Ministerul Educației și Cercetării

UNIVERSITATEA DE VEST
TIMIȘOARA

INSPECTORATUL ȘCOLAR
AL JUDEȚULUI TIMIȘ

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „*TRAIAN LALESCU*”

EDIȚIA a XVI – a

DOBA

COLEGIUL NAȚIONAL „CORIOLAN BREDICEANU”
Lugoj
1 – 3 MARTIE 2002

Dragă cititorule,

ai în mână setul de probleme care s-a dat la Concursul Interjudeţean de matematică „Traian Lalescu" organizat la Liceul „C.Brediceanu" din Lugoj în 1-3 martie 2002. Ele au fost propuse de un grup de cadre didactice de la Facultatea de Matematică a Universităţii de Vest din Timişoara.

Sperăm că atât profesorii, cât şi elevii, le vor folosi pentru completarea bagajului lor problemistic şi în pregătirea ediţiilor viitoare ale concursului.

Succes!

Prof. dr. ***Adrian C. Albu***
Presedintrele comisiei de concurs

Comisia centrală de concurs

Preşedinte: prof.univ.dr. Adrian Albu – prodecan al Facultăţii de Matematică – Universitatea de Vest Timişoara
Membri:
Conf.univ.dr.Constantin Buşe – preşedintele filialei S.S.M. Timiş, Universitatea de Vest
Prof.univ.dr.Viorel Radu – Universitatea de Vest
Prof.univ.dr.Ion Dorel Albu - Universitatea de Vest
Conf.univ.dr.Traian Ceauşu - Universitatea de Vest
Conf.univ.dr.Silviu Birăuaş - Universitatea de Vest
Conf.univ.dr.Gheorghe Silberberg - Universitatea de Vest
Lect.univ.dr.Mihai Chiş - Universitatea de Vest
Prep.univ.Alin Pogan - Universitatea de Vest

Comisia de organizare

Prof.drd.Avram Florea – inspector şcolar general – I.S.J.Timiş
Prof.Mariea Ştefan – inspector şcolar general adjunct – I.S.J.Timiş
Prof.Zeno Blajovan – inspector şcolar de specialitate – I.S.J.Timiş
Prof.Mircea Dragoş – inspector şcolar de specialitate – I.S.J.Timiş
Prof.Smaranda Linţ – inspector şcolar de specialitate – I.S.J.Hunedoara
Prof.Viorel Tudoran – inspector şcolar de specialitate – I.S.J.Arad
Prof Mircea Iucu – inspector şcolar de specialitate – I.S.J.Caraş-Severin
Prof.Francisc Boldea – director Colegiul Naţional „C.Brediceanu" – Lugoj
Prof.Ioan Miclea – Şcoala de Arte Frumoase „F.Barbu" – Lugoj
Prof.Ion Dinu – Colegiul Naţional „C.Brediceanu" – Lugoj
Prof.Trandafir Bot – Liceul Teoretic „I.Haşdeu" – Lugoj
Prof.Neamţu Noemi – director adjunct – Şcoala cu cls.I-VIII nr.5 Lugoj
Prof.Gheorghe Drinovan – Şcoala cu cls.I-VIII nr.2 Lugoj
Prof.Maria Dobândă – Liceul Teoretic „T.Vuia" – Făget
Prof.Elena Petria Boldea – director adjunct – Şcoala cu cls.I-VIII nr.27 Timişoara
Prof.Doru Ianculescu – Liceul de informatică „Gr.Moisil" – Timişoara
Prof Cerasela Bociu – director adjunct – Şcoala cu cls.I-VIII nr.13 Timişoara
Prof Cristina Jiroveanu – Şcoala cu cls.I-VIII nr 7 Timişoara
Prof.Călin Poştaru – Colegiul Economic „F.S.Nitti" Timişoara
Prof.Mihai Neamţu – Colegiul Naţional „C.D.Loga" - Timişoara
Prof.Marius Lobază – Colegiul Naţional Bănăţean - Timişoara
Prof.Ion Jinaru – director – Grup Şcolar Forestier Deta

Cuvânt înainte

Concursul interjudețean de matematică *„Traian Lalescu"* la care participă cei mai buni elevi la matematică din județele Arad, Caraș-Severin, Hunedoara și Timiș a ajuns la cea de-a XVI-a ediție.

Organizat sub egida *Facultății de Matematică* din cadrul *Universității de Vest din Timișoara* începând cu anul 1985, acest concurs a însemnat de fiecare dată o agreabilă reușită și a contribuit semnificativ la stimularea pregătirii matematice a elevilor din această parte a țării.

În acest an a venit rândul *județului Timiș, și Liceului „Coriolan Brediceanu" din Lugoj* să fie organizatorii acestui prestigios concurs. Este și aceasta o dovadă de apreciere a rezultatelor obținute de profesorii de matematică de la acest liceu ai căror elevi s-au numărat în fiecare an printre premianții acestui concurs.

În vederea stimulării și aprecierii rezultatelor obținute la acest concurs și în acest an Facultatea de Matematică din Timișoara oferă premianților din ultimii doi ani ai acestui concurs *posibilitatea înscrierii la facultate fără a susține una dintre cele două probe de la concursul de admitere* (proba aleasă de candidat fiind apreciată cu nota 10).

Popularitatea concursului și confirmarea premiilor obținute de elevi la acest concurs în admiterea în învățământul liceal respectiv superior arată importanța sa în pregătirea matematică a elevilor din gimnaziu și liceu.

Sunt convins că și ediția din acest an va fi caracterizată printr-o organizare și corectitudine exemplară, ceea ce va face ca satisfacțiile elevilor premianți precum și ale profesorilor lor să fie o bine meritată răsplată a muncii desfășurate.

Urăm succes deplin tuturor participanților, felicităm anticipat pe premianți și îi așteptăm pe toți să devină studenți ai facultății noastre.

Prof. dr. Mihail Megan

Decanul Facultății deMatematică,Universitatea de Vest *Timișoara*

Clasa a V-a

1. Să se determine mulțimile A și B știind că ele îndeplinesc condițiile:

a) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$;

b) $A \cap B = \varnothing$;

c) A și B au același număr de elemente;

d) Propoziția $1 \in A \setminus B$ este adevărată;

e) Propoziția $6 \notin B \setminus A$ este falsă;

f) A are trei numere pare.

(T. Ceaușu; A. Pogan)

2. Să se determine $a,b,c \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ cu proprietatea

$$\overline{abc} = 5 \cdot a \cdot b \cdot c .$$

(T. Ceaușu; A. Pogan)

3. Să se determine numerele naturale $m,n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$5 \cdot 2^m = 2^n - 3 .$$

(T. Ceaușu; A. Pogan)

4. Fie $a,b,c \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Să se scrie numerele de forma $\overline{ac}, \overline{bc}$ pentru care $\overline{bc} \cdot a$ si $\overline{ac} \cdot b$ sunt consecutive.

(A. Pogan)

Clasa a VI-a

1. Să se determine cifrele nenule $a, b,\ a \neq b$, astfel încât

$$\overline{0,a(b)} = \frac{a}{b} .$$

(U. Ceaușu; A. Pogan)

2. Determinați numerele naturale care se micșoreaza cu 9999 dacă le ștergem ultima cifră.

(D. Miheț)

3. Fie triunghiul ABC în care $m(\hat{B})=75^\circ$, $m(\hat{C})=80^\circ$. Considerăm punctele $E\in(AC)$ și $F\in(AB)$ astfel încât $m\left(\widehat{FBE}\right)=25^\circ$ și $m\left(\widehat{FCB}\right)=40^\circ$. Să se determine $m\left(\widehat{AEF}\right)$.

(***)

4. Fie $a,b,c\in N^*$ astfel încât $a\geq 2c+1$, $b\leq c+1$, $2b\geq a+1$. Să se stabileasca ordinea numerelor a,b,c.

(A. Pogan)

Clasa a VII-a

1. Fie $ABCD$ un pătrat de latură a. O dreaptă variabilă d prin vârful C intersectează prelungirile laturilor AB, respectiv AD, în punctele M, respectiv N. Arătați că $\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=const.$

(Mihai Chiș)

2. Fie $x=\overline{ab}$ un număr natural de două cifre și $y=\overline{cde}$ un număr de trei cifre, cu proprietatea că numărul de cinci cifre $\overline{abcde}$ este egal cu de 9 ori produsul xy. Determinați suma $x+y$.

(Mihai Chiș)

3. Fie $ATCD$ un trapez cu $AT // CD$ și L punctul de intersecție al diagonalelor. Fie $M,R\in AT$ și $H,S\in CD$ puncte cu proprietatea că $L\in MH\cap RS$ și $RS // TC$. Arătați că:

$$MH // AD \Leftrightarrow AR\cdot CS=HD\cdot TM.$$

(Mihai Chiș)

4. Fie a,b,c,d patru numere pozitive astfel încât:

$$\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{cd}}=2002.$$

Arătați că:

$$\frac{ab}{a^3+b^3}+\frac{bc}{b^3+c^3}+\frac{cd}{c^3+d^3}\leq 1001.$$

(* * *)

Clasa a VIII-a

1. Determinați funcția $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ cu proprietatea că

$$f(1)=1 \text{ și } f(x)+f(y)+xy=f(x+y), (\forall)x,y\in\mathbf{N}$$

(M. Chiș)

2. Fie ABCD un tetraedru și G centrul de greutate al feței BCD. Paralelele prin B, C, respectiv D la dreapta AG intersectează planele (ACD), (ABD), respectiv (ABC) în punctele B_1, C_1, respectiv D_1. Arătați că $(B_1C_1D_1)\,||\,(BCD)$.

(I. D. Albu)

3. Fie n un numar natural nenul și numerele:

$$a=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}),$$
$$b=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}).$$

i) Arătați că $a+b>2$

ii) Comparați numerele $(1-a)(1+b)$ și b - a.

iii) Comparați numerele a și b.

(***)

4. Fie ABCD un tetraedru și P un punct oarecare în spațiu astfel încât $PA\neq PC$ și $PB\neq PD$. Fie Q, R, S, T punctele de intersecție ale bisectoarelor interioare din vârful P cu laturile opuse în triunghiurile ΔPAB, ΔPBC, ΔPCD, respectiv ΔPDA.

i) Arătați că dreptele QR, ST și AC, respectiv QT, RS și BD sunt concurente

ii) Deduceți că punctele Q, R, S, T sunt coplanare.

(M. Chiș)

Clasa a IX - a

1. Să se rezolve în **R** ecuația:

$$[x]^2+2x+\{x\}=\pi.$$

(Gh. Silberberg)

2. Fie $n\in\mathbf{N}^*$. Ordonați crescător numerele:

$$\sqrt[2^n]{2},\quad \sqrt[3^n]{3},\quad \sqrt[4^n]{4}$$

(Gh. Silberberg)

3. Fie punctele O, A, B în planul $\mathcal{P}$. Se consideră funcția $f:\mathcal{P}\to\mathcal{P}$, care asociază fiecărui punct $M\in\mathcal{P}$ punctul $M'\in\mathcal{P}$, unic determinat de relația:

$$\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MO}.$$

a) Să se arate că $\forall M\in\mathcal{P}$, punctele M si $f(M)$ sunt simetrice față de un punct fix $P\in\mathcal{P}$

b) Dacă planul $\mathcal{P}$ este raportat la un sistem de coordonate cu originea O și $A(1,0)$, $B(0,1)$, atunci

1° să se afle relațiile dintre coordonatele lui M si coordonatele lui $f(M)=M'$ (adică ecuațiile lui f).

2° să se determine coordonatele punctului P

3° să se scrie ecuația dreptei $d'=f(d)$, unde d este dreapta de ecuație $2x-y+1=0$

(I.D. Albu)

4. a) Dacă A, B sunt două puncte distincte din planul $\mathcal{P}$, atunci să se arate că:

$$[AB]=\left\{M\subset\mathcal{P}\mid \exists\lambda\in[0,1]\ a.i.\ \overline{OM}=(1-\lambda)\overline{OA}+\lambda\overline{OB}\right\}$$

b) Fie planul $\mathcal{P}$ raportat la un sistem de coordonate XOY. Utilizând proprietatea de la a) să se demonstreze că mulțimile :

$$\mathcal{F}_1=\{M(x,y)\in\mathcal{P}\mid |x|+|y|<1\} \text{ și}$$

$$\mathcal{F}_2=\{M(x,y)\in\mathcal{P}\mid \max(|x|,|y|)<1\}$$

sunt mulțimi convexe *)

*) o **mulțime** $\mathcal{F}$ din plan este **convexă** dacă:

$$A,B\in\mathcal{F}\Rightarrow[AB]\subset\mathcal{F}$$

(I.D. Albu)

Clasa a X-a

1. Se consideră mulțimea $F=\{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\}$ și un element g al său cu proprietatea că $g\circ h$ este o funcție de gradul al II-lea pentru orice funcție de gradul al II-lea $h\in F$. Demonstrați ca g este o funcție de gradul I.

(Gh.Silberberg)

2. Fie $x,y\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$ două numere cu proprietatea că x,y și $x+y+|y|$ au același modul. Demonstrați că $y=-x$.

(Gh.Silberberg)

3. Există un triunghi ΔABC în care să aibă loc relațiile:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=2\operatorname{tg}\frac{B}{2}=3\operatorname{tg}\frac{C}{2}?$$

(I.D.Albu)

4. Fie $(a_n)_{n\ge1}$ o progresie aritmetică în care primul termen și rația sunt numere naturale, și fie $(b_n)_{n\ge1}$ o progresie geometrică cu termenii nenuli.

a) Demonstrați că $(b_{a_n})_{n\ge1}$ e o progresie geometrică.

b) În ce condiții $(b_n^{a_n})_{n\ge1}$ e o progresie geometrică?

(Gh.Silberberg)

Clasa a XI-a

I. Fie $X\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ cu proprietatea că $X^{2002}=O_n$. Demonstrați că I_n-X-X^{2001} este inversabilă.

(***)

II. Fie $a\in(0,1)$, $x_0\ge0$ si $x_{n+1}=ax_ne^{-x_n}$, oricare ar fi $n\ge0$.
Demonstrați că $P(n)\cdot x_n\to0$, pentru orice polinom P.

(Prel. R.M.T.)

III. Fie $A=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ o matrice inversabilă și $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, cu proprietatea că, notând $Y^n=\begin{pmatrix}x_n & y_n\\ z_n & t_n\end{pmatrix}$, avem $x_n\to x, y_n\to y,\ z_n\to z$ si $t_n\to t$. Arătați că $\det(Y)=1$.

(A.Pogan)

IV. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ cu proprietățile:

a) $f(x)+y=f(x+f(y)), \forall x,y\in\mathbf{R}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

1. Arătați că f este injectivă
2. Determinați pe f.

(D.Miheț)

Clasa a XII-a

1. Determinați $z\in\mathbf{C}^*$ cu proprietatea că mulțimea $\{k\in\mathbf{Z} \mid z^k+z^{-k}\in\mathbf{Z}\}$ este subgrup al lui $(\mathbf{Z},+)$ diferit de $\{0\}$.

(S.Birăuaş)

2. Să se determine morfismele grupului $(\mathbf{Z}_{59}^*,\cdot)$ cu proprietatea: $f(\hat{2})=\hat{2}$.

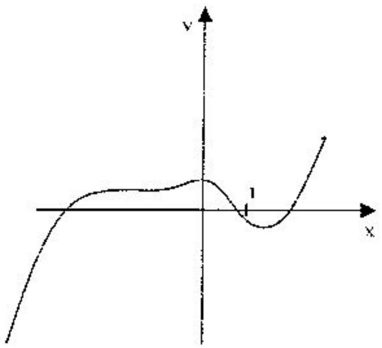
(D.Miheț)

3. Determinați funcțiile continue $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ cu proprietatea :

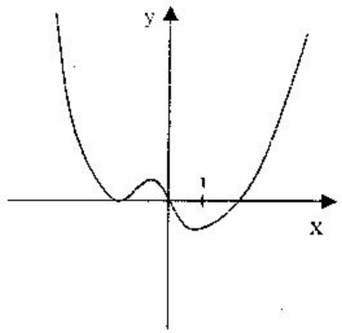
$$\frac{1}{x-y}\int_y^x f(s)\,ds=\frac{f(x)+f(y)}{2}, (\forall)\ x,y\in\mathbf{R},\ x\neq y.$$

(S.Birăuaş)

4. În figura de mai jos sunt trasate graficele a două funcții F, G; se știe că una dintre funcții este o primitivă a celeilalte. Determinați această funcție. Justificați.



F



G

(S.Birăuaş)

BAREME DE CORECTARE

Clasa a V-a

Problema 1.

Start	1 p.
A are patru elemente; B are patru elemente	1 p.
$1\in A, 1\notin B$	2 p.
$6\in B\setminus A$	1 p.
$6\in B, 6\notin A$	1 p.
$2,4,8\in A$	2 p.
$A=\{1,2,7,8\}$; $B=\{3,5,6,7\}$	2 p.

Problema 2.

Start	1 p.
$5\mid\overline{abc}$ implica c=0 sau c=5	2 p.
c=5	1 p.
$\overline{ab5}=25\cdot a\cdot b$ implica b=2 sau b=7	2 p.
$\overline{a25}=50\cdot a$ implica $10\mid\overline{a25}$ fals	1 p.
b=2 nu este solutie	1 p.
$\overline{a75}=175a$ implica a=1	2 p.

Problema 3.

Start	1 p.
2^m par	1 p.
$5\cdot 2^m$ par	1 p.
2^n par	1 p.
2^n-3 impar	1 p.
m=0	3 p.
$5=2^n-3$; $2^n=8$	1 p.
n=3	1 p.

Problema 4.

Start	1 p.
Cazul 1 $\overline{bc}\cdot a = 1 + \overline{ac}\cdot b$	1 p.
$\left.\begin{array}{l}(10b+c)\cdot a = 1 + (10a+c)b \\ 10ab + c = 1 + 10ab + bc\end{array}\right\}$	1 p.
$ac = 1 + bc$	1 p.
$ac - bc = 1;\ c(a-b) = 1$	1 p.
$c = 1,\ a - b = 1,\ a = b + 1$	1 p.
$\left.\begin{array}{l}b = 1, \overline{ac} = 21, \overline{bc} = 11 \\ \vdots \\ b = 8, \overline{ac} = 91, \overline{bc} = 81\end{array}\right\}$	2 p.
Trateaza analog cazul II: $1 + \overline{bc}\cdot a = \overline{ac}\cdot b$	2 p.
Daca inverseaza cele doua cazuri primeste punctajul echivalent	

Clasa a VI-a

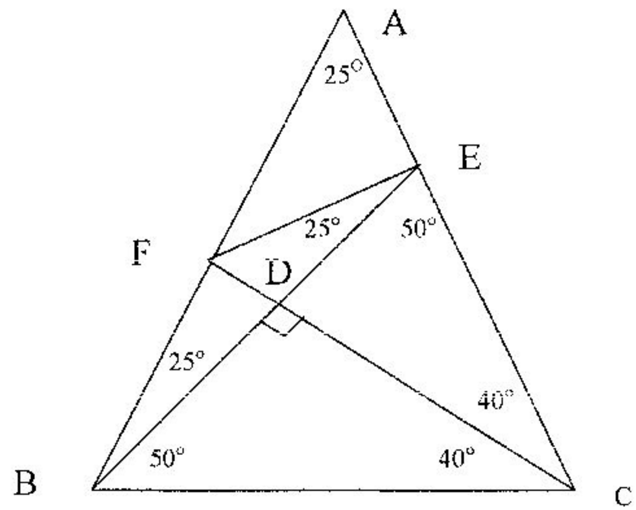
Subiectul 1:

Din oficiu	1p
$\frac{\overline{ab} - a}{90} = \frac{a}{b}$	1p
$\frac{9a + b}{90} = \frac{a}{b}$	1p
$a = \frac{b^2}{9(10-b)}$	1p
$3 \mid b$, $b \neq 0$	2p
$b \in \{3,6,9\}$	1p
b=3 sau b=9 nu convine	2p
Finalizare, solutie a=1 si b=6	1p

Subiectul 2:

Din oficiu	1p
Notam L-numarul obtinut prin stergerea ultimei cifre x	1p
Numarul initial este $10L + x$	1p
Deduce relatia $10L + x = L + 9999$	1p
$x = 9999 - 9L$, deci $9 \mid x$	2p
$x \in \{0,9\}$	1p
x=0 $\Rightarrow L = 1111$	1p
x=9 $\Rightarrow L = 1110$	1p
Finalizare, solutiile sunt: 11110 si 11109	1p

Subiectul 3:



Din oficiu	1p
Figura corecta	1p
$m\left(\widehat{BDC}\right) = 90°$	2p

$m\left(\widehat{DEC}\right)=50°$	2p
$m\left(\widehat{FEB}\right)=25°$	3p
Finalizare, $m\left(\widehat{AEF}\right)=105°$	1p

Subiectul 4:

Din oficiu	1p
Deduce $a+1\le 2b\le 2c+2$	2p
Deduce $a\le 2c+1$	2p
Cum $a\ge 2c+1 \Rightarrow a=2c+1$	2p
Deduce $2b\ge 2c+2 \Rightarrow b\ge c+1$	1p
Cum $b\le c+1 \Rightarrow b=c+1$	1p
Finalizare, $c<b<a$	1p

Clasa a VII-a

Problema 1

start	1p.
foloseşte $\Delta MBC \sim \Delta MAN \Rightarrow \dfrac{BC}{AN}=\dfrac{MC}{MN}$ (1)	3p.
foloseşte $\Delta NDC \sim \Delta NAM \Rightarrow \dfrac{DC}{AM}=\dfrac{NC}{NM}$ (2)	3p.
adună (1) şi (2) $\Rightarrow a\left(\dfrac{1}{AM}+\dfrac{1}{AN}\right)=1$	2p.
trage concluzia $\dfrac{1}{AM}+\dfrac{1}{AN}=\dfrac{1}{a}$ (=const.)	1p.

Problema 2

Start	1p.
scrie $\overline{abcde}=\overline{ab}\cdot 1000+\overline{cde}$	1p.

deduce $1000\overline{ab}=(9\overline{ab}-1)\cdot\overline{cde}$	1p.
observă că $(\overline{ab},9\overline{ab}-1)=1$	1p.
deduce că $9\overline{ab}-1 \mid 1000$	1p.
obţine că $9\overline{ab}-1\in\{8,125\}$	1p.
observă că $\overline{ab}\ge 10 \Rightarrow 9\overline{ab}-1\ne 8$	1p.
deduce $9\overline{ab}-1=125$	1p.
obţine $\overline{ab}=14$ şi $\overline{cde}=112$	1p.
găseşte $x+y=126$	1p.

Problema 3

Start	1p.
Necesitatea	
$RS \parallel TC \Rightarrow \Delta ARL \sim \Delta ATC \Rightarrow \dfrac{AR}{AT}=\dfrac{AL}{AC}$	1p.
$MH \parallel AD \Rightarrow \Delta TML \sim \Delta TAD \Rightarrow \dfrac{TM}{TA}=\dfrac{TL}{TD}$	1p.
$AT \parallel DC \Rightarrow \dfrac{AL}{AC}=\dfrac{TL}{TD}$	1p.
deduce că $\dfrac{AR}{AT}=\dfrac{TM}{AT}\Rightarrow AR=TM$	0,5p.
$RS \parallel TC \Rightarrow \Delta DLS \sim \Delta DTC \Rightarrow \dfrac{DS}{DC}=\dfrac{DL}{DT}$ $MH \parallel AD \Rightarrow \Delta CLH \sim \Delta CAD \Rightarrow \dfrac{CH}{CD}=\dfrac{CL}{CA}$	0,5p.
$AT \parallel DC \Rightarrow \Delta ALT \sim \Delta CLD \Rightarrow \dfrac{DL}{DT}=\dfrac{CL}{CA}$ deduce	0,5p.

$\frac{DS}{DC}=\frac{CH}{DC}\Rightarrow DS=CH\Rightarrow CS=HD$	
trage concluzia $AR\cdot CS=HD\cdot TM$	0,5p.
suficiența	
fie $M_0H_0\parallel AD$; dacă $MH\nparallel AD$, atunci $M\neq M_0$, $H\neq H_0$	1p.
cazul I. $M\in[M_0T]\Rightarrow H\in[H_0D]\Rightarrow TM<TM_0, HD<H_0D$ $\Rightarrow HD\cdot TM<H_0D\cdot TM_0=AR\cdot CS$	1p.
cazul II. $M_0\in[MT]\Rightarrow H_0\in[HD]\Rightarrow TM>TM_0, HD>H_0D$ $\Rightarrow HD\cdot TM>H_0D\cdot TM_0=AR\cdot CS$	1p.
trage concluzia $MH\nparallel AD\Rightarrow AR\cdot CS\neq HD\cdot TM$	1p.

Problema 4

start	1p.
aplică inegalitatea mediilor pentru a^3,b^3 și obține $a^3+b^3\geq 2ab\sqrt{ab}$	3p.
deduce $\frac{1}{\sqrt{ab}}\geq 2\frac{ab}{a^3+b^3}$ (1)	2p.
analog $\frac{1}{\sqrt{bc}}\geq 2\frac{bc}{b^3+c^3}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{cd}}\geq 2\frac{cd}{c^3+d^3}$ (3)	1p.
Adună (1), (2), (3) $\Rightarrow 2002\geq 2\left(\frac{ab}{a^3+b^3}+\frac{bc}{b^3+c^3}+\frac{cd}{c^3+d^3}\right)$	2p.
trage concluzia	1p.

Clasa a VIII-a

Problema 1:

Start	1p
Inlocuieste y=1 si obtine $f(x+1)-f(x)=x+1, \forall x\in \mathbb{N}$	3p
Scrie relatiile $f(2)-f(1)=2$, $f(3)-f(2)=3,\ldots,f(n)-f(n-1)=n$	2p
Aduna relatiile si obtine $f(n)-f(1)=2+3+\ldots+n$	2p
Obtine $f(n)=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$	2p

Problema 2:

Start	1p
Daca M – mijlocul lui [CD], deduce $B_1\in AM$	1p
$AG\parallel BB_1\Rightarrow\frac{AG}{BB_1}=\frac{GM}{BM}=\frac{1}{3}$	3p
Analog deduce $\frac{AG}{CC_1}=\frac{1}{3}$ si $\frac{AG}{DD_1}=\frac{1}{3}$	2p
Deduce BB_1C_1C, BB_1D_1D si CC_1D_1D - paralelogram	2p
Demonstrează $(B_1C_1D_1)\parallel(BCD)$	1p

Problema 3:

Start	1p
Obtine $a\cdot b=1$	2p
Foloseste inegalitatea mediilor si deduce $a+b\geq 2$	1p
In raportul $\frac{a}{b}$ amplifica cu conjugatele	2p
si obtine	1p

$\frac{a}{b}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2\cdot 1\cdot\left(\sqrt{4}+\sqrt{3}\right)^2\cdot 1\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1}\right)^2\cdot 1}{1\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2\cdot 1\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{4}\right)^2\cdot\ldots\cdot 1\cdot\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}\right)^2}$	
Deduce ca $\frac{a}{b}<1\Rightarrow a<b$	1p
Deduce $a+b\neq 2$	1p
Calculeaza $(1-a)(1+b)=b-a$	1p

Problema 4:

Start	1p
Aplica T. bisectoarei in $\Delta PAB\Rightarrow\frac{AQ}{BQ}=\frac{PA}{PB}$	2p
Analoagele $\frac{BR}{CR}=\frac{PB}{PC}$, $\frac{CS}{DS}=\frac{PC}{PD}$, $\frac{DT}{AT}=\frac{PD}{PA}$	1p
Daca $\{M\}=QT\cap BD\overset{T.Menelaos}{\Longrightarrow}\frac{AQ}{BQ}\cdot\frac{BM}{DM}\cdot\frac{DT}{AT}=1$	1p
Deduce $\frac{BM}{DM}=\frac{PB}{PD}$	1p
Obtine $\frac{BR}{CR}\cdot\frac{CS}{DS}\cdot\frac{DM}{BM}=1\Rightarrow R,S,M$ coliniare	1p
Deduce QT, RS, BD – concurente	1p
Analog pentru QR, TS, AC	1p
$QR\cap ST\neq\varnothing\rightarrow$ Q, R, S, T – coplanare	1p

Clasa a IX-a

Problema 1.

Start	1 p.
Folosim $x=[x]+\{x\}$ ecuatia devine $[x]^2+2[x]+3\{x\}=\pi$	1 p.
$3\{x\}\in[0,3)\Rightarrow[x]^2+2[x]\in\{1,2,3\}$	1 p.
$[x]^2+2[x]=1,2$ nu convine	2 p.

$[x]^2+2[x]=3$ are solutii in $\mathbf{Z}$ $[x]\in\{-3,1\}$	2 p.
$\{x\}=\frac{\pi-3}{3}$	1 p.
Finalizare $x_1=\frac{\pi}{3}-4$, $x_2=\frac{\pi}{3}$	2 p.

Problema 2.

Start	1 p.
$n=1\Rightarrow\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}$	1 p.
$n=2\Rightarrow\sqrt[4]{2}>\sqrt[9]{3}>\sqrt[16]{4}$	2 p.
Arata prin inductie ca $\sqrt[2^n]{2}>\sqrt[3^n]{3}>\sqrt[4^n]{4}$, $\forall n\in\mathbf{N},\ n\geq 2$	1 p.
$\sqrt[2^k]{2}>\sqrt[3^k]{3}\Rightarrow\sqrt[2^{k+1}]{2}=\sqrt{\sqrt[2^k]{2}}>\sqrt{\sqrt[2^k]{3}}>\sqrt[3]{\sqrt[2^k]{3}}=\sqrt[2^{k+1}]{3}$	2 p.
$\sqrt[3^k]{3}>\sqrt[4^k]{4}\Rightarrow\sqrt[3^{k+1}]{3}=\sqrt[3]{\sqrt[3^k]{3}}>\sqrt[3]{\sqrt[4^k]{4}}>\sqrt[4]{\sqrt[4^k]{4}}=\sqrt[4^{k+1}]{4}$	2 p.
Finalizare: $\sqrt[2^n]{2}>\sqrt[3^n]{3}>\sqrt[4^n]{4},\ \forall n\in\mathbf{N},\ n\geq 2$	1 p.

Problema 3.

Start		1 p.
a)	Deduce ca P fix $\Rightarrow f(P)=P$	1 p.
	Gaseste $\vec{OP}=\frac{3}{2}\vec{OA}+2\vec{OB}$	2 p.
	Verifica ca M si M' sunt simetrice fata de P	2 p.
b)	1° Deduce din relatia de definitie a lui f ca: $x'=-x+3,\ y'=-y+4$, sau $x=-x'+3,\ y=-y'+4$	2 p.
	2° Determina $P\left(\frac{3}{2},2\right)$	1 p.
	3° Gaseste $d':2x-y-3=0$	1 p.

Problema 4.

Start	1 p.
a) Stabileste egalitatea	3 p.
b) Considera $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), M(x, y) \in [AB]$ a.i. $x = (1-\lambda)x_A + \lambda x_B,\ y = (1-\lambda)y_A + \lambda y_B,\ \lambda \in [0,1]$	2 p.
Arata ca $\mathcal{T}_1$ este convexa	2 p.
Arata ca $\mathcal{T}_2$ este convexa	2 p.

Clasa a X a

Problema 1.

Start	1p
$g(x^2) = ax^2 + bx + c$	1p
Obtine $g(x) = ax + b,\ \forall x \geq 0$	2p
$g(x) = \begin{cases} ax + b, x \geq 0 \\ a_1 x + b_1, x < 0 \end{cases}$	4p
$a=a_1$, $b=b_1$	2p

Problema 2.

Start	1p
$x = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ $y = r(\cos\beta + i\sin\beta)$	2p
$\lvert x + y + \lvert y \rvert \rvert = r$	1p
$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = -1$	2p
Finalizare	4p

Problema 3.

Start	1p
Desen	1p
Calculeaza tangentele	3p
Finalizare	5p

Problema 4.

Start	1p
$a_n = a_1 + (n-1)r$	1p
$b_n = b_1 q^{n-1}$	1p
$\dfrac{b_{a_{n+1}}}{b_{a_n}} = q^r$	3p
$\dfrac{b_{n+1}^{a_{n+1}}}{b_n^{a_n}} = const.$	2p
Q=1 sau r=0	2p

Clasa a XI - a

Problema 1.

Start	1p
Cunoaste faptul ca $A^k = 0_n \Rightarrow I_n - A$ – inversabila	2p
Justifica	3p
$A = X + X^{2001}$ este nilpotenta	3p
Deduce $I_n - X - X^{2001}$ inversabila	1p

Problema 2.

Start	1p
Arata ca $X_n \to 0$	2p
Gaseste si justifica o majorare de forma $\lvert x_n \rvert \leq c \cdot a^n$	4p
Afirma (stie) ca $P(n) \cdot a^n \to 0$ sau $n^k \cdot a^k \to 0$	2p
Deduce ca $x_n \cdot P(n) \to 0$	1p

Problema 3.

Start	1p
$\det(Y^n) = (\det Y)^n$	2p
Deduce ca $\det(Y^n)$ e convergent	3p

Un sir (a^n) e convergent la un sir nenul doar pentru a=1	2p
Deduce ca det(Y)=1	2p

Problema 4.

Start	1p
$f(a)=f(b)\Rightarrow$ $f(a)+b=f(a+f(b))=f(a+f(a))=f(a)+a$ $\Rightarrow a=b$	2p
Deduce ca $f(0)=0$	1p
Ajunge la ecuatia $f(x+y)=f(x)+f(y)$	2p
Arata ca $\lim_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha)$	1p
Arata (stie) ca $f(q)=q\cdot f(1)\forall q\in Q$	1p
Deduce ca $f(x)$ este de forma $c\cdot x$	1p
Gaseste $c\in\{-1,1\}$	1p

Clasa a XII -a

Problema 1.

1 Start	1p
Subgrupurile lui $(\mathbf{Z},+)$ diferite de $\{0\}$ sunt $n\mathbf{Z}$ sau $\mathbf{Z}$	1p
Suspecteaza ca $z+z^{-1}\in\mathbf{Z}\Rightarrow z^K+z^{-K}\in\mathbf{Z}$	2p
Demonstreaza prin inductie	2p
Rezolva ecuatia $z+\frac{1}{z}=p\in\mathbf{Z}$	1p
Multimea din enunt coincide cu n$\mathbf{Z}$ daca $z^{nk}+z^{-nk}\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow(z^n)^k+(z^n)^{-k}\in\mathbf{Z}$	1p
$z^n=z_1$ sau $z^n=z_2$, finalizare	1p

Problema 2.

2 Start	1p
$f(\hat{2})=\hat{2}\to f(\hat{2}^k)=\hat{2}^k, k=1,2...$	1p

Suspecteaza ca $f(\hat{m})=\hat{m}, (\forall)\hat{m}\in\mathbf{Z}_{59}$	1P
Demonstreaza ca $\hat{2}^k\neq\hat{2}^m, (\forall)k\neq m$	2p
$\{\hat{1},\hat{2},\hat{2}^2,...,\hat{2}^{57}\}=\{\hat{1},\hat{2},...,\hat{58}\}$	1p
Deduce $\hat{2}^k=\hat{2}^m\Rightarrow\hat{2}^{k-m}=\hat{1}$	1 p
Deduce k-m$\in\{1,29,58\}$	1p
Observa $\hat{2}^{29}=-1$	1p
Trage concluzia ca multimea $\{\hat{1},\hat{2},...,\hat{2}^{57}\}$ contine 58 elemente distincte doua cate doua	1p

Problema 3.

3 Start	1p
Inlocuieste y=0 si deduce ca f este derivabila pe $\mathbf{R}^*$	1p
Inlocuieste y=1 si deduce f derivabila pe $\mathbf{R}\setminus\{1\}$	1p
f derivabila pe $\mathbf{R}$	1p
Deduce $\int_0^x f(s)ds=\frac{xf(x)+xf(0)}{2}, (\forall)x\neq 0$ si se poate prelungi in $x_0=0$	1p
Deriveaza si obtine $f(x)=\frac{f(x)+xf'(x)+f(0)}{2}$	2p
Obtine $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(\frac{f(0)}{x}\right)'$	2p
Deduce $f(x)=f(o)+\alpha x, x\in\mathbf{R}$	1p

Problema 4.

4 Start	1p
Observa ca pe intervalele pe care G este pozivitiva,F este crescatoare	4p
Observa ca pe intervalele pe care G este negativa, F este descrescatoare	4p
Deduce ca F este o primitiva a lui G	1p