Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"Traian Lalescu" (19 , 2005 ; Arad)
Concursul interjudețean de matematică "Traian Lalescu" : ediția a XIX-a, Arad : 12-13 martie 2005: enunțuri, bareme, soluții. – Arad : Editura Fundației "Moise Nicoară", 2005
ISBN 973-85709-5-6
51(075.3)(076)
06.063:51(498) Traian Lalescu
371.384:373.3+373.5

Editura Fundației "Moise Nicoară", Arad
Redactor: Major Csaba
Grafica: Laura Iova
Tipografia: S.C. TRINOM S.R.L.

FUNDAȚIA "MOISE NICOARĂ" ARAD

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU"

Ediția a XIX-a

12–13 martie 2005

(Enunțuri, bareme, soluții)

Traian Lalescu (1882-1929)

Editura Fundației "Moise Nicoară"
Arad
2005

Comisia centrală

Preşedinte: Prof. Univ. Dr. **Mihail Megan** – Prorector al Universităţii de Vest Timişoara

Vicepreşedinte: Prof. Univ. Dr. **Nicolae Suciu** – Prodecan al Facultăţii de matematică şi Informatică, Universitatea de Vest Timişoara

Membrii: Prof. Univ. Dr. **Viorel Radu**
Prof. Univ. Dr. **Constantin Buşe**
Conf. Univ. Dr. **Traian Ceauşu**
Conf. Univ. Dr. **Dorel Mihet**
Conf. Univ. Dr. **Gheorghe Silberberg**
Conf. Univ. Dr. **Silviu Birăuaş**
Lect. Dr. **Dan Comănescu**
Lect. Drd. **Mihai Chiş**

Comisia de organizare

Prof. **Marius Göndör** – insp. şc. gen., ISJ Arad
Prof. **Mihai Matekovits** – insp. şc. gen. adj., ISJ Arad
Prof. **Mircea Potocean** – insp. şc. gen. adj., ISJ Arad
Prof. **Viorel Tudoran** – insp. şc. de matematică, ISJ Arad
Prof. **Maranda Linţ** – insp. şc. de matematică, ISJ Hunedoara
Prof. **Elena Petria Boldea** – insp. şc. de matematică, ISJ Timiş
Prof. **Zeno Braşovan** – insp. şc. de matematică, ISJ Timiş
Prof. **Gheorghe Bălan** – insp. şc. de mat., ISJ Caraş-Severin
Prof. **Nicolae Pellegrini** – director, CCD Arad
Prof. **Wilhelm Portal** – dir., Colegiul Naţional "Moise Nicoară", Arad
Prof. **Gheorghe Herlo** – dir. adj., Colegiul Naţional "Moise Nicoară"
Prof. **Doina Stoica** – dir., Grup Şcolar "Francisc Neuman", Arad
Prof. **Livia Popescu** – dir., Şcoala generală "Aron Cotruş", Arad
Prof. **Maria Isopescu** – dir., Grup Şcolar Forestier, Arad
Prof. **Bolojan Florian** – Şcoala generală nr. 6, Arad
Prof. **Tocoian Daniel** – dir. adj., Şcoala generală "Aron Cotruş"
Prof. **Gabriel Cenădean** – Grup Şcolar Forestier, Arad

Cuvânt înainte

Ajuns la cea de a 19-a ediţie *Concursul Interjudeţean de Matematică* ***"Traian Lalescu"*** şi-a dovedit de-a lungul timpului un rol deosebit de important şi apreciat în fenomenul concursurilor adresate elevilor cu aptitudini la matematică.

Judeţul Arad, având ca principali exponenţi **Colegiul Naţional "Moise Nicoară"** (director **prof. Wilhelm Portal**) şi inspectorul de specialitate **prof. Viorel Tudoran,** s-a evidenţiat atât prin rezultatele foarte bune obţinute (la ultimele ediţii, lider în clasamentul general) precum şi prin excelenta organizare a ediţiilor desfăşurate în judeţul Arad.

Desfăşurat sub directa coordonare a *Facultăţii de Matematică şi Informatică din cadrul Universităţii de Vest din Timişoara*, concursul "Traian Lalescu" a constituit un foarte bun prilej de afirmare şi confirmare a rezultatelor obţinute la matematică de elevii judeţelor participante la concurs precum şi un antrenament util celor care participă la etapa naţională a olimpiadei de matematică.

În plus, trebuie menţionat că premianţii concursului "Traian Lalescu" au beneficiat de importante stimulente în admiterea la Facultatea de Matematică şi Informatică din Timişoara.

De asemenea, premianţii ediţiilor precedente ale acestui concurs pot fi regăsiţi printre cei mai buni absolvenţi ai facultăţilor de matematică din ţară şi străinătate care activează în cercetarea matematică şi în învăţământul superior.

Concursul Interjudeţean de Matematică "Traian Lalescu" este util nu numai elevilor ci şi profesorilor de matematică, căci el oferă un excelent prilej de schimb de experienţă şi discuţii privind prezentul şi mai ales viitorul învăţământului matematic din ţara noastră în contextul reformei preconizate pentru compatibilizarea cu învăţământul din Comunitatea Europeană.

Din cele de mai sus, rezultă aşadar că cel mai important fapt este să participăm la acest concurs, iar elevii pentru a fi siguri de succes nu trebuie să uite

Deviza lui Voltaire: *"Toujours au travaille"* şi
Axioma lui Scollte: *"Never to be doing nothing"*.

Prof. Dr. Mihail Megan,
Prorector al
Universităţii de Vest Timişoara

Colectivul de redacție

Belei Oana Maria
Bolojan Cosmina Liana
Borlea Diana Ioana
Jocza Julia
Niga Adriana Mihaela
Sârb Anca Georgeta
Sârb Cristina Emilia
Stancu Andreea
Zaha Călin Radu

Subiecte

Clasa a V-a

1. Câte cifre are numărul $5^{19}\cdot 8^{7}$?

***

2. Pentru m, n$\in\mathbb{N}^*$, notăm $m*n=m^n$.

i. Care este ultima cifră a numărului $2*2005-2005*2$?

ii. Calculați: $\dfrac{2*[2*(2*2)]}{[(2*2)*2]*2}$.

***

3. Să se determine numerele naturale x, y, z care verifică egalitatea: $\dfrac{\overline{x2}_{(y)}}{\overline{y2}_{(z)}}=\dfrac{\overline{4z}_{(y+2)}}{\overline{y2}_{(x+2)}}$

***

4. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ definim numărul $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$. Determinați numerele prime p cu proprietatea $77!+1<p<77!+77$.

***

Clasa a VI-a

1. Să se determine numerele întregi x, y, z știind că

$$(x^2+2^2)(y^2+2^3)(z^2+2^4) = 2^{10}.$$

***

2. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ și mulțimea $A=\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\dots,\frac{n-1}{n}\}$.

a. Determinați cel mai mic număr natural n, pentru care A conține exact 6 fracții ireductibile.

b. Arătați că mulțimea A are întotdeauna un număr par de fracții ireductibile.

***

3. Se consideră triunghiul ABC cu AB<AC și punctele $D\in(AC)$, $(AD)\equiv(AB)$ și $E\in(AB)$, $(AE)\equiv(AC)$.

a. Demonstrați că $(BC)\equiv(DE)$.

b. Fie $M\in(DE)$ și $N\in(BC)$ astfel ca $\sphericalangle MAE \equiv \sphericalangle NAC$ și $BC\cap DE=\{O\}$. Arătați că triunghiul OMN este isoscel.

***

4.a. Într-un triunghi ABC, unghiurile sunt proportionale cu 1, 2, 3. Demonstrați că triunghiul ABC este dreptunghic.

b. Fie E un punct pe ipotenuza BC a unui triunghi dreptunghic și F și G simetricele sale față de catete. Demonstrați că punctele F, A, G sunt coliniare.

***

Clasa a VII-a

1. Fie *ABCD* un trapez isoscel cu bazele [*AB*] și [*CD*], iar *O* punctul de intersecție al diagonalelor [*AC*] și [*BD*]. Dacă *M*, *N*, *P* sunt mijloacele segmentelor [*OA*], [*BC*], [*OD*], arătați că:

$$\Delta MNP \text{ este echilateral} \Leftrightarrow AC = AB+DC.$$

(D. Miheț)

2. Vârful unui poligon $A_1A_2...A_n$ sunt colorate cu două culori. Dacă numărul laturilor $[A_iA_{i+1}]$ (unde $A_{n+1} = A_1$) care au capetele colorate identic este egal cu numărul laturilor cu capetele colorate diferit, arătați că n este multiplu de 4.

(M. Chiș)

3. Fie [*AA'*] și [*BB'*] bisectoare interioare în triunghiul ΔABC și $M\in[A'B']$. Arătați că distanța de la M la dreapta AB este egală cu suma distanțelor de la *M* la dreptele *AC* și *BC*.

(M. Chiș)

4. O fracție de forma $\frac{1}{n}$, cu $n\geq 2$ se numește *fracție egipteană*.

a. Determinați câte o descompunere a numărului 1 în sumă de 3, 4, respectiv 5 fracții egiptene distincte.

b. Arătați că orice număr rațional pozitiv se poate scrie ca o sumă de fracții egiptene distincte.

(M. Chiș)

Clasa a VIII-a

1. Să se afle numerele naturale n astfel încât $x-y \in \mathbb{N}$ unde $x, y \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $x^3=n^2+n$ şi $y^3=n^2-n$.

***

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ diferite două câte două. Să se arate că dacă are loc relația $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$, atunci şi

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0.$$

***

3. Să se verifice inegalitățile:

a) $|x-1|+|x|+|x+1| \geq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) $|x|+|x-1|+|x+2|+|x-3|+\ldots+|x+2004|+|x-2005| \geq$
$\geq 1003 \cdot 2005$
$\forall x \in \mathbb{R}$.

***

4. În triunghiul echilateral ABC se consideră mediana AA', A' $\in$ (BC). Să se afle mulțimea punctelor $M \in$ (AA') pentru care există puncte E în spațiu cu proprietățile:

$ME \perp (ABC)$, $BE \perp EC$ şi $AE \perp EA'$.

Calculați valorile posibile ale segmentului EM.

***

Clasa a IX-a

1. Fie M, N, P, Q, R, S mijloacele laturilor [AB], [BC], [CD], [DE], [EF], [FA] ale hexagonului ABCDEF. Arătați că:

$$MQ \perp PS \Leftrightarrow MQ^2+PS^2=NR^2.$$

(D. Miheț)

2. Fie ABCD un pătrat în planul $\mathcal{P}$ şi $M_3=\{A, B, C\}$. Pentru fiecare $n \geq 3$, mulțimea M_{n+1} este definită prin

$$M_{n+1}=M_n \cup \{Z \in \mathcal{P} \mid (\exists)\, X, Y \in M_n : \overline{XZ} = 2 \cdot \overline{XY}\}.$$

Aflați valoarea de adevăr a afirmației:

"Există $n \geq 3$ cu proprietatea ca $D \in M_n$"

(M. Chiş)

3. Fie $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcții cu proprietățile:

i) g este impară.

ii) $f(x+y) \leq f(x)+f(y)$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$.

iii) $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Arătați că:

a) $f(x)=g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$.

(D. Miheț)

4. Fie ΔABC un triunghi fixat în plan.

a) Arătați că pentru orice punct M din plan există un unic triplet (α, β, γ) de numere reale cu proprietatea ca $\alpha+\beta+\gamma=1$ şi

$$\overline{OM}=\alpha \cdot \overline{OA}+\beta \cdot \overline{OB}+\gamma \cdot \overline{OC}$$

pentru orice punct O din plan. (α,β,γ) se numesc *coordonatele baricentrice standard ale punctului M în rapot cu ΔABC* şi notăm $M(\alpha,\beta,\gamma)$.

b) Determinaţi coordonatele baricentrice ale mijloacelor A_1, B_1,C_1 ale laturilor [BC], [CA], [AB] ale triunghiului, ale picioarelor A', B', C'; ale înălţimilor din A, B, C şi ale mijloacelor A_2, B_2, C_2 ale înălţimilor [AA'], [BB'], [CC'].

c) Arătaţi că dreptele A_1A_2, B_1B_2 şi C_1C_2 sunt concurente.

(M. Chiş)

Clasa a X-a

I.a) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $2^x=x$.

b) Fie f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie strict convexă (adică $f(t\cdot x+(1-t)\cdot y)<t\cdot f(x)+(1-t)\cdot f(y)$, $\forall$ $t\in[0,1]$, $\forall$ $x,y\in\mathbb{R}$, $x\neq y$). Câte soluţii reale poate avea ecuaţia $f(x)=x$?
Justificaţi răspunsurile.

***

II. Arătaţi ca pentru orice $z\in\mathbb{C}$ are loc inegalitatea:

$$|z-1|\cdot|z-i|+|z|\cdot|z-(1+i)|\geq 1.$$

Când are loc egalitatea?

(C. Buşe)

III. Fie f, g, h: $\mathbb{R}\to(0,\infty)$ funcţii strict crescătoare astfel încât $\frac{h}{g}$ şi $\frac{h}{f}$ sunt funcţii strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ şi $h(1)=f(1)+g(1)$.

Rezolvaţi în $\mathbb{R}\mathrm{x}\mathbb{R}\mathrm{x}\mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases} f(x)+g(y)=h(x) \\ f(y)+g(z)=h(y) \\ f(z)+g(x)=h(z) \end{cases}$.

***

IV. Arătaţi că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea:

$$(n+\frac{3}{2})\cdot\lg\frac{n+2}{n+1}<(n+\frac{1}{2})\lg\frac{n+1}{n}.$$

(C.Buşe)

CLASA A XI-A

1. Pentru un punct M din interiorul triunghiului isoscel VA_1A_2, se notează cu d_1 distanța de la M la VA_1, cu d_2 distanța de la M la VA_2 și cu d distanța de la M la baza A_1A_2. Precizați mulțimea punctelor M pentru care $d = \sqrt{d_1 d_2}$. Formulați o generalizare în spațiu, plecând de la un con.

***

2. Fie $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pentru care, $x \in \mathbb{R}$, $g(g(x)) \cdot g(x) = 1$. Arătați că ecuația $g(x)=x$ admite o soluție unică și că $g(x) \leq x$, $\forall\, x \geq 1$.

(D. Miheț)

3. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})(n \geq 2)$,
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

a) Dacă $\varepsilon_0, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}$ sunt rădăcini de ordinul n ale unității, $f = a_1 + a_2X + a_3X^2 + \dots + a_nX^{n-1}$, iar
$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_{n-1} \\ \varepsilon_0^2 & \varepsilon_1^2 & \dots & \varepsilon_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_0^{n-1} & \varepsilon_1^{n-1} & \dots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix},$$
considerând produsul $A \cdot W$ arătați că $\det A = f(e_0) \cdot f(e_1) \cdot \ldots \cdot f(e_{n-1})$.

b) Rezolvați ecuația $\det(A - xI_n) = 0$, $x \in \mathbb{C}$.

c) Arătați că dacă există $l \in \mathbb{C}$ astfel ca $A^l = O_n$ atunci $A = O_n$.

(D. Miheț)

4. Fie $f:(0,\infty) \to (0,\infty)$ o funcție cu proprietatea

$$\min\{\sqrt{x}, \sqrt{y}\} \cdot \max\{f(x), f(y)\} \leq \max\{\sqrt{x}, \sqrt{y}\} \cdot$$
$$\cdot \min\{f(x), f(y)\},$$
$$\forall x, y > 0$$

Demonstrați că f este continuă și că șirul recurent următor este convergent:

$x_0 \in (0,\infty)$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall\, n \geq 0$.

(V. Radu)

Clasa a XII-a

1. Fie A un inel cu patru elemente. Demonstraţi că A este corp dacă şi numai dacă ecuaţia $x^2+x+1=0$ are o rădăcină în A.

***

2. Sa se arate că mulţimea izomorfismelor de la grupul $(\mathbb{Q},+)$ în el însuşi împreună cu operaţia de compunere formează grup care este izomorf cu grupul $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$.

***

3. Fie $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ o funcţie convexă, de două ori derivabilă cu f'' continuă. Demonstraţi inegalitatea:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx \geq 0$$

***

4. Demostraţi că funcţia $F:(1,\infty)\to(\ln 2,\infty)$ definită prin:

$F(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt$ este bijectivă.

***

Barem de corectare
Clasa a V-a

1. $8^7=2^{21}$ (1p)

$5^{19}\cdot 8^7=5^{19}\cdot 2^{19}\cdot 2^2=10^{19}\cdot 2^2$ (3p)

$10^{19}\cdot 2^2=4\underbrace{00\ldots0}_{19\text{ zerouri}}$ (2p)

finalizare – numărul are 20 cifre (1p)

2 i. $2*2005-2005*2=2^{2005}-2005^2$ (1p)

$u(2^{2005})=2$ (1p)

$u(2005^2)=5$ (1p)

finalizare $u(2^{2005}-2005^2)=7$ (1p)

ii. numărătorul 2^{16} (1 p)

numitorul 2^8 (1 p)

finalizare $\frac{2^{16}}{2^8}=2^8$ (1p)

3. Condiţii de existenţă:

(1) $y<z<y+2 \Rightarrow z=y+1$ (1p)

(2) $x<y<x+2 \Rightarrow y=x+1$ (1p)

(1) şi (2) $\Rightarrow z=x+2$ (*) (1p)

(*)$\Rightarrow \overline{x2}_{(y)}=\overline{4z}_{(y+2)}$ (1p)

deduce: $x(x-4)=12$ (2p)

finalizare: $x=6$, $y=7$, $y=8$ (1p)

4. $p=77!+k$

$2\leq k\leq 76$ (3p)

$p=77!+k=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k\cdot 77+k$

$=k[1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-1)(k+1)+1]$ (3p)

p compus $\Rightarrow$ nu există p număr prim care satisface cerinţa (1p)

Clasa a VI-a

1.

$x, y, z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 \geq 0, y^2 \geq 0, z^2 \geq 0$ 1p

$x^2+2^2 \geq 2^2$; $y^2+2^3 \geq 2^3$; $z^2+2^4 \geq 2^4$ 2p

$\Rightarrow (x^2+2^2)(y^2+2^3)(z^2+2^4) \geq 2^9$. 1p

C I:

$x^2+2^2=2^3$; $y^2+2^3=2^3$; $z^2+2^4=2^4 \Rightarrow (x, y, z) \in \{(2,0,0); (-2, 0,0)\}$ ...1p

C II:

$x^2+2^2=2^2$; $y^2+2^3=2^4$; $z^2+2^4=2^4 \Rightarrow x=0$; $y^2=8$ nu convine; $z=0$ ...1p

C III:

$x^2+2^2=2^2$; $y^2+2^3=2^3$; $z^2+2^4=2^5 \Rightarrow (x; y; z) \in \{(0,0,4); (0,0,-4)\}$ 1p

2. a. Observăm că n=7 ....1p

Demonstrează că n=7 ....2p

b. $(k,n)=1 \Rightarrow (n, n-k)=1$ 2p

analizează cazul $\frac{k}{n} = \frac{n-k}{n} \Rightarrow n=2k$ 1p

$\frac{k}{2k}$ reductibilă + finalizare 1p

3.a) $\Delta ABC \equiv \Delta ADE$ 3p

b) din a) $\Rightarrow \angle AED \equiv \angle ACB$ 1p

$\Delta AME \equiv \Delta ANC$ (LUL) $\Rightarrow$ EM=NC 1p

$\angle AEC \equiv \angle ACE$, ΔOEC isoscel $\Rightarrow$ OC= OE............1p

$\Rightarrow$ OM= ON$\Rightarrow$ ΔMON isoscel 1p

4.a)

$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$ 2p

$\Rightarrow a=30^\circ$, $b=60^\circ$, $c=90^\circ$ 1p

b) ΔAEF isoscel $\Rightarrow$ (AB bisectoare $\angle FAE \Rightarrow m(\angle FAB) = m(\angle BAE) = x$ 1p

ΔAEG isoscel $\Rightarrow$ (AC bisectoare $\angle EAG \Rightarrow m(\angle EAC) = m(\angle CAG) = y$ 1p

$m(\angle BAC) = 90^\circ \Rightarrow$. $x+y=90^\circ$ 1p

$m(\angle FAG) = 2x+2y = 2 * m(\angle BAC) = 180^\circ \Rightarrow$

F, A, G coliniare 1p

Clasa a VII-a

Problema 1

Start .... 1 p

[⇒] observă că $MP = \frac{1}{2} \cdot AD$ .... 1 p

deduce că $MN = NP = \frac{1}{2} \cdot BC$ .... 1 p

deduce că ΔBMC şi ΔBPC sunt dreptunghice .... 1 p

deduce că ΔAOB şi ΔCOD sunt echilaterale .... 1 p

obţine că AC=AB+DC .... 1 p

[⇐] deduce că ΔAOB şi ΔCOD sunt echilaterale .... 1 p

deduce că ΔBMC şi ΔBPC sunt dreptunghice .... 1 p

obţine că $MN = NP = \frac{1}{2} \cdot BC$ =MP .... 1 p

obţine că ΔMNP este echilateral .... 1 p

Total 10 p

Problema 2

Start .... 1 p

Arată că n este par, $n \overset{not}{=} 2 \cdot k$ .... 3 p

Parcurgând laturile poligonului găseşte că numărul laturilor cu capetele colorate diferit între vârfurile A_1 şi A_i este

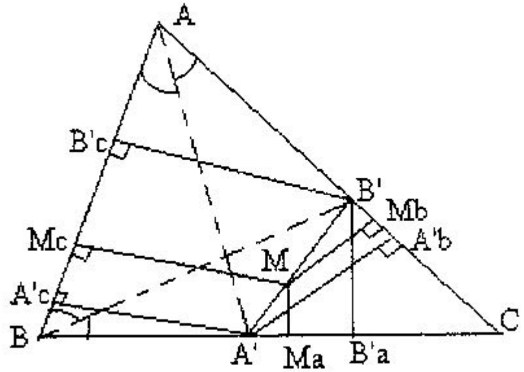
par dacă culoarea lui A_i este culoarea lui A_1

impar dacă culoarea lui A_i nu este culoarea lui A_1 .... 3 p

deduce că şi k este par .... 2 p

obţine că n $\vdots$ 4 .... 1 p

Total 10 p



Problema 3

Start .... 1 p

Desen .... 1 p

Observă că : d(A',AB)=d(A',AC), d(B',AB)=d(B',BC)... 1 p

Dacă M_a , M_b , M_c sunt proiecţiile lui M pe BC, CA, AB, A'_b, A'_c , proiecţiile lui A' pe AC, AB, B'_a , B'_c proiecţiile lui B' pe AC, AB obţine că $\Delta B'MM_b \sim \Delta B'A'A'_b$ şi $\Delta A'MM_a \sim \Delta A'B'B'_a$ .... 1 p

Deduce că $\frac{MM_a}{B'B'_a} = \frac{MA'}{A'B'}$ şi $\frac{MM_b}{A'A'_b} = \frac{MB'}{A'B'}$ .... 1 p

Obţine $MM_a + MM_b = \frac{MA'}{A'B'} \cdot B'B'_a + \frac{MB'}{A'B'} \cdot A'A'_b =$

$= \frac{MA'}{A'B'} \cdot B'B'_c + \frac{MB'}{A'B'} \cdot A'A'_C$ .... 2 p

Arată că $MM_c = \frac{MA'}{A'B'} \cdot B'B'_c + \frac{MB'}{A'B'} \cdot A'A'_c$ .... 2 p

Obţine că $MM_a + MM_b = MM_c$ .... 1 p

Total 10 p

Problema 4

Start ....1 p

a) Găseşte $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ ....1 p

$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$ (sau alta) 1p

$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{12}+\frac{1}{42}$ (sau alta) ....1 p

b) Scrie $\frac{m}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+....+\frac{1}{n}$ (m fractii) 1p

şi înlocuieşte în caz de repetiţie $\frac{1}{k}$ cu $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k(k+1)}$ 4p

Finalizare 1p

Total 10 p

Clasa a VIII-a

Subiectul 1

1. Analizează cazul n=0 ....1p
2. Arată că x-y< 2.Prin reducere la absurd presupunem că x-y≥ 2 ⇔x≥ y+2⇔n≥ $3y^2+6y+4$ ⇔ $n\le\frac{-6+\sqrt{12n-12}}{6}$ 2p
3. $y^3=n(n-1)\Rightarrow y^3\ge (n-1)^2$ 2p
4. Arată că inegalitatea $(n-1)^2\le(\frac{-6+\sqrt{12n-12}}{6})^3$ nu are loc pentru n≥ 1 ..2p

Subiectul 2

1. Aduce la acelaşi numitor 1p
2. Numărătorii sunt egali cu 0 ....1p
3. Înmulţeşte cu (a-b)(b-c)(c-a) 1p
4. Înmulţeşte cu $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}$ 1p
5. Finalizarea 3p

Subiectul 3

i) Rezolvă prin explicitarea modulului sau folosirea proprietăţilor modulului 3p

ii). Arată că $|x-n|+|x+n+1|\ge 2n+1$ 2p

Finalizarea calculului 2p

Subiectul 4

1. Figura 1p
2.Observă [EA'] mediana în ΔECB 1p
3.Determină $EA'=\frac{a}{2}$, $EA=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ 2p
4. Determină $EM=\frac{a\sqrt{6}}{6}$ şi $A'M=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ 2p
5. Specifică poziţia punctului 1p

Clasa a IX-a

Problema 1.

Start 1p
Arată că $\overline{NR}=\overline{MQ}+\overline{PS}$ 4p
Obţine $NR^2=MQ^2+PS^2+2\overline{MQ}\cdot\overline{PS}$ 2p
Finalizare 3p
Total 10p

Problema 2.

Start 1p
Alege reperul (de exemplu B(0,0), A(0,1), C(1,0), D(1,1)) .2p
Arată prin inducţie după n că toate punctele mulţimii M_n au cel puţin câte o coordonată pară 5p
Deduce că $D\notin M_n$, (∀) $n\geq 3$ 2p
Total 10p

Problema 3.

Start 1p
Observă că g(0)=0 ....1p
Arată că f(0)=0 ....2p
Arată că f(x)≥g(x) şi deduce că f(x)≥g(x), (∀) x∈ℝ 2p
Observă că f este impară 1p
Arată că f(x+y)≥f(x)+f(y) şi deduce că f(x+y)=f(x)+f(y), (∀) x,y∈ℝ 3p
Total 10p

Problema 4.

Start 1p

a) Deduce existența 2p

Arată unicitatea 1p

b) Determină coordonatele baricentrice ale punctelor A_1, B_1, C_1 ....1p

Determină coordonatele baricentrice ale punctelor A', B', C' 1p

Determină coordonatele baricentrice ale punctelor A_2, B_2, C_2 ....1p

c) Consideră $A_1A_2 \cap B_1B_2 = \{K\}$ și determină coordonatele baricentrice ale punctului K 2p

Arată că $K \in C_1C_2$ 1p

Total 10p

Clasa a X-a

I.a) Ecuația nu are soluții negative

- dacă $a \geq 0$ este soluție atunci $a = 2^a \geq 1$
- dacă $x \geq 1$ atunci $2^x \geq 2^{[x]} \geq [x]+1 > x$ (cu inducție!) 3p

b) - $(x)=2^x+x-1$ este strict convexă și ecuația $f(x)=x$ are o singură soluție 1p

- $f(x)=x^2$ este strict convexă și $f(x)=x$ are două soluții distincte 1p
- ecuația nu poate avea mai mult de două soluții.

<u>prin absurd</u>. Fie $x_1<x_2<x_3$ soluții distincte ale ecuației $f(x)=x$. Atunci $\exists\, t\in[0,1]$ astfel încât $x_2=t\cdot x_1+(1-t)\cdot x_3$ și $x_2=f(x_2)<t\cdot f(x_1)+(1-t)\cdot f(x_3)=t\cdot x_1+(1-t)\cdot x_3= x_2$ (contradicție!) 2p

II. - $|(z-1)||(z-i)|=|z^2-z(1+i)+i|$

- $|z|\cdot|z-(1+i)|=|-z^2+z\cdot(1+i)|$ 2p
- $|z-1|\cdot|z-i|+|z|\cdot|z-(1+i)|\geq\ |i|=1$ 2p
- egalitatea se realizează dacă $\mathrm{Re}(z^2-z(1+i))=0$ cu detalii 3p

III. - scrie egalitatea

- $f(x)+g(x)-h(x)+f(y)+g(y)-h(y)+ f(z)+g(z)-h(z)=0$

și găsește soluția (1,1,1) 2p

- $g(y)=\underbrace{f(x)\left[\dfrac{h(x)}{f(x)}-1\right]}_{p(x)}$

funcția p este strict crescătoare și $p(1)=g(1)$.
dacă $x>1$ atunci $g(y)>g(1)$ deci $y>1$. Analog $z>1$ 2p

- $f(x)+g(x)-h(x)=\underbrace{h(x)\cdot\left[\dfrac{f(x)}{h(x)}+\dfrac{g(x)}{h(x)}-1\right]}_{q(x)}$

- funcţia q este strict descrescătoare atunci $q(x)<q(1)$ pentru $x>1$ deci $f(x)+g(x)-h(x)<0$, adică sistemul nu are soluţii cu $x>1$ 2p

- analog se tratează cazul $x<1$ 1p

IV. - scrie inegalitatea sub forma:

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+\frac{3}{2}}<\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$ 1p

- ajunge la inegalitatea echivalentă:

$$\frac{(n^2+2n)(2n+3)}{n^2+2n+1}-1<\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)+...+\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{2n}$$ 3p

- foloseşte inegalitatea

$$\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{k}\geq 1+\frac{k}{n^2+2n}+C_k^2\frac{1}{(n^2+2n)^2}$$ 2p

- finalizare 1p

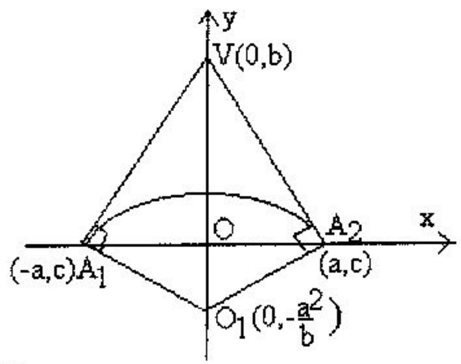
Clasa a XI-a

1)

- calculează $d_1=\frac{|bx+ay-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ şi $d_2=\frac{|bx-ay+ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ....1 p
- explicitează modulele în funcţie de poziţia originii 1p
- din relaţia din enunţ deduce

$$y^2=\frac{(ab-bx-ay)(bx-ay+ab)}{a^2+b^2}$$ 1p

- obţine ecuaţia $x^2+\left(y+\frac{a^2}{b}\right)^2=\frac{a^2(a^2+b^2)}{b^2}$ 1p
- precizează locul geometric $C\cap Int(VA_1A_2)$ 1p
- generalizează locul geometric în spaţiu 1p



2)

- $g(x)=y\in \text{Im}(g)\Longrightarrow g(y)=\frac{1}{y}$ 1p

- $\left.\begin{array}{l}O\notin \text{Im}(g)\\ g-\text{continuă}\end{array}\right\}\Longrightarrow \begin{array}{l}g(x)>0\\ (<0)\end{array}$ $(\forall)$ x 1p

- consideră funcția $g(x)-x$ - continuă(are P.D.) și presupune că $g(x)-x\neq 0 \Longrightarrow g(x)-x \begin{matrix} g(x)>0 \\ (<0) \end{matrix}$

- dacă $g(x)-x>0$ alege $x_0>1$ și obține că $g(g(x_0))>g(x_0)>x_0>1$, deci $g(g(x_0))\cdot g(x_0)\neq 1$ contradicție dacă $g(x)-x<0$ alege $x_0<-1$ și obține analog contradicție 1p
- obține că $(\exists)\ c\in\mathbb{R}: g(c)-c=0$ 1p
- dacă c este sol a ec. $g(x)-x=0 \Rightarrow c^2=1 \Rightarrow c=1$ sol unică pt. $g(x)>0$ și $c=-1$, sol unică pt $g(x)<0$ 1p
- presupune că $g(x)-x>0\ \forall\ x\geq 1$, deci $\exists\ x_0$: $g(x_0)>x_0>1 \Longrightarrow g(g(x_0))=\dfrac{1}{g(x_0)}<1$ 1p
- conform P.D. $(\exists)\ \varepsilon\in(x_0,g(x_0)) : g(\varepsilon)=\varepsilon,\ \varepsilon>x_0>1$ contradicție 1p

3.a) – calculează

$$AW=\begin{pmatrix} f(\varepsilon_0) & f(\varepsilon_1) & \dots & f(\varepsilon_{n-1}) \\ \varepsilon_0 f(\varepsilon_0) & \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \dots & \varepsilon_{n-1} f(\varepsilon_{n-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_0^{n-1} f(\varepsilon_0) & \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \dots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} f(\varepsilon_{n-1}) \end{pmatrix} \overset{not}{=} B$$ 1p

- calculează $\det(B)=\prod_{k=0}^{n-1} f(\varepsilon_k)\cdot\det(W)$ 1p
- justifică $\det(W)\neq 0$ 0,5p
- $\det(A)=\prod_{k=0}^{n-1} f(\varepsilon_k)$ 0,5p

b) – consideră polinomul $g=a_1-x+a_2X+a_3X^2+\dots+a_nX^{n-1}$ $(g=f-x)$ și reduce la punctul a) $\Longrightarrow \det(A-xI_n)=\prod_{k=0}^{n-1} g(\varepsilon_k)$ 1p
- din $\det(A-xI_n)=0$, deduce că $x_k=f(\varepsilon_k)$, $k=\overline{1,n}$ 1p

c) – din $A^l=O_n$ obține că $x_k=0$, $k=\overline{0,n-1}$ 1p
- conform punctului b) polinomul $f=\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ cu grad $f\leq n-1$ are n rădăcini distincte $\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-1} \Longrightarrow f=0 \Longrightarrow a_k=0$, $k=\overline{1,n}$ ...1p

4.
- alege $x_n\to x>0$ și $f(x_{n_k})\to y$ 1p
- $\min\{\sqrt{x_{n_k}},\sqrt{x}\}\cdot\max\{f(x),f(x_{n_k})\}\leq \leq\max\{\sqrt{x_{n_k}},\sqrt{x}\}\cdot\min\{f(x),f(x_{n_k})\}$ 1p
- face $x\to\infty$ și obține
$\sqrt{x}\max\{f(x),y\}\leq\sqrt{x}\min\{f(x),y\}\Rightarrow f(x)=y$ 1p
- presupune prin reducere la absurd că $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ nu are puncte fixe 1p
- consideră funcția $f(x)-x$, $(\forall)\ x>0$. Dacă $f(x)>x$, $(\forall)\ x>0$ observă conform ipotezei că $x_{n+1}=f(x_n)>x_n \Longrightarrow x_n$ crescător și nemărginit superior. At.

$$\sqrt{x_n}\cdot x_{n+k+1}\leq\sqrt{x_{n+k}}\cdot x_{n+1}\Rightarrow\frac{\sqrt{x_n}}{x_{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{x_{n+k+1}}}\xrightarrow{k\to\infty}0$$

contradicție 1p
- pentru $f(x)-x<0$, $(\forall)\ x>0$ analog 1p
- deduce că f are un punct fix, iar (x_n) converge la acesta 1p

Clasa a XII-a

I. $\Rightarrow$ Fie $A=\{0,1,a,b\}$ corp $\Rightarrow$ $A^* = \{1,a,b\}$ grup multiplicativ 1p

Obține $a^3=1 \Leftrightarrow (a-1)(a^2+a+1)=0$ 1p

A nu are divizori ai lui zero $\Rightarrow$ $a \neq 1$ $\Rightarrow$ $a^2+a+1=0$ 1p

$\Leftarrow$ Fie $A=\{0,1,a,b\}$ inel $\Rightarrow$ ecuația $x^2+x+1=0$ nu are ca rădăcini pe 0 și 1 ....2p

Dacă a soluție $\Rightarrow$ $a(a+1)= -1$. Dacă $a= -1$ $\Rightarrow$ $0= -1$ absurd $\Rightarrow$ $a+1 \neq 0$ 1p

Deci $a+1=b \Rightarrow$ a,b inversabile $\Rightarrow$ A corp 1p

II. Fie $Izom(Q)=\{f:Q\to Q$ / f izomorfism de grupuri$\}$.

Dacă $f(1)=0 \Rightarrow f(2)=f(1)+f(1)=0 \Rightarrow$ f nu e injectivă, fals așadar $f(1)\neq 0$ 1p

Arată $f(n)=n\cdot f(1)$, $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ 1p

Arată $f(k)=k\cdot f(1)$, $\forall$ $k\in\mathbb{Z}$ 1p

Arată $f(r)= r\cdot f(1)$, $\forall$ $r\in\mathbb{Q}$ 1p

Arată $(f\circ g)(r)=f(g(r))=f(r\cdot g(1))=r\cdot f(1)\cdot g(1)$, $\forall$ f, g $\in$ Izom(Q) 1p

Fie $F:(Izom(Q),\circ)\to(Q^*,\cdot)$ dată prin $F(f)=f(1)$ 1p

Arată F bijectivă $\Rightarrow$ F izomorfismul cerut 1p

III.

Fie $I=\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \sin x\cdot f(x)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x)\cdot \sin x\,dx$ 2p

Deduce $I=(\cos x)\cdot f'(x)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f''(x)\cdot\cos x\,dx$ 1p

Deduce $I=\int_0^{2\pi} f''(x)dx - \int_0^{2\pi} f''(x)\cos x\,dx$ 2p

f convexă $\Rightarrow f''(x)\geq 0, \forall x\in[0,2\pi]$ 1p

Obține $I=\int_0^{2\pi} f''(x)(1-\cos x)dx \geq 0$ 1p

IV. Fie $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(t)=\dfrac{1}{\ln t}$ continuă $\Rightarrow$

$F'(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}>0, \forall x\in(1,\infty)$, F strict crescătoare deci F injectivă 1p

$F(x)\geq (x^2-x)\cdot \min\limits_{x\leq t\leq x^2}\dfrac{1}{\ln t}=\dfrac{x^2-x}{\ln x^2}$ 1p

$\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=\infty$ 1p

Obține $F(x)=\int_{\ln x}^{2\ln x}\dfrac{e^u}{u}du \Rightarrow F(x)<e^{2\ln x}\cdot\int_{\ln x}^{2\ln x}\dfrac{1}{u}du = x^2\cdot\ln 2$ .1p

$F(x)> x\ln 2$ 1p

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 1} F(x)=\ln 2 \Rightarrow$ F surjectivă 1p