1$ şi apoi, cu teorema cleştelui, obținem: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=1$.

Clasa a XII-a

XII.180 Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x$ şi punctele *A*, *B* situate pe graficul funcției *f*, de abscise $x_A=1$, respectiv $x_B=3$.

a) Găsiți punctele *C* de pe graficul funcției f pentru care aria triunghiului *ABC* este egală cu 15 ;

b) Găsiți un punct *D* situat pe graficul funcției f în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta *AB*.

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție:

a) ● obținem imediat $A(1,-1), B(3,3)$

● aria triunghiului este $S_{ABC}=\frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & 3 & 1\\ c & c^2-2c & 1\end{vmatrix}=2c^2-8c+6$

● se ajunge la $\left|c^2-4c+3\right|=15$

● imediat obținem $c\in\{-2,6\}\Rightarrow C_1\left(-2,8\right), C_2\left(6,24\right)$.

b)● panta dreptei *AB* este $m_{AB}=2$

● condiția de paralelism este $f^{/}(x_D)=2\Rightarrow x_D=2\Rightarrow D(2,0)$.

XII.181 Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-6x^2+9x+a,\ a\in\mathbb{R}$.

a) Determinați numerele întregi a pentru care graficul funcției considerate intersectează axa *Ox* în trei puncte distincte;

b) Pentru $a=1$, arătați că: $5^{x-1}\le f(x)\le 5^{x+1}$, $\forall x\in[0,1]$.

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție:

a) ● f este derivabilă, cu derivata $f'(x)=3x^2-12x+9$

● ecuația asociată derivatei are soluțiile $x_1=1, x_2=3$

● $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\ f(1)=a+4,\ f(3)=a,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

● graficul intersectează axa *Ox* în trei puncte distincte dacă ecuația $f(x)=0$ are trei rădăcini reale; deducem condițiile: $a+4>0$ şi $a<0 \Rightarrow a\in(-4,0)$

● în final avem: $a\in\{-3,-2,-1\}$.

b)● studiind variația funcției, avem că f este strict crescătoare pe $[0,1]$ şi astfel: $1=f(0)\le f(x)\le 5=f(1)$, $\forall x\in[0,1]$.

● deoarece $5^{x-1}\le 1$, $\forall x\in[0,1]$ şi $5\le 5^{x+1}$, $\forall x\in[0,1]$, ajungem imediat la concluzia dorită.

XII.182 Se consideră punctele $A(-7,1),\ B(5,3),\ C(2,-4)$. Determinați mulțimea $\mathcal{M}$ a punctelor N care au coordonatele întregi , sunt situate în interiorul sau pe laturile triunghiului *ABC* şi pentru care $\mathcal{A}_{(ACN)}=\mathcal{A}_{(BCN)}$.

Prof.Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție:

● Considerăm $N(x,y)$ şi condiția de egalitate a ariilor revine la

$$\frac{1}{2}|\Delta_1|=\frac{1}{2}|\Delta_2|,\ \text{unde}\ \Delta_1=\begin{vmatrix}-7 & 1 & 1\\ 2 & -4 & 1\\ x & y & 1\end{vmatrix}\ \text{şi}\ \Delta_2=\begin{vmatrix}5 & 3 & 1\\ 2 & -4 & 1\\ x & y & 1\end{vmatrix}$$

● se ajunge astfel la: $|5x+9y+26|=|7x-3y-26|$, cu $x_M\in[-7,5]$ şi $y_M\in[-4,3]$ (*)

(necesar, nu şi suficient).

● Egalitatea anterioară conduce la două cazuri posibile:

● (I) $5x+9y+26=7x-3y-26 \Rightarrow x-6y-26=0$, adică ecuația unei drepte care conține punctul C, dar este în exteriorul triunghiului *ABC;*

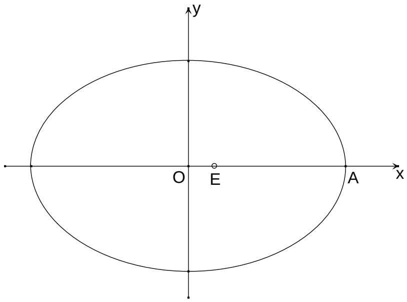
● (II) $5x+9y+26=-(7x-3y-26) \Rightarrow y=-2x$

(care reprezintă de fapt ecuația medianei din C a triunghiului ABC) punctele de pe această dreaptă, de coordonate întregi şi care satisfac condițiile (*) sunt:

$N_1(-1,2),\ N_2(0,0),\ N_3(1,-2),\ N_4(2,-4).$

● evident, $\mathcal{M}=\{N_1,\ N_2,\ N_3,\ N_4\}$.

XII.183. Undeva într-o galaxie îndepărtată, oamenii de ştiință au descoperit o stea pe nume Eraos (litera E pe figura alăturată) în jurul căreia se roteşte în sens trigonometric o planetă acoperită integral de apă, pe nume Arret, . Pentru o analiză riguroasa a acestui sistem s-au ales coordonate



astfel încât dacă O reprezintă originea, atunci avem punctule $E(1,0)$. Planeta Arret a fost studată o perioadă de 360zile , timp în care a efectuat o mişcare de rotație completă în jurul stelei Eraos, pornind din poziția notată cu A şi revenind apoi tot în A. Coordonatele planetei pot fi exprimate în orice zi în funcției de timp prin relațiile $x(t)=6\cos t$ şi $y(t)=4\sin t$, unde t reprezintă timpul exprimat în zile, $t\in[0,360]$.

a) Să se determine distanța minimă la care se va găsi planeta Arret în raport cu steaua Eraos în timpul mişcării sale de rotație?

b) Dacă temperatura de pe planetă se poate calcula cu formula $T=56-2d^2$, unde d reprezintă distanțe dintre stea şi planetă în acel moment, să se determine în câte zile din cele 360 analizate, planeta este înghețată?

Prof. Mihai şi Steluța Monea – Deva

Soluție:

a) Fie $d(t)$ distanța de la planetă la stea, în funcție de timp. Atunci din formula distanței avem $d(t)=\sqrt{(6\cos t-1)^2+(4\sin t)^2}=\sqrt{36\cos^2 t-12\cos t+1+16\sin^2 t}$ de unde obținem $d(t)=\sqrt{20\cos^2 t-12\cos t+17}$. Minimul se obține pentru cazul $\cos t=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$. Există două cazuri în care se atinge acest minim şi valoarea minimă este $d_{\min}=\frac{\sqrt{1520}}{10}$.

b) Planeta este înghețată atât timp cât temperatura este mai mică sau egală cu 0, adică $d^2\ge 28$, de unde $\cos t\le -\frac{1}{2}\Rightarrow t\in[120,240]$.

XII.184. Fie mulțimea $A=\left\{a+bi \,\middle|\, a\in(-1,1), b\in(0,1], a^2+b^2=1\right\}$.

a) Să se demonstreze că pentru orice $x,y\in A$ există un singur element $z\in A$ cu proprietatea $z^2=xy$.

b) Pe mulțimea A definim legea $\circ: A\times A\to A$, prin $x\circ y=z$, unde z este numărul unic determinat la punctul anterior. Să se arate că legea $\circ$ este comutativă dar nu este asociativă.

Prof. Mihai şi Steluța Monea – Deva

a) Folosind eventual scrierea trigonometrică, avem de fapt că $A=\left\{\cos\alpha+i\sin\alpha \,\middle|\, \alpha\in(0,180)\right\}$. Dacă $x=\cos u+i\sin u$, $y=\cos v+i\sin v$ atunci obținem că $z=\cos\frac{u+v}{2}+i\sin\frac{u+v}{2}$

b) Comutativitatea este evidentă, iar lipsa asociativității se poate verifica printr-un exemplu efectiv.

Probleme propuse

(se primesc soluții până în data de 30 august 2011, nu mai târziu!. Pe plic scrieți clasa în care veți fi din septembrie!!)

Clasa a II-a

II. 91 Câte numere naturale formate din zeci şi unități poți scrie folosind cifrele 3, 5 şi 8 ?

Neta Novac, Reşița

II. 92 Un şoricel mănâncă 4 boabe de grâu într-un minut. Câte boabe mănâncă 3 şoricei în 5 minute?

Neta Novac, Reşița

II. 93 Din fața blocului până în parc, Laura a făcut 24 de paşi. La jumătatea drumului s-a întors să-şi ia mingea pe care o uitase acasă. Câți paşi a făcut Laura, în total, până în parc ?

Neta Novac, Reşița

II. 94 La o fermă erau 425 păsări. Dintre acestea 180 sunt găini, jumătate din numărul găinilor sunt gâşte, rațe sunt cu 13 mai multe decât gâşte, iar restul sunt curci. Câte păsări sunt din fiecare rasă?

Lidia Adamescu, Reşița

II. 95 Scrie toate numerele formate din trei cifre care au suma cifrelor egală cu 15 şi cifra sutelor de două ori mai mare decât cifra unităților.

Maxim Adamescu, Reşița

II. 96 De Paşti, bunica a vopsit 66 ouă roşii, galbene şi verzi.
Ştiind că ouă roşii şi galbene au fost 48, iar galbene şi verzi 40, câte ouă a vopsit bunica din fiecare fel?

Mariana Mitrică, Reşița

II. 97 În clasa a II-a A sunt 12 fete. Fiecare dintre ele are un coleg de bancă.Dan, Gelu, Mircea şi Ionuț stau singuri în bancă.
Câți băieți şi câți elevi sunt în clasă ?

Mariana Mitrică, Reşița

II. 98 Harta județului nostru costă 25 lei şi încă jumătate din prețul ei. Cât costă harta ?

Mariana Mitrică, Reşița

II. 99 Într-o cutie sunt 58 bile albe, negre şi colorate. Numărând de două ori bilele negre, Gabi a aflat 71 bile, iar Cosmin,73 bile, după ce le-a numărat pe cele albe de două ori.
Câte bile din fiecare fel sunt în cutie ?

Mariana Mitrică, Reşița

II. 100 Adăugând la răsturnatul numarului 36 diferența dintre suma numerelor 42 şi 16 şi succesorul numărului 17 se obține numărul A. Adăugând la răsturnatul numarului 35 diferența dintre suma numerelor 43 şi 17 şi succesorul numărului 27 se obține numărul B. Stabiliți care dintre numerele A şi B este mai mare.

Nicoleta Toader, Oțelu – Roşu

Clasa a III-a

III. 91 Un stilou costă cât trei cărți. Cât costă stiloul dacă 5 cărți costă 100 lei ?

Neta Novac, Reşița

III. 92 Aflați suma numerelor a, b, c dacă *a* este cel mai mare număr par de două cifre, ambele egale, *b* este de 2 ori mai mic decât *a*, iar *c* este triplul lui *b*.

Neta Novac, Reşița

III. 93 Eu şi fratele meu avem jumătate din vârsta tatălui. Fratele meu este cu 4 ani mai mare decât mine. Câți ani am eu şi câți fratele dacă tatăl are 40 de ani ?

Neta Novac, Reşița

III. 94 Bogdan şi Alina au primit un coş cu 260 nuci. Ei au convenit să le împartă astfel: Bogdan să ia grămezi de câte 6 nuci, iar Alina grămezi de câte 7 nuci. Câte nuci are fiecare ştiind că au luat un număr egal de grămezi?

Lidia Adamescu, Reşița

III. 95 Suma a trei numere este 2 235. Dacă primul număr ar fi mai mare cu 5, atunci el ar fi de 2 ori mai mic decât al doilea şi de 17 ori mai mic decât al treilea. Care sunt cele trei numere ?

Lidia Adamescu, Reşiţa

III. 96 Trei cutii cu acuarele costă cât cinci cărți de colorat. Pentru 54 cutii cu acuarele şi 80 de cărți de colorat s-au încasat 510 lei. Cât costă fiecare produs în parte?

Maxim Adamescu, Reşiţa

III. 97 De la o moară se încarcă într-un camion 24 saci cu tărâțe şi un număr de saci cu făină. Un sac cu tărâțe cântăreşte 20 kg, iar unul cu făină de două ori mai mult decât sacul cu tărâțe. Câți saci cu făină sunt, dacă întreaga cantitate cântăreşte 2480 kg?

Maxim Adamescu, Reşiţa

III. 98 La o cantină s-au adus 50 kg de zahăr şi un număr de kilograme de orez, valorând, în total, 452 lei. Ştiind că 1 kg de zahăr costă 4 lei, iar 1 kg de orez costă 7 lei, aflați câte kilograme de orez s-au adus la cantină.

Costa Moatăr, Reşiţa

III. 99 Pentru a îndulci o cană de ceai, mama foloseşte 2 lingurițe a câte 20 g zahăr fiecare.
Ştiind că Ana, Bogdan şi Ionuț consumă zilnic câte o cană de ceai, îi ajung mamei 2 kg de zahăr pentru două săptămâni?

Mariana Mitrică, Reşiţa

III. 100 Într-o librărie au fost , luni dimineața, caiete, cărți şi reviste, în total 363. Se ştie că reviste şi cărți au fost 331, iar caiete şi cărți au fost 245. Luni s-au vândut 18 reviste, 22 de caiete şi 13 cărți. Calculați dacă luni seara, la închiderea librăriei, au rămas mai multe reviste sau mai multe cărți.

Nicoleta Toader, Oțelu- Roşu

Clasa a IV-a

IV. 91 Primul termen este 836, al doilea este răsturnatul lui, iar al treilea este egal cu diferența primilor doi termeni. Aflați suma celor trei termeni.

Neta Novac, Reşița

IV. 92 La un concurs de înot participă 16 copii. Numărul copiilor care s-au clasat înaintea lui Radu este de două ori mai mic decât al celor care au terminat în urma lui. Pe ce loc s-a clasat Radu ?

Neta Novac, Reşița

IV. 93 Andrei îi spune colegului său de bancă: adună cel mai mic număr format din patru cifre pare diferite cu cel mai mare număr format din trei cifre distincte, apoi scade sutele, zecile şi unitățile numărului obținut. Ce număr ai obținut ?

Neta Novac, Reşița

IV. 94 Dănuț are în puşculița lui 150 lei, iar Sorin are în puşculița sa 30 lei. În timp ce Dănuț cheltuieşte zilnic câte 10 lei, Sorin adaugă zilnic în puşculița sa câte 5 lei. După câte zile vor avea sume egale ?

Neta Novac, Reşița

IV. 95 Pentru a transporta o cantitate de nisip necesară pe un şantier, este nevoie de 10 camioane de 18 t. Întrucât firma de transport dispune doar de camioane de 15 t şi de 9 t, să se afle:

a) de câte camioane de 15 t, sau câte de 9 t ar fi necesar pentru transportarea nisipului ?
b) câte camioane de 15 t şi 9 t se vor trimite pentru a duce tot nisipul într-un singur transport ştiind că sunt doar 5 camioane de 9 t.

Lidia Adamescu, Reşița

IV. 96 Un număr de 5 camioane pot transporta 1400 t de grâu în 7 zile făcând 5 transporturi pe zi. Câte zile sunt necesare pentru ca aceleaşi camioane să transporte 3200 t de grâu dacă se fac zilnic câte 8 transporturi ?

Maxim Adamescu, Reşița

IV. 97 Pentru biblioteca unei şcoli s-au cumpărat 15 dicționare şi 30 volume de poezie, plătindu-se, în total, 2250 lei. Aflați cât costă un exemplar din fiecare, ştiind că un volum de poezie este de trei ori mai ieftin decât un dicționar.

Costa Moatăr, Reşița

IV. 98 Bunica are în ogradă oi, curci, o pisică şi un câine. Ştiind că sunt 22 capete şi 62 picioare, aflǎ câte oi şi câte curci are bunica.

Mariana Mitrică, Reşița

IV. 99 5 automobile marca BMW şi 3 automobile marca MATIZ consumă împreună, la 100 km, 84 litri de benzină, iar 15 automobile marca BMW şi 5 automobile marca MATIZ consumă, tot la 100 km, 200 litri de benzină. Câți litri de benzină consumă, la o sută de kilometri, fiecare marcă de automibil ?

Nicoleta Toader, Oțelu – Roşu

IV. 100 Cele 5 cifre ale numărului de telefon al familei Smith îndeplinesc simultan următoarele condiții:
a) prima cifră este de 4 ori mai mică decât a doua;
b) cifra a doua este egală cu cifra a cincea;
c) cifra a treia este produsul dintre cifra a patra şi cifra a cincea.
Puteți găsi numărul de telefon al familiei Smith ?

Nicoleta Toader, Oțelu – Roşu

Clasa a V-a

V. 220 Suma a şapte numere naturale este 2011; dacă trei dintre numere au suma egală cu 1234, arătați că produsul celor şapte numere se divide cu 4.

Mircea Fianu, Bucureşti

V. 221 Arătați că, pentru orice număr natural nenul n, există $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{N}$ astfel încât $14^n = a_n{}^2 + b_n{}^2 + c_n{}^2$.

Olimpiadă Olt

V. 222 Determinați numerele naturale nenule care împărțite la 4 dau câtul a şi restul b, iar împărțite la 10 dau câtul b şi restul a.

* * *

V. 223 Ovidiu şi Marius au plecat în acelaşi timp să se viziteze unul pe celălalt, mergând cu bicicleta. Neatenți, ei nu s-au observat unul pe celălalt în momentul întâlnirii. După întâlnire, Ovidiu a mai făcut 4 minute până acasă la Marius, iar Marius a mai făcut un minut până acasă la Ovidiu. Cât timp a mers fiecare dintre cei doi prieteni cu bicicleta ?

Olimpiadă Galați

V. 224 Suma a două numere naturale este egală cu 2011. Împărțind unul dintre numere la celălalt obținem restul 1010. Aflați cele două numere.

* * *

V. 225 Suma a cinci numere naturale nenule este 25. Aflați cel mai mare divizor comun al acestor numere, ştiind că cel puțin două dintre ele sunt distincte.

Dorel Miheț, Timişoara

V. 226 Determinați ultima cifră a produsului tuturor numerelor impare de cinci cifre.

* * *

V. 227 Câte cifre se folosesc pentru a scrie toate numerele naturale de la 1 la 999 ?

* * *

V. 228 Arătați că există un singur număr prim $n = \overline{abcd}$ cu suma cifrelor egală cu 25 şi pentru care cifrele d, c, b sunt, în această ordine, numere naturale consecutive.

Marius Golopența, Băile Herculane

V. 229 Mulțimile A şi B au următoarele proprietăți :

a) Fiecare mulțime are câte 3 elemente (numere naturale).

b) Dacă a şi b sunt elemente diferite ale mulțimii A, atunci $(a+b) \in B$.

c) $1 \in A, 2 \in A$.

d) $A \cap B$ are un singur element.

Determinați mulțimile A şi B.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Clasa a VI-a

VI. 220 Aflați numerele de trei cifre care au proprietatea că sunt divizibile cu 11 şi au suma cifrelor divizibile cu 11.

Andrei Eckstein, Timişoara

VI. 221 Determinați perechile (a,b) de numere naturale pentru care

$$\frac{a+1}{a+3}=\frac{b^2+1}{b+2}.$$

Heidi Feil, Oțelu – Roşu

VI. 222 Determinați numerele întregi x, y pentru care

$$\frac{5}{x+4}-\frac{3}{y+2}=1.$$

Adriana Dragomir, Oțelu – Roşu

VI. 223 Dacă $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, pentru orice numere naturale $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$, se notează $a=\sum_{k=1}^{n} a_k$ şi $b=\sum_{k=1}^{n} b_k$. Determinați numărul natural n pentru care sunt verificate simultan condițiile: a) $a_i-b_i=3$, pentru orice $i\in\{1,2,...,n\}$; b) Mulțimea $\{x\in\mathbb{N} / b<x<a\}$ are exact 2012 elemente.

Mircea Fianu, Bucureşti

VI. 224 Numerele naturale de la 1 la 13 se scriu pe o dreaptă astfel încât fiecare număr divide suma numerelor scrise înaintea lui. Dacă primul număr este 13 şi al doilea este 1, determinați al treilea număr ce trebuie scris.

Olimpiadă Dolj

VI. 225 Într-un triunghi ABC se notează cu I punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor interioare, iar $ID\perp AB, D\in AB$ şi $IE\perp AC, E\in AC$. Se consideră $F\in(AB), G\in(AC)$ astfel încât $FG \,//\, BC$. Demonstrați că: a) $(BD)\equiv(CE)$ dacă şi numai dacă $(AB)\equiv(AC)$; b) $FB+GC=FG$.

* * *

VI. 226 Se consideră un segment (AB) de lungime 1 m şi punctele $M_1, M_2, ..., M_n \in (AB)$ astfel încât

$$AM_1 = \frac{1}{2} \cdot AM_2 = \frac{1}{3} \cdot AM_3 = ... = \frac{1}{n} \cdot AM_n = \frac{1}{n+1} \cdot AB.$$

Determinați numărul natural n pentru care punctul M_{17} este mijlocul segmentului (AB).

Olimpiadă Iaşi

VI. 227 În triunghiul ABC există egalitățile $BC = 2 \cdot AB$ şi $m(\sphericalangle B) = 2 \cdot m(\sphericalangle C)$. Stabiliți natura triunghiului.

* * *

VI. 228 Determinați numerele naturale a, b, c, d ştiind că $0 < a < b < c$, a, b, c sunt direct proporționale cu 3, 4 şi d, iar $3a + 4b + c \leq 50$.

* * *

VI. 229 Pe laturile (AB) şi (AC) ale triunghiului echilateral ABC se construiesc în exterior triunghiurile dreptunghice isoscele BAD şi CAE, având unghiurile drepte în A. Dacă $BD \cap CE = \{F\}$, arătați că $AF \perp DE$.

* * *

Clasa a VII-a

VII. 220 Determinați perechile (x, y) de numere întregi pentru care $2x^2 - 2y \leq 15$ şi $2x^2 + x(1-4y) - 2y = 15$.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

VII. 221 Arătați că în orice poligon convex cu 21 de laturi există două diagonale care formează între ele un unghi cu măsura mai mică de un grad.

Dorel Miheț, Timişoara

VII. 222 Notăm cu $s(n)$ suma cifrelor numărului natural n.

Arătați că $s(1^2)+s(2^2)+2(3^2)+...+s(2011^2)$ este divizibil cu 9

Andrei Eckstein, Timişoara

VII. 223 Fie *ABCD* un pătrat de arie *S*. Dacă *E* este mijlocul laturii (DC), BE intersectează latura AD în *F*, *M* este mijlocul laturii (EF) şi *AM* taie latura (DC) în *Q*, arătați că aria triunghiului *DQM* este egală cu $\frac{S}{24}$.

Irina Avrămescu, Reşița

VII. 224 Se consideră un triunghi echilateral ABC cu lungimea laturii egală cu a. Se notează cu *M* şi *N* mijloacele laturilor (BC), respectiv (AC), iar cu *S* simetricul lui *B* față de dreapta AC.

Calculați: a) Perimetrul triunghiului AMN.

b) Lungimea segmentului (MS).

c) Minimul perimetrului triunghiului BMP, unde *P* este un punct oarecare situat pe (AC).

*** * ***

VII. 225 În triunghiul ABC cu $AC < 2 \cdot BC$, BM este mediană, iar CN este bisectoare $(M \in AC, N \in AB)$. Demonstrați că, dacă $m(\sphericalangle BMN) = m(\sphericalangle CNM) = 30^o$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Ioan Caşu, Timişoara

VII. 226 În triunghiul ABC, MA şi NB sunt mediane. Arătați că, dacă $AM = AC$ şi $BN = BC$, atunci triunghiul ABC este isoscel.

Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

VII. 227 Arătați că în orice triunghi ABC este adevărată inegalitatea

$$b+c-a<2b\cdot\cos\frac{A}{2}.$$

Dorel Miheț, Timişoara

VII. 228 Pe catetele AC şi AB ale triunghiului dreptunghic ABC se construiesc în exterior pătratele $ABDE$ şi $ACFG$ şi se notează $DC\cap AB=\{U\}, BF\cap AC=\{V\}$.

a)Arătați că $UV\,//\,DF$.

b)Dacă $UV\cap BD=\{P\}, UV\cap CF=\{Q\}$, arătați că $DF=PQ+UV$.

Dorel Miheț, Timişoara

VII. 229 Se consideră un trapez $ABCD$ în care $AB\,//\,CD$ şi $AB>CD$, iar M şi N sunt mijloacele laturilor (AD), respectiv (BC). Arătați că, dacă $P,Q\in(MN)$ astfel încât $MP=PQ=QN$, iar DP şi CQ se intersectează pe AB, atunci $AB=2\cdot CD$.

Traian Lalescu

Clasa a VIII-a

VIII. 220 Se consideră $x,y\in\mathbb{R}$ şi se notează $x-y=a$, $x^2-y^2=b\neq 0$.

Fără a calcula *x* şi *y*, exprimați x^3+y^3 în funcție de *a* şi *b*.

Concurs Hunedoara, 1972

VIII. 221 Arătați că unul şi numai unul dintre numerele $A=2^{2n+1}+2^{n+1}+1$ şi $B=2^{2n+1}-2^{n+1}+1$ se divide cu 5, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Ioan Caşu, Timişoara

VIII. 222 Determinați valoarea maximă a expresiei $A=\min\left\{x, y+\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right\}$, unde $x,y\in(0,+\infty)$.

Concurs Germania

VIII. 223 Determinați numerele naturale care au exact 6 divizori naturali şi pentru care suma inverşilor acestor divizori este egală cu 2.

Mircea Lascu, Zalău

VIII. 224 Se consideră numerele reale x_1, x_2, x_3 distincte două câte două. Arătați că dacă numerele reale y_1, y_2, y_3 satisfac simultan relațiile: $y_1\left(x_3 - x_2\right) + y_2\left(x_1 - x_3\right) + y_3\left(x_2 - x_1\right) = 0$ şi $y_1\left(x_3^2 - x_2^2\right) + y_2\left(x_1^2 - x_3^2\right) + y_3\left(x_2^2 - x_1^2\right) = 0$, atunci $y_1 = y_2 = y_3$.

Andrei Eckstein, Timişoara

VIII. 225 Se consideră un cub $ABCDA'B'C'D'$ cu lungimea laturii de $6\ dm$ şi în care se notează $\{O\} = AC' \cap A'C.$ Pentru vopsirea cubului se folosesc 180 g de vopsea. Se taie cubul vopsit în cubulețe cu latura de $2\ dm.$ Ce cantitate de vopsea este necesară pentru a vopsi suprafețele noi apărute, nevopsite ?

* * *

VIII. 226 Determinați numerele naturale x şi y pentru care $x^2 + 3 = 2^y.$

Mircea Lascu, Zalău

VIII. 227 Se consideră un triunghi ABC şi se notează cu G centrul său de greutate şi cu D punctul în care mediana din A intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC. Demonstrați că $BGCD$ este paralelogram dacă şi numai dacă $BC^2 = \dfrac{AB^2 + AC^2}{2}.$

Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

VIII. 228 Arătați că nu există numere naturale nenule a şi b astfel încât $N = (15a + b)(a + 15b)$ să fie o putere a lui 3.

Olimpiadă Grecia

VIII. 229 Se consideră un pentagon convex $ABCDE$ în care $\mathcal{A}(\Delta ABC)=\mathcal{A}(\Delta ABD)=\mathcal{A}(\Delta ACD)=\mathcal{A}(\Delta ADE)=s.$ Exprimați, în funcție de s, $\mathcal{A}(\Delta BCE)$.

Olimpiadă Austria

Clasa a IX-a

IX. 195 Fie x_1 o rădăcină a ecuației $x^2+px+q=0,\ p,q\in\mathbb{R}.$ Arătați că, dacă $|p|+|q|<1,$ atunci $|x_1|<1.$

Bogdan Enescu, Buzău

IX. 196 Determinați numerele naturale nenule n pentru care numărul $N=\left[\dfrac{n^3+8n^2+1}{3n}\right]$ este prim.

Gabriel Popa, Iaşi

IX. 197 Determinați numerele reale pozitive x,y,z pentru care

$$(x+y)(1+z)=8 \text{ şi } xyz=4.$$

Antoanela Buzescu, Caransebeş

IX. 198 Se consideră un triunghi ABC, un punct M în planul său şi se notează cu G_A,G_B,G_C centrele de greutate ale triunghiurilor BMC,CMA,AMB. Arătați că se poate forma un triunghi cu vectorii $\overrightarrow{AG_A},\overrightarrow{BG_B},\overrightarrow{CG_G}$ dacă şi numai dacă M este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Florin Stănescu, Găeşti

IX. 199 Determinați numerele reale a şi b astfel încât ecuațiile $x^2-ax+b=0$ şi $x^2-bx+a=0$ să aibă soluțiile numere naturale distincte.

Gheorghe Andrei, Constanța

Clasa a X-a

X. 195 Pe laturile unui patrulater convex *ABCD* construim în exterior triunghiurile isoscele asemenea *ABM*, *BCN*, *CDP* respectiv *DAQ*, având toate ca bază laturile patrulaterului *ABCD*. Arătați că $MP \perp NQ$ dacă şi numai dacă cele patru triunghiuri isoscele sunt şi dreptunghice.

Ioan Caşu, Timişoara

X. 196 Rezolvați ecuația

$$\left(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)\cdot\left(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)=1.$$

Concurs Rîmnicu Sărat, 2011

X. 197 Fie $a,b,c\in\mathbb{C}^*$ cu $|a|=|b|=|c|$.

Arătați că $0\le(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le 9.$

Gheorghe Andrei , Constanța

X. 198 Rezolvați sistemul $\begin{cases}\log_{12}\left(x^2-x\right)=\log_4 y\\ \log_{12}\left(y^2-y\right)=\log_4 z\\ \log_{12}\left(z^2-z\right)=\log_4 x\end{cases}$.

Marius Perianu, Slatina

X. 199 Determinați numerele naturale x, y şi numărul prim p pentru care

$$x^3+x=p^y+2.$$

Florin Stănescu, Găeşti

Clasa a XI-a

XI. 195 Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Arătați că, dacă $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+f'(x))=0,$ atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0.$

* * *

XI. 196 Fie $f:(-1,1)\to[-1,1]$ o funcție derivabilă cu derivata continuă. Să se demonstreze că $\exists x_0\in(-1,0]$ cu $|f'(x_0)|<2.$

* * *

XI. 197 Determinați funcțiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea

$$x^2 f(x)= f(x^2),\forall x\in\mathbb{R}.$$

Concurs Rîmnicu Sărat, 2011

XI.198 Fie $A\subseteq\mathbb{R}, A\neq\varnothing$ astfel încât

$$(x+r(y-x))\in A,\ \ \forall x,y\in A,\forall r\in\mathbb{Q}\cap[0,1].$$

Arătați că dacă pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent, cu $x_n\in A$, $\forall n\in\mathbb{N}$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\in A$, atunci A este interval.

Dan Ştefan Marinescu, Hunedoara

XI. 199 Dacă $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, arătați că $(AB-BA)^2=O_2$ dacă şi numai dacă $\det[A(B+I_2)-B(A+I_2)]=\det(A-B)$

Florin Stănescu,Găeşti

Probleme alese

A.9 Demonstrați că pentru orice numere strict pozitive a,b,c este adevărată inegalitatea $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$.

Nesbitt, 1903

A.10 Demonstrați că pentru orice numere strict pozitive a,b,c este adevărată inegalitatea

$$(a+b+c)\cdot\left(\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}\right)\geq$$
$$\leq 3\sqrt{3}\cdot(ab+bc+ca)$$

M.S.Klamkin

A.11 Se dă un triunghi ABC înscris într-un cerc $\mathcal{O}$. O dreaptă D taie laturile triunghiului ABC în A', B', C'. Se uneşte un punct I al dreptei D cu vârfurile A, B, C; dreptele IA, IB, IC taie cercul $\mathcal{O}$ în A'', B'', C''. Arătați că dreptele $A''A'$, $B''B'$, $C''C'$ se întâlnesc într-un punct pe cercul $\mathcal{O}$.

Gheorghe Țițeica

A.12 Se consideră trei cercuri $\mathcal{C}_1(O_1,r_1),\mathcal{C}_2(O_2,r_2),\mathcal{C}_3(O_3,r_3)$, exterioare două câte două şi având raze diferite. Notăm cu M_1 punctul de intersecție al tangentelor exterioare comune la cercurile $\mathcal{C}_2$ şi $\mathcal{C}_3$, cu M_2 punctul de intersecție al tangentelor exterioare comune la cercurile $\mathcal{C}_3$ şi $\mathcal{C}_1$ şi cu M_3 punctul de intersecție al tangentelor exterioare comune la cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$. Arătați că punctele M_1,M_2,M_3 sunt coliniare.

Jean le Rond d' Alembert.

Rubrica rezolvitorilor

(în numărul 37 al revistei vor fi publicate punctajele cumulate pentru soluțiile primite din numerele 35 şi 36; cu toate acestea, vă rugăm să respectați termenele stabilite – evaluarea nu poate fi făcută în septembrie pentru ambele numere !!!)

Vacanță cât mai plăcută şi mai relaxantă !