Concursul Interjudețean „Traian Lalescu"
Ediția a XII-a,
Caransebeş, 29.III.2003

SUBIECTE PROPUSE

CLASA a V-a

1. Sa se determine numerele de forma $\overline{abcd}$ divizibile cu 5 pentru care $a + d = 7(b+c)$.

2. Sa se determine numerele prime a,b, c, d care verifica egalitatea $3a + 4b + 6c + 12d = 360$.

3. Fie multimile $A = \{n \in \mathbf{N} : 3^{n^2} + 9^{2n} - 25^n\}$, $B = \{2^m + 3^m \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}, m \leq 3\}$, $C = \{\overline{11}_{(2)}, \overline{101}_{(2)}, \overline{1101}_{(2)}\}$, unde $\overline{ab}_{(2)}$ reprezinta numarul $\overline{ab}$ scris in baza 2.

a) Determinati multimile $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, B / C, A / B, C / B.

b) Determinati multimile

$$B+C = \{x+y \in \mathbf{N} : x \in B,\ y \in C\},\ B-C = \{x-y \in \mathbf{N}, x \in B,\ y \in C\}$$

4. Sa se determine numerele de forma $\overline{xyzt}$, divizibile cu 5, care verifica simultan conditiile :

a)Suma ultimelor doua cifre este cu 1 mai mica decat suma primelor doua cifre.

b)Suma cifrelor este un numar divizibil cu 15.

CLASA a VI-a

1. Sa se determine numerele naturale k si abc stiind ca :

$[1+3+5+\ldots+(2k+1)]^2=\overline{abc}$

2. Fie M mijlocul laturii [BC] a triunghiului ABC si $P\in[AM]$ astfel incat $m(\angle PBM)=15^\circ$. Aratati ca $AM+PM=AB$.

3. Doua numere prime se numesc "gemene" daca diferenta lor este 2 (de exemplu 17 si 19 sunt doua numere prime gemene).

a) Aflati numerele prime gemene de forma $p_1=4p-1$, $p_2=4p+1$ unde p este prim.

b) Exista numere prime gemene de forma $p_1=2^{2003}\cdot p-1$, $p_2=2^{2003}\cdot p+1$ unde p este numar prim ?

CLASA a VII-a

1. Fie ABCD un paralelogram si $M\in(AB)$, $N\in(BC)$ astfel incat AM=NC. Fie Q punctul de intersectie al dreptelor AN si MC. Aratati ca $\angle ADQ\equiv\angle CDQ$.

2. Fie a,b,c,d,e cinci numere pozitive cu proprietatea ca oricare trei dintre ele pot reprezenta lungimile laturilor unui triunghi. Demonstrati ca dintre aceste triunghiuri cel putin unul este ascutitunghic.

3. Sa se determine toate tripletele(x,y,z) de numere pitagoreice. cu $x<y<z$, avand proprietatea ca $\{x,y,z\}\cap\{3,29,2003\}\neq\varnothing$. *

4. Fie Δ ABC un triunghi in plan. Notam cu B_1, respectiv C_1 proiectiile varfului A pe bisectoarele interioare ale varfurilor B, respectiv C, iar cu B_2, respectiv C_2 proiectiile lui A pe bisectoarele exterioare in B, respectiv C. Aratati ca punctele B_1, C_1, B_2 si C_2 sunt coliniare.

* Nota : Solutia generala a ecuatiei $x^2+y^2=z^2$ in $\mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ este :

$$\begin{cases} x=2kmn \\ y=k(m^2-n^2) \\ z=k(m^2+n^2) \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x=k(m^2-n^2) \\ y=2kmn \\ z=k(m^2+n^2) \end{cases}$$

unde $k,m,n\in\mathbf{N}$, $m>n$, $(m,n)=1$.

CLASA a VIII-a

1. Să se determine funcțiile $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ ce verifică relația : $\left[\sqrt{n+f^2(n)}\right]=n, \forall n\in\mathbf{N}$.

2. Să se determine $n\in\mathbf{N}$, astfel încât ecuația $x^n+y^n+z^n+t^n=xyzt$ să admită cel puțin o soluție (x,y,z,t)cu $x,y,z,t\in\mathbf{N}-\{0\}$.

3. Un tetraedru are trei laturi egale cu 1 cm și două laturi egale cu 2 cm. Să se arate că volumul tetraedrului este mai mic sau egal cu $\frac{\sqrt{5}}{8}\text{cm}^3$.

4. O furnică se deplasează pe toate fețele unui cub de latură 1 . Care este distanța minimă pe care o poate parcurge furnica astfel încât să plece dintr-un vârf al cubului, să treacă prin toate centrele fețelor și să se întoarcă în vârful din care a plecat?

CLASA a IX-a

1. Fie $A_1A_2A_3A_4A_5$ un pentagon înscris într-un cerc. Pentru fiecare indice $i \in \{1,2,3,4,5\}$, notăm cu H_i ortocentrul triunghiului $\Delta A_iA_{i+1}A_{i+2}$ și cu M_i mijlocul laturii $A_{i+3}A_{i+4}$ (unde am considerat $A_6=A_1$, $A_7=A_2$, $A_8=A_3$, $A_9=A_4$). Arătați că dreptele H_1M_1, H_2M_2, H_3M_3, H_4M_4, H_5M_5 sunt concurente.

2. Să se determine numărul de elemente ale mulțimii

$A = \{N = \overline{a_1a_2...a_n} \mid a_i \in \{2,3,7,9\},\ 3 \mid N\}$, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, este un număr naturasl nenul fixat.

3. Fie ABCD un patrulater inscriptibil, iar M,N,P și Q mijloacele laturilor AB, BC, CD și DA. Arătați că perpendicularele din M pe CD, din N pe DA, din P pe AB și din Q pe BC se intersectează într-un punct.

4. Fie $f: N^* \to N^*$ funcția definită prin $f(n) = \left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$, pentru orice $n \in N^*$.

a) Calculați $f(3), f(29)$ și $f(2003)$.

b) Arătați că funcția f este injectivă, dar nu și surjectivă.

c) Determinați mulțimea $A \subset N^*$ astfel încât funcția $g: N^* \to A$, definită prin $g(n) = f(n), (\forall)\ n \geq 1$, să fie bijectivă.

CLASA a X-a

1. Fie mulțimea $A=\{1,2,\dots,2003\}$.

a). Câte submulțimi ale lui A, de cardinal 3, au elementele în progresie aritmetică?

b) Dacă $B \subset A$ are elementele în progresie geometrică atunci B are cel mult 11 elemente.

2. Fie $k \in N^*$ și $f:\{1,2,\dots,k\} \to \{1,2,\dots,k\}$ o funcție bijectivă. Să se arate că

$$1^{f(1)} + 2^{f(2)} + \dots + k^{f(k)} \leq 1^1 + 2^2 + \dots + k^k.$$

3 Fie $A_1A_2A_3A_4$ un patrulater. Notăm cu $C_1C_2C_3C_4$ mijloacele segmentelor A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1. În exteriorul patrulaterului construim punctele B_1, B_2, B_3, B_4, astfel încât :

a) $B_1C_1 \perp A_1A_2$, $B_2C_2 \perp A_2A_3$, $B_3C_3 \perp A_3A_4$, $B_4C_4 \perp A_4A_1$;

b) $\frac{B_1C_1}{A_1A_2} = \frac{B_2C_2}{A_2A_3} = \frac{B_3C_3}{A_3A_4} = \frac{B_4C_4}{A_4A_1} \neq \frac{1}{2}$

Să se demonstreze că dreptele B_1B_3 și B_2B_4 sunt perpendiculare dacă și numai dacă diagonalele patrulaterului $A_1A_2A_3A_4$ sunt egale.

4. O furnică se deplasează pe fețele unui cub cu latura 1. Care este distanța minimă pe care o poate parcurge furnica astfel încât să plece dintr-un vârf al cubului.. să treacă prin toate centrele fețelor și să se întoarcă în vârful din care a plecat ?

CLASA a XI-a

1. Fie $f:[0,\infty)\to R$ o funcție continuă și

$A=\{a\in R \mid \exists (x_n)_{n\ge 1}, x_n \to \infty \ \ si \ \ f(x_n)\to a\}$.

a). Dați exemplu de funcție f pentru care A={0}.

b). Dați exemplu de funcție f pentru care A=R.

c). Demonstrați că dacă $a,b\in A$, atunci $[a,b]\subset A$.

2. a) Demonstrați inegalitatea

$$\frac{p}{(k+1)^{p+1}}\le\frac{1}{k^p}-\frac{1}{(k+1)^p},\forall k>0,\forall p\ge 0.$$

b) Studiați convergența șirului $(a_n)_{n\ge 1}$, definit prin

$a_1>0, a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{n^{p+1}a_n},\forall n\ge 1$, în funcție de valorile parametrului real p.

3. a) Fie $A,B\in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ astfel încât $AB\ne BA$. Demonstrați că dacă $C\in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ comută cu A și cu B, atunci C comută cu orice matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.

b) Arătați că pentru orice $n\in\mathbf{N}$, $n>2$ există $A,B,C\in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ astfel încât $AB\ne BA$, $C\ne\lambda I_n$ și C comută cu A și cu B.

4. Aflați funcțiile f: **R** → **R** cu proprietățile :

a) $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall x,y\in$ **R** și

b) Există limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

CLASA a XII-a

1. Fie (G,·) un grup necomutativ cu 8 elemente, având ca element unitate pe e. Fie, de asemenea, $a\in G$ un element de ordinul 4 și $b\in G-\{e,a,a^2,a^3\}$. Să se studieze dacă :

(a). $G=\{e,a,a^2,a^3,b,ba,ba^2,ba^3\}$.

(b). $ab=ba^3$

(c). $b^2\in\{e,a^2\}$

2. Determinați primitivele funcției $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(t)=\max\{t^2,2^t\}$

3. Calculați $\displaystyle\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx$

4. Arătați că dacă $x\in[0,2\pi]$, atunci $\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{1+t}dt\ge 0$

5. Calculați $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^{2n+2}}dx$, $n\in\mathrm{N}$

BAREME DE CORECTARE

CLASA A V-A

Fiecare subiect are din oficiu **1p.**.

1.

$\overline{abcd} \vdots 5 \Rightarrow d \in \{0,5\}$ .... **(1p.)**

$a + d = 7(b + c) \Rightarrow (a + d) \vdots 7$ .... **(1p.)**

$d = 0 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow b + c = 1 \Rightarrow b = 0, c = 1$
sau $b = 1, c = 0$ .... **(2p.)**

$d = 5 \Rightarrow a \in \{2,9\}$ .... **(2p.)**

$a = 2 \Rightarrow b + c = 1 \Rightarrow b = 0, c = 1$ sau $b = 1, c = 0$..... **(1p.)**

$a = 9 \Rightarrow b + c = 2 \Rightarrow b = 0, c = 2$ sau $b = 1, c = 1$
sau $b = 2, c = 0$..................................... **(1p.)**

$\overline{abcd} \in \{2015, 2105, 7010, 7100, 9025, 9115, 9205\}$.......... **(1p.)**

2.

$3a + 4b + 6c + 12d = 360$; a, b, c, d prime

4b, 6c, 12d, 360 – pare $\Rightarrow$ 3a – par $\Rightarrow a = 2$............ **(2p.)**

Egalitatea devine: $2b + 3c + 6d = 177$

3c, 6d, 177 – multiplii de 3 $\Rightarrow$ 2b – multiplu de 3 $\Rightarrow$
$b = 3$..................................... **(2p.)**

Egalitatea devine: $c + 2d = 57 \Rightarrow d < 28$, d – prim
(1p.)

$d = 2 \Rightarrow c = 53$ – prim	$d = 13 \Rightarrow c = 31$ – prim
$d = 3 \Rightarrow c = 51$ – compus	$d = 17 \Rightarrow c = 23$ – prim
$d = 5 \Rightarrow c = 47$ – prim	$d = 19 \Rightarrow c = 19$ – prim
$d = 7 \Rightarrow c = 43$ – prim	$d = 23 \Rightarrow c = 11$ – prim **(3p.)**
$d = 11 \Rightarrow c = 35$ - compus	

$(a,b,c,d) \in \{(2,3,53,2);(2,3,47,5);(2,3,43,7);(2,3,31,13);(2,3,23,17);(2,3,19,19);(2,3,11,23)\}$
(1p.)

3.

A: 25n – impar pentru orice numar natural n

$3^{n^2} + 9^{2n}$ - par pentru orice numar natural n

$\Rightarrow A = \varnothing$

(2p.)

B: $m \in \{0,1,2,3\} \Rightarrow B = \{2; 5; 13; 35\}$

(1p.)

C: $\left.\begin{array}{l} \overline{11}_{(2)} = 3 \\ \overline{101}_{(2)} = 5 \\ \overline{1101}_{(2)} = 13 \end{array}\right\} C = \{3; 5; 13\}$

a)

$A \cup B \cup C = \{2; 3; 5; 13; 35\}$

$A \cap B \cap C = \varnothing$

$B \setminus C = \{2; 35\}$

$A \setminus B = \{\varnothing\}$ **(3p.)**

$C \setminus B = \{3\}$

b) $B + C = \{5; 7; 8; 10; 15; 16; 18; 26; 38; 40; 48\}$

(1p.)

$B - C = \{0; 2; 8; 10; 22; 30; 32\}$

(1p.)

4.

$\overline{xyzt} \vdots 5 \Rightarrow t \in \{0; 5\}$

(1p.)

$t = 0 \Rightarrow x + y = z + 1$. Din $2z + 1 \vdots 15 \Rightarrow z = 7$, iar $x + y = 8$

$\overline{xyzt} \in \{1770; 2670; 3570; 4470; 5370; 6270; 7170; 8070\}$

(4p.)

$t = 5 \Rightarrow x + y = z + 6$. Din $2z + 11 \vdots 15 \Rightarrow z = 2$, iar $x + y = 8$

$\overline{xyzt} \in \{1725; 2625; 3525; 4425; 5325; 6225; 7125; 8025\}$

(4p.)

CLASA A VI-A

1.

Start...1p

$S=(k+1)^4$...4p

$k=0, k=1, k<3 \Rightarrow S<\overline{abc}$.......................................2p

$k=3 \Rightarrow S=256$...1p

$k=4 \Rightarrow S=625$...1p

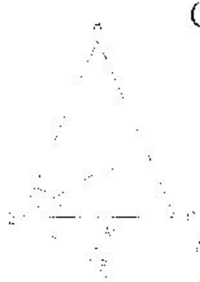
$k \geq 5 \Rightarrow S \geq \overline{abc}$...1p

Total 10p

2.

Start...1p

Figura...1p



Construcția simetricului punctului P.........3p

ΔBPP_1 isoscel.......................................1p

$m(\angle MBP_1)=15°$...............................1p

$m(\angle BP_1P)=m(\angle ABP_1)=75°$..............1p

ΔAPP_1 isoscel.......................................1p

$AM+PM=AM+MP_1=AP_1=AB$....................1p

Total 10 p

3.

Start...1p

a) $p_1 = 4p-1, 4p, 4p+1 = p_2$..1p

Unul dintre ele va fi divizibil cu 3.......................1p

Daca (4p) este divizibil cu 3 => p=3.......................1p

=> $p_1=11$, $p_2=13$ (gemene) 1p

Daca $p \neq 3$ =>(4p-1) divizibil cu 3 => p=1 nu este prim

=>(4p+1) divizibil cu 3 =>$p=\frac{1}{2} \notin \mathbf{N}$ 1p

b) $2^{2003}p-1$, $2^{2003}p$, $2^{2003}p+1$ => unul dintre ele este divizibil cu 3 .... 1p

Dacă $(2^{2003}p)$ este divizibil cu 3 => $p=3$ => $p_1=3\cdot 2^{2003}-1$ =>
$u(p_1)=8$ nu este număr prim
$p_2=3\cdot 2^{2003}+1$ => $u(p_2)=5$, $p_2\neq 5$ => p_2 nu este prim ... 1p

Dacă $p\neq 3$ => $p_1=3\cdot 2^{2003}-1$ este divizibil cu 3 => $p_1>3$
sau $p_2=3\cdot 2^{2003}+1$ este divizibil cu 3 => $p_2>3$ ... 1p

Deci p_1,p_2 nu pot fi numere prime.
Nu există astfel de numere 1p

CLASA A VII-A

1

Start 1p

Consideră $CM \cap AD (=\{P\})$ 2p

Aplică (TFA) și obține $\frac{PQ}{QC}=\frac{AP}{NC}$ 2p

Aplică (TFA) și obține $\frac{PD}{PA}=\frac{DC}{AM}$ 1p

Deduce $\frac{PD}{CD}=\frac{PA}{AM}$ 1p

Obține $\frac{PQ}{QC}=\frac{PD}{DC}$ 1p

Finalizare 3p

Total 10 p

2.

Start 1p

Obține condiția ca un triunghi să fie ascuțitunghic 3p

Fixează o ordine (de ex. $0<a<b<c<d<e$) 1p

În caz că afirmația ar fi falsă deduce

$$\begin{cases} e^2 \ge d^2 + c^2 \\ d^2 \ge c^2 + b^2 \\ c^2 \ge b^2 + a^2 \end{cases}$$ 1p

Obține

$e^2 > (b+a)^2$ 2p

Rezultă $e>b+a$, contradicție cu (e,a,b) 1p

Trage concluzia 1p

Alternativ

În caz că afirmația ar fi falsă, scrie toate relațiile $x^2 \ge (y-z)^2$ cu $\{x,y,z\} \subseteq \{a,b,c,d,e\}, x \neq y \neq z \neq x$ 2p

Adună relațiile și deduce că

$a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + e^2 \le 0$ 3p

Trage concluzia 1p

Total 10 p

3.

Start 1p

Cazul I $p \in \{3,29,2003\}$ lungimea catetei scrie

$p^2 = z^2 - t^2 = (z-t)(z+t)$ 1p

Obține

$$\begin{cases} z-t=1 \\ z+t=p^2 \end{cases}$$ 1p

Deduce

$\left(p, \frac{p^2-1}{2}, \frac{p^2-1}{2}\right), p \in \{3, 29, 2003\}$ 1p

Cazul II p- lungimea ipotenuzei

Scrie $p(=z)=k(m^2-n^2)$.. 1p

Deduce $k=1$, $p=m^2+n^2$.. 1p

Obține că $p \neq 3$ și $p \neq 2003$.. 1p

Pentru $p=29$, obține $m=5$, $n=2$.. 1p

Deduce (20,21,29).. 1p

Concluzie.. 1p

Total 10p

4.

Start.. 1p

Obține că AB_1BB_2 - dreptunghi........................... 2p

Deduce $\angle B_2B_1B \equiv \angle ABB_1 \equiv \angle B_1BC$.................................... 1p

Și că $B_2B_1 \parallel BC$.. 1p

Cum B_2B_1 trece prin mijlocul E al laturii AB=> $B_2B_1=EF$..............2p

Deci B_1, $B_2 \in EF$.. 1p

Analog, C_1, $C_2 \in EF$.. 1p

Concluzie.. 1p

Total 10p

CLASA A VIII-A

1.

$f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ $\quad [\sqrt{n+f^2(n)}]=n$

(i) $[\sqrt{0+f^2(0)}]=0$

(ii) $[\sqrt{1+f^2(1)}]=1$

$1 \leq \sqrt{1+f^2(1)} < 2$

$1 \leq 1+f^2(1) < 4$

$0 \leq f^2(1) < 3 \Rightarrow f(1)=0$

$f(1)=1$

(iii) daca $n \geq 2$

$n \leq \sqrt{n+f^2(n)} < n+1$

$n^2 \leq n+f^2(n) < n^2+2n+1$

$(n-1)^2 < n^2-n \leq f^2(n) < n^2+n+1 < (n+1)^2$

$n-1 < f(n) < n+1 \Rightarrow f(n)=n$

Concluzie $\exists$ 2 functii cu proprietatea ceruta

$f_1(n)=n \quad \forall n \in \mathbf{N}$

$f_2(n)=\begin{cases} n; n \neq 1 \\ 0; n=1 \end{cases}$

Start..............1p

(i)....................2p (n=0)

(ii)................3p (n=1) pentru o var. 2p

(iii)...............3p

Concluzie 1p

2.

1) n=0 $\quad 4=xyzt \quad$ (1,1,2,2) e o solutie

2) n=1 $\quad x+y+z+t=xyzt \quad$ (1,1,2,4) e o solutie.

3) n=2 $x^2+y^2+z^2+t^2=xyzt$ (2.2.2.2) e o solutie.

4) n=3 $x^3+y^3+z^3+t^3 \ge xyzt$ (4,4,4,4) e o solutie.

5) $n \ge 4$ $x^n+y^n+z^n+t^n \ge$

$\ge 2\sqrt{x^n y^n}+2\sqrt{z^n t^n}=2(\sqrt{x^n y^n}+\sqrt{z^n t^n}) \ge 4\sqrt{\sqrt{x^n y^n z^n t^n}}$

$\ge 4\sqrt{\sqrt{x^4 y^4 z^4 t^4}}=4xyzt$

nu $\exists$ solutie.

2)

Start..........................1p

n=0..........................1p

n=1..........................1p

n=2..........................1p

n=3..........................1p

$n \ge 4$ inegalitate.............2p

finalizare..............3p

3)

1)Din inegalitatea triunghiului, tetraedrul are o fata triunghi echilateral de latura 1cm (ABC) si o fata laterala VAB triunghi isoscel cu laturile congruente de lungime 2 cm.

2) Inaltimea fetei laterale VAB e $VD=\frac{\sqrt{15}}{2}$

3) $VO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$ in triunghiul VOD, $VD \ge VO$

$\Rightarrow VO \le \frac{\sqrt{15}}{2}$

4) $V_{tetraedru}=\frac{1}{3}A_{(ABC)} \cdot VO \ge \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{15}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{8}cm^3$

Start 1p

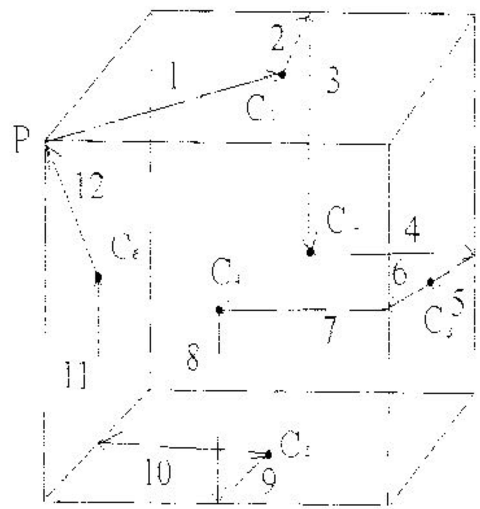
1)..................................3p

2)..................................1p

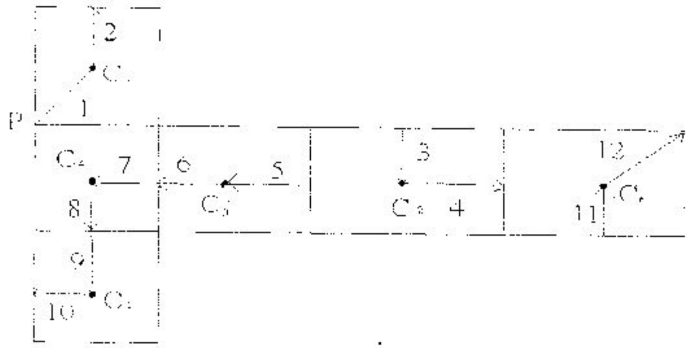
3)..................................2p

4)..................................3p

4)



Sau



$$P \to C_1 \to C_2 \to C_3 \to C_4 \to C_5 \to C_6 \to P$$

$$\left.\begin{array}{l} d(P,C_1) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ d(P,C_6) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ d(C_1,C_2) \geq 1 \\ d(C_2,C_3) \geq 1 \\ d(C_3,C_4) \geq 1 \\ d(C_4,C_5) \geq 1 \\ d(C_5,C_6) \geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow d \geq 5+\sqrt{2}$$

Distanța minimă este $5+\sqrt{2}$

Start 1p

Figuri 2p

Inegalități 2p

Finalizare..............................5p

CLASA a- IX- a

1.

Start..1p

(G_i =) H_i - centru de greutate

$\overline{OH_i} = \frac{1}{3}(\overline{OA_i} - \overline{OA_{i+1}} + \overline{OA_{i-2}}))$ 2p

$\overline{OM_i} = \frac{1}{2}(\overline{OA_{i+2}} - \overline{OA_{i-4}})$..1p

Consideram punctul P dat de $\overline{OP} = \frac{1}{5}\sum \overline{OA_i}$ 2p

Deduce 1919□$\frac{3}{5}\overline{OH_i} + \frac{2}{5}\overline{OM_i}$,($\forall$) i=$\overline{1,5}$ 2p

Obtine ca P$\in H_i M_i$, ($\forall$) i=$\overline{1,5}$ 1p

Concluzie..1p

2.

Start...1p

Considera x_n = | A(n) | , y_n = | B(n) | , z_n = | C(n) | ,cu

B(n)={ $N = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ | $a_i \in \{2,3,7,9\}, N = 1+3k$ }

C(n)={ $N = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ | $a_i \in \{2,3,7,9\}, N = 2+3k$ }............2p

Deduce relatiile :

$$\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} + y_{n-1} + z_{n-1} \\ y_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} + z_{n-1} (\forall) n \geq 2 \\ z_n = x_{n-1} + y_{n-1} + 2z_{n-1} \end{cases}$$ 2p

Obtine relatia de recurenta :

$x_{n+1} - 5x_n + 4x_{n-1} = 0, (\forall) n \geq 2$ 2p

Determina $x_1 = 2, x_2 = 5$ 1p

Inductie pentru $x_n = \frac{1}{3}(2+4^n), (\forall) n \ge 1$ 2p

3.

Start...1p
Arata ca OMEP- paralelogram, unde E- intersectia pependicularelor din M pe CD si din P pe AB 3p
deduce ca $\overline{OE} = \overline{OM} + \overline{OP}$ 2p

foloseste $\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}), \overline{OP} = \frac{1}{2}(\overline{OC} + \overline{OD})$ si

obtine $\overline{OE} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})$ 1p

analog $\overline{OF} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})$,

unde F este intersectia perpendicularelor din N pe DA si din Q pe
BC...1p
Deduce ca E = F..1p
Concluzia..1p

4.

Start..1p
Calculeaza f(3), f(29) si f(2003)...................................1p
Arata ca f este strict crescatoare, deci f e injectiva.......2p
Gaseste $k \in N^* - \mathrm{Im}\, f$ rezulta f nesurjectiva................1p
Intuieste Imf $\subseteq N^* - (N^*)^2$ 1p

Demonstreaza ca Imf $\subseteq N^* - (N^*)^2$ 1p
Demonstreaza ca $N^* - (N^*)^2 \subseteq \mathrm{Im}\, f$ 2p
Concluzie $A = \{n \in N^* \text{ a.î. } n \ne k^2, k \in N^*\}$.............................1p

CLASA A X-A

1.

Start...1p
a) numărul de submulțimi pentru rația 1.......................1p
numărul de submulțimi pentru rația k ....2 p
$k \le 1001$ ....1 p
finalizare ....1 p
b) arată că rația q e pozitivă și rațională 1p
fie q= $\frac{m}{n}$ cu (m,n) =1, B= $\{a, aq, \ldots, aq^{k-1}\}$
dacă $n \ge 2$ arată că $n^{k-1} \mid a$ și deduce $k \le 11$ 1p
dacă n=1 $\Rightarrow q \in N^*$ și deduce $k \le 11$ 2p
Total 10 p

2.

Start ....1 p
Inducție după k
Verifică pentru k=1 ....2p
Presupune pentru k-1 și demonstrează pentru k
Dacă f(k)=k propoziția e adevărată din ipoteza de inducție .. 2p
Dacă f(k)< k $\Rightarrow$ $(\exists)$ j< k astfel încât f(j) =k 1p
Construiește g: {1,2,…,k} →: {1,2,…,k}

$$g(n) = \begin{cases} f(n), n \neq j, k \\ k, n = k \\ f(k), n = j \end{cases}$$ și arată că

$1^{f(1)} + 2^{f(2)} + \dots + k^{f(k)} \le 1^1 + 2^2 + \dots + k^k$ 2p

Aplică ipoteza de inducție 2p

Total 10 p

3.

Start...1p

Fie $a_k, b_k, c_k, k = \overline{1,4}$ afixele punctelor A_k, B_k, C_k

Calculează c_k 1p

Pune condiția de perpendicularitate și deduce că

$\frac{b_k - c_k}{a_{k+1} - a_k} = it, t \in R_+^* - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ cu $a_5 = a_1$ 3p

Calculează $\frac{b_1 - b_3}{b_2 - b_4} = \frac{\frac{\alpha}{2} + it\beta}{\frac{\beta}{2} - it\alpha}$ cu $\begin{cases} \alpha = a_1 + a_4 - a_3 - a_2 \\ \beta = -a_4 - a_2 - a_3 - a_1 \end{cases}$ 3p

Arată că $\frac{b_1 - b_3}{b_2 - b_4} \in iR^* \Leftrightarrow a_1 - a_3 = |a_2 - a_4|$ 2p

Total 10p

4.

Start...1p

Fie C_k al k-lea centru prin care trece furnica

Arată că lungimea drumului de la vârful A la $C_1 \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$ și

lungimea drumului de la A la $C_6 \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2p

Aratăp că lungimea drumului de la C_k la $C_{k+1} > 1$ 2p

Deduce că lungimea drumului parcurs $\ge 5 + \sqrt{2}$ 1p

Găsește un drum de lungime $5 + \sqrt{2}$ 4p

Total 10p

CLASA A XI-A

1

Start...1p

a)

exemplu...3p

b)

exemplu...3p

c) folosind P. Darboux deduce

$[a,b] \subset A$ 3p

Total 10 p

2

Start...1p

a) Consideră $f(x) = \frac{1}{x^p}$ și aplică T. Lagrange pe

$[k, k+1]$...2p

Scrie $f(k) - f(k+1) = \frac{p}{c_k^{p+1}} \ge \frac{p}{(k+1)^{p+1}}$ 1p

b) Din $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n^{p+1} a_n} > 0$ (pt. că $a_n > 0$) deduce că a_n

crescător.. 1p

dacă p=0 Presupunem a_n mărginit $\exists$ b$\in$ **R** a.î. a_n<b

demonstrează că $a_{n+1} > a_1 + \frac{1}{b}(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}) \to \infty$. deci a_n divergent..................2p

dacă p>0 Deduce că

$a_{n+1} \le a_1 + \frac{1}{a_1}(\frac{1}{1^{p+1}}+...+\frac{1}{n^{p+1}}) < a_1 + \frac{1}{pa_1}(1-\frac{1}{(n+1)^{p-1}})$ => a_n mărginit deci a_n convergent..3p

Total 10p

3 Start..1p

a) Se folosește faptul că dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ nu este de forma λI_2 și X comută cu Y, $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ atunci Y este de forma $Y=aX+bI_2$.........3p

Dacă C comută cu A și cu B și $C\neq \lambda I_2$ avem :

$$\left.\begin{array}{l} A=\alpha C+\beta I_2 \\ \\ B=\alpha' C+\beta' I_2 \end{array}\right\} \Rightarrow AB=BA$$ 2p

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$.

$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$.

$BA=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$.

Deci $AB\neq BA$

$AC=CA=A$..4p

Total 10 p

4

Start..1p

Deduce că $f(r)=f(1)r, \forall r \in \mathbf{Q}$..............................3p

Dacă $f(1)=0$ deduce $f(x)=0$ și $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

Demonstrează că $f(x)=0$, $\forall x \in \mathbf{R}$..............................1p

Dacă $f(1)>0$ deduce $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ și f crescătoare........2p

Deduce că $f(x)=f(1)x, \forall x \in \mathbf{R}$..............................2p

Dacă $f(1)<0$ tratează analog și finalizează

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_a(x)=ax$ 1p

CLASA A XII-A

1.

Start..1p

a) Demonstrează că G={e,a,a^2, a^3, b,ba,b a^2, ba^3}......4p

b) Arată că ab= ba^3..3p

c) Demonstrează că $b^2 \in \{e,a^2\}$..............................2p