INTUITIV ŞI ABSTRACT ÎN PREDAREA MATEMATICII

De mii de ani oamenii au descoperit sau au învățat de la semenii lor. Descoperirea matematicii este fundamental diferită de descoperirea obiectelor fizice, spre exemplu, întrucât ceea ce se descoperă în matematică sunt anumite relații nebănuite mai înainte. O teorie fizică nu e nici adevărată, nici neadevărată; ea se aplică sau nu se aplică. Se aplică, dacă pe baza ei se pot face previziuni eficace; nu se aplică, dacă previziunile nu se confirmă. Descoperirea în matematică este altceva față de cercetarea în ştiințele naturii. În matematică lucrurile deci nu se prezintă chiar aşa, deoarece "adevărul" unei propoziții matematice nu depinde de vreo corespondență oarecare cu nişte evenimente verificabile, ci de faptul dacă propoziția în cauză "se potriveşte", sau nu cu alte propoziții care până în acel moment, constituie corpul cunoştințelor matematice. În matematică spunem că o propoziție se potriveşte cu altele dacă e compatibilă cu acestea; cu alte cuvinte, dacă noua propoziție nu provoacă o contradicție când e considerată în raport cu alte propoziții. Este o condiție necesară, dar nu suficientă, pentru admiterea unei noi propoziții ca membră a corpului de propoziții matematice general acceptate. Pentru a admite însă o nouă propoziție, se cere de obicei să poată fi probată, prin probă înțelegând un lanț de propoziții, fiecare dintre ele întemeindu-se, într-un mod general acceptat, pe una sau pe toate propozițiile precedente; ultimul inel al lanțului îl constituie noua propoziție.

Desigur, anumite propoziții matematice, pot fi independente unele de altele, fără însă să fie irelevante unele pentru altele, în astfel de cazuri noile propoziții pot fi acceptate în matematică fără "probă", consecințele admiterii sau respingerii lor urmând a fi acceptate apoi separat. Al cincilea postulat al lui Euclid este un exemplu în această privință; respingerea lui permite construirea geometriilor neeuclidiene; acceptarea lui aduce după sine cunoscuta geometrie euclidiană. Ipoteza continuumului, constituie un alt exemplu. Unele consecințe interesante rezultă din admiterea acestei ipoteze, consecințe care, fără ea, nu ar putea fi dovedite.

Faptul că atât de multă lume găseşte matematica dificilă sau neplăcută, ori şi una şi alta, dovedeşte existența unor reale dificultăți în învățarea ei. Toată lumea este de acord astăzi că învățământul trebuie să devină formativ, să dezvolte calitățile intelectuale ale elevilor, în special gândirea creatoare. Pornind de la rezolvarea de probleme obişnuite, elevul să lucreze cu concepte abstracte, să imagineze metode care pot conduce, pe trepte succesive, la soluții exacte. Cum se poate ajunge la aşa ceva?... Tocmai pornind de la intuitiv şi concret şi apoi ajungând la abstract în predarea matematicii.

Dacă învățământul trebuie să însemne şi investigație proprie în rezolvarea fiecărei probleme noi, urmează de la sine că întotdeauna trebuie să se plece de la obiectul de cercetat sub forma lui cea mai nemijlocită, deci intuitiv. Prin intuiție se definesc astăzi concepte diferite. Aici înțelegem prin intuiție plecarea de la obiect şi contactul cât mai strâns şi îndelung cu el, fie că el este din lumea reprezentărilor externe sau a reprezentărilor interne. Pot intui un obiect extern deodată. Dar pot intui şi un act sufletesc. Astfel înțeleasă situația, ea înseamnă punctul de plecare al oricărei cercetări şi învățări; fie că ne referim la botanică sau la un adevăr psihologic sau matematic.

Contactul direct cu obiectul înseamnă contact direct cu viața şi de aici se înțelege şi puterea evocatoare a intuiției, productivitatea oricărei investigații care a pornit de la ea. A pleca de la obiect, de la document, de la sursă şi a reveni la contactul cu obiectul ori de câte ori e nevoie, aceasta înseamnă a proceda intuitiv. Şi atunci intuiție înseamnă observare. Ca atare dacă locul momentului intuitiv este la începutul oricărei lecții noi, atunci el îşi păstrează valoarea în tot decursul lecției şi al învățării în general, al matematicii în special.

Pentru a înțelege mai bine rolul intuiției în procesul de învățământ trebuie să ştim care sunt principalele funcții didactice ale intuiției:

- Funcția principală a intuiției este aceea că asigură material faptic, sub forma reprezentărilor, în vederea prelucrării şi elaborării generalizărilor. În urma acestei prelucrări se produce saltul de la concret la abstract, în cadrul căruia gândirea devenind tot mai independentă de datele intuitive, se realizează o cunoaştere tot mai profundă a realității prin surprinderea a ceea ce este esențial şi general.
- Funcția de concretizare a intuiției imprimă cunoaşterii un sens contrar, deplasarea având loc de la abstract la concret. Concretizarea nu poate însemna altceva decât un fel de verificare prin care să ne convingem dacă un subiect şi-a dezvoltat sau nu o anumită putere de abstractizare. Modul în care se realizează cele două funcții ale intuiției depinde de situația concretă în care ne aflăm, cât şi de obiectivitate pe care le urmărim.

În contextul primei funcții abstractizarea ne apare ca o manifestare a procesului de interiorizare prin ceea ce, reținând esențialul şi generalul, ea poate opera în continuare pentru a surprinde alte aspecte ale realității.

Abstractizarea înseamnă atât înlăturarea a ceea ce este irelevant, cât şi realizarea unei structuri comune pentru mai multe situații diferite. Dacă în general intuiția declanşează şi întreține procesul de abstractizare, ea poate constitui uneori şi un obstacol în desfăşurarea proceselor raționale prin abuzul de imagini şi bruiajul care-l pot produce, atunci când se apelează, în mod exagerat la cunoaşterea senzațională, după cum absența imaginilor sau a materialului concret poate constitui sursa principală a formalismului în procesul de învățământ. Există, cu alte cuvinte, un nivel optim de folosire a intuiției ca sursă de reprezentări sau numai pentru elaborarea conceptelor, ci şi pentru formarea capacității de a opera cu ele. Un concept odată elaborat pe calea abstractizării sau pe cale pur logică, urmează să fie aplicat din nou obiectelor şi fenomenelor reale, cazurilor particulare. Revenirea la punctul de plecare nu înseamnă în acest caz un regres pe planul gândirii, ci din contră o îmbogățire a conținutului ei şi concomitent o tentativă pentru noi abstracții.

În zilele noastre nimănui nu-i mai poate fi străină gândirea matematică, singura în stare să dezvolte facultatea de abstractizare, capabilă să stabilească legături între probleme care, deşi aparțin de domenii diferite au acelaşi mod de exprimare matematică. Astfel, alături de vechi, se introduce noul în matematică, împletindu-se sau exprimându-se în ramuri necunoscute până nu demult, ca de pildă în cibernetică şi informatică.

Prin <u>abstractizarea matematică</u> clasificăm obiecte destul de complexe, căci este vorba de obiecte ale gândiri. De aceea e oarecum dificil să ajungem prin practică la simțul acestor obiecte şi să decidem întotdeauna corect dacă o structură complexă oarecare este asemenea dintr-un anumit punct de vedere, unei altei structuri complexe. (E drept, matematicienii au intuiții şi cei mai buni dintre ei sunt aceia ale căror intuiții se dovedesc a fi de cele mai multe ori corecte. Dar nici un matematician demn de acest nume nu-şi lasă intuițiile să rămână simple intuiții. Dacă nu are suficientă răbdare pentru ele, le va trece unui coleg sau unui cercetător). Identitatea structurilor trebuie să fie demonstrată explicit. De pildă nu e de la sine înțeles că suprapunerea a două transformări de tipul:

$X = ax + by$ şi $u = cx + dy$

$Y = bx + ay$ $v = dx + cy$

Se va combina exact în acelaşi fel ca înmulțirea complexă: (a + bi) x (c + di), în care (i = -1). Cineva ar putea avea, intuiția că aşa stau lucrurile, dar această intuiție trebuie dovedită. Dacă efectuăm substituția în primele serii de transformări, obținem:

$u = (ac – bd)x + (bc + ad)y$

$v = -(bc + ad) x + (ac – bd)y,$

iar dacă efectuăm înmulțirea complexă, ajungem la: (ac – bd)+ (bc + ad)i.

Apoi dacă stabilim următoarea corespondență:

- coeficientul din stânga sus din matrice corespunde părții "reale", iar
- coeficientul din dreapta sus din matrice corespunde părții "imaginare", putem "traduce" o activitate în cealaltă. Ambele au aceleaşi proprietăți, în măsura în care e vorba de interrelațiile proprietăților lor. Am identificat aşadar, două structuri matematice, care efectiv arată destul de diferit una de alta şi au constatat, mai apoi constatam că, dintr-un anumit punct de vedere, ele au acelaşi structură. Interpretările lui i = -1, transformările spațiilor şi aşa mai departe sunt, pentru scopul urmărit aici, pur şi simplu "bruiaj". Dacă înlăturăm acest bruiaj şi ne concentrăm asupra a ceea ce e comun, începem să sesizăm seria de atribute pe care trebuie să le posede o structură pentru a putea fi calificată "expresie algebrică" complexă. Iată ce este deci procesul de abstractizare matematică şi iată ce reproducem şi noi în clasă, când le propunem elevilor structuri identice pentru a-i face să identifice caracteristicele comune ale acestora, să recunoască bruiajul ca atare şi să-l suprime.

În esență abstractizarea aici este formarea unui izomorfism.
Izomorfismul înseamnă mai mult decât o corespondență biunivocă; pe lângă aceasta, el înseamnă că, în măsura în care e vorba de cel puțin o operație, dacă operând cu B asupra lui A obținem rezultatul C într-una din situații, atunci operând cu izomorful lui B asupra izomorfului A vom obține ca rezultat izomorful lui C, în cealaltă situație.

Dacă aşa stau lucrurile pentru toate modurile posibile de operare şi în ambele sensuri, atunci spunem că cele două situații sunt izomorfe din punctul de vedere al operațiilor aplicate. Cu alte cuvinte, corespondența trebuie să fie absolut impecabilă. O singură excepție ar fi îndeajuns pentru infirmarea izomorfismului. Formarea de izomorfisme este procesul prin care ajungem la abstracții. Aceste abstracții vor devenii nişte complexe de proprietăți definitorii pentru clasa a cărei sferă coincide cu abstracția respectivă şi ale cărei elemente sunt toate structurile posibile cu acelaşi complex specific de proprietăți.

Formarea unei abstracții într-un fel "limpezeşte lucrurile" şi astfel ştim unde ne aflăm. Putem trata noua clasă ca pe un element posibil al unei clase ulterioare încă neformate şi procesul reîncepe de la capăt. Formarea unei abstracții constituie un punct final atât într-un ciclu psihologic, cât şi într-unul matematic. Tocmai această formare explicită a unui izomorfism este ceea ce aşează o clasă matematică de entități într-o categorie ceva mai precisă decât aceea în care e încadrată o clasă obişnuită. Ea constituie un instrument foarte puternic cu ajutorul căruia putem ordona, într-un mod deosebit de eficace, multe situații matematice confuze.

În rezumat, putem spune că abstractizarea constă în a trece de la elemente la clasă, iar concretizarea în a trece de la clasă la elemente. Izomorfismele ne ajută să stabilim cu certitudine care sunt elementele ce aparțin unei clase. Este important să adăugăm aici că formarea unei idei abstracte în sensul formării unei clase este de fapt un concept ireversibil din punct de vedere psihologic. Aşa cum am spus-o de nenumărate ori, este imposibil să ne recâştigăm inocența preconceptuală. După ce am format o clasă oarecare, ne putem întoarce îndărăt la elementele ei, dar niciodată lucrurile nu vor mai fi ca la început. Concretizarea poate servi la planificarea căilor de urmat de către constructorii ulteriori ai clasei în cauză, dar nu va întoarce îndărăt procesele de gândire ale celor care au apucat să construiască acea clasă. Dar pentru ca o clasă matematică să devină operantă, conştiința este aproape indispensabilă. Iar de la intuitiv la abstract în predarea matematicii nu se poate trece fără analiză. Şi adevăratul "sâmbure" al analizei constă în a ne convinge complet pe noi înşine de faptul că atributele definesc realmente nişte clase ce se află în anumite relații unele față de altele. Este ceea ce se numeşte "a demonstra o teoremă": relațiile bănuite sunt viitoarea teoremă, iar acțiunea de a ne autoconvinge este demonstrarea ei.

Într-un anumit sens, analiza trasează harta acestui spațiu care este matematica. Teoremele sunt nişte jaloane care ne spun unde ajungem dacă alegem un anumit drum. Noile teoreme apar din contemplarea unor relații necunoscute, prin raport cu relațiile cunoscute, acestea din urmă constituie capul nostru de pod pentru atacarea celor dintâi.

În activitatea noastră însă, nu trebuie să pierdem niciodată din vedere aplicațiile. Ele constituie în esență o încercare de găsire a “celei mai bune potriviri” dintre ceea ce vedem în jurul nostru şi structurile matematice pe care ni le-am interiorizat. Pentru matematicieni este foarte important să rămână conştienți de acest fir al realității care străbate până şi cele mai obscure teorii matematice, iar aplicațiile sunt stimulatoare întrucât întăresc această conştiință. Se ştie că atunci când abstractizarea şi generalizarea au loc destul de repede una după alta, în procesul învățării matematicii, copiii dau dovadă de mult interes. Descoperirea aplicabilității unei reguli generale dincolo de limita cazurilor inițiale (generalizarea) şi înțelegerea faptului că regula respectivă se aplică într-o sumedenie de situații diferite (abstractizarea) trebuie într-adevăr să constituie o experiență entuziasmantă pentru copii. Aceasta este forță motivațională a acestui tip de entuziasm care îl leagă şi pe matematicianul profesionist de propria lui muncă. Şi pentru ca munca profesorului să dea roade în rândul elevilor trebuie ca învățământul să fie intuitiv, integrativ şi animat de principiul social, pentru că cercetarea însemnă efort propriu şi introducere în mediu, altfel decât numai prin învățarea pe dinafara a unor cuvinte, definiții, proprietăți ori teoreme.

Esențialul este că aceste principii pedagogice să fie înfăptuite şi prin urmare să nu se ajungă la un învățământ în care profesorul ar fi un simplu instructor. Profesorul este acela care introduce în învățământ maximum de viață şi cu atât mai mult în învățământul matematic. El trebuie să-şi păstreze în tot momentul rolul complet de educator, deci rolul de factor important al formării elevilor în spiritul adevărului pentru că întreg edificiul matematicii este clădit numai şi numai pe adevăruri demonstrate şi verificate pe bază de raționament de la intuitiv la abstract, de la particular la general.

Prof. TUDOR DEACONU,
LICEUL DE ARTE „SABIN PĂUȚA” REŞIȚA