**Ecuaţii funcţionale pe **

 În general, prin ecuaţie funcţională înţelegem o egalitate în care apare una sau mai multe funcţii necunoscute, egalitatea fiind satisfăcută pentru o întreagă mulţime de valori ale variabilelor . Fiind conştienţi că ecuaţiile funcţionale sunt probleme non-standard, încercăm totuşi o sintetizare a principalelor principii de abordare, o prezentare foarte succintă a unor exemple .

**I) Rezolvarea ecuaţiilor funcţionale prin înlocuirea variabilelor cu valori particulare (substituţii):**

**E.1.** Determinaţi funcţiile  cu proprietatea că

 **.**

Olimpiadă Belarus 1993

*Soluţie:* Pentru obţinem imediat ; pentru  deducem apoi ,  . Acum , pentru



 , aşadar

 . ○

**E.2:** Determinaţi funcţiile  cu proprietatea că **.**

*Soluţie :* Luăm  şi deducem , unde *k* este o constantă reală . ○

**E.3:** Rezolvaţi ecuaţia funcţională

 **.**

*Soluţie :* Considerăm  şi ajungem la:

; adunând cu egalitatea iniţială obţinem o relaţie contradictorie, deci nu există funcţii cu proprietatea din enunţ. ○

**E.4:** Rezolvaţi ecuaţia funcţională ****

*Soluţie :* **,** apoi

**, ** şi

, de unde *f*  este funcţia identic nulă . ○

**E.5:** Rezolvaţi ecuaţia funcţională ****

*Soluţie :* Pentru obţinem Dacă deducem Dacă , obţinem . Dacă , facem în relaţia din enunţ şi ajungem la  şi astfel avem :  sau . E sufficient acum să facem substituţiile  şi ajungem la . Avem aşadar două soluţii ale ecuaţiei funcţionale date(funcţii care *verifică* relaţia din enunţ!). ○

**E.6 :** Determinaţi toate funcţiile care satisfac

 ,  .

 Marcel Chiriţă, OL Bucureşti 1984

*Soluţie :* Pentru ajungem imediat la Dacă , atunci , cu substituţia , deducem  deci  , adică Dacă , pentru  ajungem la , de unde şi deci Aşadar singurele soluţii ale ecuaţiei funcţionale

(care *verifică* egalitatea din enunţ!) sunt şi  ○

**II) Rezolvarea ecuaţiilor funcţionale prin formarea unui sistem**

**E.1:** Rezolvaţi ecuaţia funcţională

 **.**

*Soluţie:* Înlocuim  cu  şi obţinem relaţia: .

Aşadar:; rezolvând acest sistem obţinem . ○

**E.2:** Rezolvaţi ecuaţia funcţională

 **.**

*Soluţie:* Facem ,rezolvăm sistemul care se obţine şi ajungem la . ○

**E.3:** Rezolvaţi ecuaţia funcţională

 **.**

*Soluţie :* **** ○

**E.4:** Determinaţi funcţiile ****cu proprietatea că

 **.**

*Soluţie :* Fie  şi astfel ecuaţia dată conduce la  , . Cu substituţia

.

Pe de altă parte 

 , . ○

**E.4.** Determinaţi funcţiile  care satisfac relaţia

  , 

Gheorghe Andrei , OL Constanţa 1987

*Soluţie :* În relaţia dată facem transformările şi ajungem astfel la :  , respectiv . Eliminând , adică rezolvând sistemul obţinut, deducem: , adică  , cu Rămâne acum să verificăm că funcţiile găsite satisfac ecuaţia funcţională din enunţ . ●

**III) Determinarea unor funcţii care satisfac inecuaţii funcţionale**

**E.1:** Determinaţi funcţiile  pentru care

1) 

2) 

*Soluţie:*Din 1) avem 

Din 2) avem , deci  sau .

Dacă 

. Aşadar, funcţiile căutate sunt (verificare!) . ○

**Exp.2:** Fie  o funcţie bijectivă, strict crescătoare. Să se determine funcţiile  pentru care  .

*Soluţie:*Funcţia inversă  este şi ea crescătoare. Din .

Dacă în înlocuim , aşadar . ○

***Probleme diverse:***

**E.1:** Să se determine  care verifică .

*Soluţie:* În  notăm . Folosind obţinem . ○

**E.2:** Determinaţi  care verifică 

 Dorel Miheţ, concurs G. Moisil 1997

*Soluţie:* , apoi 



, deci , de unde , căci  . ○

**E.3:** Determinaţi  care verifică

 

 Marcel Chiriţă, OJ Bucureşti 1991

*Soluţie:* . Deoarece . Folosind ipoteza obţinem  adică . Dacă există  cu  rezultă , contradicţie. Deci  ○

**E.4:** Determinaţi  care verifică 

 Concurs T. Lalescu, 1992

*Soluţie:* , care adunată cu cea iniţială conduce la .

Pentru .

Relaţia din enunţ devine . Dând valorile  . ○

 Vă propunem în continuare să încercaţi singuri să rezolvaţi următoarele probleme:

**P 1.** Să se determine funcţiilecare satisfac egalitatea : .

**P 2.** Să se determine funcţiile care satisfac relaţia:

 

**P 3.** Să se determine funcţiile care satisfac relaţia:

 

**P 4.** Fie şi o funcţie cu proprietatea :

 .

1. Pentru , arătaţi că singura funcţie cu proprietatea de mai sus este funcţia identică ;
2. Determinaţi toate funcţiile cu proprietatea dată în cazul în care .

**P 5.** Fie o funcţie cu proprietatea că

 .

1. Să se arate că .
2. Să se arate că există funcţii neconstante care verifică relaţia dată.

**P 6.** Să se determine funcţiilecare satisfac proprietăţile :

 a) .

 b)  , .

Bibliografie :

1. Gh. Andrei , C. Caragea , I . Cucurezeanu , Gh. Bordea – Probleme de algebră pentru concursuri de admitere şi olimpiade şcolare , E.D.P. Bucureşti , 1993
2. Vasile Pop – Ecuaţii funcţionale , Ed. Mediamira , Cluj-Napoca , 2002