Universitatea de Vest Timişoara
Inspectoratul Şcolar Caraş Severin

Caransebeş 23 – 25 martie 2007

Concursul Interjudețean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediția a XXI – a

Clasa a V – a

1. Scrieți în ordine crescătoare şirul multiplilor lui **3**: **0, 3, 6, 9,12, 15, 18, ….** şi apoi şirul corespunzător sumelor cifrelor din primul şir: **0, 3, 6, 9, 3, 6, 9, …**

   a. De câte ori apare numărul **2008** în cel de-al doilea şir ?
   b. Care sunt primele două numere din primul şir cărora le corespunde în al doilea şir numărul **2007** ?
   c. Cineva afirmă că numărul **2007** apare în cel de-al doilea şir de cel mult **1001** ori. Are el dreptate ? (Argumentați răspunsul)

2. Într-o sală de clasă sunt mai mulți elevi. Dacă se aşează câte doi într-o bancă, rămân 9 elevi în picioare, iar dacă se aşează câte trei, rămân 7 bănci libere şi una cu un singur elev. Câți elevi şi câte bănci sunt ?

3. Să se scrie 35^{2007} ca sumă de trei pătrate.

4. Fie **x, y, z, v, w** numere naturale. Ştiind că

$$2^{x+y+z} + 2^{y+z+v} + 2^{z+v+w} + 2^{v+w+x} = 1089,$$

arătați că $x + y + z + v + w$ este pătrat perfect.

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru 3 ore
Pentru fiecare problemă corect rezolvată se acordă 7 puncte.

Concursul Interjudețean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediția a XXI – a

Subiect clasa a V – a

5. Scrieți în ordine crescătoare şirul multiplilor lui **3**: **0, 3, 6, 9,12, 15, 18 ….** şi apoi şirul corespunzător sumelor cifrelor din primul şir: **0, 3, 6, 9, 3, 6, 9, …**

   a. De câte ori apare numărul **2008** în cel de-al doilea şir ?
   b. Care sunt primele două numere din primul şir cărora le corespunde în al doilea şir numărul **2007** ?
   c. Cineva afirmă că numărul **2007** apare în cel de-al doilea şir de cel mult **1001** ori. Are el dreptate ? (Argumentați răspunsul)

D. Miheț

6. Să se scrie 35^{2007} ca sumă de trei pătrate.

Prelucrare Adara Blaga

7. Fie **x, y, z, v, w** numere naturale. Ştiind că

$$2^{x+y+z} + 2^{y+z+v} + 2^{z+v+w} + 2^{v+w+x} = 1089,$$

arătați că $x + y + z + v + w$ este pătrat perfect.

Prelucrare Adara Blaga

Universitatea de Vest Timişoara
Caransebeş 23-25 martie 2007
Inspectoratul Şcolar Caraş-Severin

Concursul Interjudețean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu"
Ediția a XXI-a

BAREM **CLASA a-V a**

1. a) Fiecare numar din al doilea şir este multiplu de 3……………………..1p
2008 nu este multiplu de 3 $\Rightarrow$ 2008 nu apare in al doilea şir ………...1p
b) Cel mai mic numar cu suma cifrelor 2007 este $\underbrace{99...9}_{223 cifre}$…………………2p
c) Nu de ex. $\underbrace{99...9}_{223 cifre}0, 99\ldots900, \ldots 99\ldots9 \bullet 10^k \ (k \in N)$
au suma cirelor 2007……………………………………………………..2p

2. $35=1^2+3^2+5^2$…………………………………………………………4p
$35^{2007}=35(35^{1003})^2$…………………………………………………………1p
$35^{2007}=(35^{1003})^2+(3.35^{1003})^2+(5.35^{1003})^2$……………………………………2p

3. $2^{x+y+z}+2^{y+z+v}+2^{z+v+w}+2^{v+w+x}$-par
1089-impar
$\Rightarrow$ cel putin unul dintre exponenti este 0………………………………..4p
De ex.x+z+y=0 $\Rightarrow$ x=y=z=0……………………………………………1p
$\Rightarrow 2^v(1+2^{v+1})=2^{10}+2^6=2^6(1+2^4)$…………………………………………1p
$\Rightarrow$ v=6,w=3 $\Rightarrow$ x+y+z+v+w=9=3^2 …………………………………………1p

Universitatea de Vest Timişoara
Caransebeş 23-25 martie 2007
Inspectoratul Şcolar Caraş-Severin

Concursul Interjudețean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediția a XXI-a

Subiect clasa a –VI-a

1. Măsurile unghiurilor unui triunghi sunt direct proporționale cu trei numere naturale consecutive nenule. Arătați că unul dintre unghiuri are măsura de 60^0.

   ***

2. Arătați că numărul $N=4^{2007}+1$ nu poate fi scris ca suma a două numere prime.

Răzvan Tudoran

3. Din punctul O se duc în sens invers acelor de ceasornic semidreptele [Ox, [Oy, [Oz şi [Ot astfel încât $<xOy \equiv <zOt$ şi $<yOz \equiv <xOt$. Fie $A \in (Ox$, $B \in (Oy$, $C \in (Oz$, $D \in (Ot$, astfel încât $[OA] \equiv [OC]$, $[OB] \equiv [OD]$. Considerăm un punct $P \in [CD]$ şi $\{Q\} = PO \cap AB$.
   Arătați că $[OP] \equiv [OQ]$.

Maria Miheț

4. Spunem că un număr natural n are proprietatea *P* dacă suma tuturor divizorilor săi naturali este 2n.
   - Dați exemplu de un număr natural care are proprietatea *P*.
   - Arătați că niciun pătrat perfect nu are proprietatea *P*.

Răzvan Tudoran

Universitatea de Vest Timişoara
Caransebeş 23-25 martie 2007
Inspectoratul Şcolar Caraş-Severin

Concursul Interjudețean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediția a XXI-a

BAREM
clasa a VI-a

SUBIECTUL 1

Fie n-1, n, n+1 $n\in N\setminus\{0,1\}$

$\frac{m(\hat{A})}{n-1}=\frac{m(\hat{B})}{n}=\frac{m(\hat{C})}{n+1}=\frac{m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C})}{3n}=\frac{180^0}{3n}=\frac{60^0}{n}$…………………..(2p)

$\frac{m(\hat{B})}{n}=\frac{60^0}{n} \Rightarrow m(\hat{B})=60^0$………………………………………………..(1p)

SUBIECTUL 2

Presupunem că există p,q prime astfel încât $4^{2007}+1=p+q$………………………...(1p)
Din $4^{2007}+1$ impar $\Rightarrow$ p=2 sau q=2 ……………………………………………….(2p)
Presupunem p=2
Obține $4^{2007}+1=2+q$, de unde $q=4^{2007}-1$…………………………………………...(2p)
Arată că $4^{2007}-1=q$ nu poate fi număr prim………………………………………(2p)

SUBIECTUL 3

Notăm α=m($x\hat{O}y$), β= m($y\hat{O}z$).
Astfel 2(α+ β)=360^0 $\Rightarrow$ α+ β=180^0 $\Rightarrow$ A-O-C coliniare, B-O-D coliniare… (3p)
Arată că $[AB]\equiv[CD]$……………………………………………………………(2p)
Arată că $\sphericalangle PCO \equiv \sphericalangle QAO$ ……………………………………………………(1p)
Finalizare……………………………………………………………………. (1p)

SUBIECTUL 4

Dă un exemplu (1+2+3+6=2*6)…………………………………………………(2p)
Observă că numărul de divizori ai unui pătrat perfect este impar………..(2p)
Dacă n este impar atunci toți divizorii săi sunt impari şi astfel sumă impară de numere impare este numărul impar $\neq$ 2n. ……………………………..(1p)
Dacă n este par atunci n=$2^{2k}*N^2$ cu n impar $\Rightarrow$ divizorii impari ai lui n sunt divizorii lui N^2 a căror sumă este impară $\Rightarrow$ suma tuturor divizorilor ai lui n esteun număr impar $\neq$ 2n.
……………………………………………………..(1p)

Universitatea de Vest Timişoara
Caransebeş 23-25 martie 2007
Inspectoratul Şcolar Caraş-Severin

Concursul Interjudețean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediția a XXI-a

Subiect clasa a VII-a

1. Se dă triunghiul ascuțitunghic ABC. Să se arate că picioarele perpendicularelor din *A* pe bisectoarele interioare şi exterioare ale unghiurilor *B* şi *C* sunt patru puncte coliniare.

* * *

2. În patrulaterul convex *ABCD* se ştie că $AC \perp CB,\ BD \perp DA\ si\, DC = \frac{\sqrt{2}}{2} AB.$
   Calculați $m(\angle AOB)$, unde *O* este punctul de intersecție a diagonalelor patrulaterului.
   D. Miheț

3. Determinați cel mai mare număr de numere naturale pe care le putem alege din mulțimea $M = \{1, 2, 3, \ldots, 2007\}$ astfel ca suma oricăror două numere alese să se dividă cu 10.
   Maria Pop, Cluj Napoca

4. Fie *x* şi *y* două numere reale. Să se arate că $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$ dacă şi numai dacă *x+y=0.*

S. Birăuaş

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru 3 ore
Pentru fiecare problemă corect rezolvată se acordă 7 puncte.

Universitatea de Vest Timişoara
Caransebeş 23-25 martie 2007
Inspectoratul Şcolar Caraş-Severin

Concursul Interjudețean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediția a XXI-a

BARAM

clasa a VII-a

1. Figura corecta …………………………………………………………………1p
   $AB_1B\ B_2$- dreptunghi (analog AC_1CC_2)……………………………………….2p
   $B_1\ B_2 \parallel BC$ ………………………………………………………………………1p
   $B_1\ B_2$ aparține dreptei suport a liniei mijlocii a $\triangleleft ABC$ (analog C_1C_2)…….2p
   Finalizare……………………………………………………………………………1p

Obs. B_1,B_2,C_1,C_2, sunt respectiv picioarele perpendicularelor din A pe bisectoarele <B, respectiv <C.

2. $\triangleleft COB \sim \triangleleft DOA$ ……………………………………………………………2p
   $\triangleleft DOC \sim \triangleleft AOB$ …………………………………………………………...2p
   $\dfrac{OC}{OB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ………………………………………………………………….1p
   m(<COB)=45^0……………………………………………………………..1p
   m(<AOB)=135^0 ……………………………………………………….…...1p

3.Elementele selectate au aceiaşi cifră : 0 sau 5 ……………………………………..2p
   200 numere din M au ultima cifră 0…………………………………………………..2p
   201 numere din M au ultima cifră 5…………………………………………………..2p
   Finalizare………………………………………………………………………1p

4. $\Rightarrow$ x+$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{y^2+1} - y$ $\Rightarrow$ x+y= $\sqrt{y^2+1}$-$\sqrt{x^2+1}$..(1)…………………2p
   y+$\sqrt{y^2+1} = \sqrt{x^2+1} - x$ $\Rightarrow$ x+y= $\sqrt{x^2+1}$-$\sqrt{y^2+1}$…(2).……………...2p

Din (1) şi (2) $\Rightarrow$(x+y)= - (x+y) $\Rightarrow$ x+y=0……………………………………………1p

$\Leftarrow$ x= -y, prin înlocuire calculează valoarea expresiei

(x+$\sqrt{x^2+1}$)$(y+\sqrt{y^2+1})$ ……………………………………………………………2p

Finalizare………………………………………………………………………..1p

Universitatea de Vest Timişoara Caransebeş 23-25 martie 2007
Inspectoratul Şcolar Caraş-Severin

Concursul Interjudețean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediția a XXI-a

Clasa a VIII – a

1. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel încât $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{n}}{\sqrt{2}+\sqrt{2007}} \in \mathbf{Q}$.

D. Comănescu

2. Fie numerele reale x şi y cu proprietatea că $x, y \geq 1$. Notăm :

$$E(x, y) = \frac{x}{2x+y+1} + \frac{y}{x+2y+1}.$$

i) Să se arate că : $\dfrac{1}{2} \leq E(x, y) < \dfrac{2}{3}$.

ii) Să se arate că dacă $a \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right)$, atunci există $x, y \geq 1$ astfel încât $E(x,y)=a$.

D. Comănescu

3. Fie *ABCD* un tetraedru cu următoarele proprietăți:

i) dreptele *AD*, *BD* şi *CD* sunt perpendiculare două câte două;

ii) unghiurile făcute de dreptele *AD*, *BD* şi *CD* cu planul *ABC* au măsurile de 45º, 30º respectiv 30º.

Să se determine suma măsurilor tuturor unghiurilor diedre dintre fețele tetraedrului.

Prelucrare D. Comănescu

4. Fie α şi β două plane paralele. În planul α este situat un patrulater convex. Să se determine punctul P din planul β cu proprietatea că suma distanțelor de la P la cele patru vârfuri ale patrulaterului este minimă.

Prelucrare D. Comănescu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru 3 ore

Universitatea de Vest Timişoara
Caransebeş 23-25 martie 2007
Inspectoratul Şcolar Caraş-Severin

Concursul Interjudețean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediția a XXI-a

BAREM CLASA a-VIII a

1.
Observă că 2007 este soluție .... 1 p.
Presupunând că $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{n}}{\sqrt{2}+\sqrt{2007}} \in \mathbf{Q}$, arată că $\sqrt{2007n} \in \mathbf{Q}$ .... 2 p.
Arată că $\sqrt{2 \cdot 2007} - \sqrt{2 \cdot n} \in \mathbf{Q}$ .... 2 p.
Se ajunge la contradicție.. 2 p.

2.
Arată că $E(x,y) \ge \frac{1}{2}$ .... 2 p.
Arată că $E(x,y) < \frac{3}{2}$ .... 2 p.
Pentru $a \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ *gaseste* $x, y \ge 1$ astfel încât *E(x,y)=a* .... 3 p.

3.
Demonstrează că
$m \prec [(ABD),(ACD)] = m \prec [(ABD),(BDC)] = m \prec [(ACD),(BCD)] = 90^\circ$ .... 1 p.
Arată că $m \prec [(BCD),(ABC)] = 45^\circ$ .... 2 p.
Arată că $m \prec [(ABC),(ABD)] = m \prec [(ABC),(ACD)] = 60^\circ$............................. 3 p.
Calculează suma unghiurilor .... 1 p.

4.
Construcția simetricelor vârfurilor patrulaterului *ABCD* față de β .... 3 p.
Utilizează inegalitatea triunghiului .... 2 p.
Finalizare .... 2 p.

Universitatea de Vest Timişoara
Caransebeş 23-25 martie 2007
Inspectoratul Şcolar Caraş-Severin

Concursul Interjudețean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediția a XXI-a

Subiect clasa a IX-a

Problema 1: Fie E o mulțime nevidă, $A, B \subseteq E$ şi funcția $f : P(E) \to P(E) \times P(E)$ definită prin

$$f(X) = (X \cup A, X \cap B), \ \forall X \in P(E).$$

Să se arate că f este injectivă dacă şi numai dacă $A \subseteq B$.

Prelucrare I. Caşu

Problema 2: Fie ABCDEF un hexagon regulat şi M, N două puncte pe segmentele CF şi respectiv EC astfel încât:

$$\frac{CM}{CF} = \frac{EN}{EC} = r.$$

Să se determine valoarea lui *r* pentru care punctele B, M, N sunt coliniare.

I. Caşu

Problema 3: Fie ABC un triunghi, M un punct în interiorul acestuia şi l_1, l_2, l_3 lungimile segmentelor determinate de laturile triunghiului ABC pe dreptele paralele duse prin M la BC, CA respectiv AB. Să se arate că:

$$\frac{l_1}{BC} + \frac{l_2}{CA} + \frac{l_3}{AB} = 2.$$

***

Problema 4: Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemul:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 0 \\ x^5 + y^5 + z^5 = 0 \\ x^{2007} + y^{2007} + z^{2007} = 0. \end{cases}$$

I. Caşu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru 3 ore
Pentru fiecare problemă corect rezolvată se acordă 7 puncte.

Universitatea de Vest Timişoara
Caransebeş 23-25 martie 2007
Inspectoratul Şcolar Caraş-Severin

Concursul Interjudețean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediția a XXI-a

BAREM
Clasa a IX-a

Probl. 1.
(pentru implicația directă) Face reducere la absurd. .... 1 pct.
Găseşte mulțimi distincte X_1, X_2, *pentru care* $f(X_1) = f(X_2)$ .... 2 pct.
(pentru implicația inversă) Scrie definiția injectivității şi detaliază........................ 1 pct
Demonstrează prin dublă incluziune (sau cu funcțiile caracteristice) că $X=Y$......... 3 pct.

Probl. 2.
Obține $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + 2r\overrightarrow{BA}$... .... 1 pct.
Obține $\overrightarrow{BN} = (2-r)\overrightarrow{BC} + 2(1-r)\overrightarrow{BA}$ .... 2 pct
Scrie condiția vectorială pentru coliniaritate. .... 1 pct.
Obține ecuația $r^2 - 3r + 1 = 0$ .... 1 pct.
Elimină rădăcina neconvenabilă...................................... .... 1 pct.
Scrie rezultatul final .... 1 pct.

Probl. 3.
Construieşte cevienele *AD, BE, CF* prin *M* şi scrie teorema lui CEVA................. 1 pct.
Arată că $\frac{l_1}{BC} = \frac{AM}{AD}$ şi analoagele................................. .... 2 pct
Arată că $\frac{AM}{AD} + \frac{BM}{BE} + \frac{CM}{CF} = 2$ .... 4 pct.

Probl. 4.
Obține egalitatea $y^3(x^2 - y^2) + z^3(x^2 - z^2) = 0$ (1)........... .... 1 pct
Obține egalitatea $y^3(x^{2004} - y^{2004}) + z^3(x^{2004} - z^{2004}) = 0$ (2)................................. 1 pct
Tratează separat cazurile $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x^2 = y^2, y^2 = z^2, z^2 = x^2$ .... 1 pct.
Deduce din (1) şi (2) că $x = y = z = 0$ .... 3 pct
Scrie soluția sistemului.. .... 1 pct.

Universitatea de Vest Timişoara
Caransebeş 23-25 martie 2007
Inspectoratul Şcolar Caraş-Severin

Concursul Interjudețean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediția a XXI-a

Subiect clasa a X-a

Problema 1: Determinați toate funcțiile monotone şi surjective $f : R \to Z$ care satisfac simultan următoarele proprietăți:

a) $f(f(x)) = f(x), \forall x \in R$

b) $f(2x) - f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right), \forall x \in R$.

Gh. Silberberg

Problema 2: Fie $z \in C$ cu $|z| < 1$. Demonstrați că:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{2}{1+z}\right) > 1$$

Prelucrare Gh. Silberberg

Problema 3: Fie A o mulțime de cardinal *a* şi B o submulțime a sa de cardinal *b*, unde *a* şi *b* sunt numere naturale cu $a \geq b$. Exprimați în funcție de *a* şi de *b* numărul soluțiilor din $P(A) \times P(A)$ pentru fiecare din următoarele sisteme de ecuații:

$$(S_1)\begin{cases} X \cup Y = A \\ X \cap Y = B \end{cases}$$

$$(S_2)\begin{cases} X \cup Y = A \\ |X \cap Y| = b \end{cases}$$

***

Problema 4: Determinați unghiurile triunghiului ABC dacă:

$$\sin A \sin B \cos C = -\frac{1}{8}$$

***

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru 3 ore
Pentru fiecare problemă corect rezolvată se acordă 7 puncte.

Universitatea de Vest Timişoara
Caransebeş 23-25 martie 2007
Inspectoratul Şcolar Caraş-Severin

Concursul Interjudețean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediția a XXI-a

SOLUȚII
Clasa a X-a

1. Fie $y \in \mathbf{Z}$. Cum *f* este surjectivă, există $x \in \mathbf{R}$ cu $f(x) = y$.
   Atunci $f(y) = f\left(f(x)\right) = f(x) = y$,
   deci acționează identic pe **Z** şi este în mod necesar crescătoare. .... 2 puncte.
   Fie $k \in \mathbf{Z}$ şi $x = k - \frac{1}{2}$. Din b) rezultă $f(x) = k-1$. .... 1 punct.
   Demonstrăm, prin inducție după $n \in \mathbf{N}^*$, că $f\left(k - \frac{1}{2^n}\right) = k-1 \quad \forall k \in \mathbf{Z} \ \ \forall n \in \mathbf{N}^*$
   Presupunem adevărată afirmația pentru *n* şi aplicăm proprietatea b) pentru $x = k - \frac{1}{2^{n+1}}$
   Obținem succesiv: $f\left(2k - \frac{1}{2^n}\right) - f\left(k - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = f\left(k + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$
   $$f\left(k - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2k - 1 - f\left(k + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right)$$
   Dar $0 < 1 - \frac{1}{2^n} < 1$, de unde rezultă $k < k + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < k + \frac{1}{2}$
   Monotonia funcției *f* implică $f\left(k + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right) = k$
   ceea ce încheie inducția... 3 puncte
   Fie acum *x* un număr real arbitrar şi fie *k=[x]+1*, deci $k - 1 \le x < k$.
   Există $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{2^n} < k - x$, de unde $k - 1 \le x < k - \frac{1}{2^n}$.
   Monotonia funcției *f* conduce la concluzia *f(x)=k-1=[x]*............................ 1 punct

2. Avem succesiv:
   $$\mathrm{Re}\left(\frac{2}{1+z}\right) = \mathrm{Re}\left[\frac{2\left(1+\bar{z}\right)}{\left(1+z\right)\left(1+\bar{z}\right)}\right] \text{ .... 2 puncte}$$
   $$\mathrm{Re}\left[\frac{2\left(1+\bar{z}\right)}{\left(1+z\right)\left(1+\bar{z}\right)}\right] = \frac{\mathrm{Re}\left(2+2\bar{z}\right)}{\left(1+z\right)\left(1+\bar{z}\right)} = \frac{2+\mathrm{Re}\left(2\bar{z}\right)}{1+z+\bar{z}+z\bar{z}} \text{ .... 3 puncte}$$

$$\frac{2+\mathrm{Re}(2\bar{z})}{1+z+\bar{z}+z\bar{z}}=\frac{2+2\mathrm{Re}(z)}{1+2\mathrm{Re}(z)+|z|^2}>1$$ .... 2 puncte

3. Perechea de mulțimi $(X,Y)\in P(A)\times P(A)$ satisface sistemul S_1 dacă şi numai dacă $X\supseteq B, Y\supseteq B$ şi perechea de mulțimi $(X',Y')\in P(A')\times P(A')$ satisface sistemul de ecuații $(S_1')\begin{cases}X'\cup Y'=A'\\ X'\cap Y'=\varnothing\end{cases}$ unde am notat $X' = X \setminus B$, $Y' = Y \setminus B$, $A' = A \setminus B$. Mai mult, aplicația definită prin $\varphi(X,Y)=(X\setminus B, Y\setminus B)$ este o bijecție de la mulțimea soluțiilor lui S_1', inversa sa fiind $\psi(X,Y)=(X\cup B, Y\cup B)$ rezultă că sistemele S_1 şi S_1' au acelaşi număr de soluții. 3 puncte.

   Orice soluție a lui S_1' se obține alegând arbitrar submulțimea X' a lui A' şi punând $Y'=C_{A'}(X')$. Această alegere se poate face în $2^{|A'|}=2^{a-b}$ moduri, deci sistemul S_1 are 2^{a-b} soluții. 2 puncte

   Fiecare soluție a lui S_1 satisface şi S_2. Reciproc, orice soluție a lui S_2 satisface un sistem S_1 unde drept *B* poate fi aleasă oricare dintre cele C_a^b submulțimi de cardinal *b* ale lui *A*. Rezultă că sistemul S_2 are $C_a^b\cdot 2^{a-b}$ soluții. .... 2 puncte

4. Putem scrie

$$0=8\sin A\sin B\sin C+1=4[\cos(A-B)-\cos(A+B)]\cos C+1=$$
$$=4\cos(A-B)\cos C+4\cos^2 C+1$$ .... 3 puncte

$$4\cos(A-B)\cos C+4\cos^2 C+1=[2\cos C+\cos(A-B)]^2+\sin^2(A-B)$$ .... 2 puncte

Deci $\sin(A-B)=0$ şi $\cos C=-\frac{1}{2}$, de unde rezultă că măsurile unghiurilor *A, B, C,* sunt respectiv $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}$ şi $\frac{2\pi}{3}$ 2 puncte

Universitatea de Vest Timişoara
Inspectoratul Şcolar Caraş-Severin

Caransebeş 23-25 martie 2007

Concursul Interjudețean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediția a XXI-a

Clasa a XI –a

1. Se consideră şirul $(x_n)_n$ definit prin : $x_0 = a \le 1$, $x_1 = b \ge 1$ şi $x_{n+2} = \frac{2}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}\min\{1, x_n\}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Să se arate că dacă $x_2 \ge 1$, atunci şirul $(x_n)_n$ este convergent şi determinați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Selecție T. Ceauşu

2. (a). Dați exemplu de matrice $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ astfel încât AB=BA, $A^2=B^2$ şi $\det(A - B) \neq 0$.

(b). Demonstrați că dacă $A, B \in M_3$ ($\mathbf{R}$) au proprietățile AB=BA, $A^3=B^3$, atunci $\det(A - B) = 0$.

D. Miheț

3. Fie $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in M_2$ ($\mathbf{Q}$) o matrice nesingulară şi f: **R-Q**→**R**, $f(x) = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}$. Notăm $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ şi $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n\ ori}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(a). Demonstrați că dacă $x_0 \in$ R-Q, atunci şi $f^n(x_0)$ este definit pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ şi $f^n(x_0) = \frac{a_n x_0 + b_n}{c_n x_0 + d_n}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

(b). Arătați că dacă $b_1 c_1 \neq 0$ şi există $m \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $b_m c_m = 0$, atunci $A^m = \lambda I_2$ cu $\lambda \in \mathbf{Q}^*$.

(c). În ipotezele de la (b), notăm $y_n = f^n(x_0)$. Aflați numărul elementelor mulțumii $M = \{x_0 \in \text{R-Q} \mid (y_n)_n \textit{ este convergent}\}$.

D. Miheț, Vasile Pop

4. Funcția g: **R**→**R** are proprietatea lui Darboux şi $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$. Să se arate că dacă f: **R**→**R** este o funcție periodică şi există $\lim\limits_{x\to\infty} f(g(x))$, atunci f este constantă pe **R.**

D. Miheț

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru 3 ore
Se acordă 7 puncte pentru fiecare subiect corect rezolvat.

Universitatea de Vest Timişoara
Caransebeş 23-25 martie 2007
Inspectoratul Şcolar Caraş-Severin

Concursul Interjudețean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediția a XXI-a

Subiect clasa a XII-a

1) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\frac{1}{(1+x^2)(1+e^{nx})(1+x^{2n})}dx.$

M. Chiş

2) Considerăm funcțiile $f,g:[0,\infty)\to\mathbf{R}$ date de:

$$f(t)=e^{ta}\int_0^t e^{-as}\cos(bs)ds,\ g(t)=e^{ta}\int_0^t e^{-as}\sin(bs)ds$$

unde a şi b sunt numere reale date.

a) Arătați că dacă a<0 atunci

$$\max\{|f(t)|,|g(t)|\}\le -\frac{1}{a} \text{ pentru orice } t\ge 0.$$

b) Dacă pentru fiecare $b\in\mathbf{R}$, funcțiile f şi g sunt mărginite atunci $a<0$.

C. Buşe

3) Fie $(G,\bullet)$ un grup abelian finit şi p un număr prim, cu $p\,|\,|G|$.

a) Dacă H este un subgrup al lui G cu $p\nmid |H|$, iar $x\in G\setminus H$ are proprietatea că $x^p\in H$ arătați că există $y\in xH$ cu $ord(y)=p$.

b) Arătați că există $x\in G$ cu $ord(x)=p$.

***

4) Fie α,β două numere complexe diferite şi A o matrice pătratică de ordinul 5 cu elemente numere complexe.
Rezolvați sistemul cu necunoscuta $X\in M_{5,1}(C)$:

$$\begin{cases}(A-\alpha I)^2X=O\\(A-\beta I)^3X=O\end{cases},$$

I fiind matricea unitate de ordinul 5.

C. Buşe

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii
Timp de lucru 3 ore
Pentru fiecare problemă corect rezolvată se acordă 7 puncte.

Universitatea de Vest Timişoara
Caransebeş 23-25 martie 2007
Inspectoratul Şcolar Caraş-Severin

Concursul Interjudețean de Matematică
Memorialul „Traian Lalescu”
Ediția a XXI-a

BAREM
Clasa a XII-a

Probl. 1.

Face schimbarea x→-x. .... 1 pct.

$2I = 2\int_0^a \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2n})}dx$ .... 1 pct.

a>1, $I = \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2n})}dx + \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2n})}dx$ .... 1 pct

Arată că $\lim_{n\to\infty}\lim_{a\to\infty}\int_0^{\frac{1}{a}} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2n})}dx = 0$ .... 1 pct.

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2n})}dx = \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2n})}dx + \int_1^a \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2n})}dx$$

$I_2 \le \int_1^a \frac{1}{x^{2n}}dx \to 0$ .... 1 pct.

$I_1 \le \int_0^1 \frac{1}{(1+x^{2n})}dx = \frac{\pi}{4}$ (cu justificare).. 2 pct.

Probl. 2.

a) $|f(t)| \le e^{ta}\int_0^t e^{-as}ds = e^{ta}\left(\left.\frac{e^{-as}}{-a}\right|_0^t\right) = e^{ta}\left(-\frac{1}{a}e^{-at} + \frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a}e^{ta} = -\frac{1}{a}\left(1-e^{ta}\right) < -\frac{1}{a}$ şi

completări .... 4 pct.

b) $ia\ b = 0 \Rightarrow f(t) = e^{ta}\int_0^t e^{-as}ds = e^{ta}\left(\frac{e^{-ta}}{-a} - \frac{1}{-a}\right) = -\frac{1}{a} + \frac{e^{ta}}{a} \Rightarrow e\ necesar\ ca\ a < 0$ + completări.

.... 3 pct.

Probl. 3.

a) $Fie\ m = |N|,\ p \times m \Rightarrow (p,m) = 1 \Rightarrow (\exists)k, e \in Z\ a.i.\ kp + lm = 1$ .... 1 pct.

$Fie\ y = x^{lm} \Rightarrow y = x^{1-kr} = x\left(x^p\right)^{-x} \in xN, y \notin N$ .... 2 pct.

Arată că $y^p = 1$ rezultă ord y = p .... 1 pct

b) $Daca\ G\ ciclic, G = \langle g \rangle\ si\ p\, \Big|\, |G| \overset{not}{=} n = ord(g) \Rightarrow x = g^{\frac{n}{p}}\ are\ ordinul\ p$ ....1 pct

$Daca\, G \neq ciclic,\ presupunem\ ca\ afirmatia\ din\ enunt\ este\ adevarata\ (\forall) G\ cu\ p \,\big|\, |G_1| < |G|. Fie\ \ g \in G \setminus \{1\}$

$arbitrar\ si\ H = \langle g \rangle,\ folosind\ \ ip.\ de\ \ ind.\ (\exists) x \in G\ cu\ ord(x) = 1$

……………… 1 pct

Dacă p X | H | atunci în grupul factor G / H al cărui ordin se divide cu p şi verifică | G / H| < |G| există xH cu ord(x H) = p. Deci x^p aparține H şi p X | H | conform punctului a) există atunci y aparține lui G cu ord(y) = p ………………………………………………………… 1 p

Problema 4.

Observă că x=0 e soluție ………………………………………………………………… 1 p

Observă că $(\lambda - \alpha)^2$ *si* $(\lambda - \beta)^3$ *polinoame prime* int*re ele* ………………………….. 1 p

Scrie $(\lambda - \alpha)^2 \cdot \mu(\lambda) + (\lambda - \beta)^3 \cdot \upsilon(\lambda) = 1$ ……………………………………………………. 2 p

Scrie $(A - \alpha I)^2 \cdot \mu(A) + (A - \beta I)^3 \cdot \upsilon(A) = I_5$ ………………………………………. 1 p

Justifică că x = 0 …………………………………………………………………………… 2 p