Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Caraş-Severin

REVISTA DE MATEMATICĂ

A ELEVILOR ŞI PROFESORILOR

DIN JUDEŢUL CARAŞ-SEVERIN

Nr. 34, An XI – 2010

Editura „Neutrino”
Reşiţa, 2010

Titlul: Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din județul Caraş-Severin
I.S.S.N. 1584-9481

Mobil: 0741017700
www.neutrino.ro
E-mail: contact@neutrino.ro

CUPRINS

Gânduri

♦ O parte din timp ne este răpită, alta ne este sustrasă, alta se scurge. Dar cea mai urâtă pierdere este aceea datorată neglijenței. Şi dacă vrei să bagi de seamă vei vedea că cea mai mare parte a vieții noastre o pierdem făcând ce nu trebuie, mare parte făcând nimic, întreaga viață făcând altceva decât aspirăm să facem.

Seneca

♦ Nu îndrăznim, nu pentru că lucrurile sunt dificile, ci pentru că nu îndrăznim, lucrurile sunt dificile.

Seneca

♦ Eu posed cu adevărat doar ceea ce am dăruit.

Seneca

♦ Dacă vrei să fii iubit, iubeşte!

Seneca

♦ Acoperişul de paie a adăpostit oameni liberi; sub marmură şi sub aur locuieşte robia.

Seneca

♦ Pentru aceasta m-am ascuns şi am închis uşile, ca să pot fi de folos la mai mulți.

Seneca

♦ Prefer să deranjez cu adevărul, decât să fac pe plac cu linguşiri.

Seneca

♦ Nimeni nu ajunge la înțelepciune din întâmplare.

Seneca

♦ Fii îngăduitor, căci toți avem nevoie de iertare.

Seneca

Matematica...altfel

de Ovidiu Bădescu

Partea a IV-a. Tot despre numere...

Vom prezenta în cele ce urmează câteva dintre proprietățile individuale atribuite de pitagoreici(şi nu numai) unor numere naturale.

Numărul 1 era considerat sursa tuturor celorlalte numere, simbolizând rațiunea. (Să gândim doar la faptul că, adunând succesiv 1 la el însuşi, construim mulțimea numerelor naturale nenule:

$$1, 1+1=2, 2+1=3, 3+1=4, \ldots \text{etc.}$$

Numărul 2 era considerat primul număr feminin, asociat opiniei, dezbinării, chiar ipocriziei şi duplicității. Din punct de vedere geometric, acest număr îşi găsea exprimarea în *dreaptă*(determinată de *două* puncte distincte).

Numărul 3 a fost considerat primul număr adevărat masculin, asociat armoniei(combinând unitatea (1) cu diviziunea (2)). Geometric, 3 era asociat *triunghiului*(*trei* puncte nesituate pe o aceeaşi dreaptă determină un triunghi).

Numărul 4 era, pentru pitagoreici, un număr asociat justiției şi ordinii. Geometric, conducea la vizualizarea *tetraedrului*(o piramidă cu *patru* fețe triunghiulare); față de triunghi, a cărui arie are două dimensiuni, volumul tetraedrului este tridimensional.

Numărul 6 era considerat primul număr *perfect*, numărul creației. 6 este produsul primului număr feminin, 2, cu primul număr masculin: 3. Asocierea adjectivului *perfect* se datorează proprietății lui 6 de a fi egal cu suma tuturor divizorilor săi naturali, cu excepția sa: $6=1+2+3$.
(Care este următorul număr cu această proprietate ?). Filozoful Philon din Alexandria sugera ideea că Dumnezeu a creat lumea în şase zile deoarece 6 era un număr *perfect*.

Numărul 10 era cel mai venerat, deoarece $10=1+2+3+4$, adică 10 combina proprietățile de unicitate (1), polaritate(exprimată prin 2), armonie (3) cu spațiul şi materia(exprimate prin 4). 10 reprezenta aşadar întregul cosmos.

Vom continua, în numărul viitor, începând cu un număr mai special: 5. (Poate ne scrieți chiar voi câte ceva !).

Naşterea numerelor

(minipiesă într-un act şi un tablou)

Micul matematician: Era la începutul lumii...
O voce: La naşterea numerelor ?
Micul matematician: Da, să zicem: la naşterea numerelor.
Lumina scade. Apoi este noapte. Tăcerea nopții.
Ziua se trezeşte. Apare, ridicat pe piciorul său unic, Unu.
Micul matematician: Într-o zi a fost *Unu*.
Aceasta a fost prima zi.
Ieri nu exista,
Mâine aştepta.

Unu se uită în stânga şi în dreapta, ca şi cum s-ar asigura că este singur.

Unu: Unuuu !
Micul matematician: Din Universul nesfârşit,
Strigătul său se întoarce înzecit,...
El a fost singurul care l-a auzit.
Unu, vertical pe talpa sa unică, strigă.
Unu: Sunt uniiic !
Micul matematician: El va rămâne unicat,
Plin de el şi încântat.
Apoi, arătând spre Unu: Şi s-a iubit şi s-a iubit,
Până când s-a simțit rănit,
Că niciodată el nu s-a privit!
După o scurtă pauză: Să se vadă, să se vadă,
La o oglindă s-ajungă degrabă!
Unu, săltăreț, pe unicul său picior parcurge scena.
Micul matematician: Pe piciorul său unic, el străbate lumea,
Toc, tac,..., toc, tac,...toc, tac,
Acolo-i apa limpede a unui lac !
Unu se apropie şi el de lac, se apleacă...
Micul matematician: El se-nclină,
El se vede,
Îi arătos !
El se-apleacă,
Se sărută,
Radios !
Dar, dintr-o dată, el este doi.

Doi iese din lac.

Micul matematician: (*adresându-se publicului*): Ei, da', pentru a se iubi cu adevărat, trebuie să fie doi.

(După o mică pauză): Apa străluceşte,
Diamant ce clocoteşte,
Ea se-nvârte parcă-i beată
Şi devine-nvolburată !

Se zăreşte ieşind încă ceva din lac.

Micul matematician: O, un altul, încă unul ?

Trei iese şi el din apă.

Micul matematician: Cine eşti tu ?

Trei: Numele meu este Trei(*şi arată de trei ori spre Unu).*
Eu sunt tu, tu şi tu.

Unu: Tu pretinzi că tu eşti eu, eu şi eu ?

Trei: Da, eu, Trei, sunt tu, tu şi tu.

Micul matematician: S-a pornit ! S-a pornit !
Acest voiaj spre nesfârşit
Ce nu mai poate fi oprit.

Pe un tablou, Micul Matematician scrie: 1+1+1+1+.

Unu: Unu plus unu, plus unu, plus unu.
Eu, plus eu, plus eu.

(Din ce în ce mai repede)
Unu plus unu, plus unu, plus unu...
Eu, plus eu, plus eu.

(Apoi calm) eu şi eu... şi eu, încă o dată
şi eu întotdeauna.
Întotdeauna eu.
Eu în sus, eu în plus, întotdeauna plus !
Nu există decât de la unu la altul,
De la unic la mai mulți.

Micul matematician:*(către public):* şi *Unu* se adună cu el însuşi, generând numerele de la unul la altul, într-un lanț fără sfârşit.

Apoi, mândru, Unu îşi bate pieptul, înainte de a semnala orgolios mulțimea de numere de la picioarele sale.

Unu: Unu şi altele!*(pe fața sa a încremenit un rictus de superioritate).*
Unu le dispreţuieşte pe celelalte.
Ce-ar fi fost ele fără mine,
Ele toate, care nu sunt decât multiplii mei

*(după un extras din piesa **Micul matematician fără importanță** de Denis Guedj)*

Cangurași în 2010

Poiana Pinului – un loc minunat în zona Buzăului. Un loc înconjurat de o falnică pădure de pini. Cu siguranță, de aici îi vine și numele!

Cum am ajuns în Poiană ?! Ca însoțitor de grup.

În urma probei de baraj a Concursului Internațional de Matematică Aplicată „Cangurul 2010”, în județul nostru s-au evidențiat șase elevi (trei la ciclul primar, trei la ciclul gimnazial). Premiul oferit de organizatori câștigătorilor a fost o tabără la **Poiana Pinului**, în perioada 21 iunie - 28 iunie 2010.

Așadar, am pornit la drum cu Teodora Potocean (clasa a III-a, cu bucurie trebuie să spun: **eleva mea!**), Alexandru Branca (clasa a IV-a) și Anca Ciobanu(clasa a VI-a), elevi la Școala cu Clasele I-VIII Nr.2, Reșița, Darian Fenyes (clasa a IV-a) de la Școala cu Clasele I-VIII Nr.7, Vlad Bălean(clasa a V-a), elev la Școala cu Clasele I-VIII Nr.9, tot din Reșița și Andrada Balmez(clasa a VI-a) de la Școala cu Clasele I-VIII „Romul Ladea” din Oravița.

În tabără erau elevi din toate județele țării. Și mai mici... și mai mari…puzderie!

Noi, Carașul, chiar am format o echipă! Unii erau la prima participare (Teodora), alții veneau aici pentru a patra oară, extraordinar și sigur benefic: Anca!.

Programul taberei a permis copiilor să se înscrie în diversele cercuri de activități(Pictură pe sticlă, Matematică distractivă, Tangram, Ceramică, Teatru, Abilități practice, Decorațiuni interioare, Ritm și muzică, Revista taberei). N-au lipsit competițiile sportive, excursiile la Vulcanii Noroioși și la Mănăstirea Ciolanu, chiar dacă ploaia ne-a fost potrivnică!

Elevii noștri s-au implicat în multe activități, dar „ținta” lor a fost tot ceea ce ținea de MATE: **Concursul Gazetei Matematice**, Concursul **Problema Zilei**”, Concursul **PRIM**, Concursul de matematică **Căngurașul.**

Cele mai mari emoții au apărut în ziua concursului propriu-zis. Aveam încredere în puterile lor. Știam că sunt foarte buni. Dar, ca ei, erau atâția!...

În sfârșit! Festivitatea de premiere a încheiat tabăra.

Carașul a fost aplaudat de la primul concurs de postere până la cel mai important-**Cangurul Matematic.**

Aş vrea să-i evidenţiez pe fiecare:

● Ciobanu Anca	**Premiul I**	○ Concursul Cangurul Matematic
	Premiul I	○ Problema Zilei
	Premiul III	○ Concursul PRIM
	Premiul I	○ Decoraţiuni interioare
	Premiul III	○ Pictură pe sticlă
● Balmez Andrada	**Premiul I**	○ Concursul Gazetei Matematica
	Premiul II	○ Problema Zilei
	Premiul III	○ Concursul Cangurul Matematic
	Menţiune	○ Concursul PRIM
	Premiul I	○ Pictură pe sticlă
	Premiul I	○ Decoraţiuni interioare
● Potocean Teodora	**Diplomă de Merit**	○ Problema Zilei
	Premiul I	○ Şah
● Bălean Vlad	Premiul I, III	○ Abilităţi practice

* Ceilalţi au obţinut peste 96 de puncte, adică rezultate Foarte Bune, în cadrul concursului CĂNGURAŞUL.

*Echipajul nostru s-a situat pe LOCUL I la Concursul de postere-Cangurul.

De fapt, toţi am fost câştigători! Dar cea mai încântată rămâne tot Teodora, eleva cea mai mică. Toate gândurile şi le-a aşezat într-o mic eseu, **Raiul matematic,** ce a apărut pe prima pagină a revistei taberei „Parfum de pin”. Numai citindu-i rândurile veţi înţelege **şi bucuria, şi emoţia, şi dorinţa** de a reveni în acest loc mirific…

Raiul matematic

Potocean Teodora Aura, clasa a III-a, Şcoala cu Clasele I-VIII Nr.2, Reşiţa:

„Iată-mă în tabăra din Poiana Pinului! Din clasa a II-a am aşteptat ocazia de a câştiga această tabără! Am încercat să lupt pentru a mă întâlni cu cei mai buni matematicieni şi am reuşit. După proba de baraj a concursului Cangurul aşteptam cu emoţie rezultatele. Când am primit minunata veste, eram entuziasmată şi curioasă. Mama-mi spunea mereu să lucrez pentru că numai prin exerciţiu voi putea face performanţă.

Drumul până în acest colț de rai a fost inedit alături de cei cinci coechipieri ai Caraşului. Mi-am făcut noi prieteni şi ne-am împărtăşit gândurile. Când am ajuns, am vrut să cunosc toate locurile şi activitățile.

Iată-mă printre voi, amici, colegi, tovarăşi de tabără. E minunat! De ce? Pentru că sunt înconjurată de ceea ce mi-am dorit: eu şi micul meu Univers de mate. Mi-au plăcut competițiile de şah, atelierul de ritm şi muzică, concursurile de matematică. Am avut parte de excursii şi de plimbări, carnaval şi alte întreceri.

Mare ne-a fost bucuria când ne-am aflat reuşitele la festivitatea de premiere şi am trecut peste tristețea învingerilor. Ce mi-aş mai putea dori? Laurii la care toți tânjim, încununați de triumful cunoaşterii. Te iubesc, ştiință exactă, comoară neprețuită!

Am fost fericită pentru reuşita de a fi un cănguraş şi nu voi regreta experiența şi plăcerea acestei tabere!”

Înv. Aurica Nițoiu, Reşița

Din păcate, din fericire…

Din păcate, articolul *Matematica distractivă – o disciplină cu valențe creative* apărut în numărul trecut al revistei noastre, conține 17 rânduri identice cu cele din prefața uneia dintre cărțile Domnului Profesor Ioan Dăncilă, fără a fi menționată sursa bibliografică; ne cerem scuze şi pe această cale pentru neatenție şi mulțumim autorului pentru înțelegere.

Din fericire, cu această ocazie am ajuns să răsfoim şi alte cărți ale distinsului profesor(multe dintre ele ne erau cunoscute), astfel încât vă recomandăm cu încredere şi căldură cel puțin una dintre ele, care ni se pare absolut încântătoare şi, evident, utilă: ***Matematica copilului pe înțelesul părinților****(ghid al părinților – şi nu numai, am adăuga noi – copiilor de 4 – 10 ani),* Editura Erc Press, Bucureşti, 2009.

Ne permitem să cităm câteva rânduri:

Pentru a fi bun la matematică trebuie să nu fi ratat DEBUTUL în matematică, debut situat în primii ani de viață, cu mult înainte de a merge la şcoală!

Mai trebuie să fii convins că vei reuşi, pentru că nu există reuşită fără încredere în sine. Iar această încredere în matematică trebuie sădită de timpuriu în mintea copilului. Şi poate, în plus, îți trebuie o dispoziție pentru joc, un pic de fantezie şi încântare, pentru că în matematică multe lucruri sunt fermecătoare.

Stimați părinți,

A vă sprijini copilul să descopere matematica, ce sursă de plăcere! Îi veți oferi inițierea într-o ştiință indispensabilă lumii de mâine, lumea copiilor noştri. Ca părinți, aveți ocazia să faceți din orice moment al zilei un moment de învățare plăcută a matematicii, punând copilului întrebări care să îl încurajeze să gândească, să aibă un sens pentru el. NU trebuie să predați copilului noțiuni sau reguli matematice. Încurajați-l să pună el întrebări, ca de exemplu: Ce se întâmplă dacă...., întrebări care ***nu necesită*** *un răspuns de tipul DA/NU.*

Copilul învață prin punerea de întrebări!

Puneți-i şi dumneavoastră întrebări care să îl conducă la rezolvarea problemelor. Dacă vi se pare că „o ia aiurea”, reveniți la punctul în care raționamentul său era logic.

Arătați-i respect pentru ceea ce gândeşte, acceptații-i punctul de vedere. Nu uitați niciodată! Copiii gândesc diferit de cei adulți. Şi țineți cont: copiii obosesc repede, aşa că lucrați cu copilul dumneavoastră doar atâta timp cât este interesat. Nu-l forțați!

Dacă nu ştiți ce şi cum, sigur cartea despre care vorbim vă va ajuta. Oricum, credem că nu ar trebui să lipsească din casa niciunui părinte sau chiar învățător…

Prof. Lucian Dragomir

Un punct de vedere asupra metodelor didactice

„A găsi soluția unei probleme este o performanță specifică inteligenței...”

(George Polya)

Metodele didactice folosite de profesorii de matematică în predarea-învățarea matematicii în şcoală se împart(aşa se spune) în mai multe categorii: metode tradiționale, metode moderne, metode de învățare active şi metode de dezvoltare a creativității(am citat din una din cărțile recomandate pentru orice examen de titularizare sau de obținere a unui grad didactic superior). E posibil ca în alte cărți, măcar interesante, să mai găsim şi alte încadrări, perfect teoretizate. Credem că e foarte mult de discutat aici, începând poate chiar cu această împărțire în categorii, făcută de cine? Cine stabileşte cât e de modernă sau de tradițională o metodă sau o strategie, care e diferenţa majoră între ce facem la matematică şi ce facem, de exemplu, la biologie…

Metodele moderne de învățare(urmărind lecțiile predate prin cărți de oameni care, de cele mai multe ori, chiar ştiu ce fac, şi de multe alte ori cred că ştiu ce fac), sunt: problematizarea şi învățarea prin descoperire, modelarea matematică, metoda învățării pe grupe, învățarea prin cooperare, algoritmizarea şi instruirea programată. Pentru fiecare dintre aceste metode vom da scurte definiții(aşa se cere profesorilor care doresc să continue în această profesie, să dea definiții), apoi câteva exemple, astfel încât la final să putem concluziona dacă aceste metode *moderne* de predare sunt chiar moderne pentru matematică? Oare acum 20, 30, 40 sau chiar 50 de ani nu se foloseau în predarea matematicii?

Se poate înțelege că demersul nostru este unul distructiv; evident, ideea e aceea că dorim să folosim cele mai bune metode, tehnici, strategii, etc., pentru a trece, dincolo de termeni elevați, spre matematica apropiată elevilor, spre a apropia elevii, părinții lor, profesorii chiar, de matematică…

Aşadar, să vedem…….

1. Problematizarea .

Problematizarea este o activitate didactică complexă în care profesorul, prin întrebări, prin prezentarea materialului de învățare, oferă elevului posibilitatea să asimileze prin exercițiu, prin încercări, chiar eşuate inițial, diverse scheme fundamentale de abstractizare, de conceptualizare, de raționament şi interpretare. (Pentru elevul care**, din fericire,** citeşte acest articol, e prea mult**).** Specific problematizării şi probabil cel mai important pas este crearea de *situații - problemă.*

De ce este important să creăm o *situație problemă*? Pentru că elevul are posibilitatea să depăşească acea practică şcolară în care trebuie să învețe pur şi simplu nişte lucruri chiar dacă nu sunt bine înțelese. Elevul este determinat, împins dacă vreți, să găsească prin eforturi proprii soluția, ajutat doar de nişte mici sugestii, de întrebări abil puse (aici facem dovada talentului didactic, părerea noastră); elevul este astfel pus în situația de a-şi utiliza toate forțele intelectuale, imaginația, logica, dezvoltându-şi astfel capacitatea de muncă independentă. Asta va trebui să facă singur, în viața de după şcoală… Profesorul creează **permanent**, sau ar trebui să creeze, situații în care elevul, prin activitatea sa proprie, găseşte, „descoperă” chiar, definiții ale unor noțiuni, un algoritm de calcul, o nouă metodă de calcul etc.

Din punct de vedere pedagogic unele situații problemă sunt descrise ca fiind:

1. ***Contradicție între cunoştințele dobândite anterior şi noile condiții de rezolvare a unei probleme.***

Descoperirea de către elevi a noțiunii *progresie aritmetică*(aşadar: problematizare, învățare prin descoperire…).

Elevii lucrează încă din clasa a V-a cu şiruri de numere în care fiecare termen începând cu cel de-al doilea se obține din termenul precedent prin adăugarea aceluiaşi număr. În clasa a IX-a ei învață că aceste şiruri se numesc progresii aritmetice, că acel număr care se adaugă fiecărui termen pentru a obține termenul următor se numeşte rație. Elevii învață în clasa a V-a cum pot calcula suma a *n* termeni ai unui astfel de şir, iar în liceu învață o modalitate mult mai simplă, adică prin aplicarea unei formule, deduse logic, evident.

Exemplu*:*

Calculați suma termenilor şirului: 4, 9, 14, 19, …99

Cum procedăm, unii, de obicei, în clasa a V-a :

1) În primul rând ar trebui să aflăm al câtelea termen este 99.

2) Ar trebui cunoscut acum şi numărul de termeni ai şirului.

3) Să facem un tabel de forma(evident, se poate şi fără tabel):

nr	4	9	14	19	…	99
Poziția*(poz)* a numărului*(nr)* în şir	1	2	3	4		?

$poz = (nr+1):5, \quad poz = (99+1):5$

$poz = 100:5, \qquad poz = 20$

Vom folosi în continuare una dintre proprietățile adunării şi vom scrie suma termenilor astfel:

$$S = 4 + 9 + 14 + 19 + ... + 99$$
$$S = 99 + 94 + 89 + 84 + ... + 4$$

Prin adunarea, membru cu membru a acestor egalități, ajungem imediat la: $2S = 103 + 103 + 103 + ... + 103$, apoi $2S = 103 \cdot 20$ şi deci $S = 1030$.

Observație: Nu deținem metoda absolută, e foarte posibil ca alți dascăli de gimnaziu să folosească alte metode, eficiente, optimale deci, unele pe care le folosesc în virtutea obişnuinței… am dat doar una dintre ele… sperăm însă că dacă elevul încearcă altceva, este condus, cu abilitate, spre rezultatul corect, lăudând, apreciind, remarcând….

Altă observație: Chiar aici putem remarca altă metodă (evident, pune în evidență acelaşi demers logic):

Notăm cu a_n numărul de pe locul *n*. Avem astfel:

$$a_1 = 4 = 5 \cdot 1 - 1$$
$$a_2 = 9 = 5 \cdot 2 - 1$$
$$a_3 = 14 = 5 \cdot 3 - 1$$
$$a_4 = 19 = 5 \cdot 4 - 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = 99 = 5 \cdot 20 - 1$$

Aşadar $n = 20$.

Apoi(nu vedem totuşi de ce este chiar o **contradicție** între cunoştințele mai vechi şi cele mai noi), în clasa a IX-a, putem proceda astfel: ştim că $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$ şi $a_n = a_1 + (n-1)r, \forall n \geq 1$, de aici aflăm $n = 20$ şi apoi foarte simplu înlocuim în formula de mai sus şi aflăm suma.

Observație: Exemplul chiar credem că este nimerit pentru a crea o situație – problemă pentru elevii de clasa a IX-a, chiar pentru introducerea în domeniul progresiilor; aşadar elevii nu ştiu formule pentru termen general, pentru calcul de sume… asta încercăm acum să îi învățam, să deducă…

1) Ce observăm? Răspuns aşteptat: Fiecare termen se obține din cel precedent prin adunarea numărului natural 5.

2) Pot găsi, fără a enumera termenii şirului, care număr este pe locul 10? Răspuns aşteptat(elevii cunosc deja principiul inducției matematice): încercăm să găsim o formulă de calcul direct(sau variațiuni pe temă, în funcție de răspunsurile copiilor)…..

3) E posibil să exprim în funcție de primul termen, pe care îl cunoaştem clar, orice alt termen? Răspuns aşteptat: să vedem! Dacă $a_1 = 4$, atunci $a_2 = a_1 + 5$, apoi $a_3 = a_1 + 2 \cdot 5$, … Probabil că $a_{10} = a_1 + 9 \cdot 5$.

4) Aşa să fie? Putem verifica imediat, prin calcul… durează un minut… Problema este dacă dorim să vedem care termen este pe locul 200. Răspuns aşteptat: căutăm o formulă generală. Aceasta pare a fi(în general, elevii, cei care observă, spun aceasta **este**, adică sunt siguri): $a_n = a_1 + 5(n-1)$.

5) Sigur e aşa? Pot demonstra?....

Invitație: Rugăm profesorii, şi pe această cale, să ofere, din propria experiență la catedră, alte exemple, detaliate, sigur utile, de situații problemă, de introducere a unor noțiuni, teoreme, probleme pur şi simplu…

2. Selectarea din cunoştințele anterioare a acelora cu valoare operațională. Se poate ajunge în imposibilitatea de aplicare practică a unui mod de rezolvare posibil din punct de vedere teoretic.

Exemplul 1.

Dacă $m,n\in\mathbb{N}^*$*, demonstrați că* $(m+n)!$ *se divide cu* $m!\cdot n!$.

Soluție: $(m+n)!$ se divide cu $m!\cdot n!$ dacă numărul $\dfrac{(m+n)!}{m!\cdot n!}$ este număr natural. Suntem, cel puțin aparent, în imposibilitatea de a arăta acest lucru cu noțiunile teoretice; cei mai mulți s-ar gândi să simplifice această fracție. **Dacă** observăm că $\dfrac{(m+n)!}{m!\cdot n!}=C_{m+n}^{m}$, unde C_{m+n}^{m} este număr natural (**număr de submulțimi**) problema este rezolvată.

Exemplul 2. Vă aparține…

…am uitat, ne adresăm nu numai profesorilor… aşteptăm din partea oricui pasionat(încă) de matematică: exemple, comentarii, critici, articole, orice legat de subiect…

Recomandăm cu mare căldură lectura următoarelor cărți:

1) George Polya – Descoperirea în matematică...
2) George Polya – Cum rezolvăm o problemă?

Încheiere: Cu ajutorul vostru, vom reveni.

Prof. Iulia Cecon, Lucian Dragomir, Liceul Bănățean Oțelu – Roşu

Marginile unei mulțimi

(Partea a II-a)

În continuare vom prezenta unele aplicații care folosesc Axioma lui Cantor şi rezultate deduse din aceasta.

Problema 1. Dacă $(a_n)_n$ este un şir de numere reale convergent la numărul $l\in\mathbb{R}$ şi astfel încât $a_n\le l,\forall n\in\mathbb{N},$ atunci termenii şirului $(a_n)_n$ pot fi rearanjați pentru a obține un şir crescător.

Soluție. Fie mulțimea $A_0 = \{a_n / n \in \mathbb{N}\}$. Cum $(a_n)_n$ este convergent, rezultă că A_0 este mărginită (inferior) şi fie $b_1 = \inf(A_0)$. Dacă $b_1 \notin A_0$ atunci, conform Propoziției 2, există un subşir $(a_{k_n})_n$ al şirului $(a_n)_n$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = b_1$. Dar $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = l$, deci $b_1 = l$ şi atunci din $b_1 \le a_n \le l$ se obține că $a_n = b_1, \forall n$, fals. Deci $b_1 \in A_0$ şi fie $A_1 = A_0 \setminus \{b_1\}$. Inductiv, raționând ca mai sus, definim $A_n = A_{n-1} \setminus \{b_n\}$, rolul lui A_0 şi b_1 fiind luat de A_{n-1} şi $b_n, n \in \mathbb{N}^*$, unde $b_n = \inf(A_{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Prin construcție şirul $(b_n)_n$ este crescător şi reprezintă o rearanjare a termenilor şirului $(a_n)_n$.

Problema 2. Fie $(x_n)_n$ un şir de numere reale care satisface condiția $0 \le x_{m+n} \le x_m + x_n, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că şirul $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\ge1}$ este convergent.

Soluție. Se arată inductiv că $0 \le x_n \le n \cdot x_1 \forall n \in \mathbb{N}^*$. Într-adevăr, pentru $n = 1$ relația este evident adevărată. Presupunând că $0 \le x_k \le k \cdot x_1,\ k \in \mathbb{N}^*$ şi luând $m = k, n = 1$ avem $0 \le x_{k+1} \le x_k + x_1 \le (k+1)x_1$, deci , conform principiului inducției matematice, rezultă că $0 \le x_n \le n \cdot x_1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică $0 \le \frac{x_n}{n} \le x_1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\ge1}$ este mărginit. Conform Axiomei lui Cantor există $\alpha = \inf\left\{\frac{x_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Vom arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \alpha$.

Fie aşadar $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Atunci există $\alpha \le \frac{x_m}{m} \le \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$, deoarece $\alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ nu este minorant al mulțimii $\left\{\frac{x_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$

arbitrar, există $q,r\in\mathbb{N}$, cu $0\le r\le m-1$ astfel încât $n=q\cdot m+r$. Atunci $x_n=x_{q\cdot m+r}\le x_{q\cdot m}+x_r\le q\cdot x_m+x_r$ (unde $x_0=:0$), deci

$$\alpha\le\frac{x_n}{n}\le\frac{q\cdot x_m+x_r}{n}=\frac{x_m}{m}\cdot\frac{q\cdot m}{q\cdot m+r}+\frac{x_r}{n}\le\frac{x_m}{m}+\frac{x_r}{n}\le\alpha+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{x_r}{n},\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Cum $0\le r\le m-1$ şi m este fixat, se obține că $0\le\frac{x_n}{n}\le\alpha+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{k}{n}$, unde $k=\max\{x_r/0\le r\le m-1\},\forall n\in\mathbb{N}^*$. Atunci $\alpha\le\frac{x_n}{n}\le\alpha+\varepsilon,\forall n\ge\left[\frac{2\cdot k}{\varepsilon}\right]+1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\alpha$.

Problema 3. Fie $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ o funcție continuă. Să se arate că funcția $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sup\{f(t)/0\le t\le x\}$ este continuă.

Soluție. Fie $x_0\in(0,+\infty)$. Distingem două cazuri:

Cazul 1. Presupunem că $f(x)\le f(x_0),\forall x\in[0,x_0]$. Fie $(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)$ o vecinătate a lui $f(x_0)$. Cum f este continuă în x_0, rezultă că există $\delta_\varepsilon>0$ astfel încât $f(x)\in(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon),\forall x\in(x_0-\delta_\varepsilon,x_0+\delta_\varepsilon)$.

Avem $f(x_0)-\varepsilon<f(x)\le g(x)\le f(x_0)<f(x_0)+\varepsilon,\forall x\in(x_0-\delta_\varepsilon,x_0]$ şi $f(x_0)-\varepsilon<f(x_0)\le g(x)<f(x_0)+\varepsilon,\forall x\in(x_0,x_0+\delta_\varepsilon)$, deci

$g(x)\in(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)=(g(x_0)-\varepsilon,g(x_0)+\varepsilon),\forall x\in(x_0-\delta_\varepsilon,x_0+\delta_\varepsilon)$,

ceea ce probează continuitatea lui g în punctul x_0.

Cazul 2. Există $a\in[0,x_0)$ astfel încât $f(a)>f(x_0)$. Funcția $f:[0,x_0]\to\mathbb{R}$, fiind continuă, îşi atinge maximul într-un punct $\alpha\in[0,x_0)$. Atunci $g(x)=f(\alpha),\forall x\in[0,x_0]$. Cum $f(x_0)<f(\alpha)$, există $\varepsilon>0$ astfel încât $f(x)<f(\alpha)$, $\forall x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$, şi atunci $g(x)=f(\alpha)$, $\forall x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$, şi deci, g fiind funcție constantă pe $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$, este continuă în x_0.

În cazul $x_0=0$, fie $(f(0)-\varepsilon,f(0)+\varepsilon)$ o vecinătate a lui $f(0)$. Cum f este continuă în $x_0=0$, deducem că există $\delta_\varepsilon>0$ astfel încât

$f(x)\in\left(f(0)-\varepsilon, f(0)+\varepsilon\right), \forall x\in\left[0,\delta_\varepsilon\right) \Rightarrow f(0)-\varepsilon < f(0)\le g(x) < f(0)+\varepsilon, \forall x\in\left[0,\delta_\varepsilon\right).$
Cum $f(0)=g(0)$ se obține că g este continuă în $x_0=0.$

Problema 4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că pentru orice $a,b\in\mathbb{R}, a<b,$ există $c_1,c_2\in[a,b], c_1\ne c_2$ astfel încât $f(c_1)=f(c_2)=\max\left\{f(x)/x\in[a,b]\right\}.$ Să se arate că f este funcție constantă.

Soluție. Fie $a,b\in\mathbb{R}, a<b$ și fie mulțimea $A=\left\{c\in[a,b]/\ f(c)=\max\left\{f(x)/x\in[a,b]\right\}\right\}.$ Cum f este continuă, conform Teoremei 8, rezultă că $A\ne\varnothing.$ Evident că A este mărginită, deci există $\alpha=\inf(A)$ și $\beta=\sup(A).$ Vom arăta că $\alpha\in A$ și $\alpha=a.$ Dacă $\alpha\notin A$ atunci, conform Propoziției 2, există un şir $(x_n)_n$ de elemente din A cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\alpha$ şi, cum f este continuă, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\max\left\{f(x)/x\in[a,b]\right\}=f(\alpha),$ deci $\alpha\in A,$ fals. Aşadar, oricum, $\alpha\in A$. Dacă $a<\alpha,$ atunci $f(a)<f(\alpha)$ şi există $d_1,d_2\in[a,\alpha]$ astfel încât $d_1<d_2$ şi $f(d_1)=f(d_2)=\max\left\{f(x)/x\in[a,\alpha]\right\}=f(\alpha).$ Atunci $d_1<\alpha$ şi $d_1\in A,$ ceea ce contrazice faptul că $\alpha=\inf(A)$. Aşadar $a=\inf(A)\in A,$ deci $f(a)=\max\left\{f(x)/x\in[a,b]\right\}.$ Analog $f(b)=\max\left\{f(x)/x\in[a,b]\right\},$ deci $f(a)=f(b),$ deci f este funcție constantă.

Problema 5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că pentru orice $a,b\in\mathbb{R}, a<b,$ există $c_1,c_2\in[a,b], c_1\le c_2,$ astfel încât $f(c_1)=\min\left\{f(x)/x\in[a,b]\right\}$ şi $f(c_2)=\max\left\{f(x)/x\in[a,b]\right\}.$ Să se arate că f este crescătoare.

Soluție. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ cu $a<b.$ Vom arăta că $f(a)\le f(b).$ Din enunț rezultă că există $c_1,c_2\in[a,b], c_1\le c_2,$ astfel încât $f(c_1)=\min\left\{f(x)/x\in[a,b]\right\}$ şi $f(c_2)=\max\left\{f(x)/x\in[a,b]\right\}.$ Fie mulțimile $A=\left\{c\in[a,b]/\ f(c)=\min\left\{f(x)/x\in[a,b]\right\}\right\}$ şi

$B=\{c\in[a,b]/\ f(c)=\max\{f(x)/\ x\in[a,b]\}\}$. Cum $c_1\in A$ şi $c_2\in B$, rezultă că A şi B sunt nevide, şi, fiind mărginite, există $\alpha=\inf(A)$ şi $\beta=\sup(B)$. Vom arăta că $\alpha\in A$ şi $\alpha=a$. Dacă $\alpha\notin A$ atunci, conform Propoziției 2, există un şir $(x_n)_n$ de elemente din A cu $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$ şi, cum f este continuă, rezultă că

$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\min\{f(x)/\ x\in[a,b]\}=f(\alpha)$, deci $\alpha\in A$, fals. Aşadar, oricum, $\alpha\in A$. Să presupunem acum că $a<\alpha$. Atunci $a\in A$, deci $f(a)>f(\alpha)$. Din enunț, există există $d_1,d_2\in[a,\alpha]$, $d_1\le d_2$, astfel încât $f(d_1)=\min\{f(x)/\ x\in[a,\alpha]\}$ şi $f(d_2)=\max\{f(x)/\ x\in[a,\alpha]\}$.

Atunci $f(d_1)=f(\alpha)$ şi $f(d_2)\ge f(a)>f(\alpha)$, deci $d_1\ne d_2$, deci $d_1<d_2$, şi atunci $d_1\in A, d_1<\alpha$, ceea ce contrazice faptul că $\alpha=\inf(A)$. Aşadar $\alpha=a=\inf(A)\in A$, deci $f(a)=\min\{f(x)/\ x\in[a,b]\}$. Analog se arată că $\beta=b=\sup(B)\in B$, deci $f(b)=\max\{f(x)/\ x\in[a,b]\}$. Din cele de mai sus rezultă că $f(a)\le f(b)$, deci f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Problema 6. Fie $f:[0,1]\to[0,1]$ o funcție continuă în 0 şi 1, care are limite laterale în orice punct şi care verifică $f(x-0)\le f(x)\le f(x+0)$, pentru orice $x\in(0,1)$. Arătați că:

a) pentru mulțimea $A=\{x\in[0,1]/\ f(x)\ge x\}$, $\sup(A)\in A$;

b) există $x_0\in[0,1]$ astfel încât $f(x_0)=x_0$.

Soluție.

a) Să presupunem că $\alpha=\sup(A)\in(0,1)$ şi că $\alpha\notin A$, deci $f(\alpha)<\alpha$. Atunci, conform Propoziției 2, există un şir $(x_n)_n$ de elemente din A cu $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$. Dar $x_n<\alpha,\forall n$, şi, cum există $f(\alpha-0)$, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(\alpha-0)\le f(\alpha)<\alpha$. Atunci există $n_\alpha\in\mathbb{N}$ astfel încât $f(x_n)\le\dfrac{f(\alpha-0)+\alpha}{2},\forall n\ge n_\alpha$. Dar $x_n\in A,\forall n$, deci $f(x_n)\ge x_n,\forall n$, deci $x_n \le \frac{f(\alpha-0)+\alpha}{2}, \forall n \ge n_\alpha$. Prin trecere la limită rezultă că $\alpha \le \frac{f(\alpha-0)+\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha \le f(\alpha-0)$, fals. Aşadar $\alpha \in A$, şi deci $f(\alpha) \ge \alpha$. Dacă $\alpha = 1 \notin A$, atunci există un şir $(x_n)_n$ de elemente din A cu $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, şi, trecând la limită rezultă că $f(1) \ge 1$, deci $f(1) = 1$, deci $\alpha \in A$, fals. Aşadar, oricum, $\alpha \in A$. Dacă $\alpha = 0$, cum $f(0) \ge 0$, rezultă că $\alpha \in A$.

b) Vom arăta că $f(\alpha) = \alpha$, unde $\alpha = \sup(A)$ definit la punctul a).

Dacă $\alpha = 1$, atunci $f(1) \ge 1$, de unde se obține $f(1) = 1$ şi putem lua $x_0 = 1$. Dacă $\alpha = 0$, atunci $f(x) < x, \forall x \in (0,1]$, şi, cum f este continuă în 0, se obține că $f(0) \le 0$, deci $f(0) = 0$ şi putem lua $x_0 = 0$. Fie acum $\alpha \in (0,1)$. Să presupunem că $f(\alpha) > \alpha$. Considerăm un şir $(y_n)_n$ de elemente din $[0,1]$ astfel încât $y_n > \alpha, \forall n$ şi $\lim_{n\to\infty} y_n = \alpha$. Atunci $y_n \notin A$, deci $f(y_n) < y_n, \forall n$. Prin trecere la limită se obține $f(\alpha+0) \le \alpha$. Dar atunci $\alpha < f(\alpha) \le f(\alpha+0)$, ceea ce conduce la o contradicție. Aşadar $f(\alpha) = \alpha$.

Problema 7. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ avem $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \in \{f(a), f(b)\}$. Atunci funcția f este constantă.

Soluție. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ de exemplu. Vom arăta că $f(a) = f(b)$. Să presupunem prin absurd că $f(a) \ne f(b)$. Fie mulțimea $A = \{x \in [a,b] / f(x) = f(a)\}$. Deoarece $a \in A$ rezultă că $A \ne \emptyset$, şi cum A este mărginită rezultă că există $\alpha = \sup(A)$. Dacă $\alpha \notin A$ atunci există un şir de elemente $(x_n)_n$ din A cu $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$. Din $f(x_n) = f(a), \forall n$, prin trecere la limită se obține $f(\alpha) = f(a)$, deci $\alpha \in A$, contradicție. Aşadar, oricum $\alpha \in A$ şi $f(\alpha) = f(a)$. Cum $f(a) \ne f(b)$ rezultă

$\alpha < b.$ Atunci $f\left(\frac{\alpha+b}{2}\right) \in \{f(\alpha), f(b)\}$ şi cum $\frac{\alpha+b}{2} > \alpha,$ din definiția lui α se obține $f\left(\frac{\alpha+b}{2}\right) = f(b).$ Fie $y_1 = \frac{\alpha+b}{2}.$ Analog se arată inductiv că $f\left(\frac{\alpha+y_n}{2}\right) = f(b), \forall n \in \mathbb{N}^*,$ unde $y_{n+1} = \frac{\alpha+y_n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$ Se arată prin inducție că şirul $(y_n)_n$ este descrescător şi mărginit inferior de α şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \alpha.$ Cum $f(y_n) = f(b), \forall \in \mathbb{N}^*,$ prin trecere la limită se obține $f(\alpha) = f(b),$ fals. Aşadar $f(a) = f(b),$ ceea ce încheie demonstrația.

Problema 8. Fie $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că pentru orice $a,b \in \mathbb{R}, a < b,$ pentru care $f(a) = f(b),$ există $c \in (a,b)$ cu $f(a) = f(b) = f(c).$ Să se arate că f este monotonă pe $\mathbb{R}.$

Soluție. Să presupunem prin absurd că f nu este monotonă, deci că există $a < c < b$ astfel încât $f(a) < f(c) > f(b)$ de exemplu. Cum f are proprietatea lui Darboux se obține că există $c_1 \in [a,c), c_2 \in (c,b]$ astfel încât $f(c_1) = f(c_2) = \lambda < f(c).$ Fie mulțimile $A = \{x \in [c_1,c] / f(x) = \lambda\}$ şi $B = \{x \in [c,c_2] / f(x) = \lambda\}.$ Evident A şi B sunt nevide ($c_1 \in A, c_2 \in B$) şi mărginite şi fie atunci $\alpha = \sup(A)$ şi $\beta = \inf(B).$ Dacă $\alpha \notin A$ atunci, conform Propoziției 2, există un şir $(x_n)_n$ de elemente din A cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$ şi din $f(x_n) = \lambda, \forall n,$ prin trecere la limită se obține că $f(\alpha) = \lambda,$ fals.Deci, oricum, $\alpha \in A$ şi analog $\beta \in B.$ Pe de altă parte avem $\alpha < c < \beta, f(\alpha) = f(\beta) = \lambda,$ şi atunci există $d \in (\alpha, \beta)$ astfel încât $f(d) = \lambda.$ Atunci $d \in A$ sau $d \in B$, care contrazice definirea lui α şi $\beta.$ Aşadar f este monotonă pe $\mathbb{R}.$

Problema 9. Se consideră o funcție continuă $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $x = \sup\{f(t), t \le x\}.$ Să se arate că f este funcția identică.

Soluție. Dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(a) > a$ atunci $\sup\{f(t)/t \le a\} \ge f(a) > a,$ ceea ce reprezintă o contradicție, deci $f(x) \le x, \forall x \in \mathbb{R}.$ Să presupunem acum că există $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) < x_0$, deci $f(x_0) - x_0 < 0.$ Funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - x,$ fiind continuă în x_0, alegând vecinătatea $\left(\frac{3 \cdot g(x_0)}{2}, \frac{g(x_0)}{2}\right)$ a lui $g(x_0),$ există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât $g(x) \in \left(\frac{3 \cdot g(x_0)}{2}, \frac{g(x_0)}{2}\right), \forall x \in (x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0),$

Deci $g(x) < \frac{g(x_0)}{2}, \forall x \in (x_0 - \varepsilon_0, x_0],$ adică

$$f(x) < x + \frac{f(x_0) - x_0}{2} \le \frac{f(x_0) + x_0}{2}, \forall x \in (x_0 - \varepsilon_0 . x_0]. \ (1)$$

Pe de altă parte $f(x) \le x \le x_0 - \varepsilon_0, \forall x \le x_0 - \varepsilon_0.$ (2)

Atunci din (1) şi (2) avem că

$x_0 = \sup\{f(t)/t \le x_0\} \le \max\left\{x_0 - \varepsilon_0, \frac{f(x_0) + x_0}{2}\right\},$ fals, deoarece $\frac{f(x_0) + x_0}{2} < x_0.$ Aşadar $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$

Problema 10. Dacă numerele reale a şi b $(a < b)$ sunt în imaginea unei funcții continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$ arătați că există un interval $I \subset \mathbb{R}$ astfel încât $f(I) = [a, b].$

Soluție. Fie $u, v \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(u) = a$ şi $f(v) = b.$ Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $u < v.$ Fie mulțimea $A = \{x \in [u, v] / f(x) = a\}.$ Cum $a \in A$ rezultă că A este nevidă şi cum este şi mărginită, există $\alpha = \sup(A).$ Dacă $\alpha \notin A$, conform Propoziției 2, există un şir $(x_n)_n$ de elemente din A astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \alpha$ şi, cum f este continuă în α, avem $f(\alpha) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a,$ adică $\alpha \in A,$ fals. Oricum, rezultă că $\alpha \in A$ şi deci $f(\alpha) = a.$ Fie acum mulțimea

$B=\{x\in[\alpha,v]/\ f(x)=b\}$. Cum $B\neq\varnothing(v\in B)$ şi mărginită, rezultă că există $\beta=\inf(B)$. Analog se arată că $\beta\in B$ şi deci $f(\beta)=b$. Prin construcție avem că $\alpha<\beta$. Vom arăta că $f([\alpha,\beta])=[a,b]$. Cum $f(\alpha)=a$ şi $f(\beta)=b$ şi f este continuă, rezultă că $[a,b]\subset f([\alpha,\beta])$. Presupunem că există $c\in f([\alpha,\beta])\setminus[a,b]$, deci există $w\in(\alpha,\beta)$ cu $f(w)=c\notin[a,b]$.

Să presupunem de exemplu că $c<a$. Cum $f(\beta)=b>a$ şi f este continuă, rezultă că există $t\in(w,\beta)$ astfel încât $f(t)=a$, ceea ce contrazice alegerea lui α. Cazul $c>a$ se tratează analog. Cu acestea demonstrația se încheie.

Problema 11. Fie o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $t\in\mathbb{R}$, există $\delta_t>0$ astfel încât $f(x)\leq f(y)$, pentru orice $x,y\in(t-\delta_t,t+\delta_t)$ cu $x<y$. Atunci f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Soluție. Să presupunem că f nu este crescătoare pe $\mathbb{R}$, adică există $a,b\in\mathbb{R}, a<b$, astfel încât $f(a)>f(b)$. Fie mulțimea $A=\{x\in[a,b]/\ f(x)\geq f(a)\}$. Cum $A\neq\varnothing(a\in A)$ şi mărginită, există $\sup(A)=\alpha$. Sunt posibile două cazuri:

a) $\alpha\in A$, deci $f(\alpha)\geq f(a)$. Din ipoteză, există $\delta_\alpha>0$ astfel încât $f(x)\geq f(\alpha), \forall x\in[\alpha,\alpha+\delta_\alpha]\cap[a,b]$, deci $x\in A, \forall x\in[\alpha,\alpha+\delta_\alpha]\cap[a,b]$, ceea ce contravine definiției lui α.

b) $\alpha\notin A$, deci $f(\alpha)<f(a)$. Din ipoteză, există $\delta_\alpha>0$ astfel încât $\alpha-\delta_\alpha\geq a$ şi $f(x)\leq f(\alpha), \forall x\in(\alpha-\delta_\alpha,\alpha]$, deci $x\notin A, \forall x\in(\alpha-\delta_\alpha,\alpha]$, ceea ce contrazice definiția lui α. Aşadar f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Problema 12. Fie o funcție monotonă $f:[a,b]\to[a,b]$. Atunci există $t_0\in[a,b]$ cu $f(t_0)=t_0$.

Soluție. Să presupunem că f este crescătoare. Fie mulțimea $A=\{x\in[a,b]/\ f(x)\geq x\}$. Cum $A\neq\varnothing(a\in A)$ şi mărginită rezultă că există $\alpha = \sup(A) \in \mathbb{R}$. Vom arăta că $f(\alpha) = \alpha$. Avem $\alpha \geq x, \forall x \in A$, deci $f(\alpha) \geq f(x) \geq x, \forall x \in A$, deci şi $f(\alpha)$ este majorant al mulțimii A, deci $f(\alpha) \geq \alpha$ (1).

De aici se obține că $f(f(\alpha)) \geq f(\alpha)$. Atunci $f(\alpha) \in A$ şi cum $\alpha = \sup(A)$ retultă că $f(\alpha) \leq \alpha$ (2).

Din relațiile (1) şi (2) rezultă că $f(\alpha) = \alpha$. Cazul când f este descrescătoare se tratează analog.

Problema 13. Fie $f, g : [0,1] \to [0,1]$ două funcții continue astfel încât $f \circ g = g \circ f$. Să se arate că există $t_0 \in [0,1]$ astfel încât $f(t_0) = g(t_0)$.

Soluție. Fie funcția $h : [0,1] \to \mathbb{R}, h(x) = f(x) - g(x), \forall x \in [0,1]$, şi mulțimea $A = \{x \in [0,1] / f(x) = x\}$. Deoarece f este continuă, $f(0) - 0 \geq 0, f(1) - 1 \leq 0$, atunci există $a \in [0,1]$ cu $f(a) - a = 0$, adică $a \in A$, deci $A \neq \varnothing$. În plus, $A \subset [0,1]$, deci există $M = \sup(A) \in [0,1]$ şi $m = \inf(A) \in [0,1]$. Observăm că, dacă $c \in A$, adică $f(c) = c$, atunci $f(g(c)) = g(f(c)) = g(c)$, deci $g(c) \in A$. Pe de altă parte, cum f este continuă, conform unui raționament folosit anterior rezultă că $m, M \in A$, deci $f(m) = m$ şi $f(M) = M$. Atunci $g(m) \in A$ şi $g(M) \in A$. Aşadar avem $h(M) = f(M) - g(M) = M - g(M) \geq 0$ (deoarece $g(M) \in A$ şi M este majorant al lui A) şi $h(m) = f(m) - g(m) = m - g(m) \leq 0$ şi, cum h este continuă, rezultă că există $t_0 \in [m, M]$ cu $h(t_0) = 0$, adică $f(t_0) = g(t_0)$.

Problema 14. Fie o funcție $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă. Să se arate că dacă orice punct $t \in (a,b)$ este de extrem local al lui f, atunci f este funcție constantă.

Soluție. Fie $t_0 \in (a,b)$. Presupunem de exemplu că t_0 este punct de minim local. Atunci există $\alpha, \beta \in [a,b]$ astfel încât $\alpha < t_0 < \beta$ şi $f(t) \geq f(t_0), \forall t \in [\alpha, \beta]$ (1).

Fie mulțimea $A=\{t\in[a,t_0)/ f(s)\geq f(t_0),\forall s\in[t,t_0]\}$. Din relația (1) rezultă că $[\alpha,t_0)\subset A$, deci $A\neq\emptyset$. În plus $A\subset[a,b]$ şi atunci există $\inf(A)=\alpha_0\in\mathbb{R}$. Cum f este continuă, se obține că $f(\alpha_0)\geq f(t_0)$ (2), deci $\alpha_0\in A$. Vom arăta că $\alpha_0=a$. Presupunem prin absurd că $a<\alpha_0$. Fie $(t_n)_n\subset(a,\alpha_0)$ un şir crescător cu $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=\alpha_0$. Cum $t_n\notin A,\forall n$, rezultă că există $y_n\in(t_n,\alpha_0)$ cu $f(y_n)<f(t_0)$. Ținând cont că f este continuă se obține că $f(\alpha_0)=\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)\leq f(t_0)$ (3). Din relațiile (2) şi (3) rezultă că $f(\alpha_0)=f(t_0)$.

Conform ipotezei, α_0 este un punct de extrem local. Atunci există $\gamma\in[a,\alpha_0)$ cu $f(t)\geq f(\alpha_0)=f(t_0),\forall t\in(\gamma,\alpha_0)$, şi deci $(\gamma,\alpha_0)\subset A$, în contradicție cu definiția lui α_0. Aşadar $\alpha_0=a$. Repetând acelaşi raționament se arată că $f(t)\geq f(t_0),\forall t\in[t_0,b]$. Aşadar t_0 este punct de minim global al lui f. Să presupunem acum că f nu este constantă pe (a,b). Atunci există $u,v\in(a,b)$ cu $f(u)<f(v)$. Atunci u este de minim global, iar v este de maxim global. Dacă $x\in(a,b)$ este de minim local atunci $f(x)=f(u)$, iar dacă x este de maxim local atunci $f(x)=f(v)$, deci $f(x)\in\{f(u),f(v)\},\forall x\in(a,b)$. Dar f este continuă şi atunci f este constantă pe (a,b), deci şi pe $[a,b]$.

Bibliografie

1. M. Burtea, G. Burtea, Manual de Matematică M1, clasa a XI-a, Editura Carminis, Piteşti, 2004.
2. C. Mortici, 600 de probleme, Editura Gil, Zalău, 2001.
3. M. Megan, A.Sasu, B. Sasu, Calcul diferențial în $\mathbb{R}$, Editura Universității de Vest, Timişoara, 2001.
4. Colecția Gazeta Matematică.

Marina Constantinescu, profesoară Şc.Gen. C. Săvoiu, Tg-Jiu,
Mircea Constantinescu, profesor C.N.E.T, Tg-Jiu

O aplicație a unei relații metrice într-un patrulater oarecare

Scopul prezentei note matematice este semnalarea unei inegalități într-un patrulater, inegalitate care oferă o evaluare (aproximare) pentru suma pătratelor laturilor, respectiv suma pătratelor diagonalelor unui patrulater oarecare folosind distanțele de la fiecare vârf al patrulaterului până la centrul de greutate al triunghiului determinat de celelalte trei vârfuri ale patrulaterului.

Voi prezenta mai întâi fără demonstrație câteva relații metrice într-un patrulater, relații care vor fundamenta principalul rezultat al prezentei note matematice.

Propoziția 1. Dacă *M* şi *N* sunt respectiv mijloacele diagonalelor $[AC]$şi $[BD]$ale unui patrulater oarecare atunci:

$$4MN^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - \left(AC^2 + BD^2\right)$$

Propoziția 2. Dacă *G* este centrul de greutate al unui triunghi *ABC* şi *P* un punct oarecare al planului atunci

$$9PG^2 = 3\left(PA^2 + PB^2 + PC^2\right) - \left(AB^2 + BC^2 + AC^2\right)$$

Ca o consecință a Propoziției 1 amintim următorul rezultat:

Propoziția 3. Într-un patrulater oarecare suma pătratelor laturilor este mai mare sau egală decât suma pătratelor diagonalelor. Egalitatea are loc dacă $MN = 0$, adică patrulaterul este paralelogram.

Propoziția 4. Dacă $A_1A_2A_3A_4$ este un patrulater oarecare şi dacă notăm: $A_1A_2 = l_1$, $A_2A_3 = l_2$, $A_3A_4 = l_3$, $A_4A_1 = l_4$, $A_1A_3 = d_1$, $A_2A_4 = d_2$, şi dacă G_i este centrul de greutate al triughiului determinat de vârfurile al căror indice e diferit de *i*, atunci: $\sum_{i=1}^{4} l_i^2 + d_1^2 + d_2^2 = \frac{9}{4}\sum_{i=1}^{4} A_iG_i^2$

Demonstrație: Se aplică Propoziția 2 pe rând vârfului A_i, $i = \overline{1,4}$ şi triunghiului determinat de celelalte trei vârfuri obținând:

$$\begin{cases} 3\left(l_1^2+l_4^2+d_1^2\right)-\left(l_3^2+l_2^2+d_2^2\right)=9A_1G_1^2 \\ 3\left(l_1^2+l_2^2+d_2^2\right)-\left(l_4^2+l_3^2+d_1^2\right)=9A_2G_2^2 \\ 3\left(l_2^2+l_3^2+d_1^2\right)-\left(l_1^2+l_4^2+d_2^2\right)=9A_3G_3^2 \\ 3\left(l_3^2+l_4^2+d_2^2\right)-\left(l_1^2+l_2^2+d_1^2\right)=9A_4G_4^2 \end{cases}$$

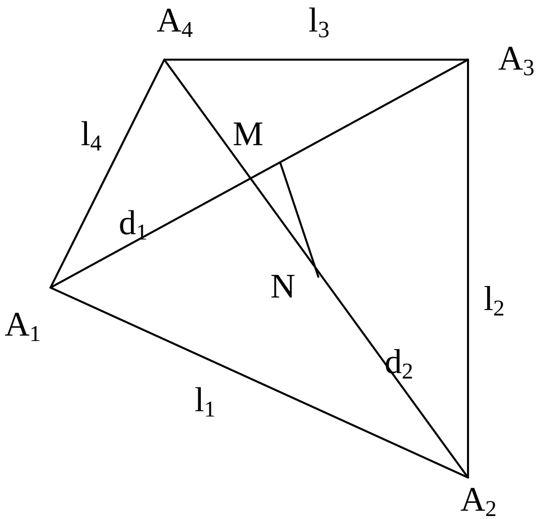


Fig 1.

Se adună aceste relații şi după împărțire cu 4 se obține relația din enunț.

Consecința 1. Cu notațiile din propoziția precedentă, dacă intr-un patrulater oarecare este îndeplinită egalitatea: $\sum_{i=1}^{4} l_i^2 = \frac{9}{8}\sum_{i=1}^{4} A_iG_i^2$, atunci patrulaterul este paralelogram. Demonstrația acestei afirmații este simplă dacă ținem cont de Observația 1 şi Propoziția 3. Se poate scrie în baza Propoziției 3 că $\frac{9}{4}\sum_{i=1}^{4} A_iG_i^2 = \sum_{i=1}^{4} l_i^2 + d_1^2 + d_2^2 \le 2\sum_{i=1}^{4} l_i^2$, adică

$\sum_{i=1}^{4} l_i^2 \geq \frac{9}{8}\sum_{i=1}^{4} A_iG_i^2$; egalitatea se obține dacă $\sum_{i=1}^{4} l_i^2 = d_1^2 + d_2^2$, ceea ce înseamnă că patrulaterul este paralelogram.

Consecința 2. Cu notațiile din propoziția 4, dacă intr-un patrulater oarecare este îndeplinită egalitatea: $d_1^2 + d_2^2 = \frac{9}{8}\sum_{i=1}^{4} A_iG_i^2$, atunci patrulaterul este paralelogram. Demonstrația acestei afirmații este asemănătoare; plecând de la Propoziția 4 şi aplicând Propoziția 3, putem scrie: $\frac{9}{4}\sum_{i=1}^{4} A_iG_i^2 = \sum_{i=1}^{4} l_i^2 + d_1^2 + d_2^2 \geq 2\left(d_1^2 + d_2^2\right)$, adică:

$d_1^2 + d_2^2 \leq \frac{9}{8}\sum_{i=1}^{4} A_iG_i^2$, iar egalitatea se obține în aceeaşi situație ca în cazul precedent.

Propoziția 3 stabileşte o relație de ordine între suma pătratelor laturilor şi suma pătratelor diagonalelor. În baza Propoziției 3 şi a Propoziției 4 putem stabili următoarea relație:

Consecința 3. Cu notațiile din Propoziția 4, într-un patrulater oarecare au loc relațiile: $d_1^2 + d_2^2 \leq \frac{9}{8}\sum_{i=1}^{4} A_iG_i^2 \leq \sum_{i=1}^{4} l_i^2$

relații care se stabilesc uşor din demonstrarea consecințelor anterioare.

Nicolae Stăniloiu, profesor, Bocşa

Probleme rezolvate din RMCS nr. 31

(în primul rând din lipsa spațiului, oferim aici, selectiv, doar soluțiile unora dintre problemele propuse în RMCS 31, anume cele cu *probleme*; vom încerca, pe viitor, ca această situație să nu se repete).

V.174 Se consideră numerele $A = 1 + 3 + 5 + ... + 2005 + 2007 + 2009$ şi $B = 2 + 4 + 6 + ... + 2006 + 2008 + 2010$. Arătați că:

a) $A < B$;

b) între A şi B nu există niciun pătrat perfect.

Prof. Marius Şandru, Reşița

Soluție: a) în loc de a scrie direct, la clasa a VI-a (făcând astfel dovada cunoaşterii unor noțiuni mai evoluate… departe de noi de a depuncta folosirea corectă şi justificată a acestora!): $A = (1+2009)\cdot 1005 : 2$, e de preferat să arătăm cum se ajunge, elementar, la acest rezultat:

$$A = 1+3+5+...+2007+2009$$
$$A = 2009+2007+...+5+3+1$$
$$\overline{2A = 2010+2010+...+2010} \quad (*)$$

Deoarece $\begin{cases} 1 = 1\cdot 2-1 \\ 3 = 2\cdot 2-1 \\ 5 = 3\cdot 2-1 \\ .... \\ 2009 = 1005\cdot 2-1 \end{cases}$,

suma din membrul drept al egalității $(*)$ are 1005 termeni.

Ajungem astfel la $A = \dfrac{2010\cdot 1005}{2}$. Mai mult pentru a arăta că $A < B$, este suficient să observăm că numărul termenilor celor două sume este acelaşi şi că $1<2,\ 3<4,\ 5<6,\ ...,\ 2009<2010$!!!

b) Deoarece $A = 1005^2$ şi $B = 2\cdot(1+2+3+...+1005) = 1005\cdot 1006$, avem: $1005^2 = A < B = 1005\cdot 1006 < 1006^2$ şi rămâne acum să observăm că între 1005^2 şi 1006^2 nu există pătratul unui alt număr natural.

V.176 Arătați că numărul $a = 27^n \cdot 10^{9m+2}$, unde $m, n \in \mathbb{N}$, poate fi scris ca suma cuburilor a patru numere naturale.

Prof. Pavel Rîncu, Dalboşeț

Soluție: Putem scrie $a = 3^{3n} \cdot 10^{9m} \cdot 100$ şi $100 = 1 + 8 + 27 + 64$, de unde:

$$a = \left(3^n \cdot 10^{3m}\right)^3 + \left(3^n \cdot 10^{3m} \cdot 2\right)^3 + \left(3^{n+1} \cdot 10^{3m}\right)^3 + \left(3^n \cdot 10^{3m} \cdot 4\right)^3.$$

VI.179 De dimineață o rândunică zboară pe o creangă a unui copac şi ciripeşte o dată, apoi zboară pe o a doua creangă şi ciripeşte de două ori, apoi pe a treia creangă şi ciripeşte de trei ori şi aşa mai departe (pe creanga 20 ciripeşte de 20 de ori…). Pe ce creangă se află rîndunica când ciripeşte pentru a 100-a oară de dimineață ?

* * *

Soluție: Incredibil, dar adevărat: majoritatea rezolvărilor primite au fost greşite. Reproducem aici o soluție bazată pe ideea elevei Miruna Ciulu: Notăm(pentru simplificarea redactării) creanga cu numărul n cu c_n şi avem:

pe c_1 rândunica ciripeşte o dată,

pe c_2 rândunica ciripeşte de 2 ori,

pe c_3 rândunica ciripeşte de 3 ori,

....

pe c_n rândunica ciripeşte de n ori.

În total, **înainte** de a zbura de pe c_n, rândunica a ciripit de $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ori. Din $\frac{n(n+1)}{2} \le 100 < \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$ deducem, eventual prin încercări, $n = 13$.(Adică ultimul ciripit de pe creanga c_{13} este al 91- lea , deci rândunica ciripeşte a 100-a oară când se află pe creanga c_{14}).

Soluție alternativă: Primul ciripit de pe c_1 este cel cu numărul 1, primul ciripit de pe c_2 este cel cu numărul 2, primul ciripit de pe c_3 este cel cu numărul 4; notăm cu p_n primul ciripit de pe creanga c_n, numărând evident de la răsărit(sau de dimineață, de când a început rândunica să ciripească). Avem astfel:

$p_1 = 1$
$p_2 = 2 = p_1 + 1$
$p_3 = 4 = p_2 + 2$
....
$p_n = p_{n-1} + n - 1$
Adunând, membru cu membru egalitățile de mai sus, după reducerea termenilor asemenea, ajungem la:

$p_n = 1 + (1 + 2 + 3 + ... + n - 1) = \frac{n^2 - n + 2}{2}$. Din $\frac{n^2 - n + 2}{2} \le 100 \Leftrightarrow n^2 - n \le 198$, obținem cel mai mare număr posibil $n = 14$.

Soluții asemănătoare, corecte, am primit de la elevii: Andrada Balmez, Nicole Dolot, Monica Neațu, Loredana Neagoe, Anca Ciobanu, gemenii Dinulică.

VII.172 Determinați numerele prime p și q pentru care $(p+1)^q$ este pătrat perfect.

Prof. Mioara Ionescu, Craiova

Soluție: Evident, o soluție este $q = 2$ şi p un număr prim oarecare. Dacă $q \ge 3$, q număr prim, atunci $p + 1 = k^2$; cum $p = 2$ nu convine, deducem că p este impar și deci $k = 2m \Rightarrow p + 1 = 4m^2$ sau $p = 4m^2 - 1$,adică $p = (2m-1)(2m+1) \Rightarrow 2m - 1 = 1, 2m + 1 = p$. Se obține astfel $p - 1 = 2 \Rightarrow p = 3$. Deci, în acest caz: $p = 3, q \ge 3$, q număr prim.
(Soluție dată de elevii Andrei Ştefănescu – Oțelu Roşu, Miruna Dalila Ciulu – Reşița, Petru Augustin Dinulică şi Ioan Septimiu Dinulică – Caransebeş, Nicole Dolot – Reşița).

VII.174 Arătați că nu există numere reale x și y pentru care

$$x > 1,\ y > 1,\ xy = 2 \text{ şi } x + y \ge 3.$$

Prof. Nistor Budescu, Dalboşeț

Soluție: Deoarece $x > 1,\ y > 1$, putem scrie: $(x-1)(y-1) > 0$, de unde $xy - x - y + 1 > 0 \Rightarrow x + y < 3$.

VII.176 Demonstrați că dacă $b > a > 0$ şi $d > c > 0$, atunci :

$$\frac{b^2}{b-a}+\frac{d^2}{d-c}\geq 4(a+c).$$

Prof. Dumitru Bătinețu – Giurgiu , Bucureşti

Soluție: Notăm $x=b-a, y=d-c>0$ şi astfel avem:

$$\frac{b^2}{b-a}+\frac{d^2}{d-c}=\frac{(a+x)^2}{x}+\frac{(c+y)^2}{y}\geq\frac{2ax+2\sqrt{a^2x^2}}{x}+\frac{2cy+2\sqrt{c^2y^2}}{y}=$$

$$=\frac{4ax}{x}+\frac{4cy}{y}=4(a+c).$$

VII.177 Într-o noapte de iarnă, străzile unui orăşel cu 2010 case au fost acoperite cu zăpadă. Arătați că se pot face poteci între case astfel încât să existe câte două case din care pornesc n poteci, pentru fiecare $n\in\{1,2,3,...,1005\}$.

Prelucrare Concurs Moldova

Soluție: Numerotăm casele cu $a_1,a_2,...,a_{1005},b_1,b_2,...,b_{1005}$ şi unim prin poteci casa a_i cu toate casele b_k, unde $k\geq 1006-i$. Astfel, fiecare casă a_i va fi unită cu *i* case b_k, iar fiecare casă b_k va fi unită cu *k* case a_i, $\forall i,k=\overline{1,1005}$.

VIII.175 Determinați numerele naturale *x, y, z* care satisfac :

$$x^2-y^2+7x-8-9y=2^z \quad \text{şi} \quad x+y\leq 2z.$$

Prof. Mirela Aldescu, Arad

Soluție: (Din păcate, foarte mulți elevi au greşit la calcule în încercarea de a obține factori comuni). Egalitatea din enunț conduce la $(x-y-1)(x+y+8)=2^z$, de unde $x-y-1=1$ şi $x+y+8=2^z$ (dacă $x-y-1$ ar fi putere a lui 2, atunci $x-y$ ar fi număr impar, deci *x* şi *y* ar avea parități diferite şi am obține $x+y+8$ impar, absurd); deducem imediat: $2x=2^z-6$ şi astfel $x=2^{n-1}-3,\ y=2^{n-1}-5,\ z=n, n\geq 4.$

Inegalitatea din enunț conduce la $2^n-8\leq 2n \Rightarrow n=4.$

Numerele căutate sunt aşadar: $x=5, y=3, z=4.$

VIII.177 Determinați numerele prime *p* pentru care numărul $2p^2+1$ este număr prim.

* * *

Soluție: Notăm, pentru simplificarea redactării, $A(p)=2p^2+1$. Avem astfel $A(2)=9$, care nu este prim şi $A(3)=19$ care este număr prim. Acum, pentru $p>3$, dacă $p=3k+1, k\in\mathbb{N}^*$, obținem că $A(p)$ este multiplu de 3, deci nu este număr prim; analog dacă $p=3k+2, k\in\mathbb{N}^*$.

VIII.179 Arătați că dacă numerele $a,b,x,y\in\mathbb{R}$ satisfac inegalitatea

$|ax+by|\le xy$, atunci $|ax+by|\ge 4ab$.

Eugen Păltănea, Braşov

Soluție: Dacă $ab\le 0$ concluzia este evidentă; dacă $ab>0$, avem: $(ax-by)^2\ge 0\Rightarrow (ax+by)^2\ge 4abxy$ (*). Presupunând, prin reducere la absurd, că $|ax+by|<4ab$, înmulțind această inegalitate cu prima din enunț, ajungem la $(ax+by)^2<4abxy$, contradicție cu (*).

IX.171 Arătați că dacă *x, y* sunt numere reale pozitive, atunci

$$4\left(x^3+y^3\right)\ge 9xy\cdot|x-y|.$$

Prof. Gabriela Drînceanu, Bratovoieşti, Dolj

Soluție: Observăm că $4\left(x^3+y^3\right)=2(x+y)\cdot 2(x^2-xy+y^2)$. Folosind inegalitatea mediilor avem:

$2(x+y)=(x+y)+(x+y)\ge |x-y|+x+y\ge 3\cdot\sqrt[3]{xy|x-y|}$ (1)

şi $2\left(x^2-xy+y^2\right)=x^2+y^2+|x-y|^2\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2|x-y|^2}$ (2).

Înmulțind, membru cu membru, inegalitățile (1) şi (2), obținem inegalitatea propusă.

Observație: Eleva Anca Semenescu(Caransebeş) a remarcat că putem considera $x\ge y$ şi astfel, notând $|x-y|=x-y=k\ge 0$, inegalitatea de demonstrat devine imediat: $8y^3+3y^2k+3yk^2\ge 0$, cu $y,k\ge 0$.

X.170 Arătați că dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcție cu proprietatea că $f(f(x))=x+f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, atunci mulțimea $A=\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)=0\}$ are un singur element.

Prof. Alfred Eckstein, Prof. Viorel Tudoran, Arad

Soluție: Pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$ cu $f(x)=f(y)$ avem:

$f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(f\left(y\right)\right)\Rightarrow x=y$, deci f este injectivă. Notăm $f(0)=a$ şi, pentru $x=0$, egalitatea din enunț conduce la $f(a)=f(0)\Rightarrow a=0$. Aşadar mulțimea *A* este nevidă şi, deoarece f este injectivă, obținem $A=\{0\}$.

XI.171 Arătați că dacă $n\in\mathbb{N}^*$ şi $A,B\in\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ sunt inversabile astfel încât $AB+\left(AB\right)^{-1}=I_n$, atunci matricea $C=A-B^{-1}$ este inversabilă.

Prof. Emil Stanciu,Prof. Ovidiu Cioponea, Dolj

Soluție:

$$\left(A-B^{-1}\right)\left(A^{-1}-B\right)=I_n-AB-B^{-1}A^{-1}+I_n=I_n-AB-\left(AB\right)^{-1}+I_n=I_n$$

XII.170 Calculați $I=\int\limits_0^1\frac{x^4(1-x)}{(1+x^5)(1+x^6)}dx$.

Prof. Mirela Aldescu, Arad

Idee: $\frac{x^4(x-1)}{(1+x^5)(1+x^6)}=\frac{x^5}{x^6+1}-\frac{x^4}{x^5+1}$.

Probleme propuse

(se primesc soluții până în data de 4 februarie 2011, nu mai târziu!)

Clasa I

I.71 Adună cel mai mic număr de două cifre identice cu cel mai mic număr scris cu cifrele 1 si 2.

Prof. Maria Popovici, Sichevița

I.72 Dacă Alex i-ar da lui Claudiu 3 timbre, atunci fiecare ar avea câte 7 timbre. Câte timbre are Alex ?

Inst. Mariana Mitrică, Reşița

I.73 Folosiți de 3 ori numărul 7 şi două operații pentru a obține numărul 7.

Prof. înv. prim. Neta Novac,Reşița

I.74 Ce numere puteți aduna cu 20 pentru a obține numere mai mari decât 30 şi mai mici decât 35?

Prof. înv. prim. Neta Novac, Reşița

I.75 Irina are 12 cireşe. Ea mai primeşte 8 cireşe şi mănâncă 5. Câte cireşe are acum Irina?

Prof. înv. prim. Neta Novac, Reşița

I.76 Andrei a rămas cu 5 baloane după ce 4 baloane le-a dat fratelui său. Câte baloane a avut Andrei?

Inst. Mariana Mitrică,Reşița

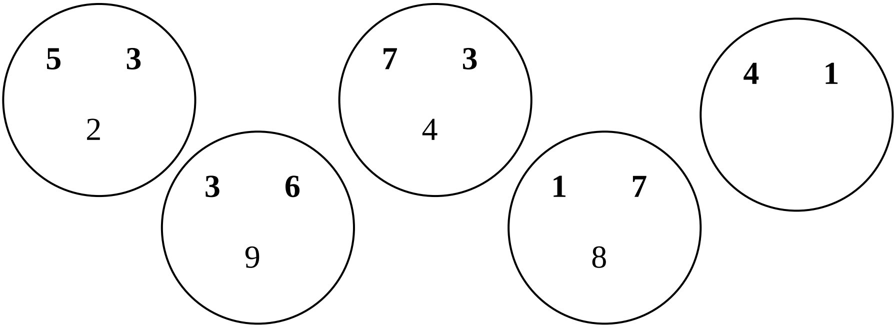
I.77 Mirela are 6 mere. Dacă ar oferi 2 mere lui Cristi, acesta ar avea de două ori mai multe mere decât Mirela. Câte mere are Cristi ?

Diana Băilă, elevă, Oțelu – Roşu

I.78 Adăugați două cuvinte care respectă aceeaşi regulă ca şi patru dintre următoarele cuvinte şi tăiați cuvântul care credeți că nu respectă regula: *ban, ren, fin, corn, con.*

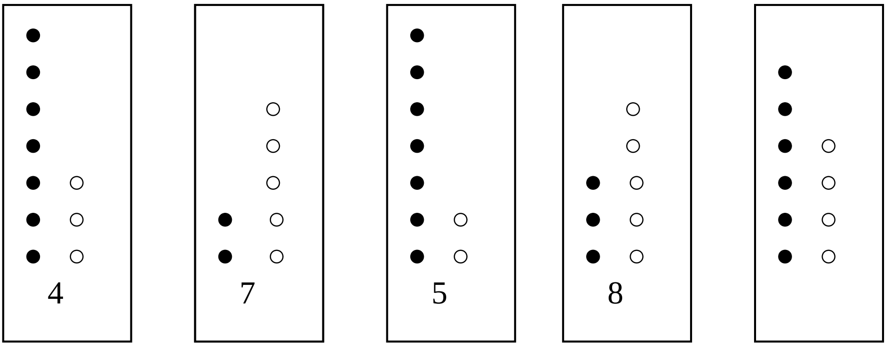
Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

I.79 Completați ultimul dintre următoarele desene:



Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

I.80 Completați ultimul dintre următoarele desene:



Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Clasa a II-a

II.71 O gâscă cântăreşte 10 kg, iar un pui de gâscă cântăreşte 2 kg. Cât cântăresc gâsca şi cei trei pui ai săi?

Prof. Mirela Florina Curea,Reşița

II.72 Avem 30 elevi într-o clasă.Scrie numărul 30 ca sumă de două numere: a) pare ; b)impare.

Prof. Maria Popovici, Sichevița

II.73 Pe o stradă, pe partea dreaptă, clădirile sunt numerotate astfel: 2,4, 6, ... , 16, iar pe partea stângă, clădirile sunt numerotate astfel: 1, 3, 5, ... 17. Câte clădiri sunt pe stradă ?

Inst. Robertha Oprea, Reşiţa

II.74 La naşterea fiului său, Bogdan, mama avea 26 de ani, iar când s-a născut fiica sa, Alina, avea 33 de ani. Câţi ani va avea fiecare copil când mama va împlini 50 ani? Cu câţi ani este mai mare Bogdan decât Alina?

Prof. înv. prim. Costa Moatăr

II.75 Ce sumă de bani a primit Andrei de la bunica lui , ştiind că dacă ar pune 2 lei ar avea dublul celui mai mic număr natural de două cifre identice, iar dacă ar lua doi lei ar avea dublul celui mai mare număr natural de o cifră.

Prof. Georgeta Turcin, Moldova – Nouă

II.76 În trei coşuri sunt mai multe mere. Dacă din primul coş se iau 6 mere şi se pun în al doilea, iar din al treilea coş se iau 4 şi se pun în al doilea, atunci în fiecare coş vom avea număr egal de mere, 21. Câte mere au fost la început în fiecare coş?

Înv. Elisaveta Vlăduţ, Reşiţa

II.77 Cum poate să aducă bunica 4 l de apă de la râu dacă are la dispoziţie un vas de 2 l şi altul de 5 l?

Inst. Mariana Mitrică, Reşiţa

II.78 Dan are 50 de cărţi de poezii, de poveşti şi de fabule. Dintre ele, 19 nu sunt cărţi de fabule, iar 48 nu sunt de poezii. Aflaţi câte cărţi are Dan de fiecare fel.

Înv. Elisaveta Vlăduţ, Reşiţa

II.79 Trei copii au strâns 75 kg de căpşuni. Câte kg a strâns fiecare copil dacă primii doi au strâns împreună 40 kg, iar ultimii doi au strâns, împreună, 60 kg?

Prof. înv. prim. Neta Novac, Reşiţa

II.80 O ladă plină cu cartofi cântăreşte 35 kg, iar lada goală, 3 kg. Câte kilograme cântăresc, doar cartofii, din 2 lăzi la fel? Rezolvă în două moduri.

Înv. Elisaveta Vlăduţ, Reşiţa

Clasa a III-a

III.71 Trei veverițe își fac provizii pentru iarnă.
Prima veveriță a adus de două ori mai mai multe alune decât a doua şi de trei ori mai puține decât a treia.Câte alune a adus fiecare veveriță, ştiind că împreună au adus 720 alune.

Prof. Georgeta Turcin, Moldova – Nouă

III.72 Într-un măr sunt câteva mere mari şi frumoase. Numărul lor este mai mare decât 16, dar mai mic decât 20. Jumătate dintre ele s-au copt. Câte mere vor rămâne în pom dacă cele coapte vor fi culese?

Inst. Eufemia Jurca, Reşița

III.73 Andrei a primit o trusă Optik în care are şi o lupă care măreşte de patru ori. Pe masă, Andrei are trei jetoane pe care sunt scrise numerele: 3, 12, şi 48. La care jeton se uită cu lupa Andrei, dacă vede un număr de 4 ori mai mare decât numărul 12?

Prof. Ioan Dăncilă, Bucureşti

III.74 Vârsta mamei este de 4 ori mai mare decât a fiului. Diferența de vârste este de 24 ani. Care este vârsta fiului?

Prof. înv. prim. Neta Novac, Reşița

III.75 O gospodină avea în curte găini şi rațe. Numărul găinilor era cu 7 mai mare decât al rațelor. După ce a tăiat 10 găini, numărul acestora era pe jumătate din cel al rațelor. Câte găini şi câte rațe avea gospodina?

Prof. înv. prim. Costa Moatăr

III.76 Tata îl întreabă pe Cosmin :
- Dacă zece prune cântăresc cât două mere, iar un măr cât patru piersici, câte prune cântăresc tot atât cât douăsprezece piersici ?
Surprins, copilul ridică din umeri. Poți să-l ajuți?

Inst. Mariana Mitrică,Reşița

III.77 La petrecerea de ziua Alinei au venit 18 copii: fete şi băieți; în total, fete au fost cu 3 mai multe decât băieți. a)Câte fete şi câți băieți a avut invitați Alina ? b)Dacă fiecare băiat i-a adus Alinei câte un buchet de 3 flori, iar fiecare fată câte o floare, câte flori a primit Alina?

Diana Băilă, elevă, Oțelu – Roşu

III.78 Într-un autobuz sunt 35 de pasageri. La prima stație coboară 8, dar urcă 12. La cea de-a doua stație coboară 16 şi urcă 9. La a treia stație urcă 3 oameni. Câți pasageri avea autobuzul la plecarea din cea de-a treia stație?

Lorena Tolea, elevă, Oțelu – Roşu

III.79 Care numere sunt mai multe : numerele de şapte cifre care au primele patru cifre 2, 0, 1, 0 (în această ordine) sau numerele de şapte cifre care au ultimele patru cifre 2, 0, 1, 0 (în această ordine) ?

Mircea Cristian, inginer, Oțelu – Roşu

III.80 Înlocuiți în fiecare dintre egalitățile de mai jos semnul ○ cu un acelaşi număr pentru a obține egalități adevărate :
a) $\bigcirc + \bigcirc : \bigcirc = 234$; b) $\bigcirc - \bigcirc : \bigcirc = 123$; c) $8 + \bigcirc \times \bigcirc = 72$; d) $4 \times \bigcirc + \bigcirc = 125$.

Mircea Cristian, inginer, Oțelu – Roşu

Clasa a IV-a

IV.71. Părinții îi dau Mariei câte 10 lei în fiecare zi, din care ea cheltuie câte 3 lei pentru biletele de autobuz şi câte 2 lei pentru dulciuri. În câte zile reuşeşte Maria să cumpere o carte care costă 45 de lei doar din economiile făcute din banii primiți zilnic de la părinți?

Inst. Eufemia Jurca, Reşița

IV.72 Suma a două numere este 156, iar la împărțirea primului număr la cel de-al doilea se obține câtul 5 şi restul 12. Care sunt numerele?

Inst. Eufemia Jurca, Reşița

IV.73 Aflați valoarea lui *a* din egalitatea: $842 - \left[(a - 24) : 2 + 275\right] = 521$

Inst. Eufemia Jurca, Reşița

IV.74 Adăugați numărul 29 la diferența dintre răsturnatul celui mai mare număr par de 3 cifre şi numărul 100. Care este răsturnatul rezultatului obținut?

Inst. Ozana Drăgilă, Reşița

IV.75 Dacă 3 creioane şi 7 caiete costă 24 lei, 1 caiet şi 1 ascuţitoare costă 5 lei, 5 creioane şi 7 ascuţitori costă 19 lei, ce rest va primi de la 100 de lei un elev care cumpără: 4 creioane, 1 ascuţitoare şi 6 caiete?

Înv. Boulescu Florica, Reşiţa

IV.76 Capra şi cei trei iezi au împreună 17 ani. Ştiind că vârstele iezilor sunt numere naturale consecutive şi că în urmă cu 5 ani capra avea dublul vârstei unuia dintre iezi , sa se afle vârsta fiecaruia.

Prof. Veronica Mărgărit, Moldova – Nouă

IV.77 Diferenţa a două numere este 15.Primul număr este de 4 ori mai mare decât al doilea. Care sunt numerele?

Prof. Veronica Mărgărit, Moldova – Nouă

IV.78 Pinocchio are înalţimea mai mare de un metru, iar nasul său măsoară 2 centimetri. După fiecare minciună pe care o spune, nasul său se dublează şi se lungeşte cu încă un centimetru. Câte minciuni a spus Pinocchio, dacă nasul său a ajuns să măsoare cât înălţimea sa?

Prof. Valer Pop, Şanţ, Bistriţa – Năsăud

IV.79 La un magazin sunt portocale în două lăzi, în prima fiind mai multe. Cu o parte din portocalele din prima ladă vânzătoarea dublează numărul celor din a doua ladă şi constată că acum, în fiecare ladă sunt 32 portocale. Câte portocale au fost la început în fiecare ladă?

Înv. Ana Modoran, Reşiţa

IV.80 Andrei şi Florin au plecat în excursie având împreună 170 lei. După ce Andrei a cheltuit 10 lei, iar Florin 4 lei, au constatat că Andrei avea de 5 ori mai puţini bani decât Florin. Câţi lei a avut fiecare copil la plecarea în excursie?

Prof. înv. prim. Costa Moatăr

Clasa a V-a

V.200 O mulţime se numeşte *utilă* dacă conţine cel puţin trei numere pare consecutive. Câte mulţimi *utile* conţine mulţimea $\{2,3,4,5,6,7,8\}$?

Olimpiadă Călăraşi

V.201 La un concurs internațional de matematică participă 100 de elevi; dintre aceştia, 10 nu cunosc nici limba germană, nici limba franceză, 75 cunosc limba germană şi 83 cunosc limba franceză. Câți dintre participanți cunosc ambele limbi străine?

Olimpiadă Covasna

V.202 Notăm cu *A* mulțimea numerelor naturale de cinci cifre care au suma cifrelor egală cu 30 şi cu *B* submulțimea numerelor din *A* care coincid cu răsturnatele lor. Determinați cel mai mic şi cel mai mare element al fiecăreia dintre mulțimile *A* şi *B*.

Olimpiadă Iaşi

V.203 Mihai are cu 7 mai mulți colegi decât colege; în clasa lui sunt de două ori mai mulți băieți decât fete. Câte colege are Maria, una dintre colegele lui Mihai?

Olimpiadă Sălaj

V.204 Comparați numerele $a = 8^{149}$ şi $b = 5^{201}$.

Andreas Grafenberger, elev, Oțelu – Roşu

V.205 Pe o tablă sunt scrise numerele 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16. Doi copii au şters pe rând câte patru numere şi s-a observat că suma numerelor şterse de unul este de trei ori mai mare decât suma numerelor şterse de celălalt. Ce număr a rămas scris pe tablă?

Olimpiadă Vrancea

V.206 Se consideră 25 de puncte albe şi 25 de puncte negre. O operație constă în alegerea a două puncte oarecare dintre cele 50 şi schimbarea culorii acestora(un punct alb devine negru, iar unul negru devine alb). Repetând această operație, este posibil ca la un moment dat cele 50 de puncte să fie colorate în alb?

Prof. Florian Dumitrel, Slatina

V.207 Produsul a două numere naturale este egal cu 96. Dacă primul dintre ele se micşorează cu 9, iar celălalt se măreşte de 4 ori, atunci produsul rămâne neschimbat. Calculați suma numerelor.

Concurs Slatina

V.208 Un număr se numeşte *fiul* unui alt număr dacă este format cu două dintre cifrele numărului inițial, numit *tata*. Dintre numerele de trei cifre cu ultima cifră 0, aflați toți *tații* cu 891 mai mari decât unul dintre *fiii* lor.

Concurs Iaşi

V.209 În mulțimea $\{1,2,3,...,n\}$ a primelor *n* numere naturale nenule, 123 de numere se divid cu 2, dar nu se divid cu 4, iar 62 de numere se divid cu 4, dar nu se divid cu 8. Aflați numărul *n*.

Concurs Cluj – Napoca

Clasa a VI-a

VI.200 Bunica împarte merele dintr-un coş celor trei nepoți astfel: primul primeşte jumătate din numărul merelor plus jumătatea unui măr, al doilea primeşte jumătate din numărul merelor rămase şi jumătatea unui măr, iar al treilea primeşte jumătate din câte au rămas plus jumătatea unui măr. În coş au rămas 4 mere întregi. Câte mere au fost în coş?

Olimpiadă Harghita

VI.201 Să se găsească cel mai mare număr natural *x* pentru care $4^{27}+4^{1000}+4^{x}$ este pătrat perfect.

Prof. Loreta Ciulu, Reşița

VI.202 Fie un punct O. În sensul acelor de ceas, considerăm 360 semidrepte $[OA_0$, $[OA_1$, $[OA_2$,…, $[OA_{359}$, astfel încât $m(\sphericalangle A_0OA_1)=1^o$, $m(\sphericalangle A_1OA_2)=2^o, m(\sphericalangle A_2OA_3)=3^o,..., m(\sphericalangle A_{358}OA_{359})=359^o$. Studiați dacă există sau nu două numere naturale $k,l\in\{0,1,2,..,359\}$ distincte, astfel încât semidreptele $[OA_k$ şi $[OA_l$ să se suprapună.

Prof. Steluța şi Mihai Monea, Deva

VI.203 Arătați că numerele $a=1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot16\cdot17$ şi $b=1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot18\cdot19$ dau acelaşi rest prin împărțire la 31.

Olimpiadă Hunedoara

VI.204 Un joc are 3 beculețe care, din când în când, se aprind, apoi se sting imediat(„clipesc”). Primul bec se aprinde la fiecare două secunde. Al doilea bec se aprinde prima dată la o secundă după aprinderea primului, apoi la fiecare trei secunde. Al treilea se aprinde prima oară la a doua aprindere a primului, apoi la fiecare cinci secunde.

a) Arătați că, la un moment dat, toate cele trei becuri vor fi aprinse simultan.
b) De câte ori, în primele trei minute, cele trei becuri sunt aprinse simultan?

Olimpiadă Neamț

VI.205 Spunem că o mulțime de unghiuri formate în jurul unui punct are proprietatea *(P)* dacă măsurile oricăror două unghiuri adiacente diferă prin 2^o.

a) Determinați măsurile exprimate prin numere întregi în cazul unei mulțimi de șase elemente care are proprietatea *(P).*
b) Arătați că nu există mulțimi formate din nouă unghiuri care să aibă proprietatea *(P).*

Olimpiadă Prahova

VI.206 Se consideră numerele raționale nenule *x, y, z* pentru care

$$\frac{2x}{3y+4z}=\frac{3y}{2x+4z}=\frac{4z}{3y+2x}.$$

a) Arătați că numărul $(x+3y+2z)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{2z}\right)$ este natural.

b) Calculați $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$.

Olimpiadă Brașov

VI.207 Un burete care conține 99% apă cântărește 600 g. După ce se evaporă o parte din apă, buretele conține 98% apă. Cât cântarește acum buretele?

Olimpiadă Harghita

VI.208 Se consideră un număr natural *n* care are produsul cifrelor egal cu un număr prim *p*. Determinați numerele *n* și *p* știind că $n+p=156$.

Olimpiadă Hunedoara

VI.209 Se dă unghiul propriu *XOY*. Pe latura *(OX* se iau punctele diferite *A* şi *B*, iar pe latura *(OY* se iau punctele diferite *C* şi *D* astfel încât $OA+OB=OC+OD$. Mediatoarele segmentelor *(AB)* şi *(CD)* se intersectează în punctul *M*.

a) Demonstraţi că $(MA)\equiv(MB)$.

b) Arătaţi că punctul *M* este situat pe bisectoarea unghiului $\widehat{XOY}$.

Prof. Mircea Fianu, Bucureşti

Clasa a VII-a

VII.200 Determinaţi numerele reale *x* şi *y* ştiind că *y* divide $x+1$, iar *x* divide $y+1$.

Olimpiadă Brăila

VII.201 Se consideră numerele $a=12n+23m$ şi $b=3n+10m$, unde $m,n\in\mathbb{Z}$. Arătaţi că, dacă 17 este un divizor al lui *a*, atunci 17 este un divizor şi al lui *b*.

Olimpiadă Argeş

VII.202 Determinaţi numerele întregi *x* pentru care numerele
$a=\dfrac{2x+1}{3x+1}$ şi $b=\dfrac{x-2}{4x+1}$ sunt simultan întregi.

Olimpiadă Ialomiţa

VII.203 Determinaţi numerele prime *p* pentru care $24p+1$ este pătrat perfect.

Olimpiadă Olt

VII.204 Determinaţi numerele naturale *x* pentru care $\sqrt{\dfrac{2x-2}{x+1}}$ este număr natural.

Concurs Satu Mare

VII.205 Determinaţi cel mai mic număr de forma $\left|3^{n+1}-3\cdot 5^{m}\right|$, unde *m* şi *n* sunt numere naturale diferite.

Prof. Mircea Fianu, Bucureşti

VII.206 Se consideră triunghiul *ABC* în care $(AB)\equiv(AC)$ şi $m(\sphericalangle BAC)=20^o$. Dacă $D\in(AB)$ astfel încât $(AD)\equiv(BC)$, calculați $m(\sphericalangle BDC)$.

Olimpiadă Bucureşti

VII.207 Se ştie că în paralelogramul *ABCD* două dintre unghiurile *CAD, ADB, BDC* au măsurile egale cu 45^o. Arătați că *ABCD* este pătrat.

Prof. Mircea Fianu, Bucureşti

VII.208 Se consideră un patrulater convex *ABCD* cu proprietatea că există $M\in(AB)$ astfel încât $MA=AD$ şi $MB=BC$. Arătați că, dacă $DM\perp MC$, atunci bisectoarele interioare ale unghiurilor *A* şi *B* ale patrulaterului se intersectează pe *DC.*

Olimpiadă Bistrița – Năsăud

VII.209 Fie $ABCD$ un patrulater în care laturile opuse nu sunt paralele. Considerăm mulțimea $\Sigma=\{P\ \text{din plan}\,|\,PA+PC=PB+PD\}$

a) Demonstrați că mulțimea Σ are cel puțin un element.
b) Dacă mulțimea Σ are un singur element, notat O, atunci $OA=OB=OC=OD$.

Prof. Steluța şi Mihai Monea, Deva

Clasa a VIII-a

VIII.200 Comparați numerele $A=\sqrt{n-a}+\sqrt{n+a}$ şi $B=\sqrt{a}+\sqrt{2n-a}$, unde $a,n\in\mathbb{N},n\geq a.$

Prof. Marin Chirciu, Piteşti

VIII.201 Determinați numerele naturale *x* şi *y* pentru care

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Olimpiadă Vâlcea

VIII.202 Demonstrați că, pentru orice numere reale pozitive *a,b,c,* este adevărată inegalitatea: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geq\sqrt{2}\cdot(a+b+c)$.

Olimpiadă Sălaj

VIII.203 Arătați că, dacă într-un triunghi dreptunghic raportul catetelor este egal cu $\sqrt{2}$, atunci două dintre medianele triunghiului sunt perpendiculare.

Concurs Bucureşti

VIII.204 Se notează cu *O* centrul cercului circumscris unui triunghi *ABC* în care $m(\sphericalangle A)=4\cdot m(\sphericalangle C)$. Arătați că, dacă bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ intersectează cercul în punctul *M* astfel încât $m(\sphericalangle AOM)=120^o$, atunci triunghiul *ABC* este isoscel.

* * *

VIII.205 Se consideră un patrulater convex *ABCD* în care $m(\sphericalangle BAC)=25^o, m(\sphericalangle BCA)=40^o, m(\sphericalangle BDC)=50^o, m(\sphericalangle BDA)=80^o$. Calculați măsura unghiului format de diagonalele patrulaterului.

Concurs Vâlcea

VIII.206 Se consideră un tetraedru *VABC* în care VE este bisectoarea unghiului AVB şi *VF* este bisectoarea unghiului BVC. Notăm $AF\cap CE=\{I\}$ şi $BI\cap AC=\{S\}$. Demonstrați că VS este bisectoarea unghiului CVA.

Olimpiadă Hunedoara – 2005

VIII.207 Se consideră un număr natural *n* pentru care există $x,y\in\mathbb{Z}$ astfel încât $n=3x^2+14y^2$. Arătați că există $a,b,c\in\mathbb{Z}$ astfel încât $n=a^2+b^2+c^2$.

* * *

VIII.208 Se dau punctele necoplanare *P,A,B,C,D.* Dacă $PB\perp CD, PD\perp BC, PA\perp BD$, arătați că picioarele perpendicularelor duse din *A* şi *C* pe *BD* coincid.

Olimpiadă Caraş – Severin , 1992

VIII.209 Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care

$$\min\left(5x-4, 2-x\right) \geq \max(x, 3x-2).$$

Concurs Bacău

Clasa a IX-a

IX.185 Rezolvați ecuația: $\left[\frac{2x-1}{6}\right]+\left[\frac{x+1}{3}\right]=\frac{x+1}{2}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *a.*

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

IX.186 Arătați că, dacă *a,b,c* sunt numere reale astfel încât $a^2+ab+ac \leq 0$, atunci $b^2-4ac \leq 0$.

Concurs Bucureşti

IX.187 Demonstrați că, dacă $a,b,c \in [0,1]$, atunci

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab} \leq 2.$$

Concurs Tg.Jiu

IX.188 Se notează cu *D, E, F* mijloacele laturilor *(BC), (CA),* respectiv *(AB)* ale unui triunghi *ABC*. Dacă *M* este un punct în planul triunghiului pentru care este adevărată egalitatea $2\cdot\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right)=\overrightarrow{MC}$, determinați numărul rațional *q* pentru care $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=q\cdot\overrightarrow{CF}$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

IX.189 În plan se consideră o mulțime de vectori S care îndeplineşte condițiile:

1) Toți vectorii din S au module egale;
2) Toți vectorii din S au direcții diferite;
3) Suma tuturor vectorilor din S este nulă.

Atunci:

a) Dați exemplu de mulțime S cu trei elemente;
b) Demonstrați că S nu poate avea 4 elemente;

c) Demonstrați că pentru orice număr natural n impar, mai mare sau egal cu 5, se poate construi o mulțime S cu n elemente;
d) Demonstrați că pentru orice număr natural n par, mai mare sau egal cu 6, se poate construi o mulțime S cu n elemente.

Prof. Steluța şi Mihai Monea, Deva

Clasa a X-a

X.185 Determinați numerele complexe a şi b pentru care: $|a|=|b|=1$ şi $1+ab=\overline{a}+\overline{b}$.

Prof. Dinu Şerbănescu, Bucureşti

X.186 Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $x^{\log_3(x-1)}+2(x-1)^{\log_3 x}=3x^2$.

Olimpiadă Caraş – Severin, 2003

X.187 Fie $a,b,c\in(1,\infty)$ astfel încât $abc=10$. Demonstrați că $\log_a 10+\log_b 10+\log_c 10\geq\sqrt{3\log_a 10\cdot\log_b 10\cdot\log_c 10}$

Prof. Steluța şi Mihai Monea, Deva

X.188 Determinați numerele reale x pentru care este adevărată egalitatea

$$\sqrt[3x]{7-\sqrt[6x]{12x}}=\sqrt[6x]{6x}.$$

Andreas Grafenberger, elev, Oțelu Roşu

X.189 Se consideră un număr natural nenul *n*. Rezolvați ecuația $(2n+i\cdot z)^{2n}+(2n-i\cdot z)^{2n}=0$, unde $i^2=-1$.

* * *

Clasa a XI-a

XI.185 Arătați că, oricare ar fi matricea $A\in\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, există matricele $B,C\in\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ astfel încât $A=B+C$, cu $\det(B),\det(C)\in\mathbb{R}$.

Olimpiadă Călăraşi

XI.186 Se consideră $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $\det(A - I_2) = 2$ şi $\det(A + I_2) = 4$. Calculați $\det A$ şi $\det(A - 2I_2)$.

Prof. Gheorghe Andrei, Constanța

XI.187 Determinați matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ştiind că $A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Olimpiadă Olt

XI.188 Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{1 + n \cdot x_n}, \forall n \geq 1.$ Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n}$.

Cristian Zanfir, elev, Caransebeş

XI.189 Se consideră $a \in \mathbb{R}^*{}_+, b \in \mathbb{R}$. Studiați existența limitei în origine a funcției $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{a} \cdot \left[\dfrac{b}{x}\right]$, unde $[t]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *t*.

Olimpiadă Iaşi

Clasa a XII-a

XII.185 Arătați că, pentru orice $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, este adevărată inegalitatea:

$$\frac{3x}{\sin x} > 4 - \cos x.$$

Prof. Mircea Iucu, Reşița

XII.186 Determinați $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x + \sin 2x + 1}{e^{-x} + \sin^2 x + 1} dx.$

Olimpiadă Buzău

XII.187 Se consideră un grup multiplicativ *G*, având ordinul *2n*. Stabiliți paritatea numărului natural nenul *n*, ştiind că numărul elementelor de ordinul 2 din grupul *G* este egal cu *n*.

Olimpiadă Călăraşi

XII.188 Calculați: $\int (x\cos x + \sin x)\ln x\,dx$.

Prof.Steluța și Mihai Monea, Deva

XII.189 Determinați un interval $I \subset \mathbb{R}$, cu $0 \in I$, și o funcție $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $f(0) = 1$, iar $\frac{1}{f}$ este o primitivă a lui *f*.

Prof. Ovidiu Pop, Satu Mare

Probleme alese

(se primesc soluții până în data de 4 februarie 2011, de la orice elev, indiferent de clasă; fiecare dintre aceste probleme se punctează de la 0 la 25 de puncte și se adună la punctajul obținut pentru soluțiile celorlalte probleme)

A.1 Se consideră o mulțime finită de puncte în plan cu proprietatea că orice dreaptă determinată de două puncte mai conține cel puțin un punct. Arătați că toate punctele sunt coliniare.

(Sylvester, 1893)

A.2 Dacă *p* este un număr prim, $p > 3$, iar $n = \frac{4^p - 1}{3}$, arătați că *n* divide $2^n - 2$.

(Paul Erdös)

A.3 Determinați perechile (x, y) de numere întregi pentru care egalitatea $1 + x + x^2 + x^3 = y^2$ este adevărată.

(H. Brocard, 1875)

A.4 Dacă diferența cuburilor a două numere naturale consecutive este pătratul unui număr natural, atunci acel număr este suma pătratelor a două numere consecutive.

(R. Lyness, 1948)

Rubrica rezolvitorilor

(primul punctaj reprezintă ce s-a obținut pentru rezolvarea problemelor din numărul 33, în paranteză apare punctajul acumulat pentru concurs)

Înainte de a lectura rubrica aceasta, vă rugăm să revedeți regulamentul concursului, conform căruia se pot trimite rezolvări de la clasa în care sunteți în prezent, clasa precedentă sau, dacă puteți, de la orice clasă superioară(aveți grijă!!!)…(RMCS 31.pag.26)…aşadar, dacă sunteți, de exemplu, elev în clasa a III-a şi ați trimis şi rezolvări ale unor probleme de clasa I, acestea nu vor fi luate în considerare(conform regulamentului)… ați trimis 30 de probleme rezolvate şi aveți maxim doar 200 de puncte… de ce? Pentru că ați umplut plicul şi cu probleme rezolvate de la clasa I…exemplele pot continua…

Clasa I

Liceul Hercules Băile Herculane(înv. Maria Puşchiță, înv. Camelia Staicu) Dina Emanuel 96, Murguleț Alexandru 116, Gavril Tania-Maria 118, Stan Elena-Andreea 118, Popa Maria-Alexandra 114, Băltățeanu Valentina 114.

Şcoala Romul Ladea Oravița (înv. Rozalia Arnăutu)
Suru Bianca Alesia 50, Murgu Cosmina 50

Şcoala nr. 2 Reşița (înv. Ana Modoran)
Florea Ioana-Patricia 70, Caraconcea Casian 70, Gavra Ana-Daria 70, Istvancsek Bianca 60, Bercea Cristiana-Raluca 70, Boc Alissia-Driada 70, Dumitru Ruth-Liliane 70, Rusu Adelin 70, Duşa Raul 70, Cioponea Andra-Cristina 70, Moldovan Denis-Lukas 70, Comănescu-Crîsciu Anamaria 70, Franț Antonia 70, Manole Alexandra 70, Neveanu Alexandra Elena 70, Uzoni – Gellert Raoul-Raphael 70, Gheju Iasmina-Mădălina 60, Voina Vanessa 60.

Şcoala nr. 9 Reşița (înv. Mariana Mitrică) Imbrescu Cosmin 120.

Clasa a II-a

Liceul Hercules Băile Herculane (înv. Alexa Gaiță, inst. Diana Grozăvescu) : Iliescu Camelia 83(158) , Cuc Dorian 167(387), Grozăvescu Cristian 174(452), Papavă Laurențiu 168(454), Ghinea

Vintilescu Irina 263(459), Călțun Adrian 70(260), Păuna Robert 201(397), Domilescu Gabriel 244(436), Viericiu Daniel 244(440), Cănicean Cristina 261(457), Ştefan-Brînzan Georgiana 248(444), Coman Alina 254(450), Sitaru Bianca 248(444), Rădoi Andrada 255(451), Bolbotină Iulia 214(486), Bolbotină Flavia 214(486), Hogea Patricia 255(451)…am omis în numărul trecut, ne cerem scuze...

Liceul Teoretic Eftimie Murgu Bozovici (înv. Marius Băcilă): Ignea Alina 210, Marin George 221, Mihoc Cristian 220, Oniga Nicoleta 78, Anton Iulia 220.

Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş(inst. Patricia Maria Trion): Tufişi Alexandru(86).

Şc. Ciclova Română(înv. Cristina Lungu): Spârtic Florina Mădălina 198(284).

Şcoala nr.1 Moldova – Nouă(înv. Georgeta Turcin): Craiovan Eli Cosmina Maria 65(85), Constantin Cristiana 150(170).

Şcoala nr. 2 Reşița(înv.Elisaveta Vlăduț, înv. Robertha Oprea, înv. Maria Ciontu): Jula Diandra Melinda 242(522), Aruxandei Oana 200(350), Oşan Vlad(184), Drăgan Liliana 88(210), Marin Oana(98), Bîtea Iulia 162(398), Petrica Andra Elena 120(410), Boncaş Silvana 137(314), Stuparu Daniel 204(497), Boloca Mădălina 260(537), Mircea Antonia-Florina 191(466), Pinte Alexandru 180(455), Dumitru Maria Alexia 183(460), Bîrla Ștefan Alexandru 237(512), Popescu Nicoleta(275), Țucă-Willinger Andra Beatrice 250(530), Bălu Irina Alexia(275), Terfăloagă Mario-Andrei 162(437), Fara Eduard Petru 233(508), Bondoc Andrei Mihai(180), Doran Andrei 177(452), Blujdea Andrei Şerban 144(324), Lucacela Giulia 207(482), Călin Denis Andrei 233(508), Hamat Octavia Maria 200(480), Țibru Maria-Bianca 203(479), Cismaru George 86(362), Chira Ralf(75), Popescu Nicoleta Patricia 237, Pană Bogdan 193, Giurescu Petre 159+68(416).

Şcoala Romul Ladea Oravița (înv.Constanța Chiriac, înv. Camelia Suru, înv.Claudia Mirabela Gavrilescu, înv. Felicia Roiban) : Albert-Sterian Eduard-Dănuț(96), Gherovăț Anamaria 175(275), Diaconescu Mădălina 88(184), Tomici Bogdan 126(322), Iancu Eunice-Anastasia 97(193), Dumitru Ana Maria 135(331), Groszmuk Beatrice 100(250), Dobroi Ruxandra 28(225), Stângu Sara(196), Ivănuş Rareş(125), Fiştea Răzvan(88), Popescu Dennis Andrei(88), Novac Naomi(88), Mitreanu Andreia(88), Alexandru Alexandra-Florina(88), Ciocoi Ionela 95(291), Manda Flavian 89(277), Ogrin Mădălin(100), Micşa Laurențiu Gabriel(100), Țeicu Duşan Marius 184(277), Mincan Adrian 73.

Liceul Gen.Dragalina Oraviţa(înv. Paulina Lăpuşnianu) : Goioane Mădălin-Iasmin(70), Vlad Marco-Ciprian(70), Lăpuşnianu Ştefan-Lucian(116), Blagoe Iustina(80).
Şcoala nr. 1 Oțelu – Roşu (înv. Luminița Orszari): Feil Nadia 209(459), Schelean Alexandra 190(390).

Clasa a III-a

Liceul Hercules Băile Herculane(înv. Mirela Bolbotină, înv. Felicia Adriana Laitin): Staicu Ariana 230(638), Cionca Cosmin(198), Spătaru Iolanda Karina(192), Petcu Egon 220(412), Pervulescu Răzvan(195), Cîrdei Bogdan Antonio 268(463), Bohnsack Alexandru Walter 212(404), Vlădica Alexandra 131(519), Blidariu Mihai(176), Bârlan Florentin(98).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş(înv. Lidia Todor): Boncalo Sebastian 183(818), Drăghin Alexia 178(376), Bogdan Alexandra 209(567), Vela Cristian Rusalin 162(805), Marghescu Radu 186(849), Iacob Rareş 175(851), Bona Alin 97(393), Ghimboaşă Petronela 206(852).
Şcoala nr.1 Moldova – Nouă(prof. Desanca Tismănar, prof.Mirela Curea) Gruescu Gabriel Moisă 90(288), Muntean Paul 56(250), Marişescu Nicolas(10), Străin Alexandra(10), Veselin Ioana(10).
Grup şcolar Moldova – Nouă(înv. Anastasia Stroia)
Cristea Bianca(60), Răulea Alisa(126), Crenicean Georgiana 93(183), Bojici Ivana-Maia(364), Voicu Andreea(80), Cîrpean Flavius 181, Irimia Loredana 165.
Liceul Traian Lalescu Reşița(înv. Daniela Osman, înv. Alina Guță): Kovacs Iulia Francesca(417), Lohon Ariana(396), Borca Giulia(298), Pădurean Daniel(499).
Şcoala nr. 2 Reşița(înv.Florica Boulescu, înv.Mihaela Mregea, prof.Mariana Brebenariu): Cicortaş Raul Andrei 180(592), Adorjan Clara-Lorena 180(625), Datcu Goiceanu David(152), Blănariu Melisa(160), Racoceanu Rareş 246(383), Penzes Noemi 153(636), Pîrvu Cristina Florentina 144(581), Virag Roberta Izabela(363), Aruxandei Denisa Alexandra 189(519), Turcanu Iustina 188(416), Istvancsek Andreas 145(531), Milencovici Radoliub-Vlad 184(648), Rotariu Răzvan Ion 280(800), Maletici Iasmina Noemi 96(196), Solomon Denisa(100), Burileanu Ana-Iulia 165(562), Pascu Eugen Cristian(96), Paulescu Patrick 177(648), Szazi Timeea 203(638), Ciobanu Elena 309(899): *redactări clare şi complete, mai mare dragul să citeşti aşa ceva,* Roescu

Codruța 198(783), Crețu Cătălin(120), Novakovic Nicoleta 287, Back Andreas 153.
Şcoala nr. 8 Reşița(înv.Maria Hristodoreanu, inst.Doina Dumitraşcu): Purdea Mădălina-Cristina 71(453), Sofronea Maria-Alexandra(180), Coandă Amelia Ioana 165(582).
Şcoala nr. 9 Reşița(înv. Lidia Adamescu, inst.Măriuța Benga, prof.Costa Moatăr):Remo Tommy 125(365), Gîlcescu Denis-Alexandru(193), Novakovic Nikoleta(190), Negrea Alexandra 203(596), Rusu Melisa(93), Bârsan Paul 274(587), Bodnar Emanuela 240(820), Păvălan Patricia 195(311), Voinea Nicoleta 267(769), Mitru Casian 100(380), Borduz Flavius(200), Miu Panduru Alexandra 185.
Liceul Traian Lalescu Reşița (înv. Alina Guță) :Kovacs Iulia – Francesca 146, Pădurean Daniel 250.
Liceul Gen. Dragalina Oravița(înv. Ildiko Stoenescu) : Petcu Ioana(90), Lazarov Andrei 140(540): *redactare superbă*, Miloş Mădălina(146), Boca Christiana(158).
Şcoala Romul Ladea Oravița(prof. Daniela Dorina Man, înv. Lăcrămioara Lungu): Mureşan Eliza 228(463), David Edward Petru(218), Marocico Denis 220(579): *redactare superbă*, Stîngă Răzvan Andrei 238(665), Mărgan Oana Miruna(185), Gyorgy Maria-Cristina(423), Lungu Alexandru Andrei(95), Ciublea Amalia(195), Săvulesc Oana Daiana(185), Balmez Cristina-Maria 243(783), Pardoş Daiana 184.
Şcoala nr. 1 Oțelu – Roşu (înv.Nicoleta Doleanu, înv. Nicoleta Toader): Pop Adrian(70), Janțu Lucian 180(310), Bărbulescu Florentina(139), Vețan Denis 79(364), Năstase Alexandra(110), Preda Sebastian(184), Ghenade Timeea(142), Meilă Denis Marian 185(430), Baderca Flavius(114), Boghian Tiberiu(184).
Liceul Bănățean Oțelu – Roşu (înv.Floare Homota) : Groza Adrian 175(392), Angheloni Denisa 196(419).

Clasa a IV-a

Liceul Hercules Băile Herculane(înv. Doina Zah, înv. Camelia Staicu): Negoițescu Nicoleta 188(419), Agafiței Cristian(476), Agafiței Nichita(476), Sorescu Valentin 200(574),Ştefan-Brânzan Marian 195(476), Troacă Andrei175(483), Ciobanu Antonia185(494), Dancău Maria-Ileana195(546), Stoican Anastasia 195(546), Nicoară Rebeca 188(509), Dorobanțu Maria 125(548), Bolbotină Gabriel 184(647).

Şcoala Bozovici(înv.Violeta Voin Stanec) : Pascariu Anda-Cristina(439), Ruva Patricia Mădălina(392).
Grup Şcolar Construcţii Maşini Caransebeş (înv. Liliana Țuican) : Țuican Dan Alexandru 100.
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş(înv. Ritta Ion) : Popa Nicuşor Alexandru(70), Miculescu Andreea(200), Lungu Lorena 70(240).
Şcoala nr.1 Moldova – Nouă(înv.Veronica Mărgărit) : Muntean Georgiana(20), Nistoran Alexandru 80.
Şcoala nr. 2 Reşița(înv.Eufemia Jurca,înv.Aurica Nițoiu, înv.Camelia Bălănescu, inst. Ozana Drăgilă) Muntean Anda 210(633), Badea Roxana(167), Marin Karla Ştefania 96(223), Khanbijan Alexandru 100(350), Nimirceag Vlad-Dan(172), Ciuşdic Milan Alexandru 170(545), Petrica Anca Ştefania 200(585), Onofrei Sara(193), Back Andreas(310), Parfenie Alexandra 180(537),Potocean Teodora Aura 255(867: De remarcat şi rezolvarea unor probleme propuse în finalul unui articol !), Popescu Anisia(182), Bălănoiu Ana-Maria-Antonia200(675), Buzatu Cătălina(150), Suteanu Sara 97(293), Velcsov Tania(208), Drăghici Liviu 120(nu se primesc soluții de la clasele I şi II , dacă eşti în clasa a IV a).
Şcoala nr. 8 Reşița(înv.Corina Nedelcu, înv.Rodica Moldovan) :
Bugariu Andrei(283), Cenda Sabina 175(661), Marin Mădălin 145(635),Ştreng Flavius 167(663),Țeperdel Darius 175(660),Goian Tudor 187(574),Erceanu Andrei(387),Nica Elena Lorena 93(280),Colțescu Cătălin Emil(185), Popovici Naomi 158(343), Pătru Raplh Antonio(90), Ciupici Vlad(367), Pascal Roxana 175(532), Surugiu Dragoş 194.
Şcoala nr. 9 Reşița(înv.Margareta Filip) : Jumanca Patricia 195(722).
Şcoala Romul Ladea Oravița(înv.Merima Velcotă, înv.Viorica Totorean, înv. Georgeta Curea) Buzdug Ionuț 90, Scarlat Sara-Giulia 80(250), Dumitraşcu Bogdan-Andrei(292),Gherman Oana(70), Preda Damir 200(562),Popovici Antonia-Ştefania 200(280),Burcuşel Alex Paul(120),Dudilă Eduard 116(271) *Repetăm: nu se primesc soluții de la clasele I şi II , dacă eşti în clasa a IV-a.*
Liceul Gen.Dragalina Oravița(înv.Mirela Ana Nicolaevici) : Lazăr Denis(80), Mărilă Paul(80).
Şcoala nr. 1 Oțelu – Roşu(înv.Rodica Istrat) Voiț Iulia 165(664), Buță Jana Adina 136.
Şcoala cu clasele I-IV Cireşa, Oțelu – Roşu(prof. Carmen Dinu)Bărboi Natanael(60), Dinu Alexandra 60.
Şcoala nr. 3 Oțelu – Roşu(înv.Dorela Turcin,înv.Simona Țiru, prof. Adriana Găină) Butoi Drăghici Alina 100(434), Şulea Mariela 100(434),

Savescu Andrei 98(218), Tamaş Patricia 100(426), Căldăraş Cristiana 98, Simescu Antonio 98, Honciuc Raul 120, Vaszi Alexandru 100, Soare Alexandru 100.

Şcoala Sicheviţa(inst.Maria Popovici) Popovici Adelina-Florina(40)

Clasa a V-a

Colegiul Naţional Moise Nicoară Arad(inst.Lucian Trif): Bogdan Tudoran(160).

Liceul Hercules Băile Herculane(înv.Maria Puşchiţă) : Tudor Oana(90), Golopenţa Mircea(100), Bujancă Georgiana(100).

Şcoala Berzasca(prof.Doina Milencovici) Gheorghe Alina Valentina 41, Schneider Emil Alois 63.

Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş(prof. Antoanela Buzescu, prof. Lavinia Moatăr): Balint Alina 105(225),Cernicica Andrei(100),Cherşa Adrian Octavian 129(169), Vuc Adelina(100), Lazăr Lavinia(70),Tunsoiu Oana Mihaela 119(219), Preda Claudia-Nicoleta(110),Nica Roberta 40(180),Boba Bianca Cristina 103(203), Pascotă Andreea 135(235), Urechiatu Blanca 66, Benec Ileana 90, Buzescu Mălina 100, Ciobanu Iulia Andreea 186, Iovanescu Iasmina 45, Lupu Andrei Cristian 88, Lungogea Amalia-Maria 113, Mluhlroth Otto 64, Ştefănigă Răzvan 84, Svaia Robert 44, Tirnea Mihai Alexandru 85, .

Liceul Traian Doda Caransebeş(înv.Margareta Ştefănuţi): Stanciu Ana-Zaira(200).

Şc. Ciclova Română(prof. Geta Mîşcoi) : Mitreanu Andrei Mihai 94(194).

Şcoala nr.1 Moldova–Nouă(inst.Daniela Azamfirei-Marinca): Munteanu Adela(50), Nistoran Andreea-Daiana(50).

Şcoala Pojejena(prof. Cristina Iovanovici)Miloievici Ivana 17, Păunovici Lavinia 35.

Liceul Traian Lalescu Reşiţa(prof. Otilia Bejan) : Iacob-Mare Ionuţ Radu 167(519), Regulschi Antonia(227), Catina Paula 120(480), Puşcaş Roberta(115), Puşcaş Antonia(125), Potocianu Rebecca 158(552), Freisz Patrick 226(736), Lucaci Cristiana 193(433), Cîrstea Denisa 188(608).

Şcoala nr. 2 Reşiţa(prof. Marius Şandru): Murariu Dumitru-Ciprian(88), Iuga Bianca-Teodora(176), Gligor Mădălina Georgiana(317), Cioponea Alexandru Mihai(336), Velcsov Flavia(376), Givoreanu Carmen-Tabita(355), Mihai Andrei Flavian(113), Nicola Elena-Beatrice 80(480),

Presnescu Bogdan(386), Dieaconu Dorel(260), Măciucă Răzvan(310), Călimănescu Oana(330), Branca Alexandru Ionuț 150..
Şcoala nr. 8 Reşița(înv.Laura Popa, prof. Simona Curescu) : Negrea Alexandru(70), Tiutiu Mădălin 69.
Şcoala nr. 9 Reşița(prof. Irina Avrămescu, prof. Vasile Chiş, prof. Ion Belci): Imbrescu Raluca 155(491),Remo Denis 93(355),Zaharia Flavia Cristiana 174(574),Şoavă Daniel Viorel 151(537), Vladu Andrei Damian(175), Țigănilă Ionuț(283), Gherasim Daniel 171(347), Burlacu Alexandru 22, Mănescu Anca 42.
Şcoala Rusca-Teregova(prof.Sorin Ciucă): Stepanescu Iuliana 27, Blaj Petru(145).
Şcoala Romul Ladea Oravița(înv.Rozalia Arnăutu, prof.Maria Iancu) Brădeanu Luciana(50), Palade Teodora(115), Şchiopu Alexandra(140), Nițu Flavius 144.
Şcoala nr. 1 Oțelu – Roşu(prof. Heidi Feil) : Racolța Annlee 112(322), Drăgan Lavinia 100, Drăghici Maria – Florina 98, Roşu Florina Nicoleta 59, Rusu Claudia Maria 68, Ștefan Carina Larisa 42.
Şcoala nr. 3 Oțelu – Roşu (prof. Felicia Boldea) Barbu Codin 84, Buzuriu Andreea 128, Jucos Giuliana 128, Olariu Nicoleta Daiana 102, Piess Claudiu 79, Stan Darius George 117, Zărnescu Gabriela 118.
Liceul Bănățean Oțelu Roşu(prof. Iulia Cecon): Filimon Ana 92, Lukacs Iosif Sebastian 91
Şcoala Vîrciorova(prof.Ioan Liuba) Mihailescu Denisa(100).

Clasa a VI-a

Şcoala Berzasca(prof. Dana Emilia Schiha): Lăcătuş Cristian(90), Robescu Nicoleta 40(*problemele de la clasa a IV-a nu se iau în considerare...*).
Liceul Teoretic Eftimie Murgu Bozovici (prof.Pavel Rîncu) Melcescu Florina 60, Vodă Ana-Maria 60, Hotoc Roberta 58, .
Liceul Hercules Băile Herculane (prof. Marius Golopența): Şulma Patricia(190).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (prof.Lavinia Moatăr,înv.Diana Gorczynski) Nicoară Daiana(60), Hotima Salome(110), Iovănică Sebastian(50), Făgăraş Cristina(70), Ciobanu Iulia 156(346), Jura Victor 100(210), Ardelean Andra 60(280), Buligă Maria(100), Iovănescu Iasmina(110), Miculescu Adrian 59, Ştefănigă Daiana*(probleme rezolvate numai de la clasele I – III).*

Liceul Traian Doda Caransebeş(prof.Adrian Dragomir) : Ionescu Robert 100(500), Florescu Andreea(50), Anderca Otilia Maria(100), Hehn Andreea(50), Zanfir Daniel(100).
Şcoala Ciclova Română(prof.Geta Mîşcoi): Sava Mădălina(50).
Şcoala nr.3 Moldova – Nouă(prof.Sânefta Vladu): Gabor Camelia(40).
Grup şcolar Moldova-Nouă(prof.Aurelia Voilovici) : Bonaț Bogoslav Gabriel 86(366).
Liceul Gen. Dragalina Oravița(prof. Aurica Lazarov) Lisa Jumanca 30.
Şcoala Romul Ladea Oravița(prof.Camelia Pîrvu):
Cocar Lorena Melissa 91(321), Gagea Maria-Mirabela 20(110), Marocico Diana Andreea(130), Horniciar Andrei 31, Fuicu Cristina 109.
Şcoala nr. 1 Oțelu – Roşu(Prof.Heidi Feil) : Pănescu Sergiu(100), Moica Dan(90), Suciu Alexandra Georgiana 107(417), Firanda Denysa(140), Damian Patricia Cristina(70), Hrenyak Alexia Nadina 103(379), Cioarcă Adnana 47(357), Rus David Andrei 86, Janțu Petre Marin 129, .
Şcoala nr. 3 Oțelu – Roşu(Prof.Daniela Suciu) : Marin Băncilă Lucreția 46(156), Cornean Alexandru(114), Drăgan Andreea 36, Dănilă David 46.
Liceul Bănățean Oțelu Roşu(prof. Adriana Dragomir) : Mihuț Casiana 39(119), Epuraş Georgian 106(281),Cojocaru Daria(155).
Şcoala Rusca Teregova(prof. Sorin Ciucă) : Gherga Zaharia 3(43), Stepanescu Larisa(55), Humița Dana 14(69), Codoşpan Alina(55), Gherga Ion 2, Andrei Petru 9.
Liceul Traian Lalescu Reşița(prof. Otilia Bejan) : Vunetu Patricia-Bianca(160),
Şcoala nr. 2 Reşița(prof. Mariana Drăghici) : Pinte Ana-Maria 36(319), Dacica Anca Cristina(70), Constantin Alexandra(60), Popa Radu Ciprian(100), Păuşan Leonard(70), Fara Oana Lorena(277), Mihancea Miruna 65(240), Rădoi Oana 64(394), Budimir Claudia 68, Teodorescu Iulia 120.
Şcoala nr. 6 Reşița(prof.Susana Simulescu) : Gale Roberta(120), Roşeți Teodora(100),Băroiu Carina(140), Jurca Andrei(120), Vizitiu Dorin(190), Țofei Anca(380).
Şcoala nr. 8 Reşița(prof.Mirela Rădoi, prof.Camelia Coandă) : Budimir Claudia(130), Cipu Cosmin(50),Belba Miruna(130), Pele George(90).
Şcoala nr. 9 Reşița(prof.Irina Avrămescu, prof.Vasile Chiş)
Şutilă Alexandra-Ionela 108(545), Muselin Mario Cristian(180), Călina Antonia 68(498), Anănuță Adela Marina(256), Bălean Vlad 103(333), Moroti Cristina 72.

Liceul Traian Vuia Reşiţa(prof. Mircea Iucu): Vicol Alexandru(130), Epure Cosmin(50), Kiss Melisa(130).

Clasa a VII-a

Şcoala Berzasca(prof.Dana Emilia Schiha) Vîlceanu Izabela 29
Liceul Hercules Băile Herculane(prof.Constantin Bolbotină) : Stanciu Ana-Maria 170(338), Moagă Alecsandru 151(324), Cernescu Maria(163), Popa Andrei 149(312), Cîrdei Alex-Cosmin 80(256), Tomescu Livia-Maria 132(297), Urdeş Florin 117(293), Radu Denisa(156), Urzică Ionuț Sorin 144(270), Stanciu Ani 108(273), Dimcea Alexandra 106, Vlaicu Dana 107.
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş(prof.Dorina Humița, prof. Marița Mirulescu) : Semenescu Raluca(170), Belciu Aida 46(186), Zamfir Andreea 23(63), Benec Emanuela(70).
Liceul Traian Doda Caransebeş(prof.Delia Dragomir, Janet Miuță Bocicariu, prof. Florin Ciocan) Neagoe Loredana(123), Nistor Răzvan 40(116), Iliescu Alexandru 53(213).
Grup şcolar Construcții Maşini Caransebeş(prof.Carina Corîci) : Cornea Monica(70).
Şcoala nr.3 Moldova – Nouă(prof.Sânefta Vladu): Neculcea Evelina(90), Gabor Camelia 8.
Grup şcolar Moldova-Nouă(prof.Vasilica Gîdea) Popa Andreea(20), Arini Michel(240).
Şcoala Rusca-Teregova(prof.Sorin Ciucă) : Stepanescu Maria 5(99), Stepanescu Ecaterina(96), Humița Ionela(86), Banda Ioan Alexandru Ilia 5(230), Stepanescu Alina 6(109), Ursulescu Ionel 2.
Liceul Gen. Dragalina Oravița(prof. Aurica Lazarov) Țibulca Andrei 41
Şcoala Romul Ladea Oravița(prof.Camelia Pîrvu): Balmez Andrada 143(623), Murgu Teodora 121(310).
Şcoala nr. 1 Oțelu – Roşu(prof.Heidi Feil): Erdei Dorian Emeric 47(227), Honciuc Laura 27(233), Dinu Alexandru 7(37),Toader Răzvan 78(268), Szatmari Larisa 90(300), Szalma Eric 90(220), Oancea Roxana 92, Văran Alexandra 18, Țolea Oana 32, Simescu Geanina 46.
Şcoala nr. 3 Oțelu – Roşu(prof. Felicia Boldea, prof. Daniela Suciu) Micşescu Cristian(50), Barbu Lidia(146), Carp Andreea-Camelia(120), Drăgan Alexandra Diana(146), Dănilă David(160), Piess Helmuth(130), Cornean Claudiu(70).

Liceul Traian Lalescu Reşiţa(prof.Otilia Bejan) : Malyar Cristina 41(261), Dolot Diana Nicole(390), David Mihai(160).
Şcoala nr. 2 Reşiţa(prof. Marius Şandru): Neaţu Monica 90(275), Ciobanu Anca 71(391), Rus Daniel 68.
Şcoala nr. 8 Reşiţa(prof.Mirela Rădoi) : Rus Daniel(370)
Şcoala nr. 9 Reşiţa(prof. Irina Avrămescu, prof.Vasile Chiş) : Gaiţă Nadine 63(243), Pupăzan Andreea(244), Muscu Dragoş 25(298), Costea Denis-Loren 70.
Şcoala Vîrciorova(prof.Ioan Liuba) : Ivăniş Patricia 4(54), Dragomir Ana Patricia 10(60), Bănescu Ramona 6(126), Apolzan Alexandra 11(51).

Clasa a VIII-a

Liceul Hercules Băile Herculane(prof.Constantin Bolbotină) : Becia Robert(144) : ... foi goale, enunţuri fără soluţii !!!, Gherghina Liviu-Nicu(148), Coman Petre Daniel(157), Dimcea Ana-Maria-Alexandra(165), Mihart Georgiana(165), Török Bogdan(75), Dancău Anca(168), Ferescu Liana-Maria(168),Vlaicu Daniela-Oana(168), Domilescu Manuel(157).
Şcoala Berzasca(prof.Dana Emilia Schiha) : Velicicu Alina(50), Vîlcu Cosmin(50),Vulpescu Emilia Iulia(60).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş(prof. Antoanela Buzescu, prof. Dorina Humiţa) : Rîcă Anda-Elena(30), Dinulică Ioan Septimiu 220(736), Bivolaru Mălina(120), Dinulică Petru Augustin 220(736) , Enăşoni Lavinia 69(139), Bogdan Roxana 76(346),Băzăvan Cătălina(30),Nica Hermina(80).
Şcoala Ciclova-Română(prof.Geta Mîşcoi): David Melissa, Munteanu Andreea, Simion Silvia Anamaria.
Liceul Eftimie Murgu Bozovici(prof.Pavel Rîncu): Grădinariu Tatiana (180), Ruva Mihaela 49(229), Mitocaru Patricia 49(229), Negru Anca Patricia 50, Iancu Mara Timea 46.
Grup şcolar Mihai Eminescu Jimbolia(Timiş) (prof.Sanda Niţoi): Popa Mădălina(80).
Grup şcolar Moldova Nouă (prof.Zoran Ocanovici, prof. Vasilica Gîdea) Truichici Adelina 28, Mereu Mădălina(50).
Şcoala nr.3 Moldova – Nouă(prof.Sânefta Vladu) Olariu Alexandra(40), Chilnicean Ionela(20), Rujici Marina 60.
Şcoala Pojejena (prof. Cristina Iovanovici) Ciocea Geanina Beatrice 22, Firulovici Dalibor 36, Zaberca Melissa 16.

Şcoala nr. 6 Reşița(prof.Susana Simulescu) : Ciulu Miruna Dalila 220(570).
Şcoala nr. 9 Reşița(prof. Irina Avrămescu, prof.Ion Belci) : Rață Petrişoara(30), Moatăr Alina-Iasmina(80),Momin Alexandra(80),Todoran Adriana(30).
Şcoala Romul Ladea Oravița(prof.Camelia Pîrvu) : Trăilă Alexandra 77(287), Pîrvu Ancuța Iulia 180(516), Ghiorghişan Călin 215.
Şcoala nr. 1 Oțelu – Roşu(prof.Heidi Feil): Dulan Ionița 10(30), Trica Alexandru(40), Ştefănescu Nicolae-Andrei 220(775), Baboniu Andreea 50, Buță Laurian 11, Necşa Adina 50(90).
Şcoala nr. 3 Oțelu – Roşu(prof.Daniela Suciu, prof.Felicia Boldea)Vladu Alina(60), Băilă Cristina(87), Barbu Daniel(100), Haba Beatrice 90(170), Românu Nicoleta(87).
Şcoala Rusca-Teregova(prof.Sorin Ciucă):(*problemele rezolvate de la clasele I-V nu se iau în considerare, conform regulamentului)* Hurduzeu Ana 4(89), Blaj Ioan(20), Stepanescu Georgeta 5(92), Gherga Marinela 4(98), Banda Georgiana Violeta(94), Stepanescu Ana-Maria(98).

Clasa a IX-a

Liceul Hercules Băile Herculane(prof.Constantin Bolbotină) Rădoi Iulia 118, Timaru Sorin 108, Moacă Nicoleta Adriana 84, Staicu Dumitru Alexandra 62, Cioban Daniela 87, Calotă Cristina 84.
Liceul Eftimie Murgu Bozovici(prof.George Pascariu) Pîrciu Viorel Damaschin 36
Liceul C.D.Loga Caransebeş(prof. Marița Mirulescu) Stanciu Maria Georgiana 40.
Liceul Traian Doda Caransebeş(prof. Anişoara Dragotă) Tuştean Patricia 35(115).
Grup şcolar Moldova Nouă (prof. Gheorghe Scorțan) Oprea Adelina Daria 12.
Şcoala Rusca-Teregova(prof.Sorin Ciucă): Humița Ileana Mirela(53), Boşneag Marinela Ionela(56), Ursulescu Ionela(83).
Şcoala Bozovici(prof.Pavel Rîncu): Munteanu Mădălina(70), Hotac Adina(50), Ştefan Ana(80), Careba Denisa(80).
Liceul Traian Lalescu Reşița(prof. Pavel Ghimboaşă): Lazăr Silviu Ioan 60(190), Toc Teodora 71(324), Țeudan Adina 60(210)
Liceul Bănățean Oțelu-Roşu(prof. Lucian Dragomir) Pop Cristian 57(207),Radu Ionela 42(162), Cerbulescu Ribana 37, Băilă Diana 57,

Preda Gabriela Dagmar 42, Fona Ionel 24, Butoi Armin 8, Banc Marius 17, Popescu Ana-Maria 8, Vărgatu Alina 42.

Clasa a X-a

Grup şcolar Moldova Nouă (prof.Lăcrimioara Ziman): *Problemă rezolvată de la clasa a XI-a, cu matrice ?* Vuletici Nikolia 86(113), Vizitiu Alexandra 96(193), Gîrjan Laura 96(123), Silaghi Marco(17), Sporea Ghiță Lucian(20), Herea Mihaela Camelia93(120), Iorgovan Georgina 96(192), Crenicean Lorena Emanuela 93(120), Cîrpean Alexandra 82, Pop Dragana 82, Croitoru Alexandra 86, Rybar Mario 86, Vladisavlevici Iuliana 96, Păunovici Carlos Ramon 85, Mărculescu Mihaela 86, Bănescu Ramona 76, Cioancă Dorotea 96, Buşatovici Maia 78.

Liceul Eftimie Murgu Bozovici(prof.George Pascariu): Murgu Vlad(20), Surulescu Ilie 20(60), Curescu Elena Cristina(20), Borozan Flavius(68), Golîmba Lucia(20), Jarcu Lorena-Maria(39).

Liceul Traian Doda Caransebeş(prof. Iacob Didraga, prof. Adrian Dragomir): Copăceanu Oana(50), Agape Gabriela(60), Grozăvescu Ana(60), Răcăjdianu Sorana(70), Raiescu Dumitru(70), Ciobanu Raluca(60), Antonescu Nicoleta(80), Dumitraşcu Andreea(70), Milu Nicoleta(70), Faur Mihai Cosmin(60), Bona Caius(90),Geană Mihai(60), Ianoşel Petrică(70), Popa Andreea(20), Stoicănescu Gelu 100(170).

Liceul Nicolae Stoica de Haţeg Mehadia(prof. Mihaela Vasile): Costescu Nicoleta Alexandra(67).

Liceul Bănățean Oțelu-Roşu(prof. Lucian Dragomir): Krokoş Lorena 45(122), Gemănariu Traian 27(74), Kuhn Anne-Marie 45(91), Dumitresc Cecilia 43(89), Buzuriu Lukos(47), Dragomir Claudiu 27, Albai Cosmin 27, Grafenberger Andreas 37, Nasta Laura 45.

Clasa a XI-a

Liceul Teoretic *Eftimie Murgu* **Bozovici** (prof. George Pascariu)Borozan Florina 30, Derlean Pavel 30.

Liceul Traian Doda Caransebeş(prof. Lavinia Moatăr, prof. Delia Dragomir)Paşan Petru 57(207), Szabo Cristian 50, Mocanu Ioana-Dora 50, Tuştean Ionuț Claudiu 80(137), Buliga Denis 80, Orbulescu Dan 58, Ştefănescu Andrei 58.

Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş(prof. Dorina Humița, prof. Marița Mirulescu): Magu Georgiana(50), Semenescu Anca 70(210).
Grup şcolar Moldova Nouă(prof.Gheorghe Scorțan, prof.Cristina Iovanovici): Uță Robert 10(70), Radovan Cosmin(50), Ilievici Iasmina(50), Costea Semida(50), Buriman Amalia(50), Martinovici Ionela(50), Radoicovici Kethrin Ramona 28(88), Stoian Marius 47, Marta George Iulian 40.
Liceul Nicolae Stoica de Hațeg Mehadia(prof.Mihaela Vasile):Coconete Cosmina 105(175), Costescu Nicoleta 107(187).
Liceul Traian Lalescu Reşița (prof.Ovidiu Bădescu): Ghițiu Cristina 64(64), Nemeş Adina 89(89)
Liceul Bănățean Oțelu-Roşu (prof. Lucian Dragomir): Bugariu Răzvan 38(144), Duma Andrei 38(100).

Clasa a XII-a

Grup şcolar Moldova Nouă(prof.Lăcrimioara Ziman): Stoian Marius(8), Harabagiu Dragana 50(90), Pucă Alexandra Elena 50(90), Minea Neşa(20), Istudor Deian 50(70), Costea Liana Ileana 50, Buriman Nelu 46.
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (prof. Antoanela Buzescu): Marta Marian Sebastian 60(130).
Liceul Traian Doda Caransebeş(prof. Delia Dragomir): Galescu Dan 60(130), Ciucă Cristian(50), Bona Petru(80), Zanfir Cristian 60(130).
Liceul Traian Lalescu Reşița (prof.Ovidiu Bădescu): Meşter Sergiu 82(82), Simion Larisa 48(48)
Liceul Bănățean Oțelu-Roşu (prof. Lucian Dragomir): Cococeanu Oana 38(121), Atinge Carina 38(78).

Repetăm:

Lăsați elevii să încerce să rezolve singuri, să redacteze singuri, să trimită soluțiile, ***apoi*** *discutați cu ei...*

Observăm că există elevi, de exemplu din clasa a II-a, care rezolvă corect probleme de nivelul clasei a IV-a !!! Nu putem decât să ne bucurăm dacă situația reală este chiar aceasta; aceşti elevi vor fi mândria județului în continuare, începând chiar de la ediția din acest an a concursului nostru... Dacă însă nu vor confirma în concurs minunatele punctaje obținute în revistă, credem că undeva există o problemă mare; vă rugăm insistent(evident, ne adresăm aici dascălilor şi părinților) să nu suprasolicitați, să nu *săriți calul* adică... nu credem că foloseşte nimănui, ba chiar e în detrimentul copiilor, a tuturor copiilor!!!

În plus, să nu uităm: concursul acesta a demarat, în urmă cu ceva ani, având ca principii fundamentale cinstea, corectitudinea, onoarea, egalitatea şanselor oferite tuturor. Dorim să continuăm în acelaşi fel, nu dorim să fim arătați cu degetul de unii care au contacte tangențiale cu eforturile noastre din cauza altora care, deasupra principiilor enumerate, cred că există altele... Oricum, în ceea ce ne priveşte, fiți convinşi că rămânem cum am fost: egali cu noi înşine.

În rest: *Dorim pentru voi, toți elevii, şi, recunoaştem, pentru noi toți, aceşti veşnici elevi, adică dascălii, pentru familiile voastre, un nou an cât mai bun, cu multă* ***sănătate*** *şi un pic de noroc, cu realizări acolo unde ați încercat cu adevărat...*