Memorialul „Traian Lalescu" Petroşani 12-14 Martie 2004

Comisia de concurs

Prof. univ. dr.	MIHAIL MEGAN Decan al Facultăţii de Matematică şi Informatică
Prof. univ. dr.	VIOREL RADU
Prof. univ. dr.	CONSTANTIN BUŞE
Lector univ. dr.	DAN COMĂNESCU
Lector univ. dr.	MIHAI CHIŞ
Lector univ.	GHEORGHE ECKSTEIN
Asist. univ.	ALIN POGAN
Asist. univ.	RADU MOLERIU
Student	GEORGE STOIANOV
	Universitatea de Vest Facultatea de Matematică şi Informatică

Prof. VIOREL TUDORAN
inspector de matematică, I.S.J. Arad
Prof. CHEORGHE BĂLAN
inspector de matematică, I.S.J. Caraş-Severin
Prof. ZENO BLAJOVAN
inspector de matematică, I.S.J. Timiş
Prof. ELENA PETRIA BOLDEA
inspector de matematică, I.S.J. Timiş
Prof. MARANDA LINŢ
inspector de matematică, I.S.J. Hunedoara

CLASA a V-a

1. Să se arate că nu există numere prime p cu proprietatea că

$$(p^2-2p+1,\ 2p^2+p+1) = 3$$

Moleriu Radu

2. Să se afle numerele naturale a, b < 10 astfel încât

$$a^n + b^{n+1} + a^{n+2} + b^{n+3}$$

să se dividă cu 10 pentru orice număr natural $n \geq 2$.

Moleriu Radu

3. Să se afle cifrele a, b, c, d care verifică relaţiile:

i. $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{bcd} + \overline{cda} + \overline{dab}$ se divide cu 15;

ii. $a, b, c, d \in \{2, 3, 4, 5\}$ şi $a \leq b \leq c$.

Moleriu Radu

CLASA a VI-a

1. Se dă triunghiul ABC. Construiţi un triunghi care să aibă medianele de lungimi direct proporţionale cu AB, BC respectiv CA.

(***)

2. În triunghiul ABC, [AM este bisectoare interioară iar [AN este bisectoare exterioară (M, N $\in$ BC). Fie X pe dreapta (AN) astfel încât XC$\perp$BC. Arătaţi că dreptele XC, AM şi perpendiculara din N pe XM sunt concurente.

(***)

3. Aflaţi numerele întregi x, y astfel încât:

$$x^2 + 2xy + 2x + 2y = 2$$

(***)

4. Aflaţi cifrele a şi b astfel ca :

$$\overline{a,b} = \frac{b}{a} \quad (\overline{a,b} \text{ în baza } 10), \text{ unde } a \neq 0$$

(***)

CLASA a VII – a

1. Fie a>0, b>0, c>0 cu proprietatea că $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=5$. Să se arate că

$$\frac{a^2}{a^2\cdot b^2+1}+\frac{b^2}{b^2\cdot c^2+1}+\frac{c^2}{c^2\cdot a^2+1}\le\frac{5}{2}.$$

(***)

2. Să se determine numerele p, q $\in$ N* pentru care $2^p-1 \mid 2^q+1$.

(***)

3. Se consideră triunghiul ABC, M mijlocul laturii BC, G centrul de greutate al triunghiului. Paralela prin G la BC intersectează laturile AB și AC în E respectiv F. Să se arate că AM $\equiv$ BC dacă și numai dacă $m(\widehat{EMF})=90°$.

(***)

4. În triunghiul ascuțit unghic ABC cu $m(\hat{A})=60°$ se consideră D și E picioarele perpendicularelor din B respectiv C și M mijlocul segmentului BC. Să se arate că ΔEDM este echilateral. Știind că punctele A și C sunt fixe cu AC = 8, B variabil astfel încât $m(\widehat{BAC})=60°$ să se dtermine lungimea minimă a laturii triunghiului echilateral EDM.

(***)

CLASA a VIII-a

1. Există numere naturale a, b și c care verifică ecuația

$$6a^2+6b^2=2ab+2a+2b+49c+1\ ?$$

Dan Comănescu

2. Fie a, b, c, d numere naturale nenule și distincte.

Să se arate că $a^4+b^4+c^4+d^4\ge 4abcd+258$

Dan Comănescu

3. Fie π_1 și π_2 două plane paralele, A și B două puncte din spațiu. Să se determine punctele M$\in\pi_1$ și N$\in\pi_2$ astfel încât suma:

AM + MN + NB să fie minimă.

(***)

4. Prin vârfurile unui triunghi ABC considerăm dreptele d_A, d_B și d_C perpendiculare pe planul triunghiului. Fie A\`$\in d_A$, B\`$\in d_B$ și C\`$\in d_C$ astfel încât AA\`=BC, BB\`=AC și CC\`=AB. Să se arate că triunghiul A\`B\`C\` este ascuțit unghic.

Dan Comănescu

CLASA a IX-a

1. Să se arate că numărul $a=[(\sqrt{13}+3)^{2004}]+1$ se divide prin 2^{2004}.

M. Chiș

2. Fie m, n $\in$ N, cu m, n $\ge$ 2. Pe laturile patrulaterului ABCD se consideră, în această ordine, punctele $M_1, M_2,\ldots, M_{n-1}\in(AB)$, $N_1, N_2,\ldots, N_{n-1}\in(DC)$, $P_1, P_2,\ldots, P_{m-1}\in(AD)$, $Q_1, Q_2,\ldots, Q_{m-1}\in(BC)$, care împart laturile în segmente egale. Pentru fiecare i$\in\{1, 2,\ldots, n-1\}$ și j$\in\{1, 2,\ldots, m-1\}$ notăm cu T_{ij} intersecția dreptelor M_iN_i și P_jQ_j. Să se arate că, pentru fiecare i$\in\{1, 2,\ldots, n-1\}$, punctele $T_{i1}, T_{i2},\ldots,T_{im-1}$ împart segmentul (M_iN_i) în segmente egale.

M. Chiș

3. Să se determine funcțiile $f: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ care verifică proprietățile:

i. $0\in f(\mathbb{N})$

ii. $f(f(n-1)+1)=n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

D. Comănescu

4. Fie $\mathbb{C}=\mathbb{C}(0, r)$ un cerc în plan, P, Q două puncte exterioare cercului și PR și QS tangentele la $\mathbb{C}$, cu R, S$\in\mathbb{C}$.

a. Arătați că există un unic punct $P_1\in$ (OP astfel încât

$$OP^2+OP_1^{\,2}=PP_1^{\,2}+2r^2.$$

b. Arătați ca QR$\perp$OP dacă și numai dacă Q$\in P_1R$

c. Arătați că $QR \perp OP$ dacă și numai dacă $PS \perp OQ$.

M. Chiș

CLASA a X-a

1. Să se rezolve ecuația

$$\lg(9 + \lg(9 + \lg(9 + [x]))) = [x]$$

Ghe. Eckstein

2. Fie $D = \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{-1-i}{2}, \frac{-1+i}{2}\right\}$. Să se determine $f: D \to D$ pentru care

$$f(z) + f\left(\frac{iz}{(1-i)z+1}\right) + f\left(\frac{-z}{2z+1}\right) = \frac{-iz}{(1+i)z+1},\ \forall\, z \in D$$

Ghe. Eckstein

3. Fie date numerele naturale k, n astfel că $1 \le k \le n$. Considerăm toate submulțimile de k elemente ale mulțimii $\{1, 2,\dots, n\}$ și alegem din fiecare cel mai mic element. Să se demonsterze că media aritmetică a numerelor alese este $\frac{n+1}{k+1}$. Cât este media numerelor alese dacă se aleg cele mai mari elemente ?

KVANT

4. Fie $r_n = \cos^n\frac{\pi}{7} + \cos^n\frac{3\pi}{7} + \cos^n\frac{5\pi}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$

i. Să se calculeze r_1, r_2.

ii. Să se calculeze r_3, r_4.

iii. Să se demonsterze că $r_n \in \mathbb{Q}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Notă: Răspunsurile la (i) și (ii) se cer ca fracții raționale.

KVANT

CLASA a XI-a

1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietățile, $A^2 = B^2 = I_2$ și $\det(A) = \det(B) = -1$. Să se arate că există $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât $AB + BA = \lambda I_2$

C. Mortici

2. Se consideră cercurile de ecuații $x^2 + y^2 - 4x\cos^2 t - 2my\sin^2 t = 0$, unde $m>0$, $t \in [0, \pi/2]$.

a. Pentru m fixat, determinați locul geometric al centrelor cercurilor date.

b. Pentru $t = \pi/4$, determinați locul geometric al punctelor de tangență a tangentelor duse din $A(-1, 0)$ la cercurile date.

(***)

3. Să se determine toate funcțiile $f: [0, \infty) \to \mathbb{C}$ cu proprietățile

i. $f(a+b) = f(a)f(b)$, $\forall\, a, b \ge 0$;

ii. $|f(a)| \ge 1 + a$, $\forall\, a \ge 0$.

(***)

4. Fie $g: [0, 1] \to \mathbb{R}$, astfel încât $|g(x) - g(y)| \le \frac{1}{2}|x-y|$, $\forall$ x, y $\in [0, 1]$ și $g(0), g(1) \in [0, 1]$. Demonstrați că ecuația $g(x) = x$ admite o unică soluție $p \in [0, 1]$ și arătați că pentru cel puțin o valoare $x_0 \in \{0, 1\}$ șirul recurent $x_{n+1} = g(x_n)$, $\forall\, n \ge 0$ poate fi construit și $x_n \to p$.

(***)

CLASA a XII-a

1. Fie A un inel cu unitate ($1 \ne 0$) și $a \in A$ un element care are elementul $b \in A$ ca invers la stânga și nu are invers la dreapta. Fie L mulțimea inverșilor la stânga ai elementului a și $f: L \to A$ funcția definită prin $f(x) = ax-1+b$. Arătați că $f(L) \subset L$, $f(L) \ne L$ și f este injectivă. Deduceți că inelul A este infinit.

M. Chiș

2. Fie $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Pentru fiecare $s \ge 0$ considerăm funcțiile $g, h, f_s, h_s: [0, \infty) \to \mathbb{R}$, definite prin

$$g(t) = \int_0^t f(x)dx,\ h(t) = \int_0^t (t-x)f(x)dx,$$

$$f_s(t) = \begin{cases} f(t-s) & t \ge s \\ 0 & 0 \le t \le s \end{cases}$$

$$h_s(t) = \begin{cases} h(t-s) & t \geq s \\ 0 & 0 \leq t \leq s \end{cases}, t \geq 0.$$

a. Arătați că pentru orice $t \geq 0$ și orice $x \geq 0$, avem :

$$h_t(x) - h(x) + t \cdot g(x) = \int_0^t (t-s) f_s(x) ds$$

b. Dacă $|f(x)| \leq 1$ și $|h(x)| \leq 1$ pentru orice $x \geq 0$ atunci $|g(x)| \leq 2$ pentru orice $x \geq 0$.

Constantin Bușe

3. Fie $a>0$ și f, $g : [-a, \infty) \to R$ două funcții continue.

Considerăm fun. $f*g : [-a, \infty) \to R$ definită prin:

$$(f*g)(x) = \int_{-a}^{x} f(t) g(x-t) dt, \ x \in [-a, \infty).$$

Să se arate că:

a. dacă g este cu derivată continuă pe $[-a, \infty)$ atunci $f*g$ este derivabilă pe $[-a, \infty)$;

b. Fie $\mathcal{D}_a$ mulțimea funcțiilor derivabile și cu derivată continuă pe $[-a, \infty)$ care iau valori în R. Este $(\mathcal{D}_a, *)$ un grup ? Justificați răspunsul.

Constantin Bușe

BAREM DE CORCTARE

CLASA a V-a

1.

	puncte
START	1
Observă ca numerele p^2-2p+1 și $2p^2+p+1$ se divid cu 3	2
Găsește p / 3	4
Verifică p = 3	1
Concluzia: nu există număr prim	2
TOTAL	10

2.

	puncte
START	1
Scrie ultima cifră a numărului a^n, respectând b^n pentru a, b ∈ {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} și n=4k, n=4k+1, n=4k+2 și n=4k+3, k∈**N***	4
Scrie ultima cifră pentru $a^n + a_{n+2}$	2
Scrie ultima cifră pentru $b^n + b_{n+2}$	2
Scrie soluțiile posibile	1
TOTAL	10

3.

	puncte
START	1
Calculează: $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{bcd} + \overline{cda} + \overline{dab} = \overline{abcd} + 111(a+b+c+d)$	2
Obține: 3 / (a+b+c+d)	1
Obține: 5 / (a+b+c+2d)	1
Determină valorile posibile ale expresiilor a+b+c+d și a+b+c+2d	2
Determină valorile lui d	1
Determină a, b, c	2
TOTAL	10

CLASA a VI-a

1.

	puncte
START	1
Construiește un triunghi care satisface cerințele (fără demonstrație)	5
Demonstrează că triunghiul construit satisface cerințele	4
TOTAL	10
Detaliu:	
Presupunând că triunghiul construit este ΔAMN, unde N=simetricul lui B față de C iar M=simetricul lui A față de mijlocul [BC]. (Notăm cu E mijlocul lui [BC], $\{F\}=MC\cap AN$, $\{G\}=AC\cap MN$)	
Arată că $\Delta EMC \equiv \Delta EAB$, deci $MC = AB$	1
Arată că C este centru de greutate în ΔAMN, deci [AG] și [MF] sunt mediane	2
Exprimă medianele lui ΔAMN în funcție de laturile lui ΔABC și finalizează	1

2.

	puncte
START	1
Arată că $AM \perp AN$	3
Observă că dreptele în discuție sunt înălțimi în ΔXMN și trage concluzia finală	6
TOTAL	10

3.

START	1
Obține relația $(x+1)(x+2y+1 = 3$	5
Fiecare din cele 4 soluții	Câte 1p
TOTAL	10

4.

	puncte
START	1
Scrie $a+\frac{b}{10}=\frac{b}{a}$ (sau ceva asemănător, corect)	1
Ajunge la $10a^2 = b(10-a)$	2
Observă că $a\leq 3$, reducând nr. de cazuri	4
Rezolvă cazurile și finalizează obținând soluția unică (2,5)	2
TOTAL	10

CLASA a VII-a

1.

	puncte
START	1
Din inegalitatea mediilor deduce că $\frac{1}{a^2}+b^2 \geq \frac{2b}{a}$	4
Deduce că $\frac{a^2}{a^2b^2+1}=\frac{1}{\frac{1}{a^2}+b^2}\leq\frac{a}{2b}$	2
Analog obține că $\frac{b^2}{b^2c^2+1}\leq\frac{b}{2c}$ și $\frac{c^2}{c^2a^2+1}\leq\frac{c}{2a}$	1
Finalizare: $\frac{a^2}{a^2b^2+1}+\frac{b^2}{b^2c^2+1}+\frac{c^2}{c^2a^2+1}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)=\frac{5}{2}$	2
TOTAL	10

2.

	puncte
START	1
Consideră cazurile $p>q$, $p=q$, $p<q$	1
Caz 1: $p>q$	3
Etape: $2^p-2^q\leq 2$	
$2^q\leq 2$	
$p = 2$ și $q = 1$	

Caz 2: $p = q$	1
$2p - 1 \mid 2$ și deci $p = q = 1$	
Caz 3: $p < q$	3
Etape: scrie $q=mp+n$, cu $m\in \mathbf{N}^*$, $n\in \mathbf{N}^*$, $n<q$	
$2p - 1 \mid (2p)m - 1$	
obține $2p - 1 \mid 2n + 1$ și folosind cazul 1	
obține $p=2$, $n=1$	
Finalizare: Soluțiile sunt $p=q=1$ și $p=2$ și q impar	1
TOTAL	10

3.

	puncte
START	1
$EF\parallel BC$ implică $EG=\frac{2}{3}BM=\frac{BC}{3}$ și $GF=\frac{2}{3}CM=\frac{BC}{3}$ (*)	1
Necesitatea	4
$EF\parallel BC$ și G – centru de greutate implică $EF=\frac{2}{3}BC$	
Deduce $EF = EG=\frac{2}{3}AM$	
Deduce $EG = GF = \frac{1}{3}AM = MG$	
Deduce $m\left(\widehat{EMF}\right)=90°$	
Suficiența	4
Din MG mediană în Δ dreptunghic EMC deduce	
$MG=EG=GF=\frac{1}{3}AM$	
Deduce $BC=3EG$ (*) și deci $BC = AM$	
TOTAL	10

4.

	puncte
START	1

$m\left(\widehat{BDC}\right)=90°$ și DM mediană în ΔBDC implică $DM=\frac{BC}{2}$	1
$m\left(\widehat{BEC}\right)=90°$ și EM mediană în ΔBEC implică $EM=\frac{BC}{2}$	1
Deduce că BEDC este patrulater inscriptibil și deci $m\left(\widehat{EDA}\right)=m\left(\hat{B}\right)$	1
$DM=MC$ implică $m\left(\widehat{MDC}\right)=m\left(\hat{C}\right)$	1
Deduce $\left(\widehat{EDM}\right)=m\left(\hat{A}\right)=60°$ și deci ΔDEM este echilateral	1
Deduce că E este fix	1
Observă că lungimea laturii ED este minimă când $ED\perp AC$	1
Deduce $E = B$ și $m\left(\hat{B}\right)= 90°$	1
Finalizează că lungimea minimă este $2\sqrt{3}$	1
TOTAL	10

CLASA a VIII-a

1.

	puncte
START	1
Observăm egalitatea $2ab+2a+2b+1=(a+b+1)^2-a^2-b^2$	1
Rescrie relația din enunț sub forma $7(a^2+b^2)=(a+b+1)^2-49c$	1
Observă că $7 \mid a+b+1$	1
Observă că $7 \mid a^2+b^2$	2
Demonstrează că $7 \mid a$ și $7 \mid b$	2
Trage concluzia că $7 \nmid a+b+1$	1
Observă contradicția și trage concluzia că nu există numere naturale a, b, c care să verifice ecuația din enunț	
TOTAL	10

2.

	puncte
START	1
Observă că $a^4+b^4+c^4+d^4=(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)+4abcd$	4

Alegând a<b<c<d demonstrează	
$b^2 - a^2 \geq 3$	1
$d^2 - c^2 \geq 7$	1
$cd - ab \geq 10$	2
Demonstrează inegalitatea din enunţ	1
TOTAL	10

3.

	puncte
START	1
Definaşte A` ca fiind simetricul lui A faţă de $\pi_1$dacă A şi $\pi_2$ sunt în acelaşi semispaţiu definit de $\pi_1$; altfel A`=A	1
Analog defineşte pe B` schimbând rolurile lui π_1 şi π_2	1
Dacă P$\in \pi_1$ şi Q$\in \pi_2$ atunci AP=A`P şi BQ=B`Q	1
Observăm că AP+PQ+QB= A`P+PQ+ B`Q	1
Demonstrează cu ajutorul inegalităţii triunghiului că punctele căutate sunt M=A`B`$\cap\pi_1$ şi N= A`B`$\cap\pi_2$	5
TOTAL	10

4.

	puncte
START	1
Considerând cazul în care A`, B`, C`sunt de aceeaşi parte a planului ABC calculează B`C`$^2$, A`C`$^2$, A`B`^{2}	2
Cunoaşte condiţia ca un triunghi să fie ascuţitunghic	1
Demonstrează că triunghiul A`B`C` este ascuţitunghic	2
Considerând cazul în care două din punctele A`, B` şi C`sunt de o parte a planului ABC şi celălalt punct în partea opusă calculează B`C`$^2$, A`C`$^2$, A`B`^{2}	2
Demonstrează că triunghiul A`B`C` este ascuţitunghic	2
TOTAL	10

CLASA a IX-a

1.

	puncte
START	1
Consideră şirul $a_n=\left(\sqrt{13}+3\right)^n+\left(3-\sqrt{13}\right)^n$	1
Obţine relaţia de recurenţă $a_{n+2}=6a_{n+1}+4a_n$	2
Arată prin inducţie că $a_n\in \mathbb{N}$ şi $2^n \mid a_n$	4
Arată că a = a_{2004}	2
TOTAL	10

2.

	puncte
START	1
Obţine $\overrightarrow{OM_i}=\left(1-\frac{i}{n}\right)\overrightarrow{OA}+\frac{i}{n}\overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{ON_i}$, $\overrightarrow{OP_j}$, $\overrightarrow{OQ_j}$ (cu O din plan oarecare fixat)	2
Consideră $R_{ij}\in(M_iN_i)$ cu $\frac{M_iR_{ij}}{N_iR_{ij}}=\frac{j}{m-j}$	2
Obţine $\overrightarrow{OR_{ij}}=\left(1-\frac{j}{m}\right)\overrightarrow{OM_i}+\frac{j}{m}\overrightarrow{ON_i}$ şi	1
$\overrightarrow{OR_{ij}}=\left(1-\frac{i}{n}\right)\overrightarrow{OP_j}+\frac{i}{n}\overrightarrow{OQ_j}$	1
Deduce că $R_{ij}\in P_jQ_j$ şi că	1
$R_{ij}=T_{ij}$	1
Trage concluzia	1
TOTAL	10

3.

	puncte
START	1
Arată că funcţia *f* este injectivă	1
Arată că funcţia *f* este surjectivă	1

Deduce că $f^{-1}(n) = f(n-1)+1$, $\forall\, n\in \mathbf{N}^*$	1
Deduce că $f(0) = 0$	1
Aplică $f^{-1}\circ f = 1_{\mathbf{N}}$ şi obţine $f(f(n)-1)+1=n$, $\forall\, n\in \mathbf{N}^*$	1
Deduce că $f(1) = 1$	1
Arată că $f(n+2) = f(n)+2$, $\forall\, n\in \mathbf{N}$	1
Arată că $f(2k) = 2k$, $f(2k+1) = 2k+1$, $\forall\, k\in \mathbf{N}$	1
Deduce că $f = 1_{\mathbf{N}}$	1
TOTAL	10

4.

	puncte
START	1
Rescrie relaţia sub forma $OP\cdot OP_1 = r^2$ şi	1
Deduce că $P_1 \in$ (OP este unic determinat	1
În triunghiul dreptunghic ORP obţine că $RP_1 \perp OP$	2
Deduce că $QR\perp OP \Leftrightarrow Q\in RP_1$	1
Obţine că $QR\perp OP \Leftrightarrow OP^2+OQ^2=PQ^2+2r^2$	2
(consideră $Q_1\in$ (OQ cu $OQ\cdot OQ_1 = r^2$ şi obţine că)	
$PS\perp OQ \Leftrightarrow OP^2+OQ^2=PQ^2+2r^2$	1
Deduce că $QR\perp OP \Leftrightarrow PS\perp OQ$	1
TOTAL	10

CLASA a X-a

1. Este necesar pentru existenţa logaritmilor ca $[x]\geq -8$. Pentru $[x]\geq -8$ membrul stâng este pozitiv, deci soluţiile trebuie căutate cu $[x]>0$.
Dacă $[x]\geq 2$ atunci
$\lg(9+[x])<[x] \Leftrightarrow 9+[x]<10^{[x]}=(1+9)^{[x]}$ Dar
$(1+9)^{[x]}>1+9[x]>9+[x]$, deci pentru $[x]\geq 2$ avem
$\lg(9+\lg(9+\lg(9+[x])))<\lg(9+\lg(9+[x]))<\lg(9+[x])<[x]$
Singura posiblitate rămâne $[x]=1$ (care verifică egalitatea) deci soluţiile sunt $x\in[1,2]$

2. Notând $\varphi(z)=\dfrac{iz}{(1-i)z+1}$ avem $\varphi(\varphi(z))=\dfrac{-z}{2z+1}$ $\varphi(\varphi(\varphi(z)))=\dfrac{-iz}{(1+i)z+1}$ şi

$\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(z))))=z$. Notăm $\varphi_k(z)=\underbrace{\varphi(\ldots\varphi(z)\ldots)}_{k\text{ ori}}$

Ecuaţia se scrie:
$f(z)+f(\varphi_1(z))+f(\varphi_2(z))=\varphi_1(z)$
Înlocuind z cu $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ respectiv $\varphi_3(z)$ mai obţinem:
$f(\varphi_1(z))+f(\varphi_2(z))+f(\varphi_3(z))=z$
$f(\varphi_2(z))+f(\varphi_3(z))+f(z)=\varphi_1(z)$
$f(\varphi_3(z))+f(z)+f(\varphi_1(z))=\varphi_2(z)$
Rezolvând sistemul obţinut se găseşte:
$$f(z)=\frac{\varphi_1(z)+\varphi_2(z)+\varphi_3(z)-2z}{3}$$
care verifică condiţia din enunţ. Efectuând calcule se mai găseşte
$$f(z)=\frac{1}{3}\left(\frac{-2z^2}{2z^2+2z+1}-\frac{4z^2+3z}{2z+1}\right)$$

3. Numărul j este minumul a C_{n-j}^{k-1} dintre submulţimile de k elemente, deci media căutată este
$$a=\frac{1\cdot C_{n-1}^{k-1}+2\cdot C_{n-2}^{k-1}+\ldots+(n-k+1)C_{k-1}^{k-1}}{C_n^k}$$
Suma de la numărător se scrie însă
$$1\left(C_n^k-C_{n-1}^k\right)+2\left(C_{n-1}^k-C_{n-2}^k\right)+3\left(C_{n-2}^k-C_{n-3}^k\right)+\ldots+(n-k+1)\left(C_k^k-C_{k-1}^k\right)=$$
$$=C_n^k+C_{n-1}^k+C_{n-2}^k+\ldots+C_k^k-C_{n+1}^{k+1},$$
deci $a=\dfrac{C_{n+1}^{k+1}}{C_n^k}=\dfrac{n+1}{k+1}$
Dacă pentru fiecare submulţime $\{x_1, x_2,\ldots,x_k\}$ considerăm mulţimea $\{n+1-x_1, n+1-x_2,\ldots,n+1-x_k\}$ maximul celei de-a doua submulţimi devine n+1-m unde m este minimul primeia. Aşadar media maximelor va fi
$$n+1-\frac{n+1}{k+1}=k\frac{n+1}{n-1}$$
<u>Observaţie</u>: Notând S(n,k) numărătorul lui a se vede uşor că:
$S(n+1,k)=S(n,k)+S(n,k-1)$ şi de aici
$S(n,k)=C_{n+1}^{k+1}$ prin inducţie.

4. Dacă notăm $\omega=\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$ atunci $c_k=\cos\dfrac{k\pi}{7}=\operatorname{Re}\omega^k$
(i) Avem $\omega^7+1=0$ deci $\omega^6-\omega^5+\omega^4-\omega^3+\omega^2-\omega+1=0$ sau
$\omega+\omega^3+\omega^5+\omega^7+\omega^{-5}+\omega^{-3}+\omega^{-1}=0$ Trecând la părţile reale

$2c_1+2c_2+2c_5+c_7=0$ sau $c_1+c_3+c_5=\frac{1}{2}$ adică $r_1=\frac{1}{2}$

Avem $r_2=\cos^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{3\pi}{7}+\cos^2\frac{5\pi}{7}=\frac{1+c_2}{2}+\frac{1+c_6}{2}+\frac{1+c_{10}}{2}=\frac{3}{2}+\frac{c_2+c_6-c_3}{2}=$
$=\frac{3}{2}-\frac{c_5+c_1+c_3}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

(ii) Avem $c_1+c_2+c_3=\frac{1}{2}$ și $c_1c_2+c_1c_3+c_2c_3=\frac{1}{2}\left[(c_1+c_2+c_3)^2-\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)\right]=$
$=\frac{1}{2}\left(r_1^2-r_2\right)=-\frac{1}{2}$

În plus

$$c_1c_2c_3=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{8\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{8}$$

Rezultă că c_1, c_2, c_3 sunt rădăcinile ecuației

$f(x)=(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)=x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}=0$

De aici $r_{n+3}=\frac{4r_{n+2}+4r_{n+1}-r_n}{8}$ (*)

Cum $r_0=3, r_1=\frac{1}{2}, r_2=\frac{5}{4}$ deducem $r_3=\frac{1}{2}$, apoi $r_4=\frac{13}{16}$.

(iii) Rezultă imediat cu (*) prin inducție.

CLASA a XI-a

1.

	puncte
START	1
$X^2=u(X)X-\det(X)I_2$	4
Rezultă $u(A)=u(B)=O_2$	1
Observă că $u(A+B)=u(A)+u(B)$ și $(A+B)^2=\mu I_2$	2
$(A+B)^2=A^2+B^2+AB+BA \Rightarrow AB+BA=\lambda I_2$	2
TOTAL	10

2.

	puncte
START	1
a. Coordonatele centrului $x=2\cos^2 t$, $y=m\sin^2 t$	1
Găsește $\frac{x}{2}+\frac{y}{m}=1$ din primul cadran	2
b. Cercul variabil: $x^2+y^2-2x-my=0$	
Observă că O(0,0) și B(2,0) sunt pe cerc	2
$L\in\mathcal{L}$ (locul geometric) $\Leftrightarrow AL=\sqrt{AO\cdot AB} \Leftrightarrow AL=\sqrt{3}$	4
(L nu se află pe axa absciselor)	
TOTAL	10

3.

	puncte
START	1
i. $F(x,y)=F(x)F(y)$, $F(x)\geq 1+x$, $\forall$ x, y $\in[0,\infty)$	1
Observă că F este strict crescătoare	2
$F(1)=c>1$, $F(x)=F\left(n\cdot\frac{x}{n}\right)\geq\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \Rightarrow F(x)\geq e^x$	1
Deduce $F(x)=c^x$ cu $c\geq e$	4
ii. $e^{\theta(x+y)}=e^{\theta(x)}\cdot e^{\theta(y)}$	1
Orice funcție $\theta:[0,\infty)\to\mathbf{R}$, aditivă convine	
TOTAL	10

4.

	puncte
START	1
Funcția $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $h(x)=\begin{cases} g(0), x\leq 0 \\ g(x), x\in(0,1) \\ g(1), x\geq 1\end{cases}$	
verifică $\lvert h(x)-h(y)\rvert\leq\frac{1}{2}\lvert x-y\rvert$	3
$g(0)\geq 0$ și $g(1)\leq 1$ deci există și este unic, $p\in[0,1]$ și $h(p)=p=g(p)$	2
$\lvert h^n(x_0)-p\rvert=\lvert h^n(x_0)-h^n(p)\rvert\leq\frac{1}{2^n}\lvert x_0-p\rvert\to 0$	2
(P1) $g^n(0)\in[0,1]$, $\forall$ n	

(P2) există n_1 minim cu $g^{n_1}(0) \notin [0,1]$	
a) $g^{n_1}(0)<0 \Rightarrow h^{n_1+1}(0)=g(0) \Rightarrow$ șir ciclic neconvergent imposibil	
b) $g^{n_1}(0)>1 \Rightarrow h^{n_1+1}(0)=g(1)$	2
b1) $g^{n_1}(1) \in [0,1], \forall n$	
b2) $g^{n_2}(1) \notin [0,1] \Rightarrow$ șir ciclic neconvergent imposibil	
TOTAL	10

CLASA a XII-a

1.

	puncte
START	1
Consideră $x \in L$ și arată că $f(x) \cdot a = 1$, deci $f(x) \in L$ și $L \subset f(L)$	3
Arată că ecuația $f(x)=b$ nu are soluție în L, deci $f(L) \neq L$	2
Arată că f este injectivă	1
Dacă L ar fi finită atunci $f : L \to f(L)$ este bijectivă, deci $f(L)=L$ (contradicție !)	2
Urmează L=infinită, deci A=infinită	1
TOTAL	10

2.

	puncte
START	1
Verifică identitatea pentru $x \geq t$	3
Verifică identitatea pentru $0 \leq x \leq t$	3
Obține inegalitatea $\lvert g(x)\rvert \leq \frac{1}{t} \cdot \left(\lvert h_t(x)\rvert + \lvert h(x)\rvert\right) + \frac{1}{t}\int_0^t (t-s)\lvert f_s(x)\rvert ds$, $\forall\, t > 0$	1
Deduce: $\lvert g(x)\rvert \leq \frac{2}{t} + \frac{t}{2}$, $\forall\, t > 0$	1
Obține: $\lvert g(x)\rvert \leq 2$, $\forall\, x \geq 0$, făcând t=2 în inegalitatea precedentă	1
TOTAL	10

3.

	puncte
START	1
„simte" că $(f*g)'(x) = \int_{-a}^{x} f(t)g'(x-t)dt + f(x)g(0)$, $x \in [-a, \infty)$.	1
Pentru $x_0 \in (-a,\infty)$ arată că $\frac{1}{h}\left[(f*g)(x_0+h) - (f*g)(x_0)\right] - (f*g)'(x_0) \to 0$ ($h \to 0$)	4
Analizează și cazurile x_0 -a	1
Presupune prin absurd că ar fi grup, deci există $e \in \mathcal{D}_a$ astfel încât $f*c = f$, $\forall\, f \in \mathcal{D}_a$	2
Obține $f(-a) = 0$ pentru orice $\mathcal{D}_a$ (contradicție!) și obține concluzia că nu este grup	1
TOTAL	10